Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
“Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

Факультет математики

На правах рукописи

Голота Алексей Сергеевич

Конечные группы, действующие на алгебраических и комплексных многообразиях

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н. К. А. Шрамов

Москва - 2023

Содержание

Введение

Данная диссертация посвящена исследованию нескольких задач, относящихся к действиям групп (в частности, конечных групп) в алгебраической и комплексно-аналитической геометрии.

Первой из основных задач диссертации является изучение конечных подгрупп в группах бирациональных автоморфизмов проективных многообразий, а также в группах бимероморфных автоморфизмов компактных комплексных пространств. Нас интересуют следующие "качественные" свойства ограниченности для конечных подгрупп в этих группах, которые обобщают свойства из классических теорем К. Жордана [11] для полных линейных групп над полем $\mathbb{C}$ и Г. Минковского [23] для полных линейных групп над $\mathbb{Q}$.

Определение 0.1. Пусть G – группа. Будем говорить, что G является *жордановой* (или обладает *свойством Жордана*), если существует константа $J(G) \in \mathbb{N}$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ найдётся нормальная абелева подгруппа $A \subset H$ индекса не более $J(G)$.

Будем говорить, что группа G имеет *ограниченные конечные подгруппы*, если существует константа $B(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ имеет место оценка $|H| \leqslant B(G)$.

Исследование этих свойств для групп (бирациональных) автоморфизмов было начато в работах Ж.-П. Серра [24] и В. Л. Попова [17]. Целый ряд значительных результатов о свойстве Жордана для этих групп был получен в работе Ш. Менга и Д. Чжана [14], а также в работах Ю. Г. Прохорова и К. А. Шрамова [18, 19]. Важным направлением исследований в настоящее время является обобщение данных результатов на группы бимероморфных автоморфизмов компактных комплексных (например, кэлеровых) пространств.

В главе 1 настоящей диссертации мы обобщаем методы, развитые в работе [18], и доказываем, что группы бимероморфных автоморфизмов неунилинейчатых компактных кэлеровых пространств размерности 3 обладают свойством Жордана.

Заметим, что свойство Жордана не дает никакой информации о конечных абелевых подгруппах в рассматриваемой группе. Другой задачей, тесно связанной с изучением свойства Жордана, является нахождение ограничений на конечные абелевы подгруппы больших порядков в группах бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir}(X)$. Простейшим инвариантом конечной абелевой группы G является её ранг $r(G)$, то есть, минимальное число порождающих элементов. В главе 2 диссертации мы развиваем методы, позволяющие получить оценки сверху на ранги "больших" конечных абелевых подгрупп в группах бирациональных автоморфизмов проективных многообразий, а также, при некоторых дополнительных предположениях, и в группах бимероморфных автоморфизмов компактных кэлеровых пространств. Обобщая результаты, полученные И. Мундет-и-Риерой [16] и Дж. Сю [29], мы доказываем верхнюю оценку

$$r(G) \leqslant 2\dim(X)$$

и описываем классы бирациональной эквивалентности многообразий, для которых достигаются оценки $r(G) = 2\dim(X)$ и $r(G) = 2\dim(X) - 1$. Так, равенство $r(G) = 2\dim(X)$ выполнено в том и только в том случае, если многообразие X бирационально абелеву многообразию.

Кроме этого, желательно найти методы, позволяющие изучать свойство Жордана для групп (биголоморфных и бимероморфных) автоморфизмов некэлеровых компактных комплексных пространств. В главе 3 мы изучаем группы автоморфизмов компактных комплексных параллелизуемых многообразий. Эти многообразия изоморфны факторпространствам вида G/Γ, где G – связная комплексная группа Ли, а Γ – дискретная кокомпактная подгруппа (решетка) в G [27]. Также эти многообразия некэлеровы, за исключением компактных комплексных торов. Используя явное описание групп (биголоморфных и бимероморфных) автоморфизмов компактных параллелизуемых многообразий [28], мы доказываем, что эти группы обладают свойством Жордана.

