Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
“Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

На правах рукописи

Новикова Елена Михайловна

**Когерентные состояния для квантовых моделей
с нелиевскими алгебрами симметрий**

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ

на соискание ученой степени доктора наук
по прикладной математике

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН
Назайкинский Владимир Евгеньевич

Москва – 2023

ВВЕДЕНИЕ

Цели и задачи исследования. Постановка проблемы

Исследование направлено на изучение нелиевских алгебр с конечным числом образующих, описание их неприводимых представлений и построение спектральной теории этих алгебр.

С алгебраической точки зрения в данной работе основными являются два вопроса. Во-первых, как построить когерентные состояния и соответствующие неприводимые представления алгебр с нелиевскими перестановочными соотношениями. Во-вторых, как связать эти квантовые представления с некоторыми классическими симплектическими листами в пуассоновом многообразии. Дополнительной задачей является установление связи между неприводимыми представлениями, когерентными состояниями и возникающими при их построении специальными функциями.

С физической точки зрения главной задачей исследования является изучение алгебр, возникающих естественным образом (как алгебры симметрий) в различных квантово-механических моделях. Неприводимые представления и когерентные состояния этих алгебр играют решающую роль в спектральном анализе квантовых задач. Попутной задачей здесь является развитие алгебраического подхода, состоящего в последовательном применении методов операторного усреднения и когерентного преобразования. Этот подход становится ключевым для исследования квантовых моделей с сильным вырождением спектра старшей части оператора (например, за счет резонанса), поскольку стандартная теория возмущений здесь не работает.

Актуальность и степень разработанности проблемы

Интерес к изучению алгебр с нелиевскими перестановочными соотношениями прежде всего основан на примерах теории q-деформаций и квантовой обратной задачи рассеяния; см. [1, 2, 3, 4, 5, 6] и некоторые интересные примеры в [7]. Другой весьма общий способ возникновения нелиевских перестановочных соотношений – это квантовая версия редукции Марсдена - Вайнштейна - Ли - Картана; см., например, в [8, 9, 10] и более подробно в [11].

Систематическое рассмотрение квантовых алгебр с нелинейными соотношениями было начато школами В.П. Маслова и Л.Д. Фаддеева [7, 12, 13, 14, 6, 15, 3, 11] в 70–80х годах, хотя первые попытки использования таких алгебр делались физиками намного раньше.

Существует несколько направлений изучения нелиевских перестановочных соотношений и квантования общих нелинейных скобок Пуассона. *Первое направление* связано с вычислением произведения в обертывающей алгебре через операторы регулярного представления (или через операторы обобщенного сдвига Дельсарта); основные сведения об операторах обобщенного сдвига содержатся в [17], некоторые общие формулы для приложений к нелиевским соотношениям см. в [18, 19] и обзор по этой теме в книге [11]. Этот подход связан с некоммутативной геометрией А. Конна [20].

Второе направление основано на теории деформационного квантования, предложенного в [21, 22]. Оно является фундаментальной основой для теории квантовых групп, которая связана с уравнением Янга-Бакстера и квадратичными алгебрами Фаддеева–Замолодчикова; см. [23, 19, 24, 25].

Третье направление изучения – это квазиклассический подход, который позволяет получить все основные квантовые объекты, связанные с нелиевской алгеброй, приближенно, с точностью $O(\hbar^\infty)$ относительно постоянной Планка $\hbar \to 0$; см. [18, 14, 26] и подробные доказательства в [11]. Это теория асимптотического квантования.

Четвертое направление основано на понятии когерентных состояний, введенном на заре квантовой механики Э. Шрёдингером [27] и В. Гейзенбергом [28], затем в оптике Р. Глаубером [29, 30] (им впервые было введено название “когерентные состояния”) и определенном в общем виде Дж. Клаудером [31, 32] и Ф. Березиным [33]. Фактически, версия когерентных состояний была также разработана в теории голоморфных функций под названием ‘воспроизводящие ядра”, см. [34, 35, 36].

С точки зрения теории представлений, основным свойством когерентных состояний является возможность задавать неприводимое представление данной алгебры с помощью дифференциальных операторов, действующих на пространстве параметров состояний. Для алгебры Гейзенберга этот факт был понят уже Ф. А. Фоком [37] и П. Дираком [38] и затем был обобщен на широкий класс алгебр Ли [39, 40] и некоторые q-аналоги (см., например, в [41]). В рамках общего процесса квантования когерентные состояния впервые были использованы в [33, 42, 32] и были глубоко вовлечены в эту теорию [43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53] особенно в контексте фундаментального геометрического квантования по Б. Костанту и Ж.-М. Сурио и теории представлений [54, 55, 56, 57, 58, 8, 59, 60, 61, 62]. Этот список литературы далеко не полный, но он показывает разнообразие подходов в этой области. Подчеркнем, что многие важные вопросы в этой теории все еще остаются открытыми с 70-х годов.

Долгое время список физических систем, в которых алгебры с нелинейными соотношениями играют существенную роль для описания спектра и динамики, сводился к бесконечномерным полевым системам и спиновым цепочкам; см. ссылки на литературу в [15]. Примеры нелиевских алгебр с конечным числом образующих, свойства которых проявляются в фундаментальных эффектах квантовой механики (эффекты Зеемана и Зеемана–Штарка), были обнаружены и подробно изучены в работах [63, 9, 64, 65]. Эти алгебры являются квантовыми, т.е. деформациями некоторых классических пуассоновых алгебр (с полиномиальным пуассоновым тензором).

Другая серия примеров – это “резонансные алгебры”, отвечающие многочастотному квантовому осциллятору. Они были найдены в [66, 67] и подробно изучены в [68, 69, 70, 71]. Эти нелиевские алгебры с конечным числом образующих тоже относятся к классу квантовых алгебр и для них тоже возможно построение полной теории неприводимых представлений. Применение резонансных алгебр охватывает широкий круг базовых моделей волновой оптики и квантовой физики, поскольку в них фундаментальную роль играют состояния, локализованные вблизи устойчивого положения равновесия. Гармоническая часть таких моделей – “осциллятор” – задает главную составляющую движения, в то время как ангармоническая часть представляет возмущение. После процедуры квантового усреднения это возмущение начинает коммутировать с гармонической частью, т. е. задает элемент из ее алгебры симметрий. Если частоты гармонической части находятся в резонансе, то алгебра симметрий некоммутативна. В общем случае это алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями.

Таким образом, современная квантовая физика и квантовая математика демонстрируют важность алгебр с нелинейными коммутационными соотношениями.

Что касается когерентных состояний, то интерес к их изучению в математической физике и прикладной математике неуклонно растет. Приложения, в которых используются когерентные состояния, варьируются от квантования до обработки сигналов и изображений. За прошедшие почти сто лет (с 1926 года, когда когерентные состояния были введены Э. Шредингером в [27]) возникли не только их многочисленные обобщения и модификации (см., например, [40, 72, 73, 76, 77]), но и существенные изменения в самом определении когерентных состояний; см. об этом работу [74]. Если вначале определяющим для когерентных состояний было их свойство минимизировать произведение неопределенностей в соотношении Гейзенберга, то в дальнейшем это свойство оказалось вовсе необязательным.

Современное определение когерентных состояний основано на четырех аксиомах Газо-Клаудера [78]. Первые две основные аксиомы являются общими и обязательными для всех типов когерентных состояний. Они были сформулированы Дж. Клаудером в [79] в 1963 году и переписаны почти сорок лет спустя в [74]. В них постулируется полнота семейства когерентных состояний и непрерывность функции перекрытия [1] по параметрам. Две другие (специальные) аксиомы относятся к частному случаю, когда когерентные состояния строятся для заданного гамильтониана. Главное здесь - свойство временной стабильности: эволюция во времени каждого когерентного состояния всегда остается когерентным состоянием. При этом параметры когерентных состояний обычно ассоциированы с координатами в соответствующем фазовом пространстве, и их эволюция должна соответствовать классическому поведению этих координат. Эти свойства нужны для физических приложений; см, например, [75].

[1] Когерентные состояния образуют переполненную систему векторов в гильбертовом пространстве; их попарные скалярные произведения зависят от параметров, нумерирующих векторы этого семейства, и определяют функцию перекрытия.

В математических работах [16, 68, 70, 71] когерентные состояния строятся не для заданного гамильтониана, а для заданной алгебры. Такие когерентные состояния используются в качестве ядра интегрального преобразования из пространства одного представления алгебры в пространство другого ее представления. Здесь главным становится свойство когерентных состояний сплетать представления алгебры в гильбертовых пространствах. Таким образом, для алгебр, в том числе с нелинейными коммутационными соотношениями, определяющими свойствами когерентных состояний являются их полнота, непрерывность функции перекрытия по параметрам и сплетающее свойство.

Отметим, что вопрос о конструкции когерентных состояний для алгебр с нелиевскими коммутационными соотношениями остается открытым. Он решен лишь для некоторых частных случаев нелиевских алгебр и некоторых специальных классов нелиевских алгебр.

Личный вклад автора в разработку проблемы

В работах автора диссертационного исследования выделены несколько классов нелиевских алгебр, допускающих построение полной теории неприводимых представлений. Для этих алгебр найдены элементы Казимира, построены неприводимые представления в пространствах антиголоморфных функций, соответствующие им когерентные состояния, воспроизводящие ядра, воспроизводящие меры; установлены соответствия построенных квантовых представлений с классическими симплектическими листами в пуассоновом многообразии, на них построены комплексные структуры; выявлена связь между неприводимыми представлениями, когерентными состояниями и гипергеометрическими или эллиптическими функциями.

Для некоторых базовых квантовых моделей (в частности, для атома водорода и для монополя Дирака в однородном магнитном и неоднороднородном электрическом полях, для ловушек Пеннинга различных конфигураций) выделены и подробно исследованы нелиевские алгебры симметрий. Для них построены неприводимые представления и семейства когерентных состояний, которые далее используются для вычисления асимптотики собственных значений и построения интегрального представления асимптотики собственных функций соответствующих спектральных задач.

Большая часть результатов диссертационной работы опубликована в совместных работах с М. В. Карасевым (см. ниже список опубликованных статей с результатами диссертации); некоторые результаты опубликованы в соавторстве с Е. В. Выборным и О. В. Благодыревой (см. тот же список). Результаты, принадлежащие соавторам, например, формулы М. В. Карасева для вейлевского и виковского произведений, формулы Е. В. Выборного для туннельного расщепления спектра, не входят в перечень результатов, выносимых на защиту. Исключение составляют предложенные М. В. Карасевым постановки задач, связанные с физическими моделями, исследуемыми в данных работах, идея последовательного применения квантового усреднения и когерентного преобразования, а также идея редукции (усреднения) когерентных состояний.

Основные результаты, выносимые на защиту, в частности, конструкции когерентных состояний, принадлежат автору.

Описание методологии исследования

Одним из главных методов, позволяющих исследовать квантовые неинтегрируемые системы вблизи положений равновесия или инвариантных подпространств, является *операторное усреднение с последующей редукцией в алгебру интегралов движения* модельной старшей части гамильтониана.

Рассматриваемые в диссертационной работе квантовые модели характеризуются наличием у старшей части гамильтониана богатой алгебры симметрий. Причем соотношения в ней обычно нетривиальные. Эта алгебра имеет нелиевский тип, т.е не может быть представлена как конечномерная алгебра Ли; ее естественные генераторы удовлетворяют нелинейным (например, полиномиальным) коммутационным соотношениям. Для анализа такого типа алгебр в данном исследовании разрабатываются и применяются новые *методы построения неприводимых представлений и когерентных состояний* для того, чтобы реализовать усредненный гамильтониан в виде дифференциального оператора (в пространстве антиголоморфных функций над соответствующим симплектическим листом). Отметим, что в некоторых рассматриваемых квантовых системах вырождение спектра главного члена гамильтониана не снимается полностью в субглавном члене теории возмущений, и тогда приходится рассматривать еще и вторичную алгебру симметрий тоже нелиевского типа, для которой снова следует построить все необходимые объекты теории представлений и когерентных состояний.

Анализ редуцированных гамильтонианов на данной алгебре проводится с помощью *когерентных преобразований* над квантовым листом или геометрических когерентных преобразований над лагранжевым подмногообразием в листе. Последний метод дает геометрически инвариантное описание квазиклассического приближения в пространствах с общей симплектической структурой, т.е. обобщает известный метод канонического оператора Маслова [80, 81, 82].

Квантовые методы, на которые опирается данное исследование, во многом следуют классическим методам механики, связанным с нормальными формами и усреднением; см. [83, 84, 85]. Используемые концепции некоммутативных алгебр и теории квантования следуют методам, излагаемым, например, в книгах [15, 11]. В данном исследовании алгебраическая техника усреднения применяется для работы в коммутаторных алгебрах с нелиевскими соотношениями. При этом все вычисления выполняются параллельно как в квантовом варианте, так и в классическом приближении (на уровне скобок Пуассона вместо коммутаторов). Это обстоятельство является принципиально важным с точки зрения применимости к редуцированным гамильтонианам квазиклассического приближения.

Для систем с многочастотным резонансом в диссертации предложен новый *подход к вычислению коэффициентов усредненного гамильтониана с использованием скрученного произведения на пространстве символов* дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами.

Неприводимые представления и когерентные состояния нелиевских алгебр симметрий можно использовать для вычисления квазиклассической асимптотики спектра и собственных состояний исходного гамильтониана *через геометрические объекты* (кэлерову форму, воспроизводящую меру, траектории усредненной или дважды усредненной гамильтоновой системы на квантовых симплектических листах).

В диссертационной работе также предложен новый *подход к решению спектральных задач с непрерывным спектром.* Он заключается в применении когерентного преобразования, интегральным ядром которого являются не обычные когерентные состояния, а когерентные распределения, обладающие всеми ключевыми свойствами когерентных состояний, но не имеющие конечной нормы в гильбертовом пространстве.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Для специального "базового" класса алгебр, порожденных нелиевскими перестановочными соотношениями и обладающими структурой "рождение–уничтожение", разработан метод построения неприводимых представлений (в гильбертовых пространствах антиголоморфных обобщенных функций), когерентных состояний и воспроизводящих ядер. В случае регулярных перестановочных соотношений установлено соответствие между неприводимыми представлениями квантовой алгебры и симплектическими листами пуассоновой алгебры. Получены соотношения между неприводимыми представлениями и гипергеометрическими функциями.

