

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Покровская Ольга Дмитриевна

**Алгоритмы компьютерного исследования случайных  
процессов и структур в естественных науках**

**РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

на соискание ученой степени кандидата наук по прикладной математике

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
профессор Щур Лев Николаевич

Москва – 2023

## Актуальность исследования

Компьютерное моделирование является одним из важнейших современных методов, используемых в естественных и точных науках, таких как математика, физика, биология, астрономия. Компьютерное моделирование позволяет получать достоверные результаты, когда нет возможности использовать аналитические формулы, изучать физические явления, не имея лаборатории, разрабатывать теории, которые потом можно проверить на реальных объектах.

Диссертация посвящена применению компьютерного моделирования для решения различных задач. Три главы диссертации посвящены следующим задачам: разработка численного алгоритма стохастического процесса для решения двумерного уравнения Лапласа с границей, разработка численного алгоритма генерации случайных структур и численная проверка выбранного статистического критерия.

В первой главе работы изучаются случайные структуры роста. Это особый класс объектов, появляющихся в результате различных физических явлений [1], например, рост самородной меди в каменной породе, формирование снежинок - ледяных кристаллов [2], пробой в диэлектрике [3]. Математическое моделирование процессов роста является одним из основных инструментов исследования таких образований. Для изучения свойств подобных структур, необходимо моделировать сотни миллионов частиц [4]. При моделировании большого числа частиц появляется несколько проблем. Во-первых, на моделирование требуется гораздо больше времени. Кроме того, влияют другие параметры, такие как размер шага блуждающей частицы и количество частиц в численном эксперименте. Таким образом, разработка эффективных методов моделирования блуждания частиц является актуальной задачей.

Ещё одной важной практической задачей является разработка элементов для хранения атомов водорода в водородной энергетике. В настоящее время наиболее перспективными для решения этой задачи являются вспененные материалы палладия и платины [5]. Палладиумная пена выделяется среди других материалов качеством цикла перекачки и выделением водорода, что, возможно, связано с наличием экспериментально обнаруженных ферромагнитных свойств пен из палладия. Палладий сам по себе не является ферромагнетиком, но есть признаки того, что его низкоразмерные формы могут проявлять ферромагнитное поведение. Во второй главе диссертационного исследования

проводится математическое моделирование пеноподобных структур, таких как пена палладия, и исследование магнитных свойств полученной модели. Разработка алгоритмов генерации пеноподобных структур для дальнейшего проведения супер-компьютерного моделирования является актуальной задачей для водородной энергетики.

Компьютерное моделирование широко применяется и в генетике. Например, изучение последствий примешивания разных популяций является важной задачей. Это может помочь понять, как происходят изменения в генетическом материале людей после смешения популяций, и как это влияет на адаптацию к окружающей среде. Обнаружение признаков положительного отбора (positive selection) в популяциях по всему миру помогает раскрыть эволюционную историю человека, а также генетическую основу разных заболеваний [6]. Большинство эволюционных геномных исследований человека было проведено для Европейского, Африканского и Азиатского населения. Однако население с коренным американским происхождением не было достаточно изучено [7]. Особый интерес представляет изучение чилийской популяции после колумбийского обмена, потому что именно после открытия Америки Колумбом в генах чилийцев появляются африканская и европейская составляющая, которые могут давать новые эволюционные преимущества. В работе с помощью компьютерного моделирования сделана проверка наличия естественного отбора для некоторых гаплотипов после колумбийского обмена у коренного населения Чили.

## Постановка проблемы

С помощью компьютерного моделирования можно решать различные классы задач во многих областях. В диссертационном исследовании мы решаем три проблемы:

1. Для двумерного уравнения Лапласа с границей оценить первую поправку для вероятности первого пересечения. На основе проведенного исследования предложить более эффективные алгоритмы случайного блуждания на плоскости, работающие в разы быстрее, без потери точности.
2. Для изучения пеноподобных структур предложить алгоритм генерации пены на плоскости и в пространстве, а также изучить магнитные свойства

полученных структур при низких температурах с помощью модели Изинга.