Второй основной задачей, рассмотренной в данной диссертации, является важная и в алгебраической, и в аналитической геометрии проблема существования метрик Кэлера–Эйнштейна на многообразиях Фано. Напомним, что кэлерова метрика ω на гладком многообразии Фано X называется метрикой Кэлера–Эйнштейна, если она удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \omega,$$

где $\mathrm{Ricci}(\omega)$ – кривизна Риччи метрики ω. Согласно результатам [4, 25], алгебраическим условием, обеспечивающим существование метрики Кэлера–Эйнштейна на многообразии Фано, является так называемая K-стабильность, определенная ранее в работе [7]. Более того, если группа G действует на многообразии X автоморфизмами, то возникает понятие G-эквивариантной K-стабильности, которое также достаточно для существования метрики Кэлера–Эйнштейна [5]. В работах [1, 9] понятие K-стабильности было переформулировано в терминах валюативных инвариантов многообразия X, таких как δ-инвариант. Естественно ожидать, что аналогичный валюативный критерий имеет место и в G-эквивариантном контексте.

В главе 4 мы даём определение G-эквивариантной версии δ-инварианта для связной группы G и доказываем валюативный критерий G-эквивариантной K-полустабильности (а также равномерной K-стабильности) в терминах δ_G. Оставшаяся часть главы 4 посвящена различным приложениям этого результата. В числе прочего мы доказываем формулу, связывающую δ_G-инвариант и нижнюю оценку на кривизну Риччи многообразия X. Также мы выводим явную формулу для δ_G-инварианта сферического многообразия Фано в терминах комбинаторных данных. Наконец, для случая конечной группы G мы предлагаем альтернативное определение инварианта δ_G и доказываем формулу ветвления. Мы надеемся, что полученные результаты позволят доказать валюативный критерий G-эквивариантной K-стабильности для случая общей группы G.

1 Неунилинейчатые кэлеровы многообразия

Глава 1 диссертации посвящена изучению конечных подгрупп в группах бимероморфных автоморфизмов неунилинейчатых компактных кэлеровых пространств размерности 3. Целью этой главы является применение методов программы минимальных моделей (ПММ), развитых в работе [18], для доказательства свойства Жордана в случае компактных кэлеровых пространств, не являющихся проективными.

В разделе 1 мы напоминаем основные определения, относящиеся к группам со свойством Жордана. Затем в разделе 2 мы излагаем, следуя работе [10], определения и технические результаты о компактных кэлеровых пространствах с особенностями, а также о различных свойствах положительности для $(1,1)$-классов.

В разделе 3 мы доказываем следующее предложение, которое усиливает хорошо известный результат из алгебраической геометрии [13, Lemma 4.3].

Предложение 1.1. *Пусть $f\colon X \dashrightarrow X'$ – бимероморфное отображение между компактными кэлеровыми пространствами с терминальными особенностями. Предположим, что канонические классы K_X и $K_{X'}$ численно эффективны в коразмерности 1. Тогда f является изоморфизмом в коразмерности 1.*

Далее, в разделе 4, после подготовительных технических результатов, мы обобщаем на случай особых комплексных пространств результат А. Фуджики [8, Corollary 3.3].

Предложение 1.2. *Пусть $f\colon X \dashrightarrow X'$ – бимероморфное отображение между компактными кэлеровыми пространствами с рациональными особенностями. Предположим, что f является изоморфизмом в коразмерности 1. Если существует кэлеров класс $\alpha \in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$, такой что класс $\alpha' = f_*\alpha$ также кэлеров, то отображение f биголоморфно.*

Наконец, раздел 5 главы 1 посвящен доказательствам основных результатов этой главы. Сначала мы доказываем, что группы псевдоавтоморфизмов компактных кэлеровых пространств жордановы, обобщая таким образом результат Дж. Кима [12, Theorem 1].

Теорема 1.3. *Пусть X – нормальное компактное кэлерово пространство с рациональными особенностями. Тогда группа псевдоавтоморфизмов $\mathrm{Psaut}(X)$ жорданова.*

Мы используем Теорему 1.3 и существование минимальных моделей для неунилинейчатых компактных кэлеровых пространств размерности 3 [10, Theorem 1.1] для доказательства основного результата главы 1.

Теорема 1.4. *Группа бимероморфных автоморфизмов $\mathrm{Bim}(X)$ жорданова для любого неунилинейчатого компактного кэлерова пространства X размерности 3.*

Вместе с результатом [20, Theorem 1.3], эта теорема дает полное описание трёхмерных компактных кэлеровых пространств X, таких что группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой.