2. Метод построения неприводимых представлений, когерентных состояний и воспроизводящих ядер разработан также для нескольких различных обобщений базового класса алгебр с нелиевскими перестановочными соотношениями. Обобщения касаются усложнения перестановочных соотношений, а также увеличения числа генераторов алгебры.

3. Выделен и исследован класс нелиевских алгебр, симплектические листы которых являются цилиндром или тором. Для таких алгебр построены когерентные преобразования и неприводимые представления, соответствующие комплексным структурам на цилиндре и торе. Воспроизводящие ядра гильбертовых пространств, в которых реализуются неприводимые представления, и сами когерентные преобразования представлены через тэта-функцию Римана и ее модификации. Найдены соответствующие воспроизводящие меры.

4. Выделен класс нелиевских перестановочных соотношений, допускающих представления точечными операторами (т.е. операторами, интегральные ядра которых являются обобщенными функциями с точечными носителями). Для таких соотношений построены все операторно неприводимые представления.Они реализованы точечными операторами в гильбертовых пространствах антиголоморфных функций. Показано, что воспроизводящие ядра этих пространств выражаются через гипергеометрические ряды, тэта-функцию, а также их модификации. Построены когерентные состояния, сплетающие абстрактные представления соотношений с неприводимыми.

5. Разработанные методы построения неприводимых представлений и когерентных состояний применены к ряду известных алгебр: простейшим алгебрам Ли, квадратичным алгебрам эффекта Зеемана и вырожденной алгебре Склянина-Фаддеева. С помощью развитого метода редукции вычислены когерентные состояния восьмимерной квадратичной алгебры, возникающей при спинорной регуляризации Кустаанхеймо задачи об атоме водорода.

6. Выделены и изучены алгебры с полиномиальными коммутационными соотношениями для квантовой частицы в электрическом и магнитном полях. А именно, исследованы следующие квантовые модели: заряженная частица в поле Кулона-Дирака, эффект Зеемана в поле Кулона-Дирака, эффект Зеемана-Штарка для атома водорода. Для этих систем проведено квантовое усреднение с последующей редукцией в полиномиальную алгебру симметрий главной или субглавной части гамильтониана и исследование усредненных гамильтонианов. Найдены асимптотики собственных значений и асимптотические собственные функции.

7. Выделены и исследованы "резонансные" алгебры, описывающие неприводимый (с попарно взаимно простыми частотами) эллиптический резонанс. Для них найден конечный набор генераторов, подчиненных полиномиальным коммутационным соотношениям, и построены все неприводимые представления и отвечающие им когерентные состояния и воспроизводящие ядра, а также воспроизводящие меры.

8. Построена полная теория неприводимых представлений, семейства когерентных состояний, воспроизводящие ядра и воспроизводящие меры для алгебр, описывающих трехчастотный приводимый резонанс в эллиптическом и гиперболическом случаях резонанса.

9. Выделены и изучены резонансные алгебры с полиномиальными коммутационными соотношениями для квантовых моделей с резонансом в старшей части гамильтониана. А именно, исследованы ловушки заряженных частиц с частичным (двухчастотным) и полным (трехчастотным) гиперболическим резонансом: кубическая ловушка Пеннинга-Иоффе и планарные ловушки Пеннинга и Пеннинга-Иоффе с круглыми и прямоугольными электродами. Для перечисленных систем проведено квантовое усреднение с последующей редукцией в алгебру гиперболического резонанса и исследование усредненных гамильтонианов. Найдены асимптотики собственных значений и асимптотические собственные функции.

10. Разработан новый подход к процедуре квантового усреднения гамильтониана резонансного гармонического осциллятора, возмущенного дифференциальным оператором с полиномиальными коэффициентами. Этот подход применен к спектральной задаче для цилиндрической ловушки Пеннинга.

11. Построено когерентное преобразование, интегральным ядром которого является семейство когерентных распределений Шварца алгебры Гейзенберга. Это преобразование применено к спектральной задаче о перевернутом осцилляторе.

Научная новизна

В диссертационной работе получены базовые и абсолютно новые конструкции неприводимых представлений и когерентных состояний некоторых классов алгебр с нелиевскими перестановочными соотношениями, имеющими структуру "рождение-уничтожение", а также некоторых обобщений этих классов алгебр.

Получены новые оригинальные результаты, касающиеся общих свойств нелиевских резонансных алгебр симметрий, возникающих при частотных резонансах в эллиптическом и гиперболическом случаях.

Разработан совершенно новый метод построения неприводимых представлений и когерентных состояний резонансных алгебр.

Развит метод усреднения с последующей редукцией в алгебру симметрий старшей части оператора системы и дальнейшим исследованием редуцированного оператора с использованием теории представлений алгебр с нелиевскими перестановочными соотношениями.

Впервые выделены алгебры с полиномиальными коммутационными соотношениями, возникающие, как алгебры симметрий, в базовых моделях математической физики, описывающих движение заряженной частицы в поле Кулона или Кулона-Дирака и слабых внешних электрическом и магнитном полях различных конфигураций.

Для заряженной частицы в поле Кулона или Кулона-Дирака и слабых внешних электрическом и магнитном полях (различных конфигураций) впервые получен и исследован усредненный гамильтониан, представленный в виде функции от генераторов алгебры симметрий старшей части гамильтониана. Формулы для асимптотики собственных значений и асимптотических собственных функций, записанных в виде интегралов от когерентных состояний, также являются новыми.

Аналогичные новые результаты получены и для спектральных задач, связанных с резонансными ловушками Пеннинга и Пеннинга-Иоффе. Эти базовые квантовые наносистемы ловушечного типа не поддаются традиционным подходам из-за бесконечного вырождения спектра старшей части. Для этих моделей впервые выделены резонансные алгебры симметрий с полиномиальными коммутационными соотношениями. Получены выражения усредненного гамильтониана через генераторы этих алгебр. Выведены новые формулы для асимптотики собственных значений и асимптотических собственных функций через когерентные состояния резонансных алгебр.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая значимость работы состоит в создании новых подходов к исследованию алгебр нелиевского типа, разработке для них новых конструкций неприводимых представлений и когерентных состояний.

Практическая значимость состоит в том, что разработанную технику неприводимых представлений и когерентных состояний, а также развитую технику квантового усреднения, можно с успехом применять к исследованию квантовых моделей с сильным вырождением спектра старшей части оператора, когда стандартные подходы не работают.

Степень достоверности

Все результаты, которые выносятся на защиту, изложены с подробными доказательствами в 30 статьях, из которых
– 2 статьи в книгах серии AMS Translations издательства Американского математическо общества,
– 21 статья опубликована в рецензируемых журналах, цитируемых в базах WoS и Scopus, в том числе 11 статей – в квартилях Q1-Q2,
– 7 статей в журнале из списка ВАК.

Список статей с результатами диссертации

Список опубликованных тридцати статей, в которых отражены основные научные результаты диссертации, разбит на две части.

Основной список статей с результатами диссертации

1a. M.V. Karasev, E.M. Novikova
Non-Lie permutation representations, coherent states, and quantum embedding.
In: "Coherent transform, Quantization, and Poisson Geometry (M.V. Karasev editor)", AMS Translations, AMS, Providence, 1998, **187**, 1–202.

2a. M.V. Karasev, E.M. Novikova
Algebras with polynomial commutation relations for a quantum particle in electric and magnetic fields.
In: "Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics (M.V. Karasev editor)". Advances in Modern Mathematics. AMS, Providence, 2005, **216**, 19–135.

3a. E.M. Novikova
Minimal basis of the symmetry algebra for three-frequency resonance.
Russian Journal of Mathematical Physics, 2009,**16**(4), 518–528.

4a. М.В. Карасев, Е.М. Новикова
Алгебра и квантовая геометрия многочастотного резонанса.
Известия РАН. Серия математическая, 2010, **74**(6), 55–106.

5a. O.V. Blagodyreva, M.V. Karasev, E.M. Novikova
Cubic Algebra and Averaged Hamiltonian for the Resonance 3:(-1) Penning-Ioffe Trap.
Russian Journal of Mathematical Physics, 2012, **19**(4), 441–450.

6a. M.V. Karasev, E.M. Novikova
Secondary Resonances in Penning Traps. Non-Lie Symmetry Algebras and Quantum States.
Russian Journal of Mathematical Physics, 2013, **20**(1), 283–294.

7a. M.V. Karasev, E.M. Novikova
Planar Penning trap with combined resonance and top dynamics on quadratic algebra.
Russian Journal of Mathematical Physics, 2015, **22**(4), 463–468.

8a. M.V. Karasev, E.M. Novikova, E.V. Vybornyi
Bi-states and 2-level systems in rectangular Penning traps.
Russian Journal of Mathematical Physics, 2017, **24**(4), 454–464.

9a. M.V. Karasev, E.M. Novikova
Algebra of Symmetries of Three-Frequency Resonance: Reduction of a Reducible Case to an Irreducible Case.
Mathematical notes, 2018, **104**(5-6), 833–847.

10a. E.M. Novikova
Algebra of Symmetries of Three-Frequency Hyperbolic Resonance.
Mathematical notes, 2019, **106**(6), 940–956.

11a. E.M. Novikova
On calculating the coefficients in the quantum averaging procedure for the Hamiltonian of the resonance harmonic oscillator perturbed by a differential operator with polynomial coefficients.
Russian Journal of Mathematical Physics, 2021, **28**(3), 406–410.

12a. Е.М. Новикова
Новый подход к процедуре квантового усреднения гамильтониана резонансного гармонического осциллятора с полиномиальным возмущением на примере спектральной задачи для цилиндрической ловушки Пеннинга.
Математические заметки, 2021, **109**(5), 747–767.

13a. E.M. Novikova
Coherent Schwartz distributions of the Heisenberg algebra and inverted oscillator.
Journal of Mathematical Physics, 2022, **63**, 123507.

Дополнительный список статей с результатами диссертации

14b. M.V. Karasev, E.M. Novikova
Coherent transform of the spectral problem and algebras with nonlinear commutation relations.
Journal of Mathematical Sciences, 1999, **95**(6), 2703–2798.

15b. М.В. Карасев, Е.М. Новикова
Когерентные преобразования и неприводимые представления, соответствующие комплексным структурам на цилиндре и торе.
Математические заметки, 2001, **70**(6), 854–874.

16b. М.В. Карасев, Е.М. Новикова
Нелинейные перестановочные соотношения: представления точечными операторами.
Математические заметки, 2002, **72**(1), 54–73.

17b. М.В. Карасев, Е.М. Новикова
Алгебра с квадратичными коммутационными соотношениями для аксиально возмущенного поля Кулона-Дирака.
Теоретическая и математическая физика, 2004, **141**(3), 424–454.

18b. М.В. Карасев, Е.М. Новикова
Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана в поле Кулона-Дирака.
Теоретическая и математическая физика, 2005, **142**(1), 127–147.

19b. М.В. Карасев, Е.М. Новикова
Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана-Штарка в атоме водорода.
Теоретическая и математическая физика, 2005, **142**(3), 530–555.

20b. М.В. Карасев, Е.М. Новикова
Собственные состояния квантовой наноловушки Пеннинга-Иоффе в резонансном режиме.
Теоретическая и математическая физика, 2014, **179**(3), 406–425.

21b. M.V. Karasev, E.M. Novikova
Inserted perturbations generating asymptotical integrability.
Mathematical notes, 2014, **96**(6), 965–970.

22b. M.V. Karasev, E.M. Novikova, E.V. Vybornyi
Non-Lie Top tunneling and Quantum bilocalization in Planar Penning Trap.
Mathematical notes, 2016, **100**(6), 807–819.

23b. M.V. Karasev, E.M. Novikova, E.V. Vybornyi
Instantons via breaking geometric symmetry in hyperbolic traps.
Mathematical notes, 2017, **102**(5-6), 776–786.

24с. Е.М. Новикова
Аналитическое моделирование наблюдаемых и состояний водородоподобного центра. I. Квадратичная алгебра.
Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2012, **7**(1), 107–124.

25с. Е.М. Новикова
Когерентные состояния кубической нелиевской алгебры и спектральная задача для атома водорода в резонансном эффекте Зеемана-Штарка.
Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2012, **7**(2), 59–86.

26с. Е.М. Новикова
Аналитическое моделирование наблюдаемых и состояний водородоподобного центра. II. Когерентные состояния.
Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2012, **7**(2), 87–102.

27с. О.В. Благодырева, М.В. Карасев, Е.М. Новикова
Интегральное представление собственных состояний 3:(-1) резонансной наноловушки Пеннинга.
Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2013, **9**(1), 5–18.

28с. М.В. Карасев, Е.М. Новикова
Устойчивые двумерные торы в ловушке Пеннинга при комбинированном частотном резонансе.
Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2015, **13**(2), 55–92.

29с. Е.М. Новикова
Спектральные кластеры планарной ловушки Пеннинга с резонансным нарушением аксиальной симметрии.
Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2016, **15**(2), 75–98.

30с. Е.М. Новикова
Резонансная планарная ловушка Пеннинга с прямоугольными электродами.
Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2017, **16**(2), 69–88.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы (160 пунктов). Объем диссертации – 275 страниц.

Благодарности

Автор очень благодарен своему учителю и главному соавтору – М.В. Карасеву. Автор выражает большую признательность В.Г. Данилову за поддержку на протяжении всей работы над диссертацией и В.Е. Назайкинскому за консультации, ценные замечания и советы.

Содержание работы

Во введении описаны цели и задачи исследования, степень разработанности проблемы, обоснована актуальность диссертационной работы, указан личный вклад автора в разработку проблемы, описаны методы исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы и сформулированы основные результаты, выносимые на защиту. Во введении также содержится список публикаций автора по теме исследования.

Глава 1 диссертации состоит из восьми разделов, в которых рассматриваются нелинейные перестановочные соотношения со структурой “рождение–уничтожение”.

В разделе 1.1 (статья [1a], часть I) исследуются “базовые” нелинейные перестановочные соотношения с одним оператором рождения $\mathbf{B}$ и одним оператором уничтожения $\mathbf{C}$:

$$\begin{gathered}[\mathbf{C},\mathbf{B}]=f(\mathbf{A}),\qquad \mathbf{CA}=\varphi(\mathbf{A})\mathbf{C},\qquad \mathbf{AB}=\mathbf{B}\varphi(\mathbf{A}),\\ [\mathbf{A}_\mu,\mathbf{A}_\nu]=0\qquad (\mu,\nu=1,\dots,k).\end{gathered}\tag{1}$$

Структурные функции $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ и $\varphi_\mu:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ $(\mu=1,\dots,k)$, для простоты, считаются полиномиальными.