3. Используя компьютерное моделирование и реальные данные генотипов чилийцев, проверить, что некоторые гаплотипы связанные с адаптацией к климатическим условиям и защитой от болезней, появились у чилийцев в результате естественного отбора после примешивания популяций.

## **Цель**

1. Разработать эффективные методы компьютерного моделирования роста случайных структур, которые представляют из себя решение двумерного уравнения Лапласа и оценить влияние конечности шага на результат моделирования.
2. Разработать эффективные методы компьютерного моделирования случайных пеноподобных структур на плоскости и в пространстве. Исследовать магнитные свойства таких структур при низких температурах, используя модель Изинга.
3. Подтвердить с помощью компьютерного моделирования наличие признаков естественного отбора в чилийской популяции после примешивания.

## **Задачи исследования**

1. Разработка эффективного алгоритма для моделирования первого пересечения окружности фиксированного радиуса при случайном блуждании частицы на плоскости.
2. Оценка влияния конечности шага при случайном блуждании в компьютерном моделировании.
3. Разработка эффективного алгоритма для генерации пеноподобной структуры на плоскости и в пространстве.
4. Изучение магнитных свойств полученной пеноподобной структуры на плоскости при низких температурах.

5. Изучение при помощи компьютерного моделирования особенностей генов коренных чилийцев после примешивания европейских и африканских генов в результате колумбийского обмена.

## Степень разработанности проблемы

Компьютерное моделирование широко применяется для изучения роста самоподобных структур. Одним из методов построения фракталов является выполнение специальной рекурсивной процедуры. В статье [1] был предложен алгоритм агрегации ограниченной диффузией DLA (Diffusion Limited Aggregation). Основная идея алгоритма состоит в том, что рост кластера на квадратной решетке происходит в результате налипания случайно двигающихся частиц на растущую структуру.

В работе [4] был предложен алгоритм блуждания частицы на плоскости, без решетки, в котором частица при удалении на какое-то расстояние от растущего кластера не уничтожается, а с определенной вероятностью возвращается на радиус рождения и продолжает блуждать. Вероятность возвращения на радиус рождения выводится из уравнения Лапласа, известна связь между вероятностью первого пересечения поглощающей окружности в процессе случайного блуждания и распределением электрического потенциала, описываемого уравнением Лапласа [4]. В статье также была уточнена фрактальная размерность получившегося в ходе моделирования объекта. Уход от моделирования на решетке позволяет получить более точное моделирование, но при этом скорость моделирования падает. В итоге, чтобы получить более точное значение угла, в котором частица пересечет окружность заданного радиуса, частице требуется перемещаться с очень маленьким шагом, поэтому время моделирования быстро возрастает.

Для изучения свойств и особенностей новых материалов часто применяется компьютерное моделирование. В современном мире все чаще поднимается вопрос об альтернативных источниках энергии. В качестве альтернативного источника энергии рассматривается электроэнергия, вырабатываемая водородными установками. Топливные элементы используются для хранения водорода, причем в них водород хранится не в газообразном или жидком состоянии, а в виде химических соединений с другими элементами. Одним из перспективных

материалов для топливных элементов является вспененный палладий. В работе [5] авторы в результате эксперимента получают вспененную структуру из палладиевых проволочек, с контролируемой плотностью. Также авторы измеряют механические прочностные свойства такой пенной структуры.

В работе [8] проведены измерения дифференциальной проводимости нанопроводников палладия с целью исследования природы резонансов Фано, обнаруженных на нано-контактах с такими ферромагнетиками, как, например, никель. В статье [9] представлен обзор современного понимания механики случайных волоконных сетей.

Не удалось обнаружить в научной литературе работы по компьютерному моделированию пеноподобных структур и исследованию магнитных свойств таких структур. Компьютерные исследования ограничены исследованием магнитных свойств атомных цепочек.

