Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук

На правах рукописи

Парсегов Сергей Эрнестович

МОДЕЛИ СЕТЕВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ДОСТИЖЕНИЯ КОНСЕНСУСА

РЕЗЮМЕ

диссертации на соискание ученой степени

доктора компьютерных наук

Москва – 2023

Диссертационная работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук».

Оглавление

Введение

Законы или протоколы управления с усреднением, основанные на локальных взаимодействиях, проложили путь к новому классу моделей в современной теории управления сетевыми динамическими системами. Как правило, такие системы (известные также как мультиагентные или многоагентные, а также сетевые) состоят из большого числа одинаковых подсистем-агентов и призваны достигать определенных глобальных целей. Агенты связаны между собой в сеть и, следовательно, обладают некоторым объемом общей информации. Интерес к таким системам продиктован многочисленными приложениями в реальной жизни, а использование простых правил локального взаимодействия при отсутствии централизованного управления обладает рядом особенностей. Выявление и применение преимуществ сетевых систем по сравнению с традиционными "одноагентными" системами является одним из главных мотиваторов исследований в данной области. Во-первых, использование распределенных сетевых подходов влечет за собой снижение стоимости и сложности как аппаратной платформы, так и программного обеспечения и алгоритмов, т.е. один большой и дорогой робот или агрегат может быть заменен несколькими меньшими и более дешевыми агрегатами для реализации той же самой задачи с меньшими затратами и сложностью. Во-вторых, многоагентные системы способны решать широкий класс задач, которые не могут быть эффективно решены одноагентной системой, например, задачу наблюдения в большой области. Кроме того, многоагентные системы с децентрализованным управлением часто обладают гибкостью и устойчивостью, а также снижают коммуникационную и вычислительную нагрузку за счет использования локального взаимодействия только с соседними агентами.

Задача достижения консенсуса или согласования является одной из фундаментальных проблем кооперативного управления многоагентными системами, поскольку многие приложения основаны на разработке и применении алгоритмов достижения консенсуса. В многоагентных системах задача консенсуса заключается в создании стратегии управления группой агентов для достижения согласования по интересующим их состояниям. Основная идея заключается в том, что каждый агент обновляет свое информационное состояние на основе информационных состояний своих локальных соседей таким образом, чтобы информационное состояние каждого агента сходилось в пределе к общему значению. Одной из существенных особенностей моделей, задач и алгоритмов сетевой динамики является широкое применение теории графов и алгебраической теории графов помимо традиционной теории управления. По мере появления новых задач и алгоритмов кооперативного управления стало ясно, что возрастающая сложность как самих агентов, так и свойств сети, через которую они взаимодействуют (например, переход от неориентированных графов к ориентированным, от постоянной топологии к переменной, от простых линейных зависимостей между состояниями агентов и состояниями их соседей до нелинейных функций, поставленных в соответствие дугам графа), существенно затрудняет анализ устойчивости или возможности достижения консенсуса в таких системах, а также усложняет разработку сетевых протоколов управления. За последние 20 лет сложность моделей сетевых систем и связанных с ними задач существенно возросла по сравнению с базовой моделью консенсуса с непрерывным временем, агентами первого порядка и неориентированным графом связи.

Изучать эволюцию таких моделей и связанных с ними задач, а также классифицировать их, удобно, рассматривая отдельно три основные сущности, составляющие сетевую систему (три независимых измерения сложности):

сложность агента, *сложность графа взаимодействия* и *сложность функции связи*.

В данной работе рассматриваются новые модели сетевых динамических систем и алгоритмы сетевого управления, относящиеся к таким областям, как динамика мнений в социальной сети, управление формациями и классическая проблема консенсуса. Полученные результаты развивают науку о сетевых системах по каждому из направлений упомянутого пространства сложности. Так, в рамках проблемы моделирования динамики социальных сетей [1], [2], [3] была предложена новая модель с многомерными взаимозависимыми мнениями, а также ее рандомизированная версия. Исследованы проблемы устойчивости и сходимости, получены результаты для различных типов матрицы взаимосвязи тем обсуждения, а также предложены методы ее идентификации. Для задач управления формациями типа равномерного расположения на фиксированном отрезке и циклического преследования [4], [5], [6], [7], [8], [9] были предложены более адекватные модели агентов высокого порядка, а также новые протоколы управления. Кроме того, как для задачи выстраивания на отрезке, так и для общей задачи консенсуса был предложен распределенный нелинейный протокол управления, гарантирующий стабилизацию за конечное глобально ограниченное время [10], [11].

Полученные результаты формируют основу для комплексного анализа, моделирования и оптимизации сетевых систем. Исследование вносит вклад в теорию нелинейного управления, алгебраическую теорию графов и анализ устойчивости/консенсусности сетевых систем. Таким образом, полученные в диссертации результаты развивают и обогащают науку о сетевых системах по всем трем измерениям пространства сложности.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка новых моделей сетевых динамических/многоагентных систем. К задачам исследования относятся как получение новых моделей агентов сетевых систем, так и синтез соответствующих протоколов управления, гарантирующих желаемые свойства замкнутой системы. Это включает в себя также введение и исследование новых топологий взаимодействия, наряду с анализом их влияния на функционирование всей сетевой динамической системы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложены новые стабилизирующие протоколы управления для равноудаленного размещения агентов второго порядка на отрезке. Данные результаты получены в работах [4], [5], [6].

2. Разработан сверхфинитный закон управления для равноудаленного размещения на отрезке за конечное глобально ограниченное время. Данный результат получен в работе [10].

3. Разработан сверхфинитный протокол управления, обеспечивающий консенсус в сетях агентов первого порядка за конечное глобально ограниченное время. Данный результат получен в работе [11].

4. Предложена модель динамики сети с взаимосвязанными мнениями агентов и ее обобщение на случай асинхронного взаимодействия. Данные результаты получены в работах [1], [2], [3].

5. Предложен алгоритм идентификации матрицы структуры взаимосвязи между несколькими темами обсуждения. Результаты получены в работах [1], [3].

6. Предложены иерархические модели циклического преследования и методы исследования достижимости консенсуса. Данные результаты получены в работах [8], [9].

7. Разработана методика локализации спектра матриц лапласовских матриц графов иерархических задач циклического преследования с помощью алгебраических кривых высокого порядка. Данные результаты получены в работах [7], [9].

Личный вклад автора заключается в постановке задач, разработке теоретических положений, математических моделей и методов, анализе и обобщении результатов.

Новизна предложенного исследования заключается в разработке новых моделей, методов, законов управления и их анализе. В частности, в диссертации автором предложены:

- Модель динамики мнений с взаимозависимыми темами обсуждения;
- Закон управления для стабилизации формации агентов второго порядка на отрезке;
- Распределенный сверхфинитный протокол управления для стабилизации и консенсуса агентов первого порядка;
- Метод точной локализации спектров лапласовских матриц для семейства кольцевых орграфов.

По теме диссертации опубликовано 17 работ, среди которых стоит отдельно выделить публикации в журналах первого квартиля Q1: [2], [3], [9]; журналах второго квартиля Q2: [4], [6]; публикации в трудах конференций CORE A: [10], [1].

Согласно требованиям диссертационного совета по компьютерным наукам НИУ ВШЭ к защите представлены 12 статей. Защита осуществляется по 11 из них, а именно: первым семи из публикаций повышенного уровня, двум публикациям стандартного уровня, а также двум прочим публикациям.

Публикации повышенного уровня:

1. Parsegov, S., Chebotarev, P., Shcherbakov, P., Ibáñez, F., Hierarchical Cyclic Pursuit: Algebraic Curves Containing the Laplacian Spectra, *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2023, Scopus Q1 (главный автор; автором диссертации разработан метод получения алгебраических кривых и доказаны утверждения об алгебраических кривых, содержащих

спектры лапласианов и возможности достижения консенсуса агентами высокого порядка (Теоремы 2, 3, 4, Следствия 2, 3); проведено численное моделирование и проанализированы его результаты)

2. Parsegov, S.E., Proskurnikov, A.V., Tempo, R., Friedkin, N.E., Novel multidimensional models of opinion dynamics in social networks, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 62, No. 5, pp. 2270-2285, 2017, Scopus Q1 (главный автор; автором диссертации предложена модель с взаимосвязаннами темами обсуждения и доказаны результаты о ее устойчивости (Теоремы 2, 4); также автором предложен метод идентификации матрицы взаимосвязанных тем обсуждения, проведены численные эксперименты и проанализированы их результаты)

3. Friedkin, N.E., Proskurnikov, A.V., Tempo, R., Parsegov, S.E., Network science on belief system dynamics under logic constraints, *Science*, 2016, pp. 321-326, Scopus Q1 (главный автор; автором диссертации предложена модель с взаимосвязаннами темами обсуждения и доказаны результаты о ее устойчивости)