Отметим, что перестановочные соотношения (1) (с различными структурными полиномами) описывают алгебры симметрий в задачах об атоме водорода и о монополе Дирака в слабых внешних электрическом и магнитном полях и используются для исследования этих квантовых моделей в диссертационной работе (в главе 3). Поэтому остановимся на них подробнее, чем на остальных исследованных в главе 1 классах перестановочных соотношений.

Для алгебры (1) построены все (с точностью до эквивалентных) неприводимые представления, удовлетворяющие условиям эрмитовости

$$\mathbf{B}^*=\mathbf{C},\qquad \mathbf{A}_\mu^*=\mathbf{A}_\mu\qquad (\mu=1,\dots,k)\tag{2}$$

в гильбертовых пространствах антиголоморфных обобщенных функций с вакуумным вектором

$$\mathbf{C}\mathfrak{P}_0=0,\qquad \mathbf{A}_\mu\mathfrak{P}_0=a_\mu\mathfrak{P}_0\quad(\mu=1,\dots,k);\qquad \|\mathfrak{P}_0\|=1;\tag{3}$$

получены соответствующие когерентные состояния и воспроизводящие ядра пространств неприводимых представлений; найдены ортонормированные базисы в пространствах неприводимых представлений и определены когерентные преобразования, сплетающие абстрактные представления с неприводимыми.

Во всех перечисленных конструкциях используются следующие базовые функции:

$$\mathcal{A}_a(n) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\varphi\big(\dots\big(\varphi\big(\varphi(a)\big)\big)\big)}_{n}, \qquad \mathcal{F}_a(n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f\big(\mathcal{A}_a(j)\big). \tag{4}$$

Теорема 1. (a) *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством неприводимых эрмитовых представлений алгебры* (1), *обладающих вакуумным вектором* (3), *и следующим подмножеством* $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^k$:

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{R} \;\Leftrightarrow\; \{&\mathcal{F}_a(n) > 0 \text{ при } n \in \mathbb{Z}_+ \\ &\text{или } \exists N \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{F}_a(n) > 0 \text{ при } 0 \le n < N \text{ и } \mathcal{F}_a(N) = 0 \text{ (условие (*))}\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Представление, соответствующее $a \in \mathcal{R}$, *конечномерно тогда и только тогда, когда существует целое число* $N = N_a$, *удовлетворяющее условию* (*) *в* (5); *в этом случае число* $N+1$ *является размерностью представления.*

(b) *Пусть* $a \in \mathcal{R}$. *Пусть функции* $\mathcal{B}_a$ *и* $\mathcal{C}_a$ *факторизуют базовую функцию* $\mathcal{F}_a$:

$$\mathcal{F}_a(n) = \mathcal{B}_a(n)\mathcal{C}_a(n), \qquad n \ge 0, \tag{6}$$

причем $\mathcal{B}_a(N) = 0$ *при условии* (*) *в* (5). *Тогда операторы*

$$\mathring{B} = \overline{z}\,\mathcal{B}_a\Big(\overline{z}\frac{d}{d\overline{z}}\Big), \qquad \mathring{C} = \mathcal{C}_a\Big(\overline{z}\frac{d}{d\overline{z}}\Big)\frac{d}{d\overline{z}}, \qquad \mathring{A} = \mathcal{A}_a\Big(\overline{z}\frac{d}{d\overline{z}}\Big) \tag{7}$$

задают эрмитово представление алгебры (1) *в гильбертовом пространстве антиголоморфных обобщенных функций, представимых в виде рядов* $g(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \overline{z}^n$, *со скалярным произведением*

$$(g, g')_{\mathcal{P}_{s(a)}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} s_n(a)\, g_n\, \overline{g'_n}, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} &s_0(a) = 1, \\ &s_n(a) = \frac{n!\,\mathcal{F}_a(n-1)\dots\mathcal{F}_a(0)}{|\mathcal{B}_a(n-1)|^2\dots|\mathcal{B}_a(0)|^2} && \text{при} \quad 1 \le n \le N, \\ &s_n(a) = \infty && \text{при} \quad n \ge N+1. \end{aligned}$$

Представление (7) *является неприводимым и обладает вакуумным вектором* 1 *в гильбертовом пространстве* $\mathcal{P}_{s(a)}$.

(c) *Представления* (7), *соответствующие различным векторам* $a \in \mathcal{R}$, *не являются эквивалентными, но для каждого заданного* $a \in \mathcal{R}$ *представления, соответствующие различным факторизациям* (6), *эквивалентны.*

(d) *Абстрактное представление алгебры* (1), (2) *в гильбертовом пространстве* H_a *с вакуумным вектором* $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0(a)$, *удовлетворяющим условиям* (3) *для некоторого* $a \in \mathbb{R}^k$, *может быть сплетено с представлением* (7) *с помощью следующих обобщенных когерентных состояний*:

$$\mathfrak{P}_z = \mathfrak{P}_o + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!\,\overline{\mathcal{C}}_a(n-1)\ldots\overline{\mathcal{C}}_a(0)} (z\mathbf{B})^n\,\mathfrak{P}_0. \tag{9}$$

Обобщенное "воспроизводящее ядро", соответствующее состояниям (9)

$$\mathcal{K}_{s(a)}(z,\overline{w}) = (\mathfrak{P}_z, \mathfrak{P}_w)_{H_a}, \tag{10}$$

является ядром единичного оператора в $\mathcal{P}_{s(a)}$ *и задается следующим распределением над* $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{K}_{s(a)}(z,\overline{w}) = \sum_{n\geq 0} \frac{(z\overline{w})^n}{s_n(a)}. \tag{11}$$

(g) *Ортонормированные базисы*

$$\left\{\frac{\overline{z}^n}{\sqrt{s_n(a)}}\,\middle|\, n\geq 0\right\} \text{ в } \mathcal{P}_{s(a)} \quad \text{и} \quad \{\mathfrak{P}_0\}\cup\left\{\frac{1}{\sqrt{s_n(a)}\mathcal{B}_a(n-1)\ldots\mathcal{B}_a(0)}\mathbf{B}^n\mathfrak{P}_0\,\middle|\, n\geq 1\right\} \text{ в } H_a$$

соответствуют друг другу при когерентном преобразовании

$$j:\ g\mapsto \mathfrak{p}, \qquad (\mathfrak{p},\mathfrak{p}')_{H_a} = \big(g, (\mathfrak{p}',\mathfrak{P})_{H_a}\big)_{\mathcal{P}_{s(a)}}, \qquad \forall\, \mathfrak{p}'\in H_a,$$

$$j^{-1}:\ \mathfrak{p}\mapsto g, \qquad g = (\mathfrak{p},\mathfrak{P})_{H_a}$$

и являются собственными базисами коммутирующих операторов $\overset{\circ}{A}_1,\ldots,\overset{\circ}{A}_k, \overset{\circ}{B}\overset{\circ}{C}$ (*в пространстве* $\mathcal{P}_{s(a)}$) *или* $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_k,\mathbf{BC}$ (*в пространстве* H_a); *соответствующие собственные значения равны* $(\mathcal{A}_a)_1(n),\ldots,(\mathcal{A}_a)_k(n), n\mathcal{F}_a(n),\ 0\leq n\leq N$.

Для перестановочных соотношений (1) в диссертационной работе также указаны элементы Казимира двух типов. Если функция κ на $\mathbb{R}^k$ сохраняется при отображении φ, то $\kappa(\mathbf{A})$ является элементом Казимира алгебры (1); если функция ρ на $\mathbb{R}^k$ удовлетворяет уравнению

$$\rho\big(\varphi(A)\big) - \rho(A) = f(A), \qquad A\in\mathbb{R}^k, \tag{12}$$

то

$$\mathbf{K} = \mathbf{BC} - \rho(\mathbf{A}) \tag{13}$$

является элементом Казимира алгебры (1).

В разделе 1.2 (статья [1а], часть I) исследовано "Флоке-обобщение"

$$
\begin{gathered}
\mathbf{CB} = \mathbf{B}\,\omega(\mathbf{A})\,\mathbf{C} + f(\mathbf{A}), \\
\mathbf{CA} = \varphi(\mathbf{A})\,\mathbf{C} + \psi(\mathbf{A}), \qquad \mathbf{AB} = \mathbf{B}\,\varphi(\mathbf{A}) + \psi(\mathbf{A}), \\
[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \dots, k), \\
\mathbf{B}^* = \mathbf{C}, \qquad \mathbf{A}_\mu^* = \mathbf{A}_\mu \qquad (\mu = 1, \dots, k)
\end{gathered}
\tag{14}
$$

базовых соотношений (1), (2) с вещественными структурными функциями $\omega : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, удовлетворяющими обобщенным тождествам Якоби (см. [7, 13] или [11])

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad \big(\varphi_\mu(A) - A_\mu\big)\,\psi_\nu(A) = \big(\varphi_\nu(A) - A_\nu\big)\,\psi_\mu(A), \\
&\text{(b)} \qquad \psi_\mu\big(\varphi(A)\big) = \omega(A)\,\langle \psi(A), \delta\varphi_\mu\big(\varphi(A), A\big)\rangle,
\end{aligned}
$$

где векторнозначное разностное дифференцирование δ определено по формуле $\delta F(A, A') \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \partial F/\partial A\big(\tau A + (1-\tau)A'\big)\,d\tau$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^k$.

Для соотношений (14), как и для базовых соотношений (1), (2), построены все неприводимые представления в гильбертовых пространствах антиголоморфных функций с вакуумным вектором, соответствующие когерентные состояния и воспроизводящие ядра, а также указаны элементы Казимира.

В разделе 1.3 (статья [1а], часть I) для базовых соотношений (1), (2) сформулированы условия на структурные полиномы f и φ_μ ($\mu = 1, \dots, k$), при которых соотношения (1) допускают неприводимые представления дифференциальными (а не псевдодифференциальными) операторами. Показано, что когерентные состояния и воспроизводящие ядра, соответствующие таким представлениям, выражаются через гипергеометрические функции. Параметрами гипергеометрических функций служат корни базовой функций $\mathcal{F}_a$ (4).

В том же разделе 1.3 сформулированы условия на структурные функции базовых соотношений (1), (2), а также на структурные функции их Флоке-обобщения (14), при которых эти соотношения допускают неприводимые представления q-дифференциальными операторами, т.е. полиномами от операторов q-дифференцирования и q^{-1}-дифференцирования с полиномиальными коэффициентами. Показано, что когерентные состояния и воспроизводящие ядра, соответствующие неприводимым представлениям q-дифференциальными операторами, выражаются через q-гипергеометрические функции. При этом параметры q-гипергеометрических функций связаны с корнями базовой функции $\mathcal{F}_a$ (4).

В разделе 1.4 (статья [1a], часть I) из базового класса нелинейных соотношений (1) выделен подкласс "регулярных" соотношений

$$[\mathbf{C}, \mathbf{B}] = \rho\big(\varphi^\hbar(\mathbf{A})\big) - \rho(\mathbf{A}), \qquad \mathbf{CA} = \varphi^\hbar(\mathbf{A})\mathbf{C}, \qquad \mathbf{AB} = \mathbf{B}\varphi^\hbar(\mathbf{A}). \tag{15}$$

По сравнению с соотношениями (1), здесь, во-первых, введен квазиклассический параметр $\hbar$; во-вторых, отображение $\varphi^\hbar$ определено как сдвиг за время $\hbar$ вдоль траекторий векторного поля $v = \sum_{\mu=1}^k v_\mu(A)\,\partial/\partial A_\mu$ на $\mathbb{R}^k$, расслаивающих $\mathbb{R}^k$; в-третьих, использовано уравнение (12). Для регулярных соотношений (15) (помимо основных) получен ряд дополнительных результатов. Опишем главный из них – конструкцию воспроизводящей меры для неприводимого представления (7).

Для соотношений (15) базовые функции (4) имеют вид $\mathcal{A}_a(n) = \mathfrak{A}_a(\hbar n)$, $\mathcal{F}_a(n) = \rho\big(\mathfrak{A}_a(\hbar n)\big) - \rho(a)$, где через $\mathfrak{A}_A(t)$ обозначена траектория поля v, выпущенная из точки $A \in \mathbb{R}^k$:

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{A}_A = v(\mathfrak{A}_A), \qquad \mathfrak{A}_A\Big|_{t=0} = A.$$

Поэтому множители $\mathcal{B}_a$ и $\mathcal{C}_a$, факторизующие в (6) базовую функцию $\mathcal{F}_a$, можно выбрать в виде $\mathcal{B}_a(n) = \mathcal{D}_a(\mathfrak{A}_a(\hbar(n+1)))$, $\mathcal{C}_a(n) = \mathcal{E}_a(\mathfrak{A}_a(\hbar(n+1)))/(n+1)$, где

$$\mathcal{D}_a(A)\,\mathcal{E}_a(A) = \rho(A) - \rho(a), \qquad \mathcal{E}_a(a) = 0, \qquad \mathcal{D}_a\big(\mathfrak{A}_a(\hbar(N+1))\big) = 0$$

(число N определено в (5)). При этом воспроизводящее ядро (11) запишется так:

$$\mathcal{K}(z, \overline{w}) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(z\overline{w})^n}{\mathcal{H}(\hbar n)\ldots\mathcal{H}(\hbar)}, \qquad \text{где} \quad \mathcal{H}(t) \overset{def}{=} \frac{\overline{\mathcal{E}_a}(\mathfrak{A}_a(t))}{\mathcal{D}_a(\mathfrak{A}_a(t))}.$$

Заметим, что за счет выбора множителей $\mathcal{D}_a$ и $\mathcal{E}_a$ можно обеспечить достаточно быстрый рост числовой последовательности $\mathcal{H}(\hbar n)$, с помощью которой заданы коэффициенты степенного ряда для $\mathcal{K}(z, \overline{w})$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что функция $\mathcal{K}(z, \overline{w})$ аналитична по z и $\overline{w}$ на всей плоскости $\mathbb{C}$.