2 Конечные абелевы подгруппы

В главе 2 диссертации рассматриваются конечные абелевы подгруппы больших порядков в группах бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir}(X)$ комплексных проективных многообразий X. Основной мотивацией для нас является следующий недавний результат И. Мундет-и-Риеры [16, Theorem 1.15].

Теорема 2.1 (И. Мундет-и-Риера)**.** *Пусть X – компактное кэлерово многообразие. Предположим, что существует такое $r \in \mathbb{N}$, что для бесконечного числа различных натуральных чисел N_i группа $\mathrm{Aut}(X)$ содержит подгруппу, изоморфную $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ содержит подгруппу, изоморфную компактному вещественному тору размерности r. Более того, имеет место неравенство $r \leqslant 2\dim(X)$, а если равенство $r = 2\dim(X)$ достигается, то X биголоморфно компактному комплексному тору.*

И. Мундет-и-Риера задал следующий вопрос: верно ли, что та же верхняя оценка выполнена и для групп бирациональных автоморфизмов проективных многообразий (или, более общо, для групп бимероморфных автоморфизмов компактных кэлеровых многообразий)? Цель второй главы настоящей диссертации – доказать, что ответ на этот вопрос положительный в случае проективных многообразий.

Раздел 1 содержит предварительные технические результаты о последовательностях конечных абелевых групп. Мы определяем понятние неограниченного ранга для последовательности конечных групп. Кроме этого, мы напоминаем конструкцию максимального рационально связного (МРС) расслоения компактного кэлерова многообразия, следуя статье [3].

В разделе 2 рассматриваются группы бирациональных автоморфизмов проективных многообразий из двух отдельных классов: неунилинейчатые многообразия и рационально связные многообразия. В случае неунилинейчатых многообразий мы доказываем обобщение [29, Theorem 2.9].

Теорема 2.2. *Пусть X – неунилинейчатое проективное многообразие. Предположим, что существует $r \in \mathbb{N}$, такое что группа* $\mathrm{Bir}(X)$ *содержит подгруппы, изоморфные $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$, где числа N_i неограниченно возрастают. Тогда выполнено неравенство*

$$r \leqslant 2\dim(X)$$

и более того, группа $\mathrm{Bir}(X)$ *содержит подгруппу, изоморфную абелеву многообразию размерности $\lceil r/2 \rceil$. В случае, если $r = 2\dim(X)$ многообразие X бирационально абелеву многообразию.*

Для случая рационально связных многообразий из результатов работ [19] и [2] выводится следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть X – рационально связное многообразие размерности n над произвольным полем k нулевой характеристики. Предположим, что найдется $r \in \mathbb{N}$, такое что для произвольно больших $N_i \in \mathbb{N}$ группа* $\mathrm{Bir}(X)$ *содержит подгруппы $G_i \simeq (\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$. Тогда имеет место неравенство $r \leqslant n$.*

Далее, в разделе 2 мы рассматриваем максимальное рационально связное расслоение проективного многообразия X и применяем сформулированные выше результаты для доказательства основного результата главы 2.

Теорема 2.4. *Пусть X – комплексное проективное многообразие. Предположим, что группа* $\mathrm{Bir}(X)$ *содержит конечные абелевы подгруппы, изоморфные $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для некоторого фиксированного r и произвольно больших N_i. Тогда неограниченный ранг r данной последовательности подгрупп не превосходит* $2\dim(X)$*, и равенство достигается если и только если X бирационально абелеву многообразию.*

Применяя некоторые технические результаты, доказанные в главе 1, мы доказываем аналогичный результат для групп бимероморфных автоморфизмов компактных кэлеровых многообразий при дополнительном предположении.

Теорема 2.5. *Пусть X – компактное кэлерово многообразие. Предположим, что группа* $\mathrm{Bim}(X)$ *содержит подгруппы, изоморфные $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для некоторого фиксированного r и произвольно больших N_i. Предположим также, что база МРС-расслоения многообразия X имеет размерность не более 3. Тогда имеет место неравенство $r \leqslant 2\dim(X)$ и равенство достигается если и только если X бимероморфно компактному комплексному тору.*

3 Компактные параллелизуемые многообразия

В главе 3 диссертации мы продолжаем изучение свойства Жордана, на этот раз для групп автоморфизмов компактных комплексных параллелизуемых многообразий.