Сейчас стала особенно актуальна тема исследования генома человека. Часто в таких задачах применяются разные математические модели вместе с компьютерным моделированием. Обнаружение сигнала положительного естественного отбора (*positive selection*) в популяциях по всему миру помогает раскрыть эволюционную историю человека, а также генетическую основу разных заболеваний и иных фенотипических признаков [6]. Большинство эволюционных геномных исследований человека было проведено для Европейского, Африканского и Азиатского населения. Однако население с коренным американским происхождением не было достаточно изучено [7]. Отчасти это связано с: 1) отсутствием общедоступных геномов нескольких популяций коренных американцев и их смешанных латиноамериканских потомков; 2) технической сложностью выявления генетических факторов, специфичных для происхождения, в смешанных популяциях с различными континентальными предками и сложной демографической историей. В отличие от перуанцев, колумбийцев, мексиканцев и пуэрториканцев, для которых имеется общедоступное секвенирование всего генома [10], для чилийцев таких данных нет. Результаты этого исследования могут помочь лучше понять, как происходят изменения в генетическом материале людей после смешения популяций и как это влияет на адаптацию к окружающей среде и защиту от болезней.

## Научная новизна

1. Впервые предложен эффективный алгоритм для моделирования случайного блуждания частицы на плоскости и её прилипания к окружности фиксированного радиуса, с переменным шагом частицы.
2. На основании проведенных численных расчетов впервые предложено аналитическое выражение для зависимости точности моделирования от шага частицы.
3. Впервые разработан алгоритм генерации двумерной и трёхмерной пеноподобной структуры с типичными свойствами наблюдаемых экспериментально структур.
4. Впервые предложена и исследована модель магнитных свойств пеноподобной структуры.
5. Изучены особенности недавно впервые секвенированных генов коренных чилийцев после примешивания европейских и африканских генов в результате колумбийского обмена.

## Краткое содержание работы

### Введение.

Во введении показана научная новизна проведенного исследования, сформулированы цели и задачи, представлены положения выносимые на защиту. Обоснована актуальность и практическая значимость научной работы.

### **Глава 1. Оптимальный алгоритм случайного блуждания на плоскости для определения первого пересечения.**

В главе предлагается новый эффективный алгоритм случайного блуждания на плоскости и оценка вклада размера шага в погрешность при компьютерном моделировании блуждания. В науке известна связь между вероятностью первого пересечения поглощающей окружности в процессе случайного блуждания и распределением электрического потенциала, описываемого уравнением Лапласа [1]. Случайное блуждание на плоскости начинается из точки с координатами  $(R_b, 0)$ . Радиус окружности прилипания -  $R$ ,  $R_b > R$ . Тогда вероятность пер-

вого пересечения в результате случайного блуждания под углом  $\phi$  выражается формулой [4]:

$$P(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x \cos \phi + 1}, \quad (1)$$

где  $x = R_b/R > 1$ . С точки зрения аналитических расчетов, частица блуждает по плоскости с бесконечно малым шагом, и всегда со стопроцентной вероятностью пересечет окружность прилипания. Для компьютерного моделирования шаг частицы всегда будет конечным и нельзя моделировать бесконечный процесс блуждания, ожидая, когда частица пересечет окружность. Чтобы ускорить численное моделирование, вводится дополнительная окружность с радиусом  $R_r$  - радиус возвращения. При переходе за эту окружность частица принудительно возвращается на радиус рождения  $R_b$ , по формуле [4]:

$$\phi = f(u) = 2 \arctan \left( \frac{x - 1}{x + 1} \tan u \frac{\pi}{2} \right), \quad (2)$$

где  $x = R_r/R_b > 1$ ,  $u$  случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $[-1, 1]$ .

Моделирование было проведено с параметрами:  $R = 10$ ,  $R_b = 20$ ,  $R_r = 200$ . При моделировании блуждания с разными размерами шага стало ясно, что зависимость точности моделирования от размера шага не является линейной и при дальнейшем уменьшении шага точность перестает пропорционально расти [11]. На основе анализа зависимости отклонения численного результата от точного (1) была предложена формула зависимости точности моделирования от шага, где  $\delta$  - размер шага:

$$P_{exp}(\phi) \approx P(\phi) \left( 1 - \left( \frac{\delta}{R} \right)^\alpha \cos \phi \right), \quad (3)$$

где  $\alpha < 1$ . Второй член можно считать поправкой к точному выражению за счет дискретизации блуждания. Аналитическое решение пока не найдено.