4. Proskurnikov, A.V., Parsegov, S.E., Problem of uniform deployment on a line segment for second-order agents, *Automation and Remote Control*, Vol. 77, No 7, 2016, pp. 1248-1258, Scopus Q2 (главный автор; автором диссертации предложены модели агентов второго порядка и доказаны результаты об устойчивости и сходимости (Теоремы 1, 2, 3))

5. Parsegov, S.E., Proskurnikov, A.V., Tempo, R., Friedkin, N.E., A new model of opinion dynamics for social actors with multiple interdependent attitudes and prejudices, *Proc. 54th IEEE Conference on Decision and Control-2015*, pp. 3475-3480, 2015, CORE A (главный автор; автором диссертации предложено многомерное обобщение модели Фридкина-Джонсена и доказаны утреждения об ее устойчивости (Теоремы 1, 2); также автором предложен метод идентификации матрицы структуры взаимосвязанных

тем обсуждения и проведено численное моделирование)

6. Parsegov, S., Polyakov, A., Shcherbakov, P. Nonlinear fixed-time control protocol for uniform allocation of agents on a segment, *Proc. IEEE 51st Conference on Decision and Control-2012*, Maui, USA, Dec. 10-13, 2012, pp. 7732-7737, CORE A (главный автор; автором диссертации предложен сверхфинитный протокол управления для сетевой системы и доказаны утверждения об устойчивости и времени сходимости (Теорема 1, Лемма 2, Следствия 1, 2))

7. Kvinto, Ya.I., Parsegov, S.E. Equidistant arrangement of agents on line: analysis of the algorithm and its generalization, *Automation and Remote Control*, Vol. 73, No. 11, 2012, pp. 1784-1793, Scopus Q2 (главный автор; автором диссертации предложено обобщение стратегии размещения агентов на отрезке на модели агентов второго порядка, проанализирована связть с задачей консенсуса (Утверждения 1, 2, 3))

8. Ahiyevich, U.M., Parsegov, S.E. and Shcherbakov, P.S., Upper bounds on peaks in discrete-time linear systems, *Automation and Remote Control*, Vol. 79, No 11, 2018, pp. 1976-1988, Scopus Q2 (автором диссертации получены оценки всплеска для класса дискретных линейных систем; проведены численные эксперименты и проанализированы их результаты)

Публикации стандартного уровня:

1. Parsegov, S., Polyakov, A., Shcherbakov, P., Fixed-time consensus algorithm for multiagent systems with integrator dynamics, *Proc. IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems NecSys-2013*, Koblenz, Germany, pp. 110-115, 2013, Scopus Q3 (автором диссертации предложен сверхфинитный протокол управления для консенсуса в сетевой системе и доказаны утверждения о достижении консенсуса и времени сходимости (Теорема 5, Следствие 6))

2. Parsegov, S., Shcherbakov, P., Chebotarev, P., Erofeeva, V., Rogozin, A., Laplacian Spectra of Two-Layer Hierarchical Cyclic Pursuit Schemes *9th IFAC Conference on Networked Systems NecSys-2022*, IFAC-PapersOnLine, Vol. 55, No. 13, pp. 246-251, 2022, Scopus Q3 (автором диссертации предложены два типа иерархических структур циклического преследования, доказан результаты о предельном расположении спектров лапласовских матриц)

Прочие публикации:

1. Parsegov, S.E., Proskurnikov, A.V., Uniform deployment of second-order agents on a line segment, *Proc. IEEE 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems-2014*, pp. 631-636, 2014, Scopus (автором диссертации предложены модели агентов второго порядка для задачи равноудаленного расположения агентов на заданном отрезке и иерархическое обобщение стратегии; доказаны утверждения о стабилизации)

2. Parsegov, S.E., Chebotarev, P.Yu., Second-order agents on ring digraphs, *Proc. 22nd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, pp. 609-614, 2018, Scopus (автором диссертации предложены модели агентов второго порядка для задачи иерархического циклического преследования; доказаны утверждения о локализации спектра лапласовской матрицы на овалах Кассини и консенсусе на основе критерия Поляка-Цыпкина)

Доклады на конференциях и семинарах:

1. The 5th Traditional youth school "Control, information and optimization", Solnechnogorsk, 20.06.2013, "Fixed-time consensus."

2. 51st IEEE Conference on Decision and Control-2012, Maui, USA, 10-13.12.2012 "Nonlinear fixed-time control protocol for uniform allocation of agents on a segment."

3. IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems NecSys-2013, Koblenz, Germany, 25-26.09.2013, "Fixed-time consensus algorithm for multiagent systems with integrator dynamics."

4. 6th IEEE International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems-2014, Saint Petersburg, Russia, 06-08.10.2014, "Uniform deployment of second-order agents on a line segment."

5. 54th IEEE Conference on Decision and Control-2015, Osaka, Japan, 15-18.12.2015, "A new model of opinion dynamics for social actors with multiple interdependent attitudes and prejudices."

6. All-Moscow regular scientific seminar "Control Theory and Optimization" in Institute for Control Sciences, Moscow, 18.10.2016, "From consensus to clustering: A novel model of opinion dynamics in social networks."

7. 22nd IEEE International Conference on System Theory, Control and Computing ICSTCC-2018, Sinaia, Romania, 10-12.10.2018, "Second-order agents on ring digraphs."

8. 22nd IEEE International Conference on System Theory, Control and Computing ICSTCC-2018, Sinaia, Romania, 10-12.10.2018, "Solutions of discrete time linear systems: upper bounds on deviations."

9. All-Moscow regular scientific seminar "Control Theory and Optimization" in Institute for Control Sciences, Moscow, 20.11.2018, "The Polyak-Tsypkin criterion: From stability to consensus."

10. Math seminar of Phystech School of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow, 23.11.2018, "Multi-agent systems and opinion dynamics in social networks."

11. 3rd IFAC Conference on Cyber-Physical & Human Systems CPHS-2020, Shanghai, China, 03-05.12.2020, "ADMM-based Distributed State Estimation for Power Systems: Evaluation of Performance."

12. All-Moscow regular scientific seminar “Control Theory and Optimization” in Institute for Control Sciences, Moscow, 19.04.2022, “Hierarchical cyclic pursuit: Algebraic curves containing spectra of Laplacian matrices.”

13. 9th IFAC Conference on Networked Systems NecSys-2022, Zürich, Switzerland, 05-07.07.2022, “Laplacian Spectra of Two-Layer Hierarchical Cyclic Pursuit Schemes.”

14. 9th IFAC Conference on Networked Systems NecSys-2022, Zürich, Switzerland, 05-07.07.2022, “A General Framework for Distributed Partitioned Optimization.”

15. IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation MED-2023, Limassol, Cyprus, 26-29.06.2023, “Distributed State Estimation for Multi-Area Data Reconciliation.”

Обзор основных результатов

Изложение результатов работы начинается с проблем динамики мнений: представлено многомерное обобщение модели Фридкина-Джонсена с динамикой взаимозависимых мнений, проанализированы его свойства, устойчивость, а также решены связанные с новой моделью задачи. Далее рассматривается задачу равномерного расположения агентов на отрезке и предлагаются 1) ее обобщение на случай агентов второго порядка, 2) новое распределенное управление с нелинейной обратной связью, гарантирующее стабилизацию за конечное глобально ограниченное время. Внимание также уделяется базовой проблеме консенсуса в сетях со специальными нелинейными связями. Затем рассматривается особый тип алгоритмов консенсуса, известный как циклическое преследование, и предлагаются новые иерархические схемы с агентами высокого порядка с последующим анализом спектров соответствующих лапласовских матриц и достижимости консенсуса.

2.1 Динамика мнений с взаимозависимыми темами обсуждения

В модели Фридкина-Джонсена рассматривается сообщество из N социальных агентов, межличностное влияние которых определяется стохастической матрицей $W = (w_{ij}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Эта матрица ассоциирована с графом $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, в котором множество вершин $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, N\}$ находится в взаимно-однозначном соответствии с агентами, а $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ состоит из всех таких пар (i, j), что $w_{ij} > 0$. Диагональный элемент w_{ii} рассматривается как мера *упрямства* или *закрытости* i-го агента от межличностного влияния. Если $w_{ii} = 1$, то $w_{ij} = 0 \, \forall j \neq i$, что означает, что агент максимально упрям и полностью игнорирует мнения своих соседей.Будем называть таких агентов *полностью упрямым* в том смысле, что они сохраняют свои мнения неизменными: $x_i(k) = u_i$. И наоборот, если $w_{ii} = 0$, то агент полностью открыт для межличностного влияния, не придает никакого значения собственному мнению и полностью полагается на мнения других. Элементы $\lambda_{ii} = 1 - w_{ii}$ диагональной матрицы $\Lambda = I - \operatorname{diag} W$ можно рассматривать как *восприимчивость* агентов к мнениям соседей.