Теорема 2. (a) *Пусть ℓ – гладкое решение уравнения*

$$\mathcal{H}\Big(-\hbar x \frac{d}{dx}\Big)\ell(x) = x\ell(x), \qquad x > 0,$$

такое, что $\int_0^\infty x^n |\ell(x)|\,dx < \infty$ при $0 \le n \le N$. Нормируем ℓ следующим условием: $\frac{1}{\hbar}\int_0^\infty \ell(x)\,dx = 1$. Тогда для любых обобщенных функций g, $g' \in \mathcal{P}$ скалярное произведение (8) *может быть записано в интегральной форме*

$$(g, g')_{\mathcal{P}_{s(a)}} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{C}} g(\overline{z})\,\overline{g'(\overline{z})}\,\ell(|z|^2)\,dzd\overline{z},$$

где $dzd\overline{z} = dxd\varphi$ и $z = \sqrt{x}\exp\{i\varphi\}$. Поэтому в этом случае все элементы из $\mathcal{P}$ являются регулярными L^2-функциями на плоскости.

(b) *Если функция* ℓ *из пункта* (a) *существует, то для воспроизводящего ядра* $\mathcal{K}(z,\overline{w})$ *выполнено воспроизводящее свойство*:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathcal{C}}\mathcal{K}(z,\overline{z}')\,\mathcal{K}(z',\overline{z})\,\ell(|z'|^2)dz'd\overline{z}'=\mathcal{K}(z,\overline{z}),$$

т.е. имеет место разложение единицы

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\Omega}\frac{\mathcal{K}(z,\overline{z}')\mathcal{K}(z',\overline{z})}{\mathcal{K}(z,\overline{z})\mathcal{K}(z',\overline{z}')}\,dm(z',\overline{z}')=1$$

с воспроизводящей мерой $dm(z,\overline{z})=M(|z|^2)dzd\overline{z}$, *где* $M(x)\stackrel{def}{=}k(x)\ell(x)$.

Далее, в диссертационной работе показано, что для соотношений (15) существует элемент Казимира $\mathbf{K}$ (13), а также существуют независимые элементы Казимира $\kappa_1(\mathbf{A}),\ldots,\kappa_{k-1}(\mathbf{A})$ (поскольку существуют независимые вещественные гладкие функции $\kappa_1,\ldots,\kappa_{k-1}$ на $\mathbb{R}^k$, которые сохраняются при отображении $\varphi^\hbar$). В неприводимом представлении (7) операторы Казимира являются скалярными. Точнее, из условий (3) следуют равенства

$$\mathbf{K}=-\rho(a)\cdot\mathbf{I},\qquad \kappa_j(\mathbf{A})=\kappa_j(a)\cdot\mathbf{I}\quad (j=1,\ldots,k-1).$$

Используя эрмитовы образующие $\mathbf{S}_1=(\mathbf{B}+\mathbf{C})/2$, $\mathbf{S}_2=i(\mathbf{B}-\mathbf{C})/2$, эти равенства можно переписать в виде

$$\mathbf{S}_1^2+\mathbf{S}_2^2=\frac{1}{2}\Big(\rho(\mathbf{A})+\rho\big(\varphi^\hbar(\mathbf{A})\big)\Big)-\rho(a)\cdot\mathbf{I},\quad \kappa_j(\mathbf{A})=\kappa_j(a)\cdot\mathbf{I}\quad (j=1,\ldots,k-1)$$

и интерпретировать как уравнения симплектического листа, соответствующего неприводимому представлению (7), ассоциированному с $a\in\mathcal{R}$. Этот лист является поверхностью (вращения), вложенной в пространство $\mathbb{R}^{k+2}$ с классическими координатами $S_1,S_2,A_1,\ldots,A_k$.

Для регулярных соотношений (15) установлено соотвествие между квантовыми объектами (неприводимыми представлениями, когерентными состояниями и воспроизводящими ядрами) и классическими объектами (симплектическими листами соответствующей пуассоновой алгебры). Показано, что симплектические листы, отвечающие построенным неприводимым представлениям с вакуумным вектором (3), являются поверхностями вращения. Кроме того, в регулярном случае получены операторы комплексной структуры, а также вычислены квазиклассические асимптотики квантового кэлерова потенциала и плотности воспроизводящих мер.

В разделах 1.5 и 1.6 изучаются обобщения соотношений (1) и (14) на случай нескольких пар операторов рождения-уничтожения:

$$\begin{gathered}
\mathbf{C}^q\mathbf{B}_p = \sum_{r,s}\mathbf{B}_r\omega^{qr}_{sp}(\mathbf{A})\mathbf{C}^s + f^q_p(\mathbf{A}) \qquad (p,q=1,\dots,d),\\
\mathbf{C}^p\mathbf{A} = \varphi_p(\mathbf{A})\mathbf{C}^p, \qquad \mathbf{A}\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_p\varphi_p(\mathbf{A}) \qquad (p=1,\dots,d),\\
[\mathbf{A}_\mu,\mathbf{A}_\nu]=0 \qquad (\mu,\nu=1,\dots,k),\\
[\mathbf{B}_p,\mathbf{B}_q]=0, \quad [\mathbf{C}^p,\mathbf{C}^q]=0 \qquad (p,q=1,\dots,d),\\
\mathbf{B}^*_p=\mathbf{C}^p \quad (p=1,\dots,d), \qquad \mathbf{A}^*_\mu=\mathbf{A}_\mu \quad (\mu=1,\dots,k).
\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь функции φ_p векторнозначные. Предполагается, что все структурные функции вещественны и удовлетворяют обобщенным условиям Якоби:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \varphi_p\big(\varphi_q(A)\big) = \varphi_q\big(\varphi_p(A)\big),\\
&\text{(b)} \quad f^q_p(A)\big(\varphi_p(A)-\varphi_q(A)\big)=0,\\
&\text{(c)} \quad \omega^{qr}_{sp}(A)\big(\,\varphi_q\big(\varphi_r(A)\big)-\varphi_p\big(\varphi_s(A)\big)\,\big)=0,\\
&\text{(d)} \quad \sum_{s=1}^d\omega^{qr}_{sp}(A)f^s_t(A)+\delta^r_t f^q_p\big(\varphi_t(A)\big) = \sum_{s=1}^d\omega^{qr}_{st}(A)f^s_p(A)+\delta^r_p f^q_t\big(\varphi_p(A)\big),\\
&\text{(e)} \quad \sum_{s=1}^d\omega^{qr}_{sp}\big(\varphi_t(A)\big)\omega^{st}_{uv}(A)+\sum_{s=1}^d\omega^{qt}_{sp}\big(\varphi_r(A)\big)\omega^{sr}_{uv}(A)\\
&\qquad\quad = \sum_{s=1}^d\omega^{qr}_{sv}\big(\varphi_t(A)\big)\omega^{st}_{up}(A)+\sum_{s=1}^d\omega^{qt}_{sv}\big(\varphi_r(A)\big)\omega^{sr}_{up}(A).
\end{aligned} \tag{17}$$

Для простоты рассматривается случай, когда все ω^{qr}_{sp}, f^q_p и φ_p являются полиномами.

Из тождеств (17b), (17c) следует, что (путем перенумерации образующих B и синхронной перенумерации образующих C) матрицу $F=(\!(f^r_s)\!)$ и матрицы $\Omega^q_p=(\!(\omega^{qr}_{sp})\!)$ можно привести к блочно-диагональному виду:

$$f^r_s=0 \ \text{ при } \ \varphi_r\neq\varphi_s; \qquad \omega^{qr}_{sp}=0 \ \text{ при } \ \varphi_p=\varphi_q, \quad \varphi_r\neq\varphi_s.$$

В разделе 1.5 изучается случай двух одномерных блоков (т.е. $d=2$, $\varphi_1\neq\varphi_2$):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}^1\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_1\alpha^1_1(\mathbf{A})\mathbf{C}^1+\mathbf{B}_2\alpha^2_1(\mathbf{A})\mathbf{C}^2+f^1_1(\mathbf{A}),\\
&\mathbf{C}^2\mathbf{B}_2=\mathbf{B}_2\alpha^2_2(\mathbf{A})\mathbf{C}^2+\mathbf{B}_1\alpha^1_2(\mathbf{A})\mathbf{C}^1+f^2_2(\mathbf{A}),\\
&\mathbf{C}^1\mathbf{B}_2=\mathbf{B}_2\theta(\mathbf{A})\mathbf{C}^1, \qquad \mathbf{C}^2\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_1\theta(\mathbf{A})\mathbf{C}^2,\\
&\mathbf{C}^1\mathbf{A}=\varphi_1(\mathbf{A})\mathbf{C}^1, \qquad \mathbf{A}\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_1\varphi_1(\mathbf{A}),\\
&\mathbf{C}^2\mathbf{A}=\varphi_2(\mathbf{A})\mathbf{C}^2, \qquad \mathbf{A}\mathbf{B}_2=\mathbf{B}_2\varphi_2(\mathbf{A}),\\
&[\mathbf{A}_\mu,\mathbf{A}_\nu]=0, \qquad [\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2]=0, \qquad [\mathbf{C}^1,\mathbf{C}^2]=0,\\
&\mathbf{B}^*_1=\mathbf{C}^1, \qquad \mathbf{B}^*_2=\mathbf{C}^2, \qquad \mathbf{A}^*_\mu=\mathbf{A}_\mu \quad (\mu=1,\dots,k).
\end{aligned} \tag{16$'$}$$

Для соотношений ($16'$) в работе построены все неприводимые эрмитовы представления (с точностью до эквивалентных) в гильбертовых пространствах антиголоморфных функций над $\mathbb{R}^4$ с вакуумным вектором, получены соответствующие когерентные состояния и воспроизводящие ядра пространств неприводимых представлений; найдены ортонормированные базисы в пространствах неприводимых представлений и определены когерентные преобразования, сплетающие абстрактные представления с неприводимыми. Как и в одномерном случае, в конструкции используются некоторые базовые функции, которые задаются явными формулами через структурные функции соотношений ($16'$). Но, в отличие от одномерного случая, здесь требуются не две, а шесть базовых функций.

В случае, когда соотношения ($16'$) являются регулярными, для них найдены элементы Казимира. В неприводимом представлении эти элементы скалярны и задают уравнения симплектических листов. Показано, что симплектические листы, соответствующие построенным неприводимым представлениям, являются 4х-мерными поверхностями бивращения, т.е. это 4х-мерные подмногообразия в $\mathbb{R}^{k+4}$, расслоенные торами.

В разделе 1.6 соотношения (16) сначала рассматриваются в случае одного многомерного блока (т.е. в случае $d \geq 2$, $\varphi_1 = \cdots = \varphi_k$) при условии $\omega_{sp}^{qr} = \omega \cdot \delta_s^q \cdot \delta_p^r$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}^q\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_p\omega(A)\mathbf{C}^q + f_p^q(\mathbf{A}),\\
&\mathbf{C}^p\mathbf{A} = \varphi(\mathbf{A})\mathbf{C}^p, \qquad \mathbf{A}\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_p\varphi(\mathbf{A}),\\
&[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] = 0, \qquad [\mathbf{B}_p, \mathbf{B}_q] = 0, \qquad [\mathbf{C}^p, \mathbf{C}^q] = 0,\\
&\mathbf{B}_p^* = \mathbf{C}^p, \qquad \mathbf{A}_\mu^* = \mathbf{A}_\mu \qquad (p, q = 1, \ldots, d, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, k).
\end{aligned} \tag{$16''$}$$

где структурные функции ω, φ вещественнозначные, матрица $F(A) = \big(\!\big(f_p^q(A)\big)\!\big) = F^*(A)$ эрмитова, $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ – обратимое отображение, и выполнено тождество Якоби: $F\big(\varphi(A)\big) = \omega(A) \cdot F(A)$.

Для соотношений ($16''$) в работе описаны элементы Казимира. В регулярном случае алгебре ($16''$) соответствуют симплектические листы $\Omega = \Omega^{2d}$, вложенные в $\mathbb{R}^{k+2d}$ как гиперповерхности.

Если структурная функция ω не обращается в нуль, то алгебру ($16''$) можно свести к алгебре Гейзенберга. Поэтому наиболее интересным является случай, когда ω имеет нули на $\mathbb{R}^k$.

Если $d = 2$, то симплектические листы четырехмерны. В этом случае построены все (с точностью до эквивалентных) неприводимые эрмитовы представления соотношений ($16''$) в гильбертовых пространствах антиголоморфных обобщенных функций над $\mathbb{R}^4$ с вакуумным вектором, получены соответствующие когерентные состояния, воспроизводящие ядра пространств неприводимых представлений и ортонормированные базисы в них, а также определены когерентные преобразования, сплетающие абстрактные представления с неприводимыми.

В конструкции используется базовая матрица, которая задается явной формулой через структурные функции соотношений ($16''$). Воспроизводящие ядра выражаются через введенную в работе функцию, обобщающую гипергеометрическую функцию на случай нескольких переменных. Для определения этой функции в разделе 1.6 введено понятие матричного факториала, обобщающего гамму-функцию на случай матриц.

В конце раздела 1.6 соотношения (16) рассматриваются в случае одного двумерного блока, когда матрица ω_p^q не является скалярной:

$$d = 2, \qquad \varphi_p(A) = \varphi(A), \qquad \omega_{sp}^{qr}(A) = \delta_p^r \cdot \delta_s^q \cdot \omega_p^q(A) \qquad (p, q, r, s = 1, 2).$$

Тогда соотношения (16) принимают вид

$$\begin{gathered} \mathbf{C}^q \mathbf{B}_p = \mathbf{B}_p \, \omega_p^q(\mathbf{A}) \, \mathbf{C}^q + f_p^q(\mathbf{A}), \\ \mathbf{C}^p \mathbf{A} = \varphi(\mathbf{A}) \mathbf{C}^p, \qquad \mathbf{A} \mathbf{B}_p = \mathbf{B}_p \varphi(\mathbf{A}), \\ [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] = 0, \qquad [\mathbf{B}_p, \mathbf{B}_q] = 0, \qquad [\mathbf{C}^p, \mathbf{C}^q] = 0, \\ \mathbf{B}_p^* = \mathbf{C}^p, \qquad \mathbf{A}_\mu^* = \mathbf{A}_\mu \qquad (p, q = 1, 2, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, k) \end{gathered} \tag{$16'''$}$$

со следующими условиями Якоби на структурные функции:

$$\begin{gathered} \overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\omega_p^q} = \omega_p^q = \omega_q^p, \qquad \overline{f_p^q} = f_q^p, \\ \omega_p^q\big(\varphi(A)\big) \omega_t^q(A) = \omega_t^q\big(\varphi(A)\big) \omega_p^q(A), \\ f_p^q\big(\varphi(A)\big) = \omega_t^q(A) \cdot f_p^q(A), \qquad t \neq p, \\ \omega_1^1 \neq \omega_2^2 \quad \Longrightarrow \quad f_2^1 = f_1^2 = 0. \end{gathered}$$

Для соотношений ($16'''$) описана конструкция эрмитовых представлений с вакуумным вектором и получена интересная формула для когерентных состояний. В этой формуле к вакуммному вектору применяется экспонента от линейной комбинации операторов рождения $\mathbf{B}_p$, а коэффициентами этой линейной комбинации служат некоторые дифференциальные операторы, действующие по комплексным параметрам семейства когерентных состояний на единичную функцию.