Для ускорения процесса моделирования, нами были предложены два алгоритма изменения шага случайного блуждания. Сравнивались три алгоритма:

1. Шаг частицы неизменен на всем промежутке от окружности рождения до окружности прилипания.



2. Шаг частицы меняется при пересечении некоторого выбранного нами радиуса смены размера шага.
3. Шаг частицы линейно зависит от расстояния между частицей и началом координат.

Для сравнения берется время для моделирования обычным алгоритмом (Алгоритм 1) с шагом 0.1. Алгоритм 3 оказался наиболее эффективным, примерно в 27 000 быстрее Алгоритма 1.

Было выявлено, что вклад в статистическую погрешность даёт количество частиц при моделировании, вклад в систематическую ошибку даёт шаг частицы, то есть точность результата моделирования зависит от шага. Наилучший алгоритм из предложенных - это алгоритм с изменением шага по линейному закону. Такой алгоритм является самым быстрым и точным из рассмотренных, и позволяет уточнять решение с заданной точностью за разумное время.

## **Глава 2. Алгоритм генерации пенной структуры на плоскости и в пространстве.**

В главе рассматривается алгоритм для моделирования пеноподобной структуры на плоскости и в пространстве, а также изучается магнитная модель Изинга для полученной структуры на плоскости. Двумерную пенную структуру можно представить как хаотично разбросанные отрезки фиксированной длины. У объекта, сконструированного таким образом, есть некоторые аналитически выведенные свойства [12] [13].

В работе [14] рассматриваются свойства для множества случайно расположенных бесконечных линий на плоскости, пересекающихся между собой. В результате таких пересечений получаются полигоны - замкнутые многоугольники. В статье представлены аналитические расчеты для среднего периметра и средней площади таких полигонов, в зависимости от плотности линий. Средний периметр  $E(Perimeter) = \frac{2\pi}{\tau}$ , средняя площадь  $E(Area) = \frac{\pi}{\tau^2}$ , где  $\tau$  аналог плотности. В статье [15] указано, как выразить параметр  $\tau$  через новый параметр  $k$ , и как посчитать параметр  $k$ . Параметр  $k$  определяет плотность случайных линий, это среднее число линий, пересекающих любой прямой отрезок единичной длины. Таким образом,  $1/k$  является «средней свободной длиной» линии, а  $\tau = \frac{\pi k}{2}$ . Для нашей модели мы считали  $k$  и значения площади полигонов и проверяли, с какой точностью мы получим число  $\pi$ .

Для проверки своей модели, мы увеличили длину отрезков в боксе так, чтобы она была больше размера бокса и исследовали асимптотическую зависимость при увеличении размера отрезков и плотности отрезков в боксе. Было проверено, что для нашей модели площадь и периметр полигонов в асимптотике совпадают с рассчитанными в статье, а значит модель может быть использована для дальнейшего исследования.

Был предложен алгоритм генерации пеноподобной структуры на плоскости:

1. Зададим размер бокса  $L$  и размер отрезков  $l$ .
2. Генерируем отрезки на плоскости: для этого случайно генерируем координаты точки начала  $(x,y)$  внутри бокса, и угол  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Далее от этой точки под выбранным углом отмеряем длину  $l$ . Отрезок может выходить за пределы бокса, в таком случае он будет обрезан.
3. При пересечении отрезков друг с другом образуются кластеры. Генерация отрезков прекращается, когда появляется кластер, имеющий пересечения со всеми сторонами бокса.
4. Все кластеры, кроме единственного, имеющего пересечения со всеми сторонами бокса, удаляются со всеми вошедшими в них отрезками.
5. У оставшегося кластера удаляются отрезки, имеющие с ним только одно пересечение. Это «промывание» повторяется, пока не будут удалены все такие отрезки.

В главе подробно описаны структуры данных, используемые для эффективного моделирования кластера. Мы использовали предложенный алгоритмом для изучения свойств пенных структур.

Далее изучены магнитные свойства модели, полученной ранее. Для этого использована математическая модель статистической физики, которая применяется для описания ферромагнитного материала - модель Изинга.