Вводя вектор скалярных мнений на k-м шаге $x(k) = (x_1(k), \ldots, x_N(k))^\top$, динамика мнений модели Фридкина-Джонсена примет вид

$$x(k+1) = \Lambda W x(k) + (I - \Lambda) u, \quad u := x(0). \tag{2.1}$$

Линейная система (2.1) устойчива тогда и только тогда, когда ΛW устойчива по Шуру, при этом вектор мнений сходится к [1]

$$x' := \lim_{k \to \infty} x(k) = (I - \Lambda W)^{-1} (I - \Lambda) u. \tag{2.2}$$

Устойчивые мнения x'_j обычно *не согласованы*, например, из-за наличия нескольких полностью упрямых агентов. Причем, в отличие от консенсусной динамики ДеГроота, консенсус обычно не достигается даже для неразложимой и апериодической матрицы W. Устойчивость модели Фридкина-Джонсена (2.1) может быть переформулирована в графо-теоретических терминах.

Предположение 1 *Любая вершина графа $\mathcal{G}$ соединена путём*[2] *хотя бы с одной*

[1]Сходимость к равновесию (2.2) может иметь место и в том случае, если система (2.1) на границе устойчивости, т.е. $\rho(\Lambda W) = 1$, однако она не устойчива к численным ошибкам. Необходимые и достаточные условия для (2.2) рассматриваются в [3].

[2]По определению, если $w_{ii} > 0$, то $\mathcal{G}$ имеет петлю (i, i), так что существует путь из вершины i к самой себе; т.е, любой упрямый агент находится под влиянием самого себя.

вершиной r с $w_{rr} > 0$. Иными словами, любой агент находится под влиянием хотя бы одного "упрямого" агента.

Предположение 1 выполняется, например, если граф сильно связный.

Следующий результат дает необходимое и достаточное условие устойчивости модели Фридкина-Джонсена.

Теорема 1 *Если W является стохастической и $\Lambda = I - \operatorname{diag} W$, то $\rho(\Lambda W) < 1$ тогда и только тогда, когда выполняется предположение 1.*

Замечание 1 *Сходимость динамики общего вида (2.1), где Λ может быть произвольной диагональной матрицей с $0 \le \lambda_{ii} \le 1$, рассматривается в работе [3], где предложено общее условие устойчивости по Шуру матрицы ΛW.*

2.1.1 Многомерное обобщение

В этом разделе предлагается обобщение модели Фридкина-Джонсена на случай с векторными мнениями $x_1(k), \dots, x_N(k) \in \mathbb{R}^m$ агентов. Элементы каждого вектора $x_i(k) = (x_i^1(k), \dots, x_i^m(k))$ обозначают *отношение* агента i к m различным темам, которые мы называем *темами обсуждения*. В простейшей ситуации, когда агенты общаются на m совершенно не связанных между собой тем, естественно предположить, что конкретные элементы векторов мнений агентов (мнения по j-ой теме обсуждения) $x_1^j(k), x_2^j(k), \dots, x_N^j(k)$ удовлетворяют модели (2.1) для любых $j = 1, \dots, m$, то есть

$$x_i(k+1) = \lambda_{ii} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j(k) + (1 - \lambda_{ii}) u_i,\ u_i := x_i(0). \tag{2.3}$$

Однако если эти темы связаны друг с другом, то можно ожидать наличие зависимостей между соответствующими обсуждаемыми вопросами. Рассмотрим, например, группа людей, обсуждающих две темы: рыба в целом и лосось. Понятие "лосось" вложено в понятие "рыба". Если кому-то не нравится рыба, то ему не будет нравиться и лосось. Если процесс влияния изменяет отношение человека к рыбе, например, пропагандирует рыбу как полезную часть диеты, то открывается возможность влияния на "лосося" как часть этой диеты. Если же, напротив, процесс влияния изменяет отношение людей к рыбе, например, предупреждает о том, что рыба теперь загрязнена токсичными химикатами, то дверь для влияния на лосося как часть этой диеты закрыта.

Для учета зависимостей между различными вопросами изменим динамику (2.3) следующим образом[3].

$$x_i(k+1) = \lambda_{ii} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j(k) + (1-\lambda_{ii}) u_i, \; y_j(k) := C x_j(k), \tag{2.4}$$

и $u_i = x_i(0)$ – предубеждение агента i. Здесь C – стохастическая матрица[4] *структуры взаимосвязанных тем обсуждения, англ. multi-issues dependence structure* (далее MiDS-матрица), а $y_j(k)$ будем называть *вкладом* мнения j на k-ом шаге. Для $C = I_N$ модель (2.4) совпадает с (2.3), а вклад в данном случае – это просто вектор мнений. В общем же случае его компонентами являются "смешанные" мнения, т.е. выпуклые комбинации (взвешенные суммы) мнений j-го агента по нескольким темам обсуждения.

Для пояснения роли матрицы MiDS и воздействий рассмотрим сеть с топологией типа "звезда", в которой все агенты следуют за одним абсолютно упрямым лидером, т.е. существует $j \in \{1, \dots, N\}$ такой, что $w_{ij} = 1 \, \forall i$ и, следовательно, $x_i(k+1) = y_j(k) = C u_j$. Изменения мнений в этой системе – это движения мнений последователей в сторону исходных мнений лидера, причем эти движения происходят строго под прямым воздействием лидера. Элементы матрицы MiDS определяют относительный вклад каждого из компонентов мнения лидера по нескольким темам в формирование мнений последователей по каждому вопросу. В общем случае, поскольку $y_i^p(k+1) = \sum_{q=1}^{m} c_{pq} x_i^q(k)$, вес c_{pq} определяет влияние q-го компонента мнения на p-й компонент. В нашем примере c_{pq} – это вклад q-го элемента мнения лидера в p-й элемент мнения

[3] Другой способ описания разработанной модели представлен в [2]

[4] Матрицы более общего вида исследовались в [3].

последователя.

Введя стековые векторы мнений $x(k) = (x_1(k)^\top, \dots, x_N(k)^\top)^\top$ и предубеждений $u = (u_1^\top, \dots, u_N^\top)^\top$, динамику (2.4) можно записать в виде

$$x(k+1) = (\Lambda W) \otimes C\, x(k) + (I_N - \Lambda) \otimes I_m\, u. \tag{2.5}$$

Два естественных вопроса, рассматриваемых ниже, касаются устойчивости модели (2.5) и идентификации матрицы MiDS C при наличии информации о W и мнениях.

2.1.2 Сходимость и установившиеся мнения

Устойчивость системы (2.5) сводится к вопросу о том, когда матрица $A = \Lambda W \otimes C$ устойчива по Шуру, т.е. $\rho(A) < 1$. Для ответа на него напомним, что собственные значения A являются произведениями $\lambda_i \mu_j$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ – собственные значения ΛW, а $\mu_1, \dots, \mu_m$ – собственные значения C; следовательно, $\rho(A) = \rho(\Lambda W)\rho(C)$. Отсюда следует следующее.

Теорема 2 *Система* (2.5), *в которой* $\Lambda = I - \operatorname{diag} W$ *и* C *является строчно-стохастической, устойчива тогда и только тогда, когда выполняется предположение 1. Если оно выполняется, то для любого предрассудка (начального мнения)* $u = x(0)$ *существует предел*

$$x'_C := \lim_{k \to \infty} x(k) = (I_{Nm} - (\Lambda W) \otimes C)^{-1}((I_N - \Lambda) \otimes I_m)u. \tag{2.6}$$

Теорема 2 показывает, что введение взаимозависимостей между вопросами не меняет условия устойчивости при условии, что матрица MiDS является рядно-стохастической. Более того, рассматривая доказательство, можно заметить, что устойчивость фактически не требует стохастичности C и может иметь место даже для некоторых *неустойчивых по Шуру* матриц C, при условии, что $\rho(C) < \dfrac{1}{\rho(\Lambda W)}$. Однако важным свойством модели со строчно-стохастической матрицей MiDS, которой мы ограничиваемся, является ограниченность решения независимо от устойчивости системы: Для любых $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, m$ имеем $\underline{M} \leq x_i^j(k) \leq \overline{M}$, где $\underline{M} = \min\limits_{i,j} x_i^j(0)$ и $\overline{M} = \max\limits_{i,j} x_i^j(0)$.