В упомянутых разделах 1.1 – 1.4 предполагается, что в гильбертовом пространстве представления спектр оператора **BC** содержит нулевое собственное значение. Соответствующий собственный вектор является вакуумным. А **в разделе 1.7** (статья [15b]) исследуется случай, когда ни оператор **BC**, ни оператор **CB** не имеют нулевого собственного значения. Соответствующие симплектические листы являются цилиндром или тором.

Точнее, **в разделе 1.7** для соотношений

$$\begin{gathered}\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}=\varphi^0_\hbar(\mathbf{BC},\mathbf{A}),\qquad \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}=\varphi_\hbar(\mathbf{BC},\mathbf{A})\cdot\mathbf{C},\qquad \mathbf{A}_j\cdot\mathbf{A}_l=\mathbf{A}_l\cdot\mathbf{A}_j,\\ \mathbf{B}^*=\mathbf{C},\qquad \mathbf{A}^*_j=\mathbf{A}_j\qquad (j,l=1,\dots,k)\end{gathered}\tag{17}$$

найдены элементы Казимира, построены все операторно неприводимые представления, в которых операторы **BC** и **CB** не имеют нулевого собственного значения, найдены комплексные структуры на цилиндре и торе, получены когерентные состояния в гильбертовых пространствах (без вакуумного вектора) и воспроизводящие ядра, а также найдены воспроизводящие меры. Когерентные состояния и воспроизводящие ядра здесь выражены через тэта-функцию.

В разделе 1.8 (статья [16b]) выделен специальный частный случай перестановочных соотношений (14):

$$\begin{gathered}\mathbf{CB}=q\mathbf{B}\,\mathbf{C}+Q(\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_k),\\ \mathbf{A}_\mu\mathbf{B}=\mathbf{B}\,(q_\mu\mathbf{A}_\mu+Q_\mu(\mathbf{A}_{\mu+1},\dots,\mathbf{A}_k)),\\ \mathbf{C}\mathbf{A}_\mu=(q_\mu\mathbf{A}_\mu+Q_\mu(\mathbf{A}_{\mu+1},\dots,\mathbf{A}_k))\,\mathbf{C},\\ \mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu=\mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu,\\ \mathbf{B}^*=\mathbf{C},\qquad \mathbf{A}^*_\mu=\mathbf{A}_\mu\qquad (\mu,\,\nu\in\{1,\dots,k\}),\end{gathered}\tag{18}$$

в которых q, $q_\mu\in\mathbb{R}$ — ненулевые константы, $Q:\ \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, $Q_\mu:\mathbb{R}^{k-\mu}\to\mathbb{R}$ – полиномы, причем $Q_k=const$.

Этот частный случай обладает следующим замечательным свойством: каждое операторно неприводимое представление, в котором коммутативная подлгебра **BC**, $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_k$ имеет непустой точечной спектр, может быть реализовано в гильбертовом пространстве антиголоморфных функций точечными операторами, а не псевдодифференциальными операторами общего положения. (Линейный интегральный оператор называется точечным, если его ядро является обобщенной функцией с точечным носителем.) В работе классифицированы и описаны все возможные серии таких представлений и показано, что соответствующие когерентные состояния и воспроизводящие ядра могут быть представлены через гипергеометрические ряды, тэта-функцию, а также их модификации.

Глава 2 диссертации состоит из семи разделов, в которых разработанные методы построения неприводимых представлений и когерентных состояний применяются к ряду известных алгебр: простейшим алгебрам Ли, квадратичной алгебре эффекта Зеемана и вырожденной алгебре Склянина-Фаддеева. С помощью развитого метода редукции построены когерентные состояния восьмимерной квадратичной алгебры, возникающей при спинорной регуляризации Кустаанхеймо задачи об атоме водорода.

В разделе 2.1 (статья [1a], часть II) показано, как разработанные методы работают в случае алгебр Ли su(2):

$$[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2] = i\hbar\,\mathbf{S}_3, \quad [\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3] = i\hbar\,\mathbf{S}_1, \quad [\mathbf{S}_3, \mathbf{S}_1] = i\hbar\,\mathbf{S}_2, \quad \mathbf{S}_j^* = \mathbf{S}_j \ (j = 1, 2, 3) \tag{19}$$

и su(1,1):

$$[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2] = i\hbar\,\mathbf{S}_3, \quad [\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3] = -i\hbar\,\mathbf{S}_1, \quad [\mathbf{S}_3, \mathbf{S}_1] = -i\hbar\,\mathbf{S}_2, \quad \mathbf{S}_j^* = \mathbf{S}_j \ (j = 1, 2, 3). \tag{20}$$

Предварительно вместо эрмитовых образующих в них определяются операторы рождения $\mathbf{B} = \mathbf{S}_1 - i\mathbf{S}_2$, уничтожения $\mathbf{C} = \mathbf{S}_1 + i\mathbf{S}_2$ и оператор $\mathbf{A} = \mathbf{S}_3$. Тогда соотношения (19) и (20) приводятся к виду (1), (2), и далее для них используются конструкции, описанные в главе 1. В результате получаются неприводимые представления, когерентные состояния, воспроизводящие ядра, воспроизводящие меры, когерентные преобразования и операторы комплексной структуры.

Интересно, что описанным способом для алгебры su(1,1) удается построить два (эквивалентных) варианта неприводимых представлений дифференциальными операторами: стандартное представление операторами первого порядка и другое представление, в котором оператор рождения нулевого порядка, а оператор уничтожения второго порядка. Для этого представления, в отличие от стандартного, воспроизводящая мера существует при всех возможных собственных значениях оператора $\mathbf{A}$ на вакуумном векторе. В работе также построено когерентное преобразование, сплетающее два варианта представлений алгебры su(1,1).

В разделе 2.2 (статья [1a], часть II; статья [14b]) исследуется квадратичная алгебра, связанная с эффектом Зеемана. Эта алгебра была обнаружена в [63]. Она определяется как алгебра операторов, коммутирующих одновременно с регуляризованным гамильтонианом атома водорода

$$\mathbf{S}_0 = |\mathbf{q}|\Big(\frac{1}{4} + \mathbf{p}^2\Big), \qquad \text{где} \quad \mathbf{q} = q, \quad \mathbf{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, \qquad q \in \mathbb{R}^3$$

и с коммутирующей с ним компонентой $\mathbf{M}_3$ момента импульса $\mathbf{M} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$. Эти операторы самосопряжены в гильбертовом пространстве $L^2_-(\mathbb{R}^3)$ с нормой $\|\varphi\|_- = \big((\pi/4)\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(q)|^2 dq/|q|\big)^{1/2}$.

Алгебра их совместных симметрий образована четырьмя генераторами, удовлетворяющими следующим соотношениям [63]

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2] = i\hbar\,\mathbf{T}_0\mathbf{T}_3, && [\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1] = 2i\hbar\,\mathbf{T}_2,\\
&[\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3] = -\frac{i\hbar}{2}\big(\mathbf{T}_0\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_1\mathbf{T}_0\big), && [\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_2] = -2i\hbar\,\mathbf{T}_1,\\
&[\mathbf{T}_3, \mathbf{T}_1] = -\frac{i\hbar}{2}\big(\mathbf{T}_0\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2\mathbf{T}_0\big), && [\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_3] = 0.\\
&\qquad\qquad \mathbf{T}_j^* = \mathbf{T}_j \qquad (j = 0, 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{21}$$

В первую очередь для этой алгебры были рассмотрены те значения операторов Казимира, которые реализуюся в данной квантовой модели. Для таких значений в работе [14b] были построены не только неприводимые представления, когерентные состояния, воспроизводящие ядра и воспроизводящие меры в пространствах антиголоморфных функций, но и представления и когерентные состояния над лагранжевыми кривыми на симплектических листах. Операторы представления для таких геометрических когерентных состояний имеют простой геометрический смысл (см. предложение 3.1 в [14b]), благодаря чему, их очень удобно использовать для построения квазиклассической асимтотики собственных значений и собственных функций гамильтониана.

В работе [1a] для алгебры (21) изучены все возможные значения элементов Казимира, отвечающие представлениям с вакуумным вектором (а не только те значения, которые реализуются для соответствующей физической модели). Для этого в алгебре (21) введена структура "рождение–уничтожение" $\mathbf{B} = \mathbf{T}_1 - i\mathbf{T}_2$, $\mathbf{C} = \mathbf{T}_1 + i\mathbf{T}_2$, $\mathbf{A}_1 = -\mathbf{T}_0$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{T}_3$, и алгебра (21) представлена как частный случай алгебры (1) с $k = 2$, $f(A) = -2\hbar A_1 A_2$, $\varphi_1(A) = A_1 + 2\hbar$, $\varphi_2(A) = A_2 - \hbar A_1 - \hbar^2$. Построены все неприводимые эрмитовы представления с вакуумным вектором в пространствах антиголоморфных функций. При этом для каждого набора значений элементов Казимира выписаны все возможные варианты (эквивалентных) представлений дифференциальными (а не псевдодифференциальными) операторами. Для каждого такого представления построены когерентные состояния и воспроизводящие ядра, а также исследован вопрос о существовании воспроизводящей меры и, в тех случаях, когда это возможно, мера тоже получена. Когерентные состояния, воспроизводящие ядра и меры здесь выражены через гипергеометрические функции.

Кроме того, исследована соответствующая классическая алгебра и дано полное описание ее симплектических листов, а также комплексных структур на симплектических листах, соответствующих неприводимым представлениям.

В разделе 2.3 (статья [1a], часть II) исследуется вырожденный случай алгебры Фаддеева–Склянина. Это алгебра с четырьмя образующими $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ и $\mathbf{S}_3$ с квадратичными коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1] = i\mu(\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3\mathbf{S}_2), \qquad &&[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2] = i\hbar(\mathbf{S}_0\mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3\mathbf{S}_0),\\
&[\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_2] = -i\mu(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3\mathbf{S}_1), \qquad &&[\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3] = i\mu(\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1\mathbf{S}_0),\\
&[\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_3] = 0, &&[\mathbf{S}_3, \mathbf{S}_1] = i\mu(\mathbf{S}_0\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_0),\\
&\mathbf{S}_j^* = \mathbf{S}_j, \qquad j = 0, 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь μ и $\hbar$ параметры, $1 > \mu > 0$, $\hbar > 0$. Отметим, что соотношения (22) не могут быть представлены дифференциальными операторами.

В алгебре (22) введена структура "рождение–уничтожение" $\mathbf{B} = \mathbf{S}_1 - i\mathbf{S}_2$, $\mathbf{C} = \mathbf{S}_1 + i\mathbf{S}_2$, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_0$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_0$, и соотношения (22) приведены к виду (1), (2) с $k = 2$, $f(A) = \hbar(A_1^2 - A_2^2)$, $\varphi_1(A) = qA_1$, $\varphi_2(A) = A_2/q$, где $q = (1-\mu)/(1+\mu)$ – новый параметр, $0 < q < 1$.

В работе изучаются представления с дискретным спектром $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{S}_3$. Для таких представлений существует вакуумный вектор (3). Поэтому такие представления можно искать, используя разработанную схему.

Для алгебры (22) найдены элементы Казимира и построены все неприводимые эрмитовы представления с вакуумным вектором в пространствах антиголоморфных функций. При этом для каждого набора значений элементов Казимира выписаны три варианта (эквивалентных) представлений q-дифференциальными операторами. Для каждого такого представления построены когерентные состояния и воспроизводящие ядра, выписаны операторы комплексной структуры, и для одного из рассмотренных трех вариантов найдены воспроизводящие меры. Когерентные состояния и воспроизводящие ядра здесь выражены через q-гипергеометрические ряды.

Кроме того, исследована соответствующая классическая алгебра и дано полное описание ее симплектических листов, а также комплексных структур на симплектических листах, соответствующих неприводимым представлениям.