Определение 3.1. Компактное комплексное многообразие X называется параллелизуемым, если его голоморфное касательное расслоение тривиально.

Компактное комплексное многообразие, принадлежащее данному классу, изоморфно факторпространству связной комплексной группы Ли G по дискретной кокомпактной подгруппе Γ ([27, Theorem 1]). Компактные параллелизуемые многообразия, за исключением компактных комплексных торов, не допускают кэлеровых метрик. Поэтому необходимы новые методы для изучения свойства Жордана групп биголоморфных и бимероморфных автоморфизмов таких многообразий.

Группы автоморфизмов компактных параллелизуемых многообразий были описаны в работе Й. Винкельманна [28] в терминах группы Ли G и дискретной кокомпактной подгруппы (решётки) Γ. В разделе 3 мы изучаем различные теоретико-групповые свойства решёток в группах Ли, следуя в основном [21, 26]. Затем мы приводим описание групп автоморфизмов компактных параллелизуемых многообразий. В разделах 4 и 5 мы формулируем и доказываем несколько результатов о внешних автоморфизмах решёток, а также о их пространствах деформаций, в том числе теорему А. Вейля о локальной жесткости и теорему Дж. Мостова о сильной жесткости [15] для решеток в полупростых группах Ли.

Основным результатом главы 3 является следующая теорема, доказанная в разделе 6.

Теорема 3.2. *Пусть X – компактное комплексное параллелизуемое многообразие. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ жорданова.*

В процессе доказательства Теоремы 3.2 мы доказываем ограниченность порядков конечных подгрупп в группах внешних автоморфизмов $\mathrm{Out}(\Gamma)$ кокомпактных решеток Γ в комплексных группах Ли.

Теорема 3.3. *Пусть Γ – кокомпактная решетка в связной комплексной группе Ли G. Тогда группа внешних автоморфизмов $\mathrm{Out}(\Gamma)$ имеет ограниченные конечные подгрппы.*

4 Дельта-инварианты с действием группы

В четвертой главе данной диссертации изучается эквивариантная K-стабильность многообразий Фано с действием группы. Мы используем валюативный подход к K-стабильности, развитый в работах [1, 9]. Раздел 1 включает предварительные сведения о нормированиях на полях рациональных функций многообразий, действиях алгебраических групп и о особенностях линейных систем. В разделе 2 мы изучаем G-эквивариантную K-стабильность многообразий Фано. Сначала мы приводим определения K-стабильности как в терминах тест-конфигураций, так и в терминах нормирований. Затем мы даём определение δ_G-инварианта как инфимума некоторой функции на пространстве G-инвариантных дивизориальных нормирований.

Определение 4.1. Пусть (X, L) – поляризованное многообразие, а $G \subset \mathrm{Aut}(X, L)$ – связная подгруппа. Определим

$$\delta_G(X, L) = \inf_{v \in \mathrm{DivVal}_X^G} \frac{A_X(v)}{S_L(v)}.$$

Здесь $A_X(v) = 1 + \mathrm{ord}_E(K_{Y/X})$ – лог-дискрепантность, а

$$S_L(v) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(L)} \int_0^\infty \mathrm{Vol}(\varphi^* L - tE) dt$$

есть ожидаемый порядок обращения в ноль для дивизориального нормирования $v = \mathrm{ord}_E$.

Далее мы доказываем, следуя идеям работ [1, 9], теорему, которая является основным результатом главы 4.

Теорема 4.2. *Пусть $(X, -K_X)$ – логтерминальное по Кавамате многообразие $\mathbb{Q}$-Фано с антиканонической поляризацией. Пусть $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ – связная замкнутая подгруппа. Тогда многообразие $(X, -K_X)$ равномерно K-стабильно (соответственно, K-полустабильно) относительно G-эквивариантных вырождений тогда и только тогда, когда δ_G-инвариант многообразия $(X, -K_X)$ строго больше 1 (соответственно, больше или равен 1).*

Оставшаяся часть главы 4 посвящена различным следствиям и приложениям Теоремы 4.2. В разделе 3 мы сравниваем δ_G-инвариант с нижней оценкой на кривизну Риччи из работы [22] для случая гладкого многообразия Фано. Более подробно, мы доказываем следующую формулу.