2.1.3 Идентификация MiDS-матрицы

Ключевая проблема, связанная с целесообразностью исследования матриц MiDS, заключается в том, можно ли их оценить на основе измерений мнений агентов и их сети влияния. Предположим, что известна матрица социальных влияний W и, следовательно, матрица восприимчивостей $\Lambda = I - \operatorname{diag} W$, зависящая от агентов и топологии сети. Вопрос заключается в том, как найти матрицу MiDS C (в предположении, что она существует). Типичный эксперимент, в ходе которого агенты общаются по одному вопросу, начиная с известных исходных мнений, может быть развит на случай с несколькими темами обсуждения. Пусть $\hat{x}'$ – вектор оценок итоговых мнений. Естественная идея состоит в том, чтобы найти C (будучи строчно-стохастической) таким образом, чтобы минимизировать расстояние (в некоторой норме) между x'_C, заданным (2.6), и $\hat{x}'$: $\|\hat{x}' - x'_C\| \to \min$. Однако решить эту задачу не так просто, поскольку имеет место невыпуклость x'_C по C. Чтобы избежать невыпуклой оптимизации, модифицируем задачу. Пусть $\varepsilon = [I_{mn} - \Lambda W \otimes C]\hat{x}' - [(I_N - \Lambda) \otimes I_m]u$. Заметим, что если $\hat{x}' = x'_C$, то $\varepsilon = 0$, поэтому идея состоит в том, чтобы минимизировать норму ε с учетом всех стохастических матриц C, придя, таким образом, к выпуклой оптимизационной задаче следующего вида:

$$\|\varepsilon\| \to \min \tag{2.7}$$

$$\varepsilon = [I_{mN} - \Lambda W \otimes C]\hat{x}' - [(I_N - \Lambda) \otimes I_m]u \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} = 1 \quad \forall i, \quad c_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j. \tag{2.9}$$

Следует отметить, что даже при минимуме (2.7), равном нулю, система линейных уравнений (2.8),(2.9) (где C неизвестно) является переопределенной, если $N \leq m - 1$, имея в сумме $mN + m = (N + 1)m$ уравнений для m^2 неизвестных.

Можно заметить, что для случая евклидовой нормы $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ задача оптимизации (2.7)-(2.9) является задачей выпуклого квадратичного программирования, тогда как для l^∞- и l^1-норм она сводится к линейному программированию. Единственной особенностью, препятствующей использованию стандартных решателей, является нестандартная форма ограничения равенства (2.8), использующая неизвестную матрицу C и операцию произведения Кронекера, тогда как стандартные QP и LP задачи имеют дело с ограничениями $A\xi = b$, где A – матрица, b – известный вектор, а ξ – вектор-столбец неизвестных. Для переписывания ограничений в стандартной форме можно воспользоваться тождеством $\operatorname{vec} \mathcal{A}\mathcal{B} = (I_N \otimes \mathcal{A}) \operatorname{vec} \mathcal{B} = (\mathcal{B}^\top \otimes I_m) \operatorname{vec} \mathcal{A}$.

Пусть $\hat{x}'_i$ – предполагаемое окончательное мнение агента i, а матрица $\hat{X} = [\hat{x}'_1, \dots, \hat{x}'_N]$ содержит эти векторы в качестве столбцов, так что $\hat{x}' = \operatorname{vec} X$. Применение приведенного выше тождества для $\mathcal{A} = C$ и $\mathcal{B} = \hat{X}$ приводит к тому, что $[I_N \otimes C]\hat{x}' = [\hat{X}^\top \otimes I_m] \operatorname{vec} C$, таким образом $[\Lambda W \otimes C]\hat{x}' = [\Lambda W \otimes I_m][I_N \otimes C]\hat{x}' = [\Lambda W \hat{X}^\top \otimes I_m] \operatorname{vec} C$. Если ввести вектор $c = \operatorname{vec} C$, то (2.8) преобразуется в

$$\varepsilon + [\Lambda W \hat{X}^\top \otimes I_m]c = \hat{x}' - [(I_N - \Lambda) \otimes I_m]u, \tag{2.10}$$

где вектор в правой части известен, а $\Lambda W \hat{X}^\top \otimes I_m$ – известная матрица.

2.1.4 Рандомизированная модель распространения сплетен

Ограничением модели (2.5), унаследованной от исходной модели Фридкина-Джонсена, является *синхронная* коммуникация. На каждом шаге агенты одновременно одновременно общаются со всеми своими соседями, что маловероятно в крупномасштабной социальной сети. Более реалистичной является *gossip*-коммуникация, предполагающая, что на каждом шаге взаимодействует только одна пара агентов. Рандомизированная версия модели Фридкина-Джонсена, основанная на идее распространения сплетен.

Идея такой модели состоит в следующем. Каждый агент начинает коммуникацию с некоторым начальным мнением $u_i = x_i(0)$. На каждом шаге из графа $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ с равномерным распределением случайным образом выбирается дуга, соответствующая матрице социальных влияний W. Если эта дуга (i, j), то агент i встречается с агентом j и обновляет свое мнение в соответствии с

$$x_i(k+1) = h_i\left((1-\gamma_{ij})x_i(k) + \gamma_{ij}x_j(k)\right) + (1-h_i)u_i. \tag{2.11}$$

Таким образом, новое мнение агента представляет собой средневзвешенное значение его предыдущего мнения, предрассудков и предыдущего мнения соседа. Мнения других агентов при этом остаются неизменными.

$$x_l(k+1) = x_l(k) \quad \forall l \neq i. \tag{2.12}$$

Известно, что при правильном выборе коэффициентов h_i и γ_{ij} матожидание $\mathbb{E}x(k)$ сходится к тому же устойчивому значению x', что и модель Фридкина-Джонсена, и, более того, процесс является *эргодическим*. Другими словами, как вероятностные средние, так и средние по времени случайных мнений сходятся к окончательному мнению модели фридкина-Джонсена. Следует отметить, что сами мнения *не сходятся*, а колеблются вокруг своих ожидаемых значений. Ниже обсуждается развитияе данной схемы на случай многомерных мнений.

Рассмотрим модификацию вышеупомянутого алгоритма (2.11),(2.12) следующим образом. Дуга $e \in \mathcal{E}$ распределена равномерно случайным образом; при выборке дуги $e = (i, j)$ агент i обновляет свое мнение в соответствии с

$$x_i(k+1) = (1-\gamma_{ij}^1-\gamma_{ij}^2)x_i(k) + \gamma_{ij}^1 C x_j(k) + \gamma_{ij}^2 u_i. \tag{2.13}$$

Здесь $\gamma_{ij}^1, \gamma_{ij}^2 \geq 0$ и $\gamma_{ij}^1 + \gamma_{ij}^2 \leq 1$, следовательно, при каждом взаимодействии мнение агента усредняется с его собственным *предрассудком* и *воздействием* соседа. Другие агенты не меняют своего мнения, т.е. (2.12) выполняется.

Следующая теорема показывает, что при выполнении предположения 1, гарантирующем устойчивость детерминированной многомерной модели (2.6), и правильном выборе Γ^1, Γ^2 модель (2.13),(2.12) имитирует предельное поведение детерминированной модели (2.5) в указанном выше смысле.

Теорема 3 *Пусть предположение 1 выполняется, C является строчно-стохастической, $\Gamma^1 = \Lambda W$ и $\Gamma^2 = (I - \Lambda)W$, причем $\Lambda = I - \operatorname{diag} W$. Тогда предел $x_* = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{E}x(k)$ существует и равен мнению устойчивого состояния* (2.6) *FJ-модели* (2.1)*: $x_* = x'_C$. Более того, случайный процесс $x(k)$ является* почти наверное эргодическим *и* среднеквадратичным эргодическим*: $\bar{x}(k) \to x_*$ с вероятностью 1 и $\mathbb{E}\|\bar{x}(k) - x_*\|_2^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, где*

$$\bar{x}(k) := \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} x(l). \tag{2.14}$$

2.2 Равноудаленное выстраивание на отрезке

Управление формациями – одна из важнейших областей применения многоагентных систем, целью которой является создание группой агентов желаемых неподвижных или подвижных геометрических образов правильной формы.

Один из алгоритмов развертывания агентов N на неподвижном отрезке прямой с фиксированными точками x_0 и x_{N+1} основан на концепции усреднения, когда каждый агент движется к середине отрезка, соединяющего двух его соседей, измеряя только относительные расстояния до них. Структура протокола равномерного размещения агентов на отрезке напоминает алгоритмы консенсуса в многоагентной системе, но в отличие от них приводит к замкнутой системе с единственным глобально устойчивым равновесием.