В разделе 2.4 (статья [1a], часть II) рассматриваются слабо нелинейные коммутационные соотношения

$$
\begin{gathered}
[\mathbf{C}^q, \mathbf{B}_p] = \sum_{\alpha=1}^{\ell} f^{\alpha q}_{\ p}\mathbf{R}_\alpha + f^q_p(\mathbf{A}), \\
[\mathbf{R}_\alpha, \mathbf{B}_p] = \sum_{r=1}^{d} \mathbf{B}_r \psi_{\alpha p}^{\ \ r}, \qquad [\mathbf{C}^q, \mathbf{R}_\alpha] = \sum_{r=1}^{d} \psi_{\alpha r}^{\ \ q}\mathbf{C}^r, \\
\mathbf{A}\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_p\varphi(\mathbf{A}), \qquad \mathbf{C}^p\mathbf{A} = \varphi(\mathbf{A})\mathbf{C}^p, \\
[\mathbf{R}_\alpha, \mathbf{R}_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{\ell} \chi^\gamma_{\alpha\beta}\mathbf{R}_\gamma, \qquad [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{R}_\alpha] = 0, \\
[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] = 0, \qquad [\mathbf{B}_p, \mathbf{B}_q] = 0, \qquad [\mathbf{C}^p, \mathbf{C}^q] = 0, \\
\mathbf{B}^*_p = \mathbf{C}^p, \qquad \mathbf{R}^*_\alpha = \mathbf{R}_\alpha, \qquad \mathbf{A}^*_\mu = \mathbf{A}_\mu \\
p, q = 1, \dots, d, \quad \mu, \nu = 1, \dots, k, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, \ell.
\end{gathered}
\tag{23}
$$

где $F^\alpha = (\!(f^{\alpha q}_{\ p})\!)$, $\Psi_\alpha = (\!(\psi_{\alpha p}^{\ \ q})\!)$, $X^\alpha = (\!(\chi^\alpha_{\beta\gamma})\!)$ – матрицы, элементы которых либо постоянны, либо являются φ-инвариантными функциями от A, т.е.

$$
f^{\alpha q}_{\ p}\big(\varphi(A)\big) = f^{\alpha q}_{\ p}(A), \qquad \psi_{\alpha p}^{\ \ q}\big(\varphi(A)\big) = \psi_{\alpha p}^{\ \ q}(A), \qquad \chi^\alpha_{\beta\gamma}\big(\varphi(A)\big) = \chi^\alpha_{\beta\gamma}(A).
$$

Предполагается, что число пар операторов рождения-уничтожения $d>1$, и что структурные константы и структурные функции в (23) соответствуют условиям эрмитовости $\varphi=\overline{\varphi}$, $F=F^*$, $F^\alpha=(F^\alpha)^*$, $\Psi_\alpha=\Psi_\alpha^*$, $X^\alpha=-\overline{X^\alpha}=(X^\alpha)^*$, где $F=(\!(f_p^q)\!)$, а также выполнены следующие обобщенные условия Якоби:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\ell}(\chi_{\alpha\beta}^{\varepsilon}\chi_{\varepsilon\gamma}^{\delta}+\chi_{\beta\gamma}^{\varepsilon}\chi_{\varepsilon\alpha}^{\delta}+\chi_{\gamma\alpha}^{\varepsilon}\chi_{\varepsilon\beta}^{\delta})=0 \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,\dots,\ell);$$

$$[\Psi_\alpha,\Psi_\beta]=\sum_{\gamma}\chi_{\alpha\beta}^{\gamma}\Psi_\gamma \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,\ell);$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\ell}(f^{\alpha q}{}_r\psi_{\alpha p}{}^{s}-f^{\alpha q}{}_p\psi_{\alpha s}{}^{r})=\delta_r^s\big(f_p^q(\varphi(A))-f_p^q(A)\big)-\delta_p^s\big(f_r^q(\varphi(A))-f_r^q(A)\big)$$
$$(p,q,r,s=1,\dots,d);$$

$$[F^\alpha,\Psi_\beta]=\sum_{\gamma=1}^{\ell}\chi_{\beta\gamma}^{\alpha}F^\gamma \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,\ell);$$
$$[F(A),\Psi_\alpha]=0 \qquad (\alpha=1,\dots,\ell).$$

При таких предположениях для соотношений (23) построены представления в пространствах антиголоморфных функций (от d комплексных переменных) с вакуумным вектором $\mathfrak{P}_0$, подчиненным условиям

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_\mu\mathfrak{P}_0=a_\mu\mathfrak{P}_0 \quad (\mu=1,\dots,k), \quad \mathbf{R}_\alpha\mathfrak{P}_0=0 \quad (\alpha=1,\dots,\ell),\\ \mathbf{C}^q\mathfrak{P}_0=0 \quad (q=1,\dots,d), \qquad \|\mathfrak{P}_0\|=1.\end{gathered} \tag{24}$$

Кроме того, получены когерентные состояния, сплетающие абстрактные представления с вакуумным вектором с построенными антиголоморфными представлениями.

При некоторых дополнительных предположениях в пространстве эрмитова представления с вакуумным вектором имеется второй вакуумный вектор, удовлетворяющий условиям (24). В этом случае для алгебры (23) строятся когерентные состояния с двумя вакуумными векторами. Соответствующее пространство представления раскладывается в прямую сумму двух неприводимых компонент, каждая из которых порождается из своего вакуумного вектора.

В разделе 2.5 (статья [1a], часть II) рассматривается алгебра с восемью генераторами, подчиненными следующим квадратичным соотношениям

$$\begin{gathered}[\boldsymbol{\rho}_p,\boldsymbol{\rho}_q]=0, \quad [\boldsymbol{\rho}_p,\boldsymbol{\sigma}_q]=-i\hbar\,(\delta_{pq}\boldsymbol{\rho}^2-\boldsymbol{\rho}_p\boldsymbol{\rho}_q), \quad [\boldsymbol{\sigma}_p,\boldsymbol{\sigma}_q]=-i\hbar\,(\boldsymbol{\sigma}_p\boldsymbol{\rho}_q-\boldsymbol{\sigma}_q\boldsymbol{\rho}_p),\\ \boldsymbol{\rho}_p^*=\boldsymbol{\rho}_p, \quad \boldsymbol{\sigma}_p^*=\boldsymbol{\sigma}_p \qquad\qquad (p,q=0,1,2,3).\end{gathered} \tag{25}$$

Здесь $\rho^2\stackrel{def}{=}\sum_{p=0}^{3}\rho_p^2$, $\hbar>0$. Условия Якоби для этих соотношений выполнены автоматически.

В алгебре (25) имеются два элемента Казимира $\mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\rho}^2$, $\mathbf{K}_2 = \big(\langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma}\rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}\rangle\big)/2$, где $\langle \rho, \sigma\rangle \stackrel{def}{=} \sum_{p=0}^{3} \rho_p \sigma_p$. В диссертационной работе строится представление алгебры (25), в котором $\mathbf{K}_1 = \mathbf{I}$, $\mathbf{K}_2 = 0$. Эти уравнения можно понимать, как уравнения симплектического листа, соответствующего неприводимому представлению соотношений (25), т.е. как уравнения $\{\rho^2 = 1,\ \langle \rho, \sigma\rangle = 0\}$ поверхности, вложенной в пространство $\mathbb{R}^8$ с классическими координатами ρ, σ. Эта поверхность диффеоморфна $T^*\mathbb{S}^3$.

Сначала с помощью некоторого преобразования соотношения (25)приведены к слабо нелинейным соотношениям (23), в которых $d = 3$, $k = 1$, $f^{rq}_{\ p} = -2i\hbar\,\varepsilon_{pqr}$, $f^q_p(A) = 2\hbar\,\delta^q_p A$, $\psi_{pq}^{\ \ r} = i\hbar\,\varepsilon_{pqr}$, $\chi_{pq}^{\ \ r} = i\hbar\,\varepsilon_{pqr}$, $\varphi(A) = A + \hbar$, и для таких соотношений (с помощью конструкции из раздела 2.4) построено антиголоморфное представление с двумя вакуумными векторами, а также когерентные состояния, воспроизводящее ядро и воспроизводящая мера. Отметим, что когерентные состояния и воспроизводящее ядро здесь выражены через функцию Бесселя нулевого порядка, а плотность воспроизводящей меры – через функцию Макдональда нулевого порядка. Затем с помощью обратного преобразования выведено антиголоморфное представление, когерентные состояния, воспроизводящее ядро и воспроизводящая мера для исходной квадратичной алгебры (25).

В разделе 2.6 (статья [1a], часть II) рассматривается пример редукции когерентных состояний по группе симметрий. Этот подход был предложен в работе [8]. Именно с помощью такого подхода были сначала получены представления квадратичных алгебр (21) и (25), а также соответствующие когерентные состояния в работах [63], [64], [9], [10].

Редукция стартует с обычной алгебры Гейзенберга и стандартных гауссовых когерентных состояний над $\mathbb{R}^n$. При этом возможна редукция двух типов.

Редукция первого типа выполняется в пространстве неприводимого представления операторной алгебры. При такой редукции когерентные состояния данной алгебры проектируются на собственное пространство некоторого ее элемента (называемого генератором редукции). В результате получается некоторое новое семейство когерентных состояний, соответствующее подалгебре операторов, коммутирующих с генератором редукции.

Редукция второго типа выполняется в пространстве параметров когерентных состояний, точнее, в пространстве антиголоморфного представления операторной алгебры. При этом рассматриваются как генератор редукции, так и его символ, который является элементом соответствующей пуассоновой алгебры. “Новые” когерентные состояния получаются из “старых” когерентных состояний путем усреднения (по параметрам) вдоль траекторий гамильтонова поля этого символа.

В качестве генератора редукции используется оператор типа “действие”. Этот оператор, деленный на квазиклассический параметр $\hbar$, имеет целочисленный спектр, а его символ задает 2π-периодический гамильтонов поток. При таких условиях редукция (первого типа) когерентных состояний в пространстве неприводимого представления эквивалентна редукции (второго типа) по параметрам. Удобно иметь в виду оба этих типа редукции и одни свойства изучать, используя первый вид редукции, а другие, используя редукцию второго типа.

Описанные два типа редукции в разделе 2.6 применяются к гауссовым когерентным состояниям алгебры Гейзенберга для размерности $n = 4$. В качестве генератора редукции берется оператор, связанный со спинорной регуляризации Кустаанхеймо. В результате редукции получаются операторы антиголоморфного представления, когерентные состояния, воспроизводящее ядро и воспроизводящая мера для алгебры (25). В квазиклассическом пределе построенным квантовым объектам соответствует симплектический лист алгебры (25), диффеоморфный $T^*\mathbb{S}^3$.

Описанный в разделе 2.6 метод редукции применяется в главе 4 при вычислении воспроизводящих мер для алгебр симметрий многочастотного резонанса.

В разделе 2.7 (статья [15b]) приводятся два примера построения неприводимых представлений и когерентных состояний, соответствующих цилиндру и тору. Здесь применяется схема из раздела 1.7.

Первый пример – это алгебра $su(1,1)$. В разделе 2.1 для нее построены представления, соотвествующие симплектическим листам, диффеоморфным плоскости; в пространстве каждого такого представления имеется вакуумный вектор, аннулируемый оператором уничтожения. А в разделе 2.7 для этой алгебры строятся представления, соответствующие симплектическим листам, диффеоморфным цилиндру; это представления без вакуумного вектора. Когерентные состояния и воспроизводящие ядра таких представлений выражаются через тэта-функцию.

Второй пример – это вырожденная алгебра Склянина-Фаддеева

$$\begin{aligned} &[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2] = i(\mathbf{S}_0\mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3\mathbf{S}_0), \qquad &&[\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1] = -i\mu^2(\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3\mathbf{S}_2), \\ &[\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3] = i(\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1\mathbf{S}_0), \qquad &&[\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_2] = i\mu^2(\mathbf{S}_3\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1\mathbf{S}_3), \\ &[\mathbf{S}_3, \mathbf{S}_1] = i(\mathbf{S}_0\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_0), \qquad &&[\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_3] = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

где $\mu > 0$ (структурные константы этой алгебры отличаются от структурных констант алгебры (22)).

Путем замены структурной константы μ на новую константу

$$q = \frac{1+i\mu}{1-i\mu} = e^{i\varphi}, \qquad \text{где} \quad \mu = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \tag{27}$$

и введения новых генераторов $\mathbf{A} = \sqrt{\mu}\mathbf{S}_3 + i\mathbf{S}_0/\sqrt{\mu}$ $\mathbf{B} = \mathbf{S}_1 - i\mathbf{S}_2$, $\mathbf{C} = \mathbf{S}_1 + i\mathbf{S}_2$ (здесь для упрощения обозначений использован неэрмитов генератор $\mathbf{A}$ вместо его вещественной и мнимой частей $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + i\mathbf{A}_2$) алгебра (26) приведена к алгебре

$$[\mathbf{C}, \mathbf{B}] = -i\big(\mathbf{A}^2 - (\mathbf{A}^*)^2\big), \qquad [\mathbf{A}, \mathbf{A}^*] = 0,$$
$$\mathbf{CA} = q\mathbf{AC}, \qquad \mathbf{AB} = q\mathbf{BA}, \qquad \mathbf{B}^* = \mathbf{C}$$

типа (17), где $\hbar = 1$ и

$$\varphi_t^0(A_0, A) = A_0 + \frac{\overline{q}(q^{2t} - 1)A^2 + q(\overline{q}^{2t} - 1)\overline{A}^2}{i(q - \overline{q})}, \qquad \varphi_t(A_0, A) = q^t A.$$

Для этой алгебры по схеме из раздела 1.7 построены все операторно неприводимые представления, когерентные состояния, воспроизводящие ядра и воспроизводящие меры. Соотвествующие симплектические листы вложены в $\mathbb{R}^4$ как тор.

Отдельно изучен случай, когда структурная константа q (27) является корнем N-ой степени из 1. В этом случае, помимо "классических" элементов Казимира

$$\mathbf{K} = \mathbf{BC} - \frac{\overline{q}\mathbf{A}^2 + q(\mathbf{A}^*)^2}{i(q - \overline{q})}, \qquad \varkappa = \mathbf{AA}^*,$$

имеются "неклассические" элементы Казимира: $\mathbf{B}^N$, $\mathbf{C}^N$, $\mathbf{A}^N$ и $(\mathbf{A}^*)^N$. Соответствующие операторно неприводимые представления конечномерны.

Если же $q^N \neq 1$ ни для какого $N \in \mathbb{N}$, то операторно неприводимые представления бесконечномерны (хотя соответствуют компактным симплектическим листам).

Глава 3 диссертационной работы состоит из шести разделов и содержит описание серии работ [2a], [14b], [17b], [18b], [19b] о движении заряженной частицы в поле Кулона-Дирака, которое возмущено электрическим и (или) однородным магнитным полями.

Первые три раздела главы 3 носят вспомогательный характер.

Раздел 3.1 (статьи [2a], [17b]) содержит определение гамильтониана $\mathbf{H}_0$ частицы в поле Кулона-Дирака, регуляризацию этого гамильтониана, т.е. приведение его к оператору $\mathbf{S}_0$ с эквидистантным спектром, решение спектральной задачи для $\mathbf{S}_0$ (на отрицательной части спектра), а также описание алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ квантовых интегралов движения регуляризованного оператора $\mathbf{S}_0$.

В разделе 3.2 (статьи [2a], [14b], [17b]) для возмущенного оператора $\mathbf{S}_0 + \varepsilon\mathbf{S}_1$, где $\mathbf{S}_0$ - оператор с эквидистантным спектром, ε – малый параметр, приведена схема квантового метода усреднения с редукцией в алгебру $\mathcal{F}_{quant}$ симметрий старшей части $\mathbf{S}_0$. Действуя по приведенной схеме, можно найти унитарное преобразование, приводящее оператор $\mathbf{S}_0 + \varepsilon\mathbf{S}_1$ к виду $\mathbf{S}_0 + \varepsilon\underline{\mathbf{T}}$, где новый возмущающий оператор $\underline{\mathbf{T}} = \varepsilon\underline{\mathbf{S}_1} + \varepsilon^2\underline{\mathbf{S}_2} + \dots$ (он называется усредненным) коммутирует (во всех порядках по ε) со старшей частью $\mathbf{S}_0$, т.е. является элементом алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ его симметрий.