На каждом отрезке в кластере, на расстоянии 1 друг от друга, расставляем переменные  $\sigma$  принимающие значения  $-1, +1$ . Энергия системы:

$$E = -J \sum_{\{i,j|distance(i,j)\leq R\}} \sigma_i \sigma_j, \quad (4)$$

где  $J$  - энергия обменного взаимодействия,  $R$  - радиус взаимодействия. Суммирование в данном выражении производится по всем парам спинов  $\sigma_i$  и  $\sigma_j$ , расстояние между которыми не превосходит значение  $R$ .

В процессе моделирования мы будем вычислять следующие величины термодинамической системы:

- Намагниченность:

$$M(t) = N_{up} - N_{down};$$

- Теплоемкость:

$$C = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{(kT)^2};$$

- Магнитная восприимчивость:

$$\chi = \frac{\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2}{kT}.$$

Здесь угловыми скобками обозначается усреднение по времени. В качестве времени берутся шаги моделирования.

Для моделирования использовано два алгоритма.

Локальный Алгоритм Метрополиса [16]:

1. Считаем энергию всей системы.
2. Выбираем случайный спин.
3. Переворачиваем выбранный спин и пересчитываем энергию системы оптимальным способом. Если энергия системы уменьшилась или не изменилась, то принимаем шаг (меняем знак выбранного спина). Если энергия системы увеличилась - принимаем шаг с вероятностью  $e^{-(E_{new}-E_{old})/T}$ .

Однокластерный Алгоритм Вольфа [17]:

1. Выбираем случайный спин.
2. Выбираем всех соседей выбранного спина на расстоянии  $R$ , имеющих то же направление спина. Связь с такими соседями будет существовать с вероятностью  $p = 1 - e^{-2K}$ , где  $K = \frac{J}{kT}$ .

3. Если связь с соседом существует, выбираем этого соседа, и смотрим его соседей (на расстоянии  $R$ , имеющих то же направление спина), строим связи с вероятностью  $p = 1 - e^{-2K}$ . Не рассматриваем повторно те спины, которые уже попали в наш кластер.
4. Повторяем предыдущий шаг до тех пор, пока никаких новых связей не будет создано.
5. Меняем направление спинов во всем кластере на противоположное.
6. Начинаем алгоритм сначала.

Моделирование проведено для различных значений  $R$  (радиус взаимодействия) и  $T$  (температура). Выяснено, что при низких температурах поведение намагниченности качественно похоже на экспериментальные результаты для трёхмерной пены [18]

Также предложен алгоритм для генерации трехмерной пеноподобной структуры.

Экспериментальное изучение магнитных свойств пеноподобных структур происходит в трехмерном пространстве на реальных материалах. Поэтому особый интерес представляет алгоритм для генерации структуры в пространстве. Сложность состоит в том, что если просто случайно генерировать отрезки в пространстве, они будут пересекаться между собой с пренебрежимо малой вероятностью. Поэтому нужен алгоритм, который позволит получить кластеры отрезков, имеющих пересечения друг с другом.

Зададим размер бокса  $L \times L \times L$  и размер отрезка  $l$ .

1. Генерируем внутри бокса три координаты  $(x, y, z)$  - это координаты начала отрезка. Генерируем случайное направление отрезка, используя метод Бокса-Мюллера [19].
2. Генерируем случайную плоскость, проходящую через отрезок, для этого генерируется угол  $\alpha$  - угол между плоскостью  $xOy$  и плоскостью, содержащей отрезок.
3. В плоскости из предыдущего шага, с центром в начале отрезка, проводится окружность с радиусом  $l$ .

4. Ищутся все точки пересечения отрезков с плоскостью, которые попали внутрь этой окружности.
5. Находим углы, образованные отрезком и лучами из начала отрезка к этим точкам.
6. Выбираем минимальный угол по абсолютной величине  $\psi$ . Поворачиваем отрезок относительно её начала на этот минимальный угол. В результате получаем пересечение двух отрезков.
7. Обрезаем отрезок, если какая-то её часть вышла за пределы бокса. Запоминаем, какую именно грань затронул отрезок.
8. Если отрезок пересекся с другим - он попадает в уже существующий кластер, если пересечений нет, тогда он создает кластер, в котором находится он один.
9. Возвращаемся к шагу 1, пока не будет выполнено условие окончания алгоритма: наличие кластера отрезков, пересекающего все шесть граней бокса.

Приводятся примеры структур, которые построены по этому алгоритму.

### **Глава 3. Поиск естественного отбора в чилийской популяции по предсказанию локального происхождения геномов.**

В главе исследуется популяция чилийцев Мапуче после открытия Америки Колумбом (колумбийский обмен). Обнаружено, что у чилийцев есть гаплотипы, связанные с пигментацией, термогенезом и иммунной защитой от патогенов, которые подвергались естественному отбору. Эти гаплотипы были приобретены чилийцами в результате смешения с индейцами, европейцами и африканцами после колумбийского обмена. По геномам восстанавливается популяционная и эволюционная история чилийского населения. В результате компьютерного моделирования выявлены признаки PAS (The Post-admixture Selection, отбор после примешивания) в используемых данных в следующих участках генома: самый сильный сигнал естественного отбора относится к гаплотипу, включающему rs12821256, который регулирует экспрессию на KITLG. rs12821256 является причиной более светлого цвета волос у северных европейцев, KITLG регулирует количество пигментов меланина в волосяных фолликулах и в коже, а также участвует в термогенезе.

С помощью инструмента моделирования SELAM [20] была сгенерирована популяция чилийцев с разными пропорциями европейской и африканской компонент и запущена динамика для 10, 12 и 15 поколений. Было показано, что выбранные участки генома не могли быть получены в ходе случайного процесса и имел место естественный отбор.

**Заключение.** В заключении диссертации сформулированы общие выводы и основные результаты проведенного исследования.

## **Основные результаты, выносимые на защиту:**

1. Разработан эффективный алгоритм с адаптивным шагом для моделирования случайного блуждания на плоскости с последующим прилипанием к окружности фиксированного радиуса.
2. Оценена погрешность привносимая размером шага случайно блуждающей частицы по итогам большого числа компьютерных экспериментов. Предложен возможный вид аналитической формулы поправки первого порядка к точному результату решения уравнения Лапласа.
3. Разработан алгоритм для генерации пеноподобных структур на плоскости и в пространстве. Проверено соответствие геометрических характеристик моделируемых структур с аналитическими расчётами.
4. Полученные при помощи модели Изинга на плоской пеноподобной структуре значения физических величин сравнивались с экспериментальными. Показано, что значения качественно схожи.
5. Исследована популяция коренных чилийцев после примешивания европейских и африканских генов. Найдены участки генома с признаками естественного отбора.

## **Личный вклад автора в разработку проблемы**

Автор лично реализовывал вычислительные алгоритмы, участвовал в обсуждениях по направлениям исследований, изучил научную литературу по направлению исследования. Автор занимался подготовкой, анализом, обработкой и обсуждением с научным руководителем полученных результатов. Совместно с научным руководителем предлагались идеи и гипотезы, ставились задачи.

## **Апробация результатов исследования**

1. «Зависимость результатов моделирования процесса случайного блуждания от конечного шага», ежегодная межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов имени Е.В. Арменского, 19 февраля - 1 марта 2018г.

2. «Алгоритмы с переменным размером шага для моделирования процесса случайного блуждания на плоскости», ежегодная межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов имени Е.В. Арменского, 18 февраля - 28 февраля 2019г.
3. «Алгоритм генерации отрезков на плоскости для моделирования двумерной пены», ежегодная межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов имени Е.В. Арменского, 25 февраля - 4 марта 2020г.
4. «Method for foam generation in plane» на международной конференции International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond, 12-16 октября 2020г.
5. «Моделирование магнитных свойств двумерной металлической пены» на международной конференции Суперкомпьютерные дни в России 27-28 сентября 2021

### **Свидетельства о государственной регистрации ПО:**

- Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018665832 «Случайное блуждание с переменным шагом и первое пересечение границы», 2018

### **Публикации автора по теме диссертации**

Все публикации входят в международную систему цитирования Scopus.