Полагая, что динамика агента имеет первый порядок

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) \in \mathbb{R}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \tag{2.15}$$

Распределенный протокол управления, обеспечивающий равномерное расположение на основе только лишь локальных взаимодействий, имеет вид:

$$u_i(t) = 0.5(x_{i-1}(t) - x_i(t)) + 0.5(x_{i+1}(t) - x_i(t)),\ i \in \{1, \dots, N\}. \tag{2.16}$$

В компактной форме динамика всей системы может быть записана следующим образом

$$\dot{x} = Ax + b, \tag{2.17}$$

где матрица A и вектор b имеют вид

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0.5 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \tag{2.18}$$

$$b := [0.5x_0, 0, \dots, 0, 0.5x_{N+1}]^\top \in \mathbb{R}^N. \tag{2.19}$$

Трехдиагональная матрица A имеет собственный числа

$$\lambda_k = -2\sin^2 \frac{k\pi}{2(N+1)}, \quad k \in \{1, \dots, N\}. \tag{2.20}$$

Поскольку $\lambda_k < 0, k \in \{1, \dots, N\}$, матрица является гурвицевой, а система (2.17) имеет единственное экспоненциально устойчивое положение равновесия:

$$x_* := -A^{-1}b = x_0[1, \dots, 1]^\top + \frac{x_{N+1} - x_0}{N+1}[1, 2, \dots, N]^\top \in \mathbb{R}^N. \tag{2.21}$$

Предположения о том, что агент имеет простейшую динамику одиночного интегратора, то есть его скорость может управляться напрямую, и что связи между агентами линейны, являются достаточно ограничительными. Мы предлагаем: 1) обобщение алгоритма усреднения на случай более реалистичных моделей агентов, подчиняющихся уравнениям второго порядка; 2) нелинейный закон управления для равномерного выстраивания за конечное время независимо от начальных условий, распространяемый также на случай возмущенных агентов.

2.2.1 Устойчивость и сходимость динамики второго порядка

Здесь мы рассмотрим проблему равномерного размещения агентов с более реалистичной *динамикой второго порядка.*

$$\dot{x}_i + a\dot{x}_i = u_i, \quad i \in \{1, \ldots, N\}. \tag{2.22}$$

Здесь $a \geq 0$ означает постоянный коэффициент трения, в случае, когда $a = 0$, модель (2.22) является моделью двойного интегратора. Задачи многоагентного консенсуса и управления формирмацией для агентов второго порядка в последнее время вызывают большой интерес, в основном обусловленный проблемами многоагентной мобильной робототехники.

Далее приведены основные результаты, которые представляют собой распределенные протоколы для равномерного размещения агентов второго порядка (2.22) на отрезке прямой с фиксированными конечными точками.

Для начала мы исследуем применимость алгоритма (2.16) для агентов второго порядка (2.22). Введем некоторые обозначения. Для двух чисел p, q $\mathbb{R}$ пусть $h_1(p, q), h_2(p, q) \in \mathbb{C}$ – два корня (вещественных или комплексных) уравнения $h^2 + hp + q = 0$ и $H(p, q) := \max(Re\, h_1(p, q), Re\, h_2(p, q))$. Другими словами,

$$H(p,q) = \begin{cases} -p/2, & p^2 - 4q < 0 \\ \dfrac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, & p^2 - 4q \geq 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Следующая теорема показывает, что при наличии демпфирования скорости ($a > 0$) протокол оказывается применимым к такого рода агентам; также оценивается скорость сходимости.

Теорема 4 *Пусть $a > 0$. Тогда протокол (2.16) обеспечивает равномерное расположение агентов (2.22) на отрезке прямой с конечными точками x_0 и x_{N+1}, то есть $x(t) \to x_*$ и $\dot{x}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Сходимость экспоненциальная:*

$$\|x(t) - x_*\| + \|\dot{x}(t)\| \leq Ce^{-\mu t}, \tag{2.24}$$

где $C = C(x(0), \dot{x}(0))$ и $\mu := -H(a, \hat{\lambda}) > 0$.

В отсутствие трения ($a = 0$) протокол (2.16), очевидно, не приводит к равномерному распределению агентов, так как система (2.17) является только устойчивой по Ляпунову, но не экспоненциально устойчивой, допуская, например, решения $x(t) = x_* + Re[v_k e^{i\omega_k}]$, где v_k – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_k, а $\omega_k := \sqrt{|\lambda_k|}$. Тем не менее, Теорема 4 предполагает следующую модификацию протокола (2.16), применимую не только для двойного интегратора, но даже для случая неустойчивого агента (2.22) ($a < 0$).

Следствие 1 *Следующий алгоритм управления*

$$u_j(t) = -\varkappa \dot{x}_j(t) + 0.5(x_{j-1}(t) - x_j(t)) + 0.5(x_{j+1}(t) - x_j(t)) \tag{2.25}$$

обеспечивает равномерное размещение на отрезке прямой с конечными точками x_0 и x_{N+1} во всех случаях, когда $a + \varkappa > 0$. Протокол обеспечивает экспоненциальную сходимость со скоростью (2.24) при $\mu := -H(a + \varkappa, \hat{\lambda}) > 0$.

В отличие от протокола (2.16), алгоритм (2.25) использует не только относительные измерения, но и *абсолютную* скорость агента. агента. Существуют некоторые классы приложений, в которых скорость может быть доступна, даже если агенты не могут измерить свое абсолютное положение. Например, Например, морские транспортные средства могут быть оснащены электромагнитными или доплеровскими датчиками, которые измеряют скорость над водой или над землей, давая, однако, очень неточные абсолютные измерения положения. неточные измерения абсолютного положения. Для практической реализации, однако, желательно иметь алгоритм равномерного размещения агентов с моделью двойного интегратора ($a = 0$), основанный только на относительных измерениях. Мы рассматриваем следующий алгоритм управления

$$\begin{gathered} u_i(t) = 0.5(x_{i-1}(t) - x_i(t)) + 0.5(x_{i+1}(t) - x_i(t)) + \\ +0,5p(\dot{x}_{i-1}(t) - \dot{x}_i(t)) + 0,5p(\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)),\ i \in 1 : N. \end{gathered} \tag{2.26}$$

Здесь $p > 0$ – постоянный коэффициент. Следующий результат показывает, что протокол (2.26) равномерно распределяет агентов на отрезке прямой и обеспечивает экспоненциальную сходимость.

Теорема 5 *Пусть* $a = 0$ *и* $p > 0$. *Тогда протокол* (2.26) *обеспечивает равномерное расположение агентов* (2.42) *на отрезке прямой с конечными точками* x_0 *и* x_{N+1}, *то есть* $x(t) \to x_*$ *и* $\dot{x}(t) \to 0$, *так как* $t \to +\infty$, *более того,* (2.24) *имеет место при*

$$\mu = -\max_k H(-p\lambda_k, -\lambda_k) > 0, \text{ где } \lambda_k \text{ из (2.20)}. \tag{2.27}$$

Протокол (2.26) позволяет равномерно размещать агентов, используя только измерения относительной скорости. Однако при ближайшем рассмотрении оказывается, что на самом деле прямого измерения скорости можно избежать за счет замедления сходимости. Обозначим $w_i(t) := 0,5(x_{i-1}(t) + x_{i+1}(t)) - x_i(t)$, Алгоритм (2.26) можно переписать в виде $u_i(t) = w_i(t) + p\dot{w}_i(t)$. Идея заключается в замене производной $\dot{w}_i(t)$ на выход низкочастотного фильтра с дифференциатором $\dot{w}_i(t) \approx \dot{y}_i(t)$, где

$$\dot{y}_i(t) = -\gamma y_i(t) + w_i(t),\ \gamma > 0.$$

Таким образом, алгоритм (2.26) преобразуется в следующий

$$\begin{aligned} u_i(t) &= w_i(t) + p\dot{y}_i(t) = (1+p)w_i(t) - p\gamma y_i(t), \\ \dot{y}_i(t) &= -\gamma y_i(t) + w_i(t) \\ w_i(t) &= 0.5(x_{i-1}(t) - x_i(t)) + 0.5(x_{i+1}(t) - x_i(t)). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Протокол (2.28) также обеспечивает равномерное размещение с экспоненциальной сходимостью, что подтверждается следующей теоремой.

Теорема 6 *Пусть $a = 0$ и $p, \gamma > 0$. Тогда протокол* (2.28) *обеспечивает равномерное размещение агентов* (2.22) *на отрезке прямой с конечными точками x_0 и x_{N+1}, то есть $x(t) \to x_*$ и $\dot{x}(t) \to 0$, при $t \to +\infty$, более того,* (2.24) *имеет место, где*

$$\mu = -\max\{Re\, z : z^3 + \gamma z^2 - (p+1)\lambda_k z - \gamma\lambda_k = 0\} > 0. \tag{2.29}$$

Также получены теоретические результаты по иерархическому равномерному размещению агентов на отрезке [5]. Рассматривалась группа из N агентов, разбитая на n_g подгрупп, каждая из которых содержит n агентов так, что $N = n \times n_g$. Агенты каждой подгруппы должны встретиться в заданной точке, а точки должны быть равномерно распределены на отрезке прямой с концами x_0 и x_{n_g+1}. В [4] рассмотрена связь размещения на отрезке с консенсусом: показано, что консенсус достигается в терминах расстояний между агентами.