Отметим, что если оба оператора $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{S}_1$ коммутируют с некоторым оператором $\mathbf{G}$, то усредненый оператор $\underline{\mathbf{T}}$ является элементом подалгебры $\mathcal{G}_{quant}$ симметрий $\mathbf{G}$ в алгебре $\mathcal{F}_{quant}$.

В разделе 3.3 (статьи [2a], [14b], [17b]) описан метод когерентного преобразования, позволяющий записать усредненное возмущение $\underline{\mathbf{T}}$ в неприводимом представлении алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ (или ее подалгебры $\mathcal{G}_{quant}$) в виде некоторого оператора $\mathring{\underline{T}}$ в пространстве неприводимого представления. При этом собственные функции усредненного возмущения $\underline{\mathbf{T}}$ представляются в виде интеграла от собственных функций оператора $\mathring{\underline{T}}$ и когерентных состояний алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ (или ее подалгебры $\mathcal{G}_{quant}$).

Следующие три раздела содержат решения трех спектральных задач.

В разделе 3.4 (статьи [2a], [17b]) исследуется задача о частице в аксиально-возмущенном поле Кулона-Дирака. Наличие аксиальной симметрии приводит к существованию такого оператора $\mathbf{G}$ (это соответствующая компонента момента импульса), который коммутирует и со старшей частью – регуляризованным гамильтонианом $\mathbf{S}_0$ частицы в поле Кулона-Дирака, и с возмущением $\mathbf{S}_1$, описывающим внешний электрический потенциал. В алгебре $\mathcal{F}_{quant}$ симметрий $\mathbf{S}_0$ подалгебра $\mathcal{G}_{quant}$ симметрий оператора $\mathbf{G}$ задается квадратичными коммутационными соотношениями

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] = i\hbar(\mathbf{B}_0\mathbf{B}_3 + \mu\mathbf{B}_4), && [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1] = 2i\hbar\,\mathbf{B}_2,\\
&[\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3] = -\frac{i\hbar}{2}\big(\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_0\big), && [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_2] = -2i\hbar\,\mathbf{B}_1,\\
&[\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_1] = -\frac{i\hbar}{2}\big(\mathbf{B}_0\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_0\big), && [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_3] = 0,
\end{aligned}
$$
$$
[\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_0] = [\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_1] = [\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_2] = [\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_3] = 0.
$$

Для этой подалгебры в работе построены все неприводимые представления (соответствующие возможным в данной физической модели значениям операторов Казимира), когерентные состояния, воспроизводящие ядра и воспроизводящие меры. Усредненный гамильтониан явно выражен в виде функции от образующих подалгебры $\mathcal{G}_{quant}$, и его старший (по величине внешнего поля) член записан в неприводимом представлении в виде обыкновенного дифференциального оператора Хейна (Гойна) [96]. Для собственных функций исходной задачи построено интегральное представление через полиномиальные решения уравнения Хейна и когерентные состояния подалгебры $\mathcal{G}_{quant}$.

В разделе 3.5 (статьи [2a], [18b]) для частицы в поле Кулона-Дирака, возмущенном однородным магнитным полем, показано, что вырождение старшей части спектра может быть снято только в далеких (квадратичных или выше) членах теории возмущений по магнитному полю.

Снятие вырождения контролируется динамической алгеброй с полиномиальными перестановочными соотношениями

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j] = 0, && [\mathbf{C}, \mathbf{B}] = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4),\\
&\mathbf{A}_1\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{A}_1 - r\hbar), && \mathbf{C}\mathbf{A}_1 = (\mathbf{A}_1 - r\hbar)\mathbf{C},\\
&\mathbf{A}_2\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{A}_2 + l\hbar), && \mathbf{C}\mathbf{A}_2 = (\mathbf{A}_2 + l\hbar)\mathbf{C},\\
&\mathbf{A}_3\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{A}_3 + 2r\hbar\mathbf{A}_1 - r^2\hbar^2), && \mathbf{C}\mathbf{A}_3 = (\mathbf{A}_3 + 2r\hbar\mathbf{A}_1 - r^2\hbar^2)\mathbf{C},\\
&\mathbf{A}_4\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{A}_4 - 2l\hbar\mathbf{A}_2 - l^2\hbar^2), && \mathbf{C}\mathbf{A}_4 = (\mathbf{A}_4 - 2l\hbar\mathbf{A}_2 - l^2\hbar^2)\mathbf{C},
\end{aligned}
\tag{28}
$$

где полином f от четырех переменных определен формулой

$$
\begin{aligned}
&f(A_1, A_2, A_3, A_4) \stackrel{def}{=} \hbar\Bigg(r \prod_{q=0}^{l-1} \big(A_4 + (2q+1)\hbar A_2 - q(q+1)\hbar^2\big)\\
&\times \sum_{j=0}^{r-1} \big(2A_1 + (r-1-2j)\hbar\big) \prod_{p=j+1-r}^{j-1} \big(A_3 + (2p+1)\hbar A_1 - p(p+1)\hbar^2\big)\\
&- l \prod_{p=0}^{r-1} \big(A_3 + (2p+1)\hbar A_1 - p(p+1)\hbar^2\big)\\
&\times \sum_{j=0}^{l-1} \big(2A_2 + (l-1-2j)\hbar\big) \prod_{q=j+1-l}^{j-1} \big(A_4 + (2q+1)\hbar A_2 - q(q+1)\hbar^2\big)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Структура алгебры (28) определяется арифметической пропорцией

$$
\frac{n+1+\frac{|k|}{2}+\frac{k}{2}}{n+1+\frac{|k|}{2}-\frac{k}{2}} = \frac{l}{r}
$$

между главным квантовым числом n и квантовым числом k магнитного заряда. Неприводимые представления динамической алгебры реализуются в пространстве полиномов и задают модельные дифференциальные уравнения с полиномиальными решениями, которые определяют главный член асимптотики собственных функций в эффекте Зеемана.

В разделе 3.6 (статьи [2a], [19b]) исследуется эффект Зеемана-Штарка в атоме водорода (дополнительно может присутствовать неоднородный электрический потенциал). Показано, что в спектре атома водорода, который помещен в скрещенные электрическое и магнитное поля (величины ε), возможно появление резонансных кластеров, в которых собственные значения расположены друг от друга на расстоянии $O(\varepsilon^2)$. В остальных (нерезонансных) кластерах точки спектра отстоят друг от друга на расстояние $O(\varepsilon)$. В разделе 3.6 приведены главные члены асимптотики собственных значений и собственных функций как в резонансных, так и в нерезонансных кластерах. Резонансные кластеры контролируются алгебрами с полиномиальными перестановочными соотношениями (28), возникающими также в задаче о монополе

Дирака в однородном магнитном поле. Но параметры l и r структурных функций алгебры (28) определяются здесь из резонансного условия

$$\frac{|H-3nE|}{|H+3nE|}=\frac{l}{r}$$

между электрическим и магнитным полями E и H.

В работе построены неприводимые представления алгебры (28) (соответствующие возможным в данной физической модели значениям операторов Казимира) дифференциальными операторами, действующими по одной переменной, а также ее гипергеометрические когерентные состояния. С помощью этих состояний собственные функции исходной задачи выражены через решения модельного обыкновенного дифференциального уравнения.

В главе 4 (статьи [3a], [4a], [9a], [10a]) исследуется алгебра симметрий квантового резонансного гармонического осциллятора (для краткости она названа "резонансной") в случае трех и более частот. Эта алгебра играет существенную роль при исследовании динамики и спектра многомерных физических систем, когда изучаются состояния, локализованные вблизи устойчивого положения равновесия. Резонансная алгебра описана с помощью конечного числа образующих и полиномиальных соотношений. Для классической версии этой алгебры изучены симплектические листы и комплексные структуры на них, а для квантовой версии построены неприводимые представления, когерентные состояния, воспроизводящие ядра и воспроизводящие меры.

В разделах 4.1 – 4.7 (статьи [3a], [4a]) изучается случай эллиптического "неприводимого" резонанса, когда частоты осциллятора являются попарно взаимно простыми натуральными числами. **В разделе 4.8** (статья [9a]) описывается редукция случая "приводимого" эллиптического резонанса, когда частоты не обязательно являются взаимно простыми, к случаю неприводимого резонанса. А в последнем **разделе 4.9** (статья [10a]) исследуется трехчастотный гиперболический резонанс, когда две частоты положительны, а третья отрицательна.

В разделе 4.1 (статьи [3a], [4a]) в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ рассматривается гамильтониан

$$\hat{H}[f]=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Big(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial q_j^2}+f_j^2q_j^2-\hbar f_j\Big) \tag{29}$$

квантового гармонического осциллятора с натуральными попарно взаимно простыми частотами $f_1,\dots,f_n$. Его симметрии задаются формулами

$$\hat{S}_j\stackrel{\mathrm{def}}{=}\hat{z}_j^*\hat{z}_j\quad(j=1,\dots,n),\qquad\hat{A}_\rho\stackrel{\mathrm{def}}{=}\hat{z}^{*\rho_+}\hat{z}^{\rho_-}\quad(\rho\in\mathcal{R}). \tag{30}$$

Здесь $\hat{z}_j = (\hbar\partial/\partial q_j + f_j q_j)/\sqrt{2f_j}$ – операторы уничтожения; $\mathcal{R} = \{\rho \in \mathbb{Z}^n \mid \langle f, \rho\rangle = 0\}$ – множество "резонансных" векторов; и для каждого вектора $\rho \in \mathbb{Z}^n$ определены следующие две операции:

$$(\rho_+)_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \rho_j, & \rho_j \geq 0, \\ 0, & \rho_j \leq 0, \end{cases}, \qquad (\rho_-)_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \rho_j \geq 0, \\ -\rho_j, & \rho_j \leq 0 \end{cases} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{31}$$

Поскольку операторы $\hat{A}_\rho$ не являются независимыми, то возникает задача о выделении минимального базиса из бесконечного множества таких генераторов; эта задача сводится к задаче об описании множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^n$ векторов ρ, нумерующих генераторы $\hat{A}_\rho$. В работе [97] было показано, что множество $\mathcal{M}$ конечно и состоит из "минимальных" резонансных векторов, которые нельзя получить сложением двух ненулевых векторов из пересечения резонансной решетки $\mathcal{R}$ с одним из декартовых квадрантов.

Отметим, что любой резонансный вектор разлагается в сумму минимальных с неотрицательными целыми коэффициентами:

$$\sigma = \sum_{\varkappa \in \mathcal{M}_\sigma} n^\sigma_\varkappa \cdot \varkappa, \qquad n^\sigma_\varkappa \in \mathbb{Z}_+, \quad \mathcal{M}_\sigma \subset \mathcal{M}. \tag{32}$$

Здесь $\mathcal{M}_\sigma$ — это множество минимальных векторов в том декартовом квадранте, которому принадлежит вектор σ.

В двухчастотном случае $n = 2$ описание множества $\mathcal{M}$ тривиально. В трехчастотном случае $n = 3$ задача о явном описании множества $\mathcal{M}$ минимальных резонансных векторов была решена в работе [3a].

Теорема 3. *Пусть $n = 3$, и частоты f_1, f_2, f_3 – попарно взаимно простые натуральные числа. Пусть пара целых чисел μ и ν является решением диофантова уравнения $\mu f_1 + \nu f_2 + f_3 = 0$ с условием $0 \leq \nu \leq f_1 - 1$.*

Тогда множество $\mathcal{M}$ минимальных векторов в резонансной решетке $\mathcal{R}$ является объединением следующих подмножеств: $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{23} \cup \mathcal{M}^{31} \cup \mathcal{M}^{12} \cup \mathcal{M}^1 \cup \mathcal{M}^2 \cup \mathcal{M}^3$.

Если $f_1 = 1$, то $\mathcal{M}^{23}$ состоит из двух векторов: $(-f_3, 0, f_1)$ и $(-f_2, f_1, 0)$.

Если $f_1 \geq 2$, то кроме этих двух векторов подмножеcтвео $\mathcal{M}^{23}$ содержит последовательность векторов $\big(-(lf_3 + \nu^{(l)} f_2)/f_1,\ l\nu\,(\mathrm{mod} f_1),\ l\big)$, $l = 1, \ldots, f_1 - 1$, причем, вектор с номером l сохраняется в этой последовательности только при условии, что $\nu^{(l)} < \nu^{(j)}$ для всех $j = 1, \ldots, l - 1$.

Минимальные векторы подмножеств $\mathcal{M}^{31}$ и $\mathcal{M}^{12}$ получаются из предыдущего описания векторов в $\mathcal{M}^{23}$ циклической перестановкой индексов $1, 2, 3$.

Минимальные векторы в подмножестве $\mathcal{M}^j$ имеют вид $(-\sigma)$, где σ это минимальный вектор в подмножестве $\mathcal{M}^{kl}$, k и l — номера, дополняющие номер j до тройки индексов $1, 2, 3$.

В разделе 4.2 (статья [4a]) приведено описание пуассоновой алгебры симметрий резонансного осциллятора с вещественными образующими S_k $(k = 1, \dots, n)$ и комплексными образующими A_ρ $(\rho \in \mathcal{M})$, подчиненными связям эрмитова, коммутативного и некоммутативного типов, а также полиномиальным соотношениям относительно скобки Пуассона.

В разделе 4.3 (статья [4a]) описываются симплектические листы Ω этой алгебры.

Здесь же вводится понятие резонансного базиса. Это набор линейно независимых минимальных резонансных векторов $\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(n-1)} \in \mathcal{M}$ таких, что для любого резонансного вектора $\sigma \in \mathcal{R}$ коэффициенты его разложения по векторам $\rho^{(k)}$ — это целые числа:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} N_\sigma^{(k)} \rho^{(k)}, \qquad N_\sigma^{(k)} \in \mathbb{Z}. \tag{33}$$

Каждому резонансному базису сопоставлены локальные комплексные координаты на симплектическом листе: $w_k = A_{-\rho^{(k)}}/S^{\rho_-^{(k)}}$ $(k = 1, \dots, n-1)$. Описан атлас карт, покрывающих симплектические листы; в каждой карте соответствующие координатные функции $w_1, \dots, w_{n-1}$ не имеют особенностей; при переходе из одной карты в другую, т.е. от резонансного базиса $\{\rho^{(j)}\}$ к другому резонансному базису $\{\tilde{\rho}^{(j)}\}$, эти координаты изменяются $w \to \tilde{w}$ по степенному закону. Кроме того, введены координаты Дарбу, а также вычислен кэлеров потенциал.