Предложение 4.3. *Пусть X – гладкое многообразие Фано, а $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ – связная редуктивная подгруппа. Тогда имеет место равенство*

$$\beta_G(X) = \min\{1, \delta_G(X)\}, \tag{4.1}$$

где $\beta_G(X)$ есть нижняя оценка на кривизну Риччи многообразия X. Кроме этого, выполнено следующее соотношение между δ-инвариантами

$$\delta(X) = \min\{1, \delta_G(X)\}. \tag{4.2}$$

В разделе 4 мы исследуем эквивариантную K-стабильность многообразий Фано с действием алгебраического тора $T = (\mathbb{G}_m)^k$ произвольной размерности k. Показано, что дельта-инварианты с действием T и без него равны, то есть соответствующие свойства K-стабильности совпадают.

Раздел 5 посвящен эквивариантной K-стабильности сферических многообразий Фано. Мы приводим более простое и чисто алгебраическое доказательство комбинаторного критерия K-стабильности для сферических многообразий Фано, доказанного Т. Делькруа [6] с помощью аналитических методов.

Предложение 4.4. *Пусть X – многообразие Фано, которое является сферическим относительно действия связной редуктивной группы G. Тогда δ_G-инвариант многообразия X выражается по следующей формуле:*

$$\delta_G(X) = \min_{\substack{\mathrm{ord}_{D_i} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{C} \\ \mathcal{C} \in \mathbb{F}_X}} \frac{a_{D_i}}{a_{D_i} - \langle 2\rho_Q - \mathrm{bar}_{DH}(\Delta^+), \pi^{-1}(\mathrm{ord}_{D_i}) \rangle}.$$

Здесь $\mathrm{bar}_{DH}(\Delta^+)$ – барицентр многогранника моментов Δ^+ относительно меры Дёйстермаата–Хекмана. Минимум берется по конечному множеству $\mathrm{ord}_{D_1}, \dots, \mathrm{ord}_{D_N}$ дивизориальных нормирований, соответствующих примитивным образующим лучей $\mathcal{C} \cap \mathcal{V}, \mathcal{C} \in \mathbb{F}_X$.

Наконец, в разделе 6 рассматривается случай многообразия Фано с действием конечной группы G. Для этого случая мы предлагаем альтернативное определение инварианта δ_G, использующее G-инвариантные дивизоры, и доказываем формулу ветвления.

Предложение 4.5. *Пусть X – многообразие с логтерминальными по Кавамате особенностями и объемным антиканоническим классом $-K_X$. Пусть $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ – конечная подгруппа. Обозначим через $Y = X/G$ фактормногообразие и пусть $B = \sum_i (1 - 1/m_i)B_i$ – дивизор ветвления на Y. Тогда имеет место равенство*

$$\delta_G(X) = \delta(Y, B)$$

где $\delta(Y, B)$ есть δ-инвариант (в обычном смысле) логтерминальной по Кавамате пары (Y, B).

Публикации по теме диссертации

Основные результаты данного диссертационного исследования опубликованы в следующих статьях.

- Golota, Aleksei. Delta-invariants for Fano varieties with large automorphism groups. (Дельта-инварианты для многообразий Фано с большими группами автоморфизмов) // International Journal of Mathematics, Vol. 31, No. 10 (2020) 2050077 (31 pages).
- А. С. Голота. Свойство Жордана для групп бимероморфных автоморфизмов компактных кэлеровых пространств размерности 3. // Матем. сб., 214:1 (2023), 31–42.

Список литературы

[1] Blum, Harold; Jonsson, Mattias. Thresholds, valuations, and K-stability. *Adv. Math.* 365 (2020), 107062, 57 pp.

[2] Birkar, Caucher. Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties. *Ann. of Math. (2)* 193 (2021), no. 2, 347–405.

[3] Campana, Frédéric. Orbifolds, special varieties and classification theory: an appendix. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 54 (2004), no. 3, 631–665.

[4] Chen, Xiuxiong; Donaldson, Simon; Sun, Song. Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds, I-III. J. Amer. Math. Soc. 28 (2015), 183–197, 199–234, 235–278.

[5] Datar, Ved; Székelyhidi, Gábor. Kähler-Einstein metrics along the smooth continuity method. *Geom. Funct. Anal.* 26 (2016), no. 4, 975–1010.

[6] Delcroix, Thibaut. *K*-stability of Fano spherical varieties. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) 53 (2020), no. 3, 615–662.

[7] Donaldson, Simon K. Scalar curvature and stability of toric varieties. *J. Differential Geom.* 62 (2002), no. 2, 289–349.

[8] Fujiki, Akira. A theorem on bimeromorphic maps of Kähler manifolds and its applications. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 17 (1981), no. 2, 735–754.

[9] Fujita, Kento. A valuative criterion for uniform K-stability of $\mathbb{Q}$-Fano varieties. *J. Reine Angew. Math.* 751 (2019), 309–338.

[10] Höring, Andreas; Peternell, Thomas. Minimal models for Kähler threefolds. *Invent. Math.* 203 (2016), no. 1, 217–264.

[11] Jordan, M. Camille. Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique. *J. Reine Angew. Math.* 84 (1878), 89–215.

[12] Kim, Jin Hong. Jordan property and automorphism groups of normal compact Kähler varieties. *Commun. Contemp. Math.* 20 (2018), no. 3, 1750024, 9 pp.

[13] Kollár, János. Flops. Nagoya Math. J. 113 (1989), 15–36.

[14] Meng, Sheng; Zhang, De-Qi. Jordan property for non-linear algebraic groups and projective varieties. *Amer. J. Math.* 140 (2018), no. 4, 1133–1145.

[15] Mostow, G. D. Strong rigidity of locally symmetric spaces. Annals of Mathematics Studies, No. 78. *Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo,* 1973. v+195 pp.

[16] Mundet i Riera, Ignasi. Topological rigidity of tori and finite group actions on hypertoral manifolds. arXiv:2112.05599.

[17] Popov, Vladimir L. On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties. *Affine algebraic geometry,* 289–311, CRM Proc. Lecture Notes, 54, *Amer. Math. Soc., Providence, RI,* 2011.

[18] Prokhorov, Yuri; Shramov, Constantin. Jordan property for groups of birational selfmaps. *Compos. Math.* 150 (2014), no. 12, 2054–2072.

[19] Prokhorov, Yuri; Shramov, Constantin. Jordan property for Cremona groups. *Amer. J. Math.* 138 (2016), no. 2, 403–418.

[20] Prokhorov, Yu. G.; Shramov, K. A. Finite groups of bimeromorphic selfmaps of uniruled Kähler threefolds. (Russian). *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* 84 (2020), no. 5, 169–196.

[21] Raghunathan, M. S. Discrete subgroups of Lie groups. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68. *Springer-Verlag, New York-Heidelberg,* 1972. ix+227 pp.

[22] Rubinstein, Yanir A. Some discretizations of geometric evolution equations and the Ricci iteration on the space of Kähler metrics. *Adv. Math.* 218 (2008), no. 5, 1526–1565.

[23] Serre, Jean-Pierre. Bounds for the orders of the finite subgroups of $G(k)$. *Group representation theory,* 405–450, *EPFL Press, Lausanne,* 2007.

[24] Serre, Jean-Pierre. A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field. *Mosc. Math. J.* 9 (2009), no. 1, 193–208, back matter.

[25] Tian, Gang. K-stability and Kähler–Einstein metrics. *Comm. Pure Appl. Math.* 68 (2015), no. 7, 1085–1156.

[26] Vinberg, È. B.; Gorbatsevich, V. V.; Shvartsman, O. V. Discrete subgroups of Lie groups. (Russian) *Current problems in mathematics. Fundamental directions, Vol. 21 (Russian),* 5–120, 215, Itogi Nauki i Tekhniki, *Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow,* 1988.

[27] Wang, Hsien-Chung. Complex parallisable manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1954), 771–776.

[28] Winkelmann, Jörg. Complex analytic geometry of complex parallelizable manifolds. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* No. 72-73 (1998), x+219 pp.

[29] Xu, Jinsong. Finite p-groups of birational automorphisms and characterizations of rational varieties. arXiv:1809.09506.