2.2.2 Сверхфинитное размещение агентов на отрезке

Рассмотрим снова группу из N пронумерованных мобильных агентов. Пусть их позиции в момент времени $t \geq 0$ обозначаются через $x_i(t)$ $\mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, и пусть x_0, x_{N+1} обозначают зафиксированные конечные точки отрезка. Аналогично исходной задаче расположения на отрезке, динамическая модель каждого агента описывается интегратором:

$$\dot{x}_i = u_i + d_i(t, x), \quad i = \{1, \ldots, N\}, \tag{2.30}$$

где $u_i \in \mathbb{R}$ – управление, $x = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^\top$, $d_i(t, x)$ – ограниченное внешнее возмущение

$$|d_i(t, x)| \leq d_{\max}, \tag{2.31}$$

причем неотрицательное число $d_{\max}$ предполагается заданным.

Сначала мы остановимся на случае $d_i(t, x_i) \equiv 0$. Прежде чем приступить к получению протокола нелинейного управления, введем функцию $\phi(s), s \in \mathbb{R}$, определяемую следующим образом

$$\phi(s) := \alpha s^{[p]} + \beta s^{[q]}, \quad 0 < p < 1, \quad q > 1, \tag{2.32}$$

где α, β – некоторые положительные константы и

$$s^{[k]} := \mathrm{sign}(s)|s|^k. \tag{2.33}$$

Рассмотрим теперь следующий нелинейный закон управления для каждого отдельного агента:

$$u_i = \phi\left(0.5(x_{i-1} - x_i) + 0.5(x_{i+1} - x_i)\right). \tag{2.34}$$

Тогда общая динамика всей нелинейной системы из n агентов имеет вид

$$\dot{x} = \bar{\phi}(Ax + b), \tag{2.35}$$

где матрица A и вектор b определяются через (2.18) и (2.19), а векторно-значная функция $\bar{\phi}$ задается следующим образом

$$\bar{\phi}(z) := [\phi(z_1), \phi(z_2), \ldots, \phi(z_N)]^\top,$$
$$z = [z_1, z_2, \ldots, z_N]^\top \in \mathbb{R}^N.$$

Теорема 7 *Предположим, что $d_i(t, x_i) \equiv 0$ и пусть протокол управления u_i определяется* (2.34) *при $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < p < 1$, $q > 1$. Тогда агенты многоагентной системы* (2.42) *равномерно распределяются на отрезке за сверхфинитное время, а функция времени установления глобально (по всем начальным условиям) ограничена константой $T_{\max}$, которая определяется*

$$T_{\max} := \frac{2}{\alpha(1-p)(2|\hat{\lambda}|)^{\frac{p+1}{2}}} + \frac{2n^{\frac{q-1}{2}}}{\beta(q-1)(2|\hat{\lambda}|)^{\frac{q+1}{2}}}, \tag{2.36}$$

где $\hat{\lambda} = \max\limits_k \lambda_k = -2\sin^2 \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.

Можно получить более точную оценку. В частности, рассмотрим случай, когда константы p и q имеют вид $p = 1 - \dfrac{1}{2\mu}$ и $q = 1 + \dfrac{1}{2\mu}$, $\mu > 1$. и $q = 1 + \dfrac{1}{2\mu}$, $\mu > 1$.

Следствие 2 *Если в условиях Теоремы 1 постоянные p и q системы (2.35) выбрать в виде $p = 1 - \dfrac{1}{\mu}$ и $q = 1 + \dfrac{1}{\mu}$, то как $p = 1 - \dfrac{1}{\mu}$ и $q = 1 + \dfrac{1}{\mu}$, $\mu > 1$, то оценка времени установления может быть найдена как*

$$T_{\max} := \frac{\pi \mu n^{\frac{1}{4\mu}}}{2|\hat{\lambda}|\sqrt{\alpha\beta}}. \tag{2.37}$$

Оценка (2.37) приводит к важному выводу, а именно, систему можно заставить иметь любое *a priori* заданное время установления, правильно выбрав параметры μ, α и β.

Для придания представленному протоколу управления свойства робастности по отношению к ограниченным возмущениям, рассмотрим следующую простую модификацию функции ϕ:

$$\varphi(s) := \alpha s^{[p]} + \beta s^{[q]} + d_{\max} \operatorname{sign}(s),$$

где $0 < p < 1, q > 1, \alpha > 0, \beta > 0$.

Следствие 3 *Пусть протокол управления u_i определяется следующим образом*

$$u_i = \varphi\left(\frac{1}{2}(x_{i-1} - x_i) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\right). \tag{2.38}$$

Тогда Теорема 1 и Следствие 1 остаются справедливыми при наличии ограниченных возмущений (2.31)*, $d_i(t,x) \not\equiv 0$.*

2.3 Консенсус

Простейшая модель консенсуса первого порядка (модель агента имеет вид интегратора) выглядит следующим образом. Рассмотрим группу из N идентичных агентов:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{2.39}$$

Управление каждым агентом осуществляется по следующему протоколу:

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x_j - x_i), \quad i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{2.40}$$

где $a_{ij} \geq 0$ – элементы матрицы смежности соответствующего графа связи (веса дуг этого графа), и $a_{ij} = 0$, если соответствующие агенты не связаны.

Соответствующее описание в пространстве состояний имеет вид

$$\dot{x} = -\mathcal{L}x, \quad x = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^\top, \tag{2.41}$$

$$l_{ii} = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} a_{ij}, \quad l_{ij} = -a_{ij}, \quad i \neq j.$$

Консенсус означает, что

$$\lim_{t\to\infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, N\}.$$

Справедливость последнего равенства эквивалентна следующим свойствам: Матрица Лапласа $\mathcal{L}$ имеет простое нулевое собственное значение $\lambda_1 \equiv 0$ с соответствующим собственным вектором $\mathbf{1}_N$, остальные собственные значения принадлежат правой полуплоскости (а); орграф связи содержит ориентированное остовное дерево (б); ранг $\mathcal{L}$ равен $N-1$ (в).

Классическая модель консенсуса, представленная выше, является линейной и, следовательно, не может достигать консенсуса за конечное время. Модели агентов типа интегратор являются упрощением и идеализацией: для более сложных моделей агентов существования ориентированного остовного дерева недостаточно для достижения консенсуса. Далее рассматривается нелинейную модель консенсуса, обеспечивающую сходимость за конечное глобально ограниченное время. Предлагаются также новые модели агентов высокого порядка и критерий консенсуса, не зависящий от числа агентов в сети, для специальной задачи консенсуса, известной как иерархическое циклическое преследование. Для этой задачи был разработан метод точной локализации спектров матрицы Лапласа с помощью алгебраических кривых высокого порядка.

2.3.1 Консенсус с фиксированным временем в неориентированных сетях

Рассмотрим группу из N пронумерованных мобильных агентов. Пусть их положение в момент времени $t \geq 0$ обозначается $x_i(t)$ $\mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., N$.

Динамическая модель каждого агента описывается простым интегратором:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{2.42}$$

где $u_i \in \mathbb{R}$ – обратная связь по состоянию, называемая протоколом управления, который должен быть разработан на основе информации, полученной агентом i от его соседей, и $x = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^\top$.

Ставится задача разработать протокол управления с обратной связью u_i, который решает задачу среднего консенсуса за фиксированное время для всех начальных условий, т.е. решает задачу усредняющего консенсуса за фиксированное (сверхфинитное) время для всех начальных условий, т.е. $\exists\, T_{\max} \in \mathbb{R}_+ \ : \ x_i(t) = x^*, \quad t > T_{\max}$, где $i = 1, 2, ..., N$, и $x^* := (1/N) \sum_{i=1}^{N} x_i(0)$; и использует только локальную информацию о расстояниях агента от его соседей в соответствии с топологией связи, т.е.

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} \phi_{ij}\Big(x_j - x_i\Big), \quad i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{2.43}$$

где ϕ_{ij} – непрерывные функции расстояний для всех i, j, а $\phi_{ij} = 0$, если соответствующие агенты не связаны.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда каждому ребру $\{i, j\}$ соответствует некоторая функция ϕ_{ij}, удовлетворяющая условию

$$\phi_{ij}\Big(x_j - x_i\Big) = -\phi_{ji}\Big(x_i - x_j\Big) \tag{2.44}$$

для любых двух соседних агентов i, j, причем $\phi_{ij} \equiv 0$, если между ними нет ребра. Функции функции ϕ_{ij} называются *функциями действия* или *функциями связи*.

Напомним, что $s^{[k]} := \mathrm{sign}(s)|s|^k$ и выберем следующие функции действия, удовлетворяющие условию условию (2.44):

$$\phi_{ij} = \alpha(a_{ij}(x_j - x_i))^{[\mu]} + \beta(a_{ij}(x_j - x_i))^{[\nu]}. \tag{2.45}$$

Здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in (0,1)$, $\nu > 1$ – параметры протокола управления, а $a_{ij} = a_{ji} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, – элементы матрицы смежности A.

Теорема 8 *Рассмотрим систему* (2.42) *со связной топологией, т.е. граф* $\mathcal{G}(A)$ *является связным. Тогда при протоколе управления* (2.43) *с функциями действвия* (2.45)*, система* (2.42) *решает задачу усредняющего консенсуса за конечное время, которое глобально ограничено константой* $T^1_{\max}$*:*

$$T^1_{\max} = \frac{2}{\bar{\alpha}(1-\mu)} + \frac{2}{\bar{\beta}(\nu - 1)}, \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^N, \tag{2.46}$$

где

$$\bar{\alpha} = \alpha 2^{\mu} \left(\lambda_*(\mathcal{L}_\mu)\right)^{\frac{\mu+1}{2}}, \quad \bar{\beta} = \beta 2^{\nu} N^{\frac{1-\nu}{2}} \left(\lambda_*(\mathcal{L}_\nu)\right)^{\frac{\nu+1}{2}}.$$

Здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in (0,1)$ *и* $\nu > 1$ *– параметры управления,* $\mathcal{L}_\mu$ *и* $\mathcal{L}_\nu$ *– лапласовские матрицы графов графов* $\mathcal{G}\left(A^{\left[\frac{2\mu}{\mu+1}\right]}\right)$ *и* $\mathcal{G}\left(A^{\left[\frac{2\nu}{\nu+1}\right]}\right)$*, соответственно.*

Более точная оценка может быть получена, как это сформулировано в следствии.

Следствие 4 *Если в условиях Теоремы 8 параметры* μ *и* ν *протокола* (2.43), (2.45) *выбраны как* $\mu = 1 - \dfrac{1}{\gamma}$, $\nu = 1 + \dfrac{1}{\gamma}$ *для некоторого* $\gamma > 1$*, то время установления можно оценить следующей величиной*

$$T^2_{\max} := \frac{\pi \gamma N^{\frac{1}{2\gamma}}}{2\sqrt{\alpha\beta}\big(\lambda_*(\mathcal{L}_\mu)\big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\gamma}}\big(\lambda_*(\mathcal{L}_\nu)\big)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4\gamma}}}. \tag{2.47}$$

2.3.2 Иерархическое циклическое преследование

Здесь рассматриваются несколько обобщений многоагентной стратегии *циклического преследования*. Ее история восходит к 1878 году, когда

Ж.Г. Дарбу изучал некоторую процедуру геометрического усреднения и доказал ее сходимость к консенсусу. По сути, циклическое преследование – это стратегия, в которой агент i преследует своего соседа $i-1$ по модулю N, где N – число агентов (то есть каждый агент имеет единственного соседа). Очевидно, что такая структура связи представляет собой однонаправленное кольцо или топологию “предшественник-последователь”, т.е. гамильтонов цикл. Далее рассматриваются иерархические обобщения циклической модели преследования.

Иерархия # 1 и спектры матриц Лапласа

Для корректного определения иерархического циклического следования и рассматриваемых иерархий в работе [9] вводятся понятия макровершины, кольцевого орграфа, простого и сложного колец. Кольцевой орграф можно рассматривать как гамильтонов цикл $\{(1,N),(N,N-1),\dots,(2,1)\}$, дополненный путем $\{(1,2),(2,3),\dots,(N-1,N)\}$, в котором ν $(0 \le \nu \le N-1)$ дуг отбрасываются определденным регулярный образом. В некотором смысле кольцевые орграфы заполняют промежуток между гамильтоновым циклом и двунаправленным кольцом. Очевидно, что каждый кольцевой диграф содержит ориентированное остовное дерево.

Теперь представим агентов, взаимодействующих через такие кольцевые структуры, а затем сформулируем задачу. Предполагается, что агенты имеют идентичные линейные модели с одним входом и одним выходом высокого порядка (двойной интегратор или выше). Пусть $x_i \in \mathbb{R}$ представляет собой положение агента i, $i \in \{1,\dots,N\}$. Таким образом, коммуникация по сети, направленная на достижение консенсуса, может быть описана как

$$\mathbf{a}(s)x_i = u_i, \tag{2.48}$$

$$u_i = \mathbf{b}(s)\left(\sum_{k\in\mathcal{N}_i} a_{ik}(x_k - x_i)\right), \quad i \in \{1,\dots,N\}, \tag{2.49}$$

где a_{ik} элементы матрицы смежности и $\mathcal{N}_i$ – множество соседей узла i, т.е.

множество узлов k таких, что $a_{ik} \neq 0$. Здесь $s := \dfrac{d}{dt}$ обозначает оператор дифференцирования, скалярные полиномы

$$\mathbf{a}(s) = s^d + \mathbf{a}_{d-1}s^{d-1} + \ldots + \mathbf{a}_1 s + \mathbf{a}_0,$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_q s^q + \mathbf{b}_{q-1}s^{q-1} + \ldots + \mathbf{b}_1 s + \mathbf{b}_0$$

определяют динамику и коммуникации агента, а u_i – сигнал управления. Для удобства мы предполагаем, что $d > q$.

Введем вектор $\xi_i = [x_i,\ \dot{x}_i, \ldots, x_i^{(d-1)}]^\top$ и преобразуем уравнения (2.48), (2.49) к форме описания в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= A\xi_i + Bu_i, & (2.50)\\ u_i &= K\sum_{k\in\mathcal{N}_i} a_{ik}(\xi_k - \xi_i), \quad i \in \{1, \ldots, N\}, & (2.51) \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -\mathbf{a}_0 & -\mathbf{a}_1 & -\mathbf{a}_2 & \cdots & -\mathbf{a}_{d-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_q & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, вся динамика замкнутой системы может быть записана в виде

$$\dot{\xi} = (I_N \otimes A - \mathcal{L}_N \otimes BK)\xi, \tag{2.52}$$

где $\xi = [\xi_1^\top,\ \xi_2^\top, \ldots, \xi_N^\top]^\top$ и $\otimes$ – символ произведения Кронекера.

Сформулируем определение консенсуса для исследуемых систем.

Определение 1 *Будем говорить, что сетевая система* (2.50) *с управлением с* *обратной связью* (2.51) достигает консенсуса*, если*

$$\lim_{t\to\infty} \|\xi_i(t) - \xi_k(t)\| = 0, \quad \forall i, k \in \{1, \dots, N\} \tag{2.53}$$

для любого начального условия $\xi(0) = [\xi_1^\top(0), \dots, \xi_N^\top(0)]^\top$.

Прежде чем получить критерий консенсуса для кольцеобразных сетей агентов (2.48), (2.49), проанализируем свойства введенных иерархических топологий. Начнем с оценки числа различающихся кривых, содержащих спектры соответствующих лапласианов.

Теорема 9 *Число* $Y(N)$ *неизоморфных простых колец на* N *узлах удовлетворяет соотношению*

$$Y(N) = \frac{2^N - \max\limits_{n \in D(N)} nY(n)}{N}, \tag{2.54}$$

где $D(N)$ *– множество всех делителей* N*, исключая* N*, а* $Y(1)$ *задается равным* 2.

Теорема 10 *Для любого простого кольца* $\mathcal{G}_{1,n}$ *на* n *узлов собственные значения лапласовских матриц всех сложных колец* $\mathcal{G}_{m,n}$*, полученных* m*-кратной круговой репликацией* $\mathcal{G}_{1,n}$*, принадлежат ограниченной алгебраической кривой порядка* $2n$ *в* $\mathbb{C}^+ \cup \{0\}$.