В разделе 4.4 (статья [4a]) для кажого числа $M \in \mathbb{Z}_+$ определен диофантов остов $\mathbf{\Delta}[M] \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{Z}_+^n \mid \langle f, k\rangle = M\}$, рассмотрен вопрос о количестве $d[M]$ точек в нем (т.е. вопрос о кратности собственного значения $\hbar M$ гамильтониана осциллятора (29)) и введено понятие вершины $r \in \mathbf{\Delta}[M]$ диофантова остова.

Точка $r \in \mathbf{\Delta}[M]$ называется вершиной диофантова остова $\mathbf{\Delta}[M]$, если существует резонансный базис такой, что для всех $l \in \mathbf{\Delta}[M]$ все коэффициенты разложения вектора $l - r$ по векторам базиса неотрицательны. Вершина r и отвечающий ей резонансный базис $\{\rho\}$ составляют репер $R = (r, \{\rho\})$ диофантова остова $\mathbf{\Delta}[M]$; реперы R нумеруют карты в атласе.

В разделе 4.5 (статья [4a]) для каждого числа $M \in \mathbb{Z}_+$ такого, что $d(M) \neq 0$, построено гильбертово пространство $\mathfrak{L}(\Omega)$ антиголоморфных полиномов со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \varphi \, \overline{\psi} \, \mathcal{J}_R \, dw \, d\overline{w}. \tag{34}$$

Здесь w – локальные комплексные координаты в карте с номером R (где R – репер диофантова остова $\mathbf{\Delta}[M]$); $M = \langle f, r\rangle$; плотность $\mathcal{J}_R$ меры задается формулой

$$\mathcal{J}_R = \frac{S^{r-\Sigma\rho}}{r!\hbar^{|r|}} Q^{[M]}(S), \qquad Q^{[M]}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s_1 \dots s_n}{\hbar} \int_0^\infty y^{M+|f|-1} \exp\Big\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_{j=1}^{n-1} s_j y^{f_j} \Big\} \, dy,$$

в которой $\sum \rho = \sum_{j=1}^{n-1} \rho^{(j)}$.

В работе вычислено воспроизводящее ядро $\mathcal{K}$ этого пространства. В локальных комплексных координатах w в карте с номером R оно является полиномом

$$\mathcal{K}_R = \sum_{\sigma\in\mathcal{R}_r} \frac{r!}{\hbar^{|\sigma_+|-|\sigma_-|}(r+\sigma)!}\overline{w}^{N_\sigma} w^{N_\sigma}. \tag{35}$$

Здесь подмножество $\mathcal{R}_r \subset \mathcal{R}$ задано условием $\sigma \in \mathcal{R}_r \iff (r+\sigma) \in \mathbf{\Delta}[M]$, а векторы $N_\sigma \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ определены разложением (33) векторов σ по резонансному базису из репера R с вершиной r.

В разделе 4.6 (статья [4a]) описана квантовая резонансная алгебра $\mathcal{A}$. Для этого предварительно определены обобщенные символы Похгаммера $(s)_\rho \stackrel{\text{def}}{=} (s_1)_{\rho_1} \dots (s_n)_{\rho_n}$, где для любых $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$

$$(a)_m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (a+\hbar)\dots(a+m\hbar) & \text{при} \quad m \geq 1, \\ 1 & \text{при} \quad m = 0, \\ a(a-\hbar)\dots(a-\hbar(|m|-1)) & \text{при} \quad m \leq -1. \end{cases}$$

Кроме того, на решетке $\mathbb{Z}^n$ введены следующие вспомогательные операции (индекс j пробегает все значения $1,\dots,n$):

$$\begin{aligned} &\alpha,\beta \to \alpha\cdot\beta, && (\alpha\cdot\beta)_j \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_j\beta_j, \\ &\alpha,\beta \to [\alpha|\beta], && [\alpha|\beta]_j \stackrel{\text{def}}{=} \min\{(\alpha_-)_j, (\beta_+)_j\} - \min\{(\beta_-)_j, (\alpha_+)_j\}, \\ &\alpha,\beta \to [\alpha,\beta], && [\alpha,\beta] \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_+\cdot\beta_- - \alpha_-\cdot\beta_+, \end{aligned}$$

где операции $\alpha \to \alpha_\pm$ заданы в (31). Векторы α, β решетки считаются коммутирующими, если их коммутатор $[\alpha,\beta]$ равен нулю.

Резонансная алгебра $\mathcal{A}$ определяется как алгебра с инволюцией, порожденная образующими $\mathbf{A}_\sigma$ ($\sigma \in \mathcal{M}$), $\mathbf{S}_j$ ($j = 1,\dots,n$) и следующими связями и коммутационными соотношениями.

– Квантовые связи эрмитова типа: $\mathbf{S}_j^* = \mathbf{S}_j$ $(j = 1,\dots,n)$, $\mathbf{A}_\sigma^* = \mathbf{A}_{-\sigma}$ $(\sigma \in \mathcal{M})$.

– Квантовые связи коммутативного типа: $\prod_\rho (\mathbf{A}_\rho)^{k_\rho} = \prod_\sigma (\mathbf{A}_\sigma)^{m_\sigma}$ для любых семейств коммутирующих векторов $\rho,\sigma \in \mathcal{M}$ и чисел $k_\rho, m_\sigma \in \mathbb{N}$ таких, что $\sum_\rho k_\rho\rho = \sum_\sigma m_\sigma\sigma$.

– Квантовые связи некоммутативного типа: если минимальные векторы ρ и σ не коммутируют и $\rho \neq -\sigma$, то выполнено соотношение $\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma = g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S}) \prod_{\varkappa\in\mathcal{M}_{\rho+\sigma}} (\mathbf{A}_\varkappa)^{n_\varkappa^{\rho+\sigma}}$; здесь $g_{\rho,\sigma}(s) \stackrel{\text{def}}{=} (s-\hbar\rho)_{[\sigma|\rho]}$, $s \in \mathbb{R}^n$; $n_\varkappa^{\rho+\sigma}$ — коэффициенты разложения (32) вектора $\rho+\sigma$ по минимальным векторам.

– Коммутационные соотношения:

$$[\mathbf{S}_j, \mathbf{S}_k] = 0, \quad [\mathbf{S}_j, \mathbf{A}_\rho] = \hbar\rho_j\mathbf{A}_\rho, \quad [\mathbf{A}_{-\rho}, \mathbf{A}_\rho] = \hbar F_{-\rho,\rho}(\mathbf{S}) \quad (j,k = 1,\dots,n,\ \ \rho \in \mathcal{M}),$$

где полиномы $F_{\rho,\sigma}$ заданы формулой $F_{\rho,\sigma} = (g_{\rho,\sigma} - g_{\sigma,\rho})/\hbar$.

В разделе 4.7 (статья [4a]) построены неприводимые представления и когерентные состояния резонансной алгебры $\mathcal{A}$.

В абстрактном представлении резонансной алгебры операторами $\mathbf{S}_j$ ($j = 1, \dots, n$), $\mathbf{A}_\sigma$ ($\sigma \in \mathcal{M}$) в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ каждому неминимальному резонансному вектору σ сопоставлен оператор

$$\mathbf{A}_\sigma = \begin{cases} \mathbf{I}, & \text{если} \quad \sigma = 0, \\ \prod_{\varkappa \in \mathcal{M}_\sigma} \mathbf{A}_\varkappa^{n_\varkappa^\sigma}, & \text{если} \quad \sigma \neq 0, \end{cases}$$

где подмножества $\mathcal{M}_\sigma$ и числа $n_\varkappa^\sigma$ определены согласно (32).

Для заданного числа $M \in \mathbb{Z}_+$ такого, что $d[M] \neq 0$ предполагается, что хотя бы для одного репера $R = (r, \{\rho\})$ в пространстве $\mathcal{H}$ существует нормированный "вакуумный" вектор $\mathfrak{p}_R$ такой, что

$$\mathbf{A}_\rho \mathfrak{p}_R = 0 \quad (\rho \in \mathcal{R}_R^-), \qquad \mathbf{S}_j \mathfrak{p}_R = \hbar r_j \mathfrak{p}_R \quad (j = 1, \dots, n), \tag{36}$$

где подмножество $\mathcal{R}_R^- \subset \mathcal{R}$ задано условием $\rho \in \mathcal{R}_R^- \ \Leftrightarrow\ (r + \sigma) \notin \mathbf{\Delta}[M]$.

Теорема 4. (a) *В локальной карте с номером $R = (r, \{\rho\})$ когерентные состояния алгебры $\mathcal{A}$ задаются формулой*

$$\mathfrak{P}_R(w) = \sum_{t \in \mathbf{\Delta}[M]} \sqrt{\frac{\hbar^{|r|} r!}{\hbar^{|t|} t!}} \prod_{k=1}^{n-1} w^{N_{t-r}^{(k)}} \mathfrak{p}^t, \qquad \text{где } \mathfrak{p}^t \stackrel{\text{def}}{=} (\hbar r)_{t-r}^{-1/2} \mathbf{A}_{t-r} \mathfrak{p}_R.$$

Здесь неотрицательные показатели степени $N_{t-r}^{(k)}$ определяются разложением (33) *резонансного вектора $t - r$ по базису $\{\rho\}$.*

Векторы $\{\mathfrak{p}^t\ t \in \mathbf{\Delta}[M]\}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_M$ неприводимого представления алгебры $\mathcal{A}$, где оператор Казимира $f_1 \mathbf{S}_1 + \dots + f_n \mathbf{S}_n$ принимает значение $\hbar M$. Операторы представления алгебры $\mathcal{A}$ в этом базисе имеют вид $\mathbf{S}_j \mathfrak{p}^t = \hbar t_j \mathfrak{p}^t$ $(j = 1, \dots, n)$, $\mathbf{A}_\rho \mathfrak{p}^t = (\hbar t)_\rho^{1/2} \mathfrak{p}^{\rho + t}$ $(\rho \in \mathcal{R})$.

(b) *Скалярное произведение когерентных состояний $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})_\mathcal{H}$ совпадает с воспроизводящим ядром* (35) *пространства $\mathcal{L}(\Omega)$.*

(c) *Дифференциальные операторы*

$$\overset{\circ}{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} \hbar r + \hbar \sum_{k=1}^{n-1} \rho^{(k)}\, \overline{w}_k \frac{\partial}{\partial \overline{w}_k} \ (j = 1, \dots, n), \qquad \overset{\circ}{A}_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} (\overset{\circ}{S})_{\sigma_-} \prod_{k=1}^{n-1} (\overline{w}_k)^{N_k^\sigma} \ (\sigma \in \mathcal{M}), \tag{37}$$

заданные в локальных картах, согласованы на пересечениях карт и задают неприводимое представление квантовой резонансной алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}(\Omega)$ антиголоморфных полиномов со скалярным произведением (34). *Соответствующим вакуумным вектором служит единичная функция.*

(d) *С помощью когерентного преобразования $\mathcal{P} : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathcal{H}$, заданного формулой*

$$\mathcal{P}[\psi] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \psi(\overline{w})\, \mathfrak{P}(w)\, \mathcal{J}_R\, dw\, d\overline{w},$$

абстрактное представление резонансной алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с вакуумным вектором (36) *сплетается с неприводимым представлением* (37): $\mathbf{A}_\sigma \mathcal{P}[\psi] = \mathcal{P}[\mathring{A}_\sigma \psi]$, $\mathbf{S}_j \mathcal{P}[\psi] = \mathcal{P}[\mathring{S}_j \psi]$.

В случае, если $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, и представление алгебры $\mathcal{A}$ задано формулами (30), для базисных векторов $\mathfrak{p}^t$ и когерентных состояний $\mathfrak{P}_R(w)$ получены явные формулы через полиномы Эрмита.

Разделы 4.1 – 4.7 посвящены изучению "неприводимого" резонанса, когда все частоты f_j осциллятора $\hat{H}[f]$ (29) – попарно взаимно простые натуральные числа.

В разделе 4.8 (статья [9a]) исследуется "приводимый" эллиптический случай трехчастотного резонанса, когда частоты g_1, g_2, g_3 осциллятора $\hat{H}[g]$ – произвольные натуральные числа (конечно, предполагается, что НОД$\{g_1, g_2, g_3\} = 1$).

Приводимому вектору частот (g_1, g_2, g_3) в работе сопоставлен неприводимый вектор частот (f_1, f_2, f_3) по формуле $f_j = g_j/(m_k m_l)$, где $m_j =$ НОД$\{g_k, g_l\}$, (j, k, l) – циклическая перестановка чисел $(1, 2, 3)$, и показано, что исследование алгебры симметрий осциллятора $\hat{H}[g]$ сводится к исследованию алгебры симметрий осциллятора $\hat{H}[f]$. В результате для приводимого резонанса получены неприводимые представления в гильбертовых пространствах антиголоморфных полиномов, когерентные состояния, воспроизводящие ядра и воспроизводящие меры.

В разделе 4.9 (статья [10a]) исследован трехчастотный гиперболический резонанс, т.е. случай, когда две частоты осциллятора $\hat{H}[g]$ (29) положительны, а третья отрицательна.

Изучение гиперболического случая резонанса во многом аналогично изучению приводимого эллиптического случая. Более того, соотношения, определяющие алгебру гиперболического резонанса, формально совпадают с соотношениями для эллиптического случая. Но знаки структурных констант резонансной алгебры в эллиптическом и гиперболическом случаях, конечно, различны. Поэтому ситуации в эллиптическом и гиперболическом случаях принципиально отличаются. Так, в эллиптическом случае симплектические листы пуассоновой алгебры имеют компактное замыкание, а неприводимые представления квантовой резонансной алгебры конечномерны. А в гиперболическом случае симплектические листы (максимальной размерности) имеют некомпактное замыкание, а неприводимые представления бесконечномерны.

В главе 5, состоящей из пяти разделов, содержится цикл задач о ловушках заряженных частиц [86, 87, 88].

Во всех задачах этого цикла главный член гамильтониана описывает так называемую идеальