Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Скопенков Михаил Борисович

Комплексные и кватернионные функции в решеточных моделях и теории циркулярных поверхностей

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
доктора математических наук

Москва – 2023

Введение

Данная диссертация посвящена изучению функций комплексного и кватернионного переменного и их применениям — главным образом, в геометрии. Мы рассматриваем функции как на плоскости и римановых поверхностях, так и на решетках.

В теории функций комплексного переменного, особенно на римановых поверхностях, доказательства существования основных объектов зачастую неконструктивны, что затрудняет их вычисление на практике. Одним из перспективных подходов к вычислениям в этой теории — ее дискретизация и последующий предельный переход.

Различные подходы к дискретизации комплексного анализа на плоских графах, а затем и римановых поверхностях, были предложены Р.Исааксом, Р.Даффином, Х.Мерка [19, 17, 31, 32], И.А.Дынниковым-С.П.Новиковым [18], А.Бобенко-Х.Мерка-Ю.Сурисом[4], А.Бобенко-У.Пинкалем-Б.Шпрингборном [5]. Первая из этих теорий, так называемая линейная дискретизация комплексного анализа на четырехугольной решетке, в настоящее время развивается особенно активно. Это связано с ее применениями в статистической физике (С.Смирнов-Д.Челкак [8]; С.Смирнов, М.Христофоров и соискатель [25]), численных методах (К. Хильдебрандт и соавторы [22]), комбинаторной геометрии (Р.Кеньен [24]). См. обзоры С.Смирнова и Л.Ловаша [29, 46].

Комплексный анализ на графах, как и классический комплексный анализ, связан с теорией потенциала. Поэтому часто используется физическая терминология: взвешенный граф называется цепью постоянного (соответственно, переменного) тока, если вес каждого ребра положителен (соответственно, имеет положительную действительную часть).

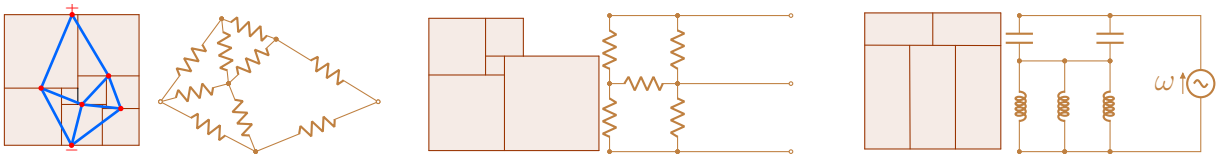

Рис. 1: Физическая интерпретация замощений: прямоугольника квадратами, многоугольника квадратами, квадрата подобными прямоугольниками (слева направо).

Исторически одним из первых применений дискретного комплексного анализа было применение к задаче о разрезании многоугольника на прямоугольники. Знаменитая физическая интерпретация таких разрезаний, принадлежащая Р.Бруксу-К.Смиту-К.Стоуну-У.Татту [6], использует цепи постоянного тока; смотри Рисунок 1 слева и в центре. Эта интерпретация позволила полностью решить ряд задач о разрезании многоугольников на квадраты. В последние годы эта идея переживает новый пик популярности, благодаря применению к моделям квантовой гравитации, принадлежащему С. Шеффельду и соавторам.

Более общая задача о разрезании многоугольника на многоугольники заданной формы также связана с дискретными функциями комплексного переменного. Для ее решения требуется дальнейшее развитие теории таких функций.