Следствие 5 *Для фиксированного* $n \in \mathbb{N}$ *число различных алгебраических кривых порядка* $2n$*, содержащих спектры матриц Лапласа кольцевых орграфов, полученных круговой репликацией простых колец на* n *узлах, не превышает числа неизоморфных простых колец на* n *узлах, определяемого Теоремой 9.*

Далее в работе [9] приводится метод получения выражений для алгебраических кривых для любого n. В частности, для $n = 2$ и любого N

собственные значения матрицы Лапласа лежат на кривой Кассини (овалах Кассини).[5]

Теорема 11 *Система* $\mathbf{a}(s)x = \mathbf{b}(s)(-\mathcal{L}_N x)$, *где* $\mathcal{L}_N$ *– матрица Лапласа кольцевого орграфа взаимосвязей, достигает консенсуса в смысле* (2.53) *при любом числе агентов тогда и только тогда, когда локус спектра матрицы* $-\mathcal{L}_N$ *лежит полностью в открытой области консенсуса* Ω, *определяемой* $\phi(s) = \mathbf{a}(s)/\mathbf{b}(s)$ *и имеет единственную общую точку* $(0, j0)$ *с границей этой области.*

Иерархия # 2

Здесь рассматриваются иерархии другого типа [8], где макровершина также является графом циклического преследования, как и графом взаимодействия верхнего уровня. Наша цель – проанализировать две стратегии, которые развивают традиционную схему циклического преследования. В обеих стратегиях используется понятие иерархии в том смысле, что они включают два коммуникационных слоя, основанных на циклической топологии; исследуется асимптотическое поведение стратегий при стремлении числа агентов к бесконечности. Такой анализ позволит приблизиться к решению задачи локализации спектра матриц Лапласа этих иерархических систем независимо от их размерности. Локализация спектра таких матриц важна для анализа возможности достижения консенсуса в группах агентов высокого порядка.

Иерархический граф можно построить в два этапа. Предположим, что у нас есть m групп с n вершинами в каждой группе. Сначала предположим, что структура каждой группы изначально представляет собой гамильтонов цикл (i-ый узел “преследует” своего соседа $i-1$). Далее к каждой вершине i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, k-ой группы добавляем дополнительную дугу, связывающую ее с i-ой вершиной группы $k-1$, $k \in \{1, \ldots, m\}$.

[5] Результат для этого частного случая впервые был получен в работе [7], агентыми являлись линейными системами второго порядка.

Соответствующая матрица Лапласа имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{nm} = I_m \otimes \mathcal{L}_n + \mathcal{L}_m \otimes I_n, \tag{2.55}$$

где $\mathcal{L}_n = I_n - \mathcal{P}_n$ и $\mathcal{L}_m = I_m - \mathcal{P}_m$ – циркулянтные матрицы, определяющие взаимодействие внутри каждой группы и между группами соответственно (единичная матрица минус матрица циклической перестановки).

Теорема 12 *Предположим, что граф имеет двухслойную структуру с соответствующей матрицей Лапласа* (2.55). *Тогда для любого числа n агентов в группах и любого числа m групп собственные значения $\mathcal{L}_{nm}$ лежат в круге радиуса $\rho = 2$ с центром в точке* $(2,\ j0)$ *на комплексной плоскости и заполняют область плотно при $m, n \to \infty$.*

Существенной особенностью двухслойной иерархической схемы, описанной выше, является необходимость для *каждого* агента в системе преследовать своих соседей в обоих слоях иерархии. В такой структуре легко заметить избыточность связей между агентами для достижения консенсуса. Даже одной связи между группами достаточно для достижения консенсуса, хотя и ценой более медленной сходимости. Далее предлагается новая двухслойная иерархическая топология, которая является более разреженной.

Далее рассматриваются m групп n однослойных агентов. Без потери общности мы предполагаем, что первый агент в каждой группе является “переговорщиком” с первым агентом предыдущей группы. Топология связи представляется соответствующей матрицей Лапласа, имеющей следующий вид:

$$\mathcal{L}_{nm} = I_m \otimes \mathcal{L}_n + \mathcal{L}_m \otimes \mathcal{B}, \tag{2.56}$$

где $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_m$ – введенные выше матрицы циклического следования, а $\mathcal{B}$ – матрица ранга один $\mathcal{B} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^\top$.

Теорема 13 *При $m, n \to \infty$ предельное расположение корней многочлена*

$$p(x) = x^n - (\omega^k - 1)x^{n-1} - 1, \qquad k \in \{0, \dots, m-1\}, \tag{2.57}$$

есть объединение единичной окружности и дуги $\{x \in \mathbb{C} \mid x = \mathrm{e}^{j\varphi} - 1, \frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{5\pi}{3}\}$ *на комплексной плоскости.*

Следствие 6 *При $m, n \to \infty$ предельное расположение собственных значений $\mathcal{L}_{nm}$, определенных в* (2.56) *является объединением единичной окружности с центром в точке* $(1, j0)$ *и дуги* $\{x \in \mathbb{C} \mid x = \mathrm{e}^{j\varphi} + 2, -\frac{2\pi}{3} < \varphi < \frac{2\pi}{3}\}$ *на комплексной плоскости.*

Выводы

Результаты данной диссертации освещены в опубликованных работах [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11]. Защита проводится по всем публикациям из этого списка.

В работах [1], [2], [3] разрабатывается новая модель динамики мнений с взаимозависимыми темами, анализируется ее устойчивость, сходимость и связанные с ней задачи. В работах [4], [5], [6], [7], [8], [9] рассматриваются различные задачи управления формациями на основе стратегий циклического преследования и размещения на отрезке. Наряду с этим предлагается нелинейный протокол управления формациями, гарантирующий стабилизацию за конечное глобально ограниченное время [10], [11]. Полученные результаты являются основой для разностороннего анализа, моделирования и оптимизации сетевых динамических систем, включая применение для стратегий распределенного управления формациями, динамики мнений и распределенного управления в целом.

Перечислим основные результаты, полученные в данной диссертации, которые выносятся на защиту:

1. Предложены новые протоколы управления, обеспечивающие равноудаленное размещение или распределение агентов второго порядка на отрезке с фиксированными концами.

2. Разработан и проанализирован новый нелинейный протокол управления для равноудаленного размещения на отрезке за сверхфинитное время

(конечное и глобально ограниченное).

3. Создан сверхфинитный протокол управления, гарантирующий консенсус в сетях одиночных интеграторов за конечное глобально ограниченное время.

4. Разработана модель динамики мнений в сети с взаимосвязанными темами обсуждения агентов и ее обобщение на случай асинхронного взаимодействия.

5. Создан алгоритм идентификации матрицы структуры взаимосвязанных тем обсуждения для модели динамики мнений.

6. Предложены новые иерархические модели циклического преследования и методы исследования достижимости консенсуса в случае агентов высокого порядка.

7. Разработан метод локализации спектров матриц Лапласа графов иерархических задач циклического преследования с помощью алгебраических кривых высокого порядка.

Литература

[1] S. E. Parsegov, A. V. Proskurnikov, R. Tempo, and N. E. Friedkin, "A new model of opinion dynamics for social actors with multiple interdependent attitudes and prejudices," in *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 3475–3480, 2015.

[2] N. E. Friedkin, A. V. Proskurnikov, R. Tempo, and S. E. Parsegov, "Network science on belief system dynamics under logic constraints," *Science*, vol. 354, no. 6310, pp. 321–326, 2016.

[3] S. E. Parsegov, A. V. Proskurnikov, R. Tempo, and N. E. Friedkin, "Novel multidimensional models of opinion dynamics in social networks," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 5, pp. 2270–2285, 2017.

[4] Y. I. Kvinto and S. E. Parsegov, "Equidistant arrangement of agents on line: Analysis of the algorithm and its generalization," *Automation and Remote Control*, vol. 73, no. 11, pp. 1784–1793, 2012.

[5] S. E. Parsegov and A. V. Proskurnikov, "Uniform deployment of second-order agents on a line segment," in *2014 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*, pp. 631–636, 2014.

[6] A. V. Proskurnikov and S. E. Parsegov, "Problem of uniform deployment on a line segment for second-order agents," *Automation and Remote Control*, vol. 77, no. 7, pp. 1248–1258, 2016.

[7] S. Parsegov and P. Chebotarev, "Second-order agents on ring digraphs," in *2018 22nd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, pp. 609–614, 2018.

[8] S. Parsegov, P. Shcherbakov, P. Chebotarev, V. Erofeeva, and A. Rogozin, "Laplacian spectra of two-layer hierarchical cyclic pursuit schemes," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 55, no. 13, pp. 246–251, 2022. 9th IFAC Conference on Networked Systems NECSYS 2022.

[9] S. E. Parsegov, P. Y. Chebotarev, P. S. Shcherbakov, and F. M. Ibáñez, "Hierarchical cyclic pursuit: Algebraic curves containing the laplacian spectra," *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, pp. 1–12, 2023.

[10] S. Parsegov, A. Polyakov, and P. Shcherbakov, “Nonlinear fixed-time control protocol for uniform allocation of agents on a segment,” in *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 7732–7737, 2012.

[11] S. Parsegov, A. Polyakov, and P. Shcherbakov, “Fixed-time consensus algorithm for multi-agent systems with integrator dynamics,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 27, pp. 110–115, 2013. 4th IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems (2013).