1. Klimenkova O., Menshutin A., Shchur L. Variable-step-length algorithms for a random walk: Hitting probability and computation performance // Computer Physics Communications. 2019. Vol. 241. P. 28-32.
2. Klimenkova O., Menshutin A., Shchur L. Influence of the random walk finite step on the first-passage probability // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 955. No. 012009. P. 1-6.
3. Klimenkova O., Shchur L. Algorithm for foam generation in plane // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1740. No. 012030. P. 1-5.



4. Vicuña, L., Klimenkova, O., Norambuena, T., Martinez, F. I., Fernandez, M. I., Shchur, V., Eyheramendy, S., Postadmixture selection on Chileans targets haplotype involved in pigmentation, thermogenesis and immune defense against pathogens //Genome Biology and Evolution. - 2020 - 12(8) - p. 1459-1470.

## Литература

1. T. A. Witten, L. M. Sander, Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Critical Phenomenon, *Physical Review Letters* 47, 1400 (1981)
2. J. Nittman, H. E. Stanley, Non-deterministic approach to anisotropic growth patterns with continuously tunable morphology: the fractal properties of some real snowflakes, *J. Phys.A: Math. Gen.* 20, L1185 (1987).
3. L. Niemeyer, L. Pietronero, H. J. Wiesmann, Fractal Dimension of Dielectric Breakdown, *Physical Review Letters* 52, 1033 (1984).
4. A. Yu. Menshutina, L. N. Shchur, Test of multiscaling in a diffusion-limited-aggregation model using an off-lattice killing-free algorithm, *Phys. Rev. E* **73**, 011407 (2006).
5. Gilbert D. A. et al. Tunable low density palladium nanowire foams // *Chemistry of Materials*. – 2017. – Т. 29. – №. 22. – С. 9814-9818.
6. Nielsen, R., Akey, J. M., Jakobsson, M., Pritchard, J. K., Tishkoff, S., Willerslev, E. Tracing the peopling of the world through genomics // *Nature*. – 2017. – Т. 541. – №. 7637. – С. 302-310
7. Cheng JY, Racimo F, Nielsen R. 2019. Ohana: detecting selection in multiple populations by modelling ancestral admixture components. *BioRxiv*.
8. M.S. Islam, et al. Fano profiles in palladium nanoconstrictions // *Solid State Communications* – 2017. – Т. 262. – С. 16.
9. Picu, R. C. Mechanics of random fiber networks—a review. *Soft Matter*, 7(15), 6768.(2011)
10. 1000 Genomes Project Consortium, A global reference for human genetic variation. // *Nature*. - 2015 - 526(7571), p.68-74.

11. Klimenkova O., Menshutin A., Shchur L. Influence of the random walk finite step on the first-passage probability // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 955. No. 012009. P. 1-6.
12. S. Goudsmit, Random distribution of lines in a plane //Reviews of Modern Physics. – T. 17. – №. 2-3. – C. 321 (1945)
13. R. E. Miles The various aggregates of random polygons determined by random lines in a plane //Advances in Mathematics. – T. 10. – №. 2. – C. 256-290 (1973)
14. R. E. Miles, Random polygons determined by random lines in a plane, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. T. 52.– No. 4. – C. 901. (1964)
15. Richards P. I., Averages for polygons formed by random lines //Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 1964. – T. 52. – №. 5. – C. 1160.
16. Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H. and Teller, E., Equation of state calculations by fast computing machines //The journal of chemical physics, - 1953. - 21(6), pp.1087-1092.
17. Wolff U., Collective Monte Carlo updating for spin systems. //Physical Review Letters - 1989 - 62(4), p.361.
18. Teng, X., Han, W.Q., Ku, W. and Hücker, M., Synthesis of ultrathin palladium and platinum nanowires and a study of their magnetic properties //Angewandte Chemie - 2008 - 120(11), pp.2085-2088.
19. Box G. E. P., Muller M. E. A note on the generation of random normal deviates //The annals of mathematical statistics. – 1958. – T. 29. – №. 2. – p. 610-611.
20. Corbett-Detig, R., Jones, M. SELAM: simulation of epistasis and local adaptation during admixture with mate choice //Bioinformatics. - 2016 - 32(19), 3035-3037.