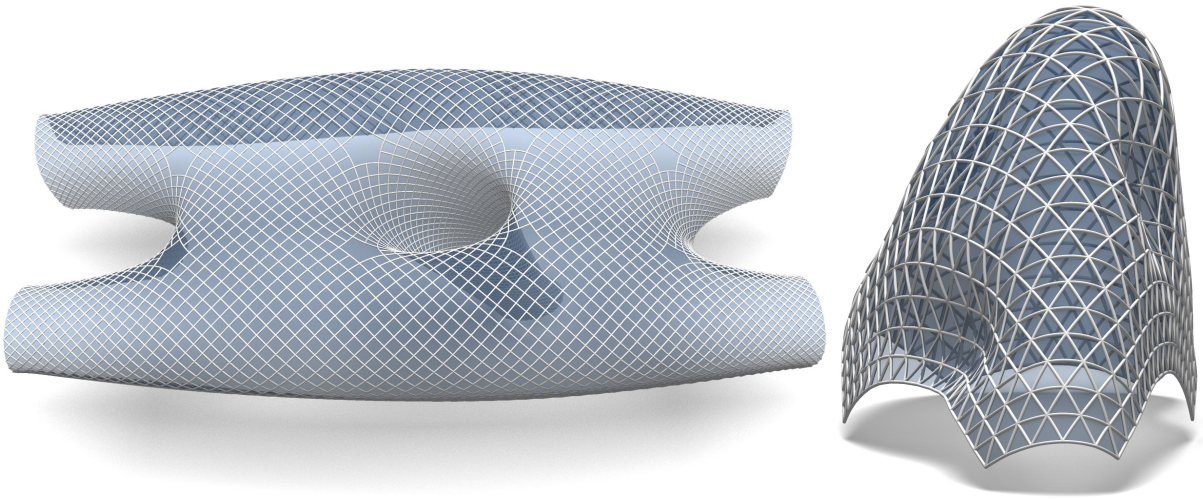

Рис. 2: Конструкции из дуг окружностей

Далее, мы рассматриваем функции кватернионного переменного, главным образом, многочлены и рациональные функции. Мы изучаем их приложения в классификации поверхностей, через каждую точку которых проходит несколько окружностей, целиком лежащих на поверхности. Его мотивировкой служат, в частности, потенциальные приложения в архитектуре.

В современной архитектуре четко прослеживается курс на конструкции свободной формы, воплощенный в работах таких знаменитых архитекторов, как Ф.Гери и З.Хадид. В то время как компьютерное моделирование конструкций свободной формы доступно стандартными средствами, их реальное воплощение остается трудной задачей. Для того, чтобы конструкцию свободной формы можно было изготовить на практике, необходим специальный процесс рационализации [35, 3]. Это означает, что гладкая поверхность заменяется на некоторую решетку, составленную из отдельных панелей со специальными свойствами.

Как один из подходов к рационализации, П.Бо и соавторы [3] предложили так называемые конструкции из дуг окружностей. Конструкция из дуг окружностей - это граф, ребра которого реализованы в виде дуг окружностей, сходящихся в каждой вершине под равными углами и имеющих в ней общую касательную плоскость. На рисунке 2 изображены две конструкции из дуг окружностей, имеющие (локально) комбинаторику квадратной и треугольной решетки, соответственно. В первом случае конструкция состоит из двух семейств сплайнов, состоящих из дуг окружностей, пересекающих друг друга под прямым углом. Во втором случае мы видим 3 семейства сплайнов, пересекающихся под углом 60 градусов. В последнем случае мы имеем пример так называемой гексагональной ткани, классического объекта геометрии, см. рисунок 3 и [1, 50, 51, 40, 38, 39, 41].

Следующая фундаментальная проблема близка к рассматриваемой прикладной

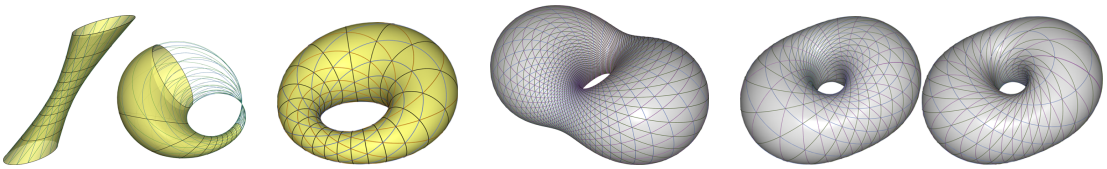

Рис. 3: Гексагональные ткани из окружностей на циклидах Дарбу: гиперболоид и его образ при инверсии, циклида Дюпена, поверхность канала, общая циклида с различными тканями (слева направо).

задаче. Откажемся от требования равенства углов, но потребуем, чтобы конструкция была образована цельными дугами окружностями, а не просто сплайнами из них. Естественный вопрос состоит в том, какие конструкции можно построить из двух семейств окружностей. Он остается открытым долгое время, несмотря на частичные продвижения, начиная ещё с работ Дарбу 19го века. Хотя решение данной проблемы не имеет непосредственных приложений в архитектуре, есть основания полагать, что разработанные методы окажутся полезными для последующих прикладных исследований.

Поставленный вопрос естественным образом приводит к вопросу, когда и в какой мере разложение кватернионных многочленов двух переменных на множители является однозначным. Этот вопрос был изучен ранее для случая одной переменной, а случай двух переменных не поддавался анализу известными ранее методами.

Дискретизация комплексного анализа

Приведем краткий обзор известных ранее и полученных в диссертации результатов.

Классические методы позволяют построить дискретизацию комплексного анализа и доказать ее сходимость к непрерывной теории для квадратной и ромбической решеток. Например, сходимость решения задачи Дирихле на квадратной решетке, аппроксимирующей область, к решению задачи Дирихле в этой области была доказана Р.Курантом-К.Фридрихсом-Х.Леви [13], а для случая ромбической решетки - С.Смирновым-Д.Челкаком [8] и неявно П.Сьярле-П.Равьяром [10]. Для более общих четырехугольных решеток классические методы не работают (причина этого в том, что пропадает свойство дискретной аналитичности интеграла дискретной аналитической функции). Они позволяют получить результаты о сходимости лишь в очень слабом смысле, не оперирующим решениями краевых задач. Нами были предложены новые методы, которые позволили доказать сходимость для так называемых ортогональных решеток (статья 5 в списке публикаций), а также на триангулированных римановых поверхностях (статья 6 в списке публикаций). Это решает задачу, поставленную С. Смирновым [46, вопрос 1].

Близкий вопрос о сходимости метода конечных элементов Галеркина изучен досконально; смотри, например, учебник [9]. Однако вопрос о сходимости метода ко-

нечных элементов для триангуляций Делоне римановых поверхностей до нашей совместной работы с А. Бобенко оставался открытым (статья 6 в списке публикаций).

Исторически одним из первых применений дискретного комплексного анализа было применение к задаче о разрезании многоугольника на прямоугольники. О физической интерпретации таких разрезаний, принадлежащей Р.Бруксу-К.Смиту-К.Стоуну-У.Татту [6] можно прочитать в элементарном введении, написанном нами [42, 43]. В совместной работе с М. Прасоловым (статья 1 в списке публикаций) мы развиваем новый подход к рассматриваемой задаче, использующий цепи переменного тока и электро-импедансную томографию [7, 11, 12, 14, 15]; смотри Рисунок 1 справа. В указанной работе также решена задача Х.Фрайлинга [21] о том, какие невыпуклые многоугольники можно разрезать на квадраты (решенная ранее Р. Кеньоном [24] только для случая шестиугольника).

Близкие идеи применяются нами для анализа различных решеточных моделей (статьи 10 и 9 в списке публикаций), смотри также обзоры [23, 27, 48]. Отметим, что в статье 9 из списка публикаций используются функции на решетке как с комплексными, так и кватернионными значениями.

Функции кватернионного переменного и циркулярные поверхности

Приведем краткий обзор известных ранее и полученных в диссертации результатов.

Примеры поверхностей в 3-мерном пространстве, через каждую точку которых проходит несколько окружностей, целиком лежащих на поверхности, известны с давних пор. Будем для краткости называть такие поверхности циркулярными поверхностями. Г.Дарбу ввел специальный класс поверхностей 4-й степени, который он назвал циклидами. Циклиды Дарбу включают как частные случаи циклиды Дюпена и квадрики. Другие примеры изображены на Рисунке 3 справа. Г.Дарбу показал, что через каждую точку циклиды проходит до 10 окружностей, целиком лежащих на ней, но он не различал вещественные и комплексные окружности. Р.Блюм [2] построил пример циклиды с 6 вещественными окружностями через каждую точку.

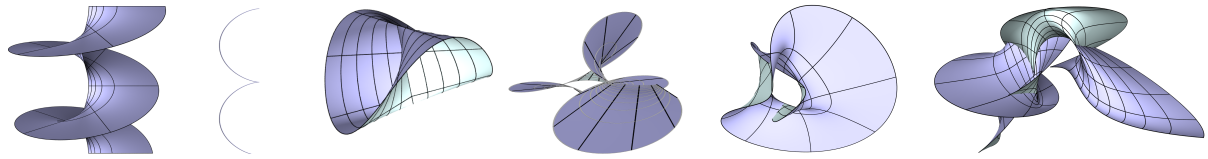

Рис. 4: Минимальные поверхности Лагерра: геликоид, циклоида, коноид Плюкера, общая линейчатая поверхность, общие огибающие семейств конусов (слева направо).

Известно совсем немного общих результатов о классификации циркулярных поверхностей. Н.Такеучи показала, что поверхность рода 0 или 1, отличная от сферы, не может содержать более 6 окружностей через каждую точку. Было известно, что

поверхность, содержащая 2 косферические или 2 ортогональные окружности через каждую точку, обязательно является циклидой. Однако существуют циркулярные поверхности, и отличные от циклиды: например, поверхность, получающаяся при параллельном переносе одной окружности вдоль другой окружности. Поверхности, содержащие две коники (соответственно, конику и прямую) через каждую точку, были классифицированы Й.Шихо [37] (соответственно, Х.Браунером).

В совместной работе с Ф.Ниловым (статья 4 в списке публикаций) были описаны все поверхности, содержащие конику и прямую через каждую точку.

В совместной работе с Г.Потманом и Л.Ши (статья 3 в списке публикаций) найдены все так называемые гексагональные ткани из окружностей на всех циклидах, отличных от сферы и плоскости; смотри Рисунок 3. С помощью близких методов, совместно с М.Бартоном, П.Бо, Ф.Гросом и Г.Потманом мы также описали все поверхности, содержащие семейство изотропных окружностей и все линейчатые поверхности, минимальные в смысле Э.Лагерра (статьи 8 и 2 в списке публикаций, ср. [26, 28, 33, 34, 36, 49]); смотри Рисунок 4. Главную роль в доказательстве последнего результата играли функции комплексного переменного.

Наконец, в совместной работе с Р.Красаускасом (статья 7 в списке публикаций) задача классификации циркулярных поверхностей была полностью решена с помощью Функций кватернионного переменного.

Более подробные изложения указанных доказательств (чем в опубликованных статьях 7 и 2 из списка публикаций) приводятся на сервере преринтов https://arxiv.org/abs/1011.0272v2 и https://arxiv.org/abs/1512.09062v3.

Основные результаты

Приведем точные формулировки основных полученных результатов.

Начнем с результатов о сходимости дискретных аналитических функций.

Четырехугольной решеткой называется граф Q, вложенный в комплексную плоскость, ребра которого - прямолинейные отрезки, а грани - четырехугольники (не обязательно выпуклые). В зависимости от формы граней, различают решетки квадратные, ромбические, ортогональные (последнее означает, что диагонали каждой грани перпендикулярны).

Функция f, заданная на вершинах четырехугольной решетки и принимающая комплексные значения, называется дискретной аналитической, если для каждого четырехугольника разностные отношения этой функции вдоль обеих диагоналей равны друг другу. Иными словами, для каждого четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство

$$\frac{f(A)-f(C)}{A-C}=\frac{f(B)-f(D)}{B-D},$$

где точки A, B, C, D плоскости отождествлены с комплексными числами. Действительная часть дискретной аналитической функции называется дискретной гармонической функцией. Границей решетки Q называется граница ее внешней грани. Мы

всегда будем считать, что граф Q - конечный, а его граница состоит из одной замкнутой кривой без самопересечений.

Пусть g - произвольная гладкая функция, заданная на комплексной плоскости и принимающая действительные значения. Задача Дирихле на решетке Q состоит в том, чтобы найти дискретную гармоническую функцию $u = u_{Q,g}$, совпадающую с заданной функцией g на границе решетки Q.

Теорема 1. *Задача Дирихле на любой конечной четырехугольной решетке имеет единственное решение.*

Будем говорить, что последовательность решеток $\{Q_n\}$ аппроксимирует область Ω комплексной плоскости, если при неограниченном возрастании n:

- максимальное расстояние от точки границы решетки Q_n до границы области Ω стремится к нулю;

- максимальное расстояние от точки границы области Ω до границы решетки Q_n стремится к нулю; и

- максимальная длина ребра решетки Q_n стремится к нулю.

Будем говорить, что последовательность решеток $\{Q_n\}$ равномерна и невырождена, если существует постоянная const (не зависящая от n), такая что для каждого члена этой последовательности:

- отношение диагоналей каждого четырехугольника меньше const и угол между диагоналями больше 1/const; и

- количество вершин решетки в каждом диске радиуса, равного максимальной длине ребра решетки, меньше const.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ограниченная односвязная область. Пусть $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Возьмем равномерную и невырожденную последовательность конечных ортогональных решеток $\{Q_n\}$, аппроксимирующих область Ω. Тогда решения $u_{Q_n,g}$ задачи Дирихле на решетках Q_n равномерно сходятся к решению $u_{\Omega,g}$ задачи Дирихле в области Ω (с такими же граничными значениями).*

Приведем пример применения дискретного комплексного анализа к задачам о замощениях.

Теорема 3. *Для числа $c > 0$ следующие 2 условия эквиваленты:*

- *прямоугольник с отношением сторон c можно разрезать на прямоугольники подобные, но не гомотетичные ему;*

- *c^2 является корнем многочлена с целыми коэффициентами, все остальные комплексные корни которого суть отрицательные действительные числа.*

Перейдем к классификации циркулярных поверхностей.

Теорема 4. *Если через каждую точку аналитической поверхности в $\mathbb{R}^3$ проходят две трансверсальные дуги окружностей, которые лежат на этой поверхности и аналитически зависят от точки, то некоторой композицией инверсий эту поверхность можно перевести в подмножество одного из следующих множеств:*

(E) множество $\{p+q : p \in \alpha, q \in \beta\}$, где α и β — две окружности в $\mathbb{R}^3$;

(C) множество $\{\, 2\frac{p\times q}{|p+q|^2} : p \in \alpha, q \in \beta, p+q \neq 0 \,\}$, где α, β— две окружности в единичной сфере S^2;

(D) множество $\{\, (x,y,z) : Q(x,y,z,x^2+y^2+z^2) = 0 \,\}$, где $Q \in \mathbb{R}[x,y,z,t]$ имеет степень 2 или 1.

Наметим общий план доказательства этой теоремы. Будем решать задачу в S^4 вместо $\mathbb{R}^3$. Используя параметризацию Шихо поверхностей, содержащих две дуги коник через каждую точку, мы сводим задачу к решению уравнения

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = X_6^2$$

в многочленах $X_1, X_2, ..., X_6$ из $\mathbb{R}[u,v]$ степени не более 2 по каждой из переменных. Такие "пифагоровы шестерки"многочленов определяют поверхность $X_1(u,v) : ... : X_6(u,v)$ в S^4, содержащую две (возможно, вырожденные) окружности $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ через каждую точку.

Мы решаем это уравнение (т.е. находим простую параметризацию множества решений), используя разложение кватернионных многочленов на неприводимые множители с точностью до "преобразования Мебиуса".

Обсудим более частные результаты.

Теорема 5. *Если через каждую точку гладкой поверхности в 3-мерном евклидовом пространстве можно провести одновременно отрезок прямой и дугу окружности, целиком лежащие на поверхности (и непрерывно зависящие от этой точки), то рассматриваемая поверхность является либо однополостным гиперболоидом, либо квадратичным конусом, либо эллиптическим цилиндром, либо плоскостью.*

Циклидой называется поверхность в 3-мерном пространстве, заданная уравнением вида

$$a(x^2+y^2+z^2)^2 + (bx+cy+dz)(x^2+y^2+z^2) + Q(x,y,z) = 0,$$

где a, b, c, d - постоянные, а $Q(x,y,z)$ - многочлен степени не выше 2, не обращающиеся в нуль одновременно.

Теорема 6. *Пусть гладкая поверхность в 3-мерном евклидовом пространстве гомеоморфна сфере или тору. Если через каждую точку этой поверхности можно провести не менее 4 окружности, целиком лежащих на поверхности (и непрерывно зависящих от этой точки), то она является циклидой.*

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Доклад «Feynman checkers: quantum field theory on a checkered paper» («Шашки Фейнмана: квантовая теория поля на клетчатой бумаге»), мини-воркшоп-спутник конференции «Диофантов анализ, динамика и близкие темы», Хайфа, Израиль, февраль 2023.

2. Доклад «Surfaces containing two circles through each point» («Поверхности, на которых можно провести две окружности через каждую точку»), семинар Й.Шихо, март 2017, Университет Линца, Линц, Австрия.

3. Доклад «Surfaces containing two circles through each point» («Поверхности, на которых можно провести две окружности через каждую точку»), конференция «Real Geometry», Люмини, Франция, сентябрь 2017, https://conferences.cirm-math.fr/1782.html

4. Доклад «Conservation of energy in lattice field theories» («Сохранение энергии в решеточных теориях поля»), конференция «Contemporary mathematics, in honor of the 80th birthday of Vladimir Arnold (1937-2010)», Москва, Россия, декабрь 2017, http://me.hse.ru/lando/.

5. Доклад «Conservation of energy in lattice field theories» («Сохранение энергии в решеточных теориях поля»), конференция «DYNAMICAL SYSTEMS AND PERTURBATIONS, The conference celebrating S.Yu. Pilyugin's 70th birthday», Санкт-Петербург, Россия, октябрь 2017, http://pilyugin70.spb.ru/.

6. Доклад «Surfaces containing two circles through each point» («Поверхности, на которых можно провести две окружности через каждую точку»), Mathematics, Theoretical Physics and Data Science 2016, dedicated to anniversaries of Yakov Sinai and Grigory Margulis', июль 2016, Москва, Россия, http://mpd2016.iitp.ru/schedule.

7. Доклад «Tiling by rectangles and alternating current» («Замощения прямоугольниками и переменный ток»), Transversal aspects of tilings, Олерон, Франция, июнь 2016, https://oleron.sciencesconf.org/.

8. Доклад «Поверхности, на которых можно провести две окружности через каждую точку», Еженедельный семинар Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ Высшая школа экономики, Москва, Россия, ноябрь 2016.

9. Доклад «Поверхности, через каждую точку которых проходит две окружности, лежащих на поверхности», Заседание Московского математического общества, Москва, Россия, декабрь 2016

10. Доклад «Discrete complex analysis: convergence results » («Дискретный комплексный анализ: результаты о сходимости»), International Congress of mathematicians, Сеул, Корея, август 2014.

11. Доклад «Discrete complex analysis: convergence results» («Дискретный комплексный анализ: результаты о сходимости») , Embedded graphs, Санкт-Петербург, Россия, октябрь 2014.

12. Доклад «Discrete Riemann surfaces: convergence results» («Дискретные римановы прверхности: результаты о сходимости»), International conference “Discrete curvature”, Марсель, Франция, ноябрь 2012.

13. Доклад «Tiling of a rectangle, alternating current, and continued fractions», International conference ”Multidimensional continued fractions”, Грац, Австрия, июль 2012.

14. Доклад «Discrete complex analysis: convergence results» («Дискретный комплексный анализ: результаты о сходимости»), I.M. Gelfand Centennial Conference, Москва, Россия, июль 2012.

15. Доклад «Discrete analytic functions: convergence results» («Дискретные аналитические функции: результаты о сходимости»), Christmas mathematical meetings of the “Dynasty” Foundation, Москва, Россия, январь 2012.

16. Доклад «Triangulations of surfaces by circular arcs», Algebra and number theory, Саратов, Россия, сентябрь 2012.

17. Доклад «Surfaces containing several circles through each point» («Поверхности, на которых можно провести две окружности через каждую точку»), International Conference dedicated to the 65-th anniversary of Askold G. Khovanskii, Москва, Россия, июнь 2012.

18. Доклад «Discrete analytic functions: convergence results» («Дискретные аналитические функции: результаты о сходимости»), Oberwolfach workshop “Discrete differential geometry”, Обервольфах, Германия, июль 2011.

19. Доклад «Discrete Riemann surfaces: convergence results» («Дискретные римановы поверхности: результаты о сходимости»), семинар А.И. Бобенко, Берлин, Германия, март 2011.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях:

1. M. Prasolov, M. Skopenkov, Tiling by rectangles and alternating current, («Замощения прямоугольниками и переменный ток»), J. Combin. Theory A 118:3 (2011), 920-937.

2. M. Skopenkov, H. Pottmann, P. Grohs, Ruled Laguerre minimal surfaces («Линейчатые минимальные поверхности Лагерра»), Math. Z. 272 (2012), 645-674.

3. H. Pottmann, L. Shi, M. Skopenkov, Darboux cyclides and webs from circles («Циклиды Дарбу и ткани из окружностей»), Computer Aided Geom. Design 29:1 (2012), 77-97.

4. F. Nilov, M. Skopenkov, A surface containing a line and a circle through each point is a quadric («Поверхность, через каждую точку которой проходят прямая и окружность, является квадрикой»), Geom. Dedicata 163:1 (2013), 301-310.

5. M. Skopenkov, The boundary value problem for discrete analytic functions, («Задача о граничных значениях для дискретных аналитических функций»), Adv. Math. 240 (2013) 61-87.

6. A. Bobenko, M. Skopenkov, Discrete Riemann surfaces: linear discretization and its convergence («Дискретные римановы прверхности: результаты о сходимости»), J. Reine Angew. Math. 2016:720 (2016) 217-250.

7. M. Skopenkov, R. Krasauskas, Surfaces containing two circles through each point, («Поверхности, через каждую точку которых проходит две окружности»), Math. Ann. 373 (2019) 1299-1327.

8. M. Skopenkov, P. Bo, M. Barton, H. Pottmann, Characterizing envelopes of moving rotational cones and applications in CNC machining («Характеризация огибающих движущихся конусов вращения и приложения в программно-управляемой обработке»), Computer Aided Geom. Design 83 (2020), 101944.

9. M. Skopenkov, Lattice gauge theory and a random-medium Ising model («Решеточная калибровочная теория и модель Изинга в случайной среде»), Math. Phys. Anal. Geom. 25:18 (2022).

10. M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory («Шашки Фейнмана: к алгоритмической квантовой теории»), Russian Math. Surveys 77:3(465) (2022), 73-160.

Список литературы

[1] W. Blaschke and G. Bol, Geometrie der Gewebe, Springer, 1938.

[2] R. Blum, Circles on surfaces in the Euclidean 3-space, Lect. Notes Math. 792 (1980), 213–221.

[3] P. Bo, H. Pottmann, M. Kilian, W. Wang, J. Wallner, Circular arc structures, preprint, 2011.

[4] A. I. Bobenko, C. Mercat, and Y. B. Suris, Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green's function, J. Reine Angew. Math. **583** (2005), 117–161.

[5] A. I. Bobenko, U. Pinkall, B. A. Springborn, Discrete conformal maps and ideal hyperbolic polyhedra, preprint (2010); http://arxiv.org/pdf/1005.2698v1.

[6] R.L. Brooks, C.A.B. Smith, A.H. Stone, and W.T. Tutte, The dissection of rectangles into squares, Duke Math J **7** (1940), 312–340.

[7] A. P. Calderón, On an inverse boundary value problem, Comput. Appl. Math. **25:2-3** (2006), 133–138.

[8] D. Chelkak and S. Smirnov, Discrete complex analysis on isoradial graphs, *Adv. Math.* 228 (2011), 1590-1630.

[9] P. G. Ciarlet, The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam, 1978, 530 p.

[10] P. G. Ciarlet and P.-A. Raviart, Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, *Computer Methods Appl. Mech. Engin.* **2** (1973), 17–31.

[11] Y. Colin de Verdière, Réseaux électriques planaires I, Comm. Math. Helv. **69:1** (1994), 351–374 (in French).

[12] Y. Colin de Verdière, I. Gitler, and D. Vertigan, Réseaux électriques planaires II, Comm. Math. Helv. **71:1** (1996), 144–167 (in french).

[13] R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy, Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Math. Ann., **100**, (1928), 32–74. English transl.: IBM Journal Russian transl.: Russ. Math. Surveys **8** (1941), 125–160.

[14] E. B. Curtis, D. Ingerman, and J. A. Morrow, Circular planar graphs and resistor networks, Lin. Alg. Appl. **283** (1998), 115–150.

[15] E. B. Curtis and J. A. Morrow, Inverse problems for electrical networks, Series on Appl. Math. **13**, World Scientific, Singapore, 2000.

[16] M. Dehn, über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke, Math. Ann. **57** (1903), 314–332 (in German).

[17] R. J. Duffin, Potential Theory on a Rhombic Lattice, *J. Combin. Theory* **5** (1968), 258–272.

[18] I. A. Dynnikov and S. P. Novikov, Geometry of the triangle equation on two-manifolds, *Moscow Math. J.*, **3** (2003), 419–438.

[19] J. Ferrand, Fonctions préharmoniques et fonctions préholomorphes, Bull. Sci. Math. **68** (1944), 152–180.

[20] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, New York, McGraw-Hill, 1965.

[21] C. Freiling, R. Hunter, C. Turner, and R. Wheeler, Tiling with Squares and Anti-Squares, Amer. Math. Monthly **107:3** (2000), 195–204.

[22] K. Hildebrandt, K. Polthier, M. Wardetzky, On the convergence of metric and geometric properties of polyhedral surfaces, Geom. Dedicata **123** (2006), 89–112.

[23] J. Kempe, Quantum random walks: an introductory overview, Contemp. Phys. 50:1 (2009), 339-359.

[24] R. Kenyon, Tilings and discrete Dirichlet problems, Israel J. Math. **105:1** (1998), 61–84.

[25] M. Khristoforov, M. Skopenkov, S. Smirnov, A generalization of Cardy's and Schramm's formulae, preprint (2023), https://arxiv.org/abs/2305.12368.

[26] K. König, L-Minimal Flächen, Mitt. Math. Ges. Hamburg (1926), 189–203.

[27] N. Konno, Quantum walks, Sugaku Expositions 33:2 (2020), 135–158.

[28] T. Li, Laguerre geometry of surfaces in R^3, Acta Math. Sinica 21 (2005), 1525-1534.

[29] L. Lovasz, Discrete analytic functions: an exposition, In: Surv. Differ. Geom., IX, 241–273, Int. Press, Somerville, MA, 2004.

[30] L. Lusternik, Über einige Anwendungen der direkten Methoden in Variationsrechnung, Sb Math+ 33:2 (1926), 173–202.

[31] C. Mercat, Discrete Riemann surfaces and the Ising model, *Comm. Math. Phys.* **218:1** (2001), 177–216.

[32] C. Mercat, Discrete complex structure on surfel surfaces. In: Discrete Geometry for Computer Imagery, Coeurjolly et al. (Eds.), Lect. Notes Computer Sc. **4992** (2008), 153–164.

[33] E. Musso, L.Nicolodi,L-minimal canal surfaces,Rendiconti di Mat.15(1995),421-445.

[34] B. Palmer, Remarks on a variational problem in Laguerre geometry, Rendiconti di Mat. 19 (1999), 281-293.

[35] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, A. Kilian, Architectural Geometry, Bentley Institute Press, 2007.

[36] H. Pottmann, P. Grohs, and N. J. Mitra, Laguerre minimal surfaces, isotropic geometry and linear elasticity, Adv. Comput. Math. 31 (2009), 391-419.

[37] J. Schicho, The multiple conical surfaces, Contrib. Algeb. Geom. **42:1** (2001), 71–87.

[38] W. Schmid, Zur Theorie ebener Dreiecksnetze aus Kegelschnitten, Monatshefte Mat. **40:1** (1933), 411–417, DOI: 10.1007/BF01708878.

[39] W. Schmid, Über Kegelschnitt-Dreiecksnetze, die sich mittels der Römerfläche Steiners ableiten lassen, Monatshefte Mat. **45:1** (1936), 13–20.

[40] W. Schmid, Über Dreicksnetze aus Berührungskegelschnitten einer ebenen Kurve vierter Ordnung, Monatshefte Phys. Mat. **47** (1938).

[41] A.M. Shelekhov, Classification of regular three-webs formed by pencils of circles, J. Math. Sciences **143:6** (2007), 3607–3629.

[42] M. Skopenkov, M. Prasolov, S. Dorichenko, Dissections of a metal rectangle, Kvant 3 (2011), 10–16 (in Russian).

[43] M. Skopenkov, O. Malinovskaya, S. Dorichenko, Compose a square, Kvant 2 (2015), 6–11 (in Russian).

[44] M. Skopenkov, V. Smykalov, A. Ustinov, Random walks and electric networks, Matematicheskoe Prosveschenie 3rd ser. 16 (2012), 25–47, http://www.mccme.ru/free-books/matprosh.html.

[45] S. Smirnov. Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 333:3 (2001), 239-244.

[46] S. Smirnov, Discrete Complex Analysis and Probability, Proc. Intern. Cong. Math. Hyderabad, India, 2010, http://arxiv.org/abs/1009.6077.

[47] S. Smirnov, B. Bychkov, M. Vasiliev, G. Veprev, E. Neustroeva, M. Skopenkov, A. Feklina, P. Filippova, M. Khristoforov, G. Chelnokov, S. Shirokovskikh, How water cuts stone, https://sochisirius.ru/uploads/2021/06/math_iikt_0521_Kak_voda_kamen'_tochit_tasks.pdf

[48] S.E. Venegas-Andraca, Quantum walks: a comprehensive review, Quantum Inf. Process. 11 (2012), 1015–1106.

[49] C. Wang, Weierstrass representations of Laguerre minimal surfaces in R^3, Results in Math. 52 (2008), 399-408.

[50] W. Wunderlich, Über ein besonderes Dreicksnetz aus Kreisen, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 147 (1938), 385–399.

[51] W. Wunderlich, Über ein spezielles Dreiecksnetz aus Kegelschnitten, Monatshefte Mat. **55:2** (1950), 164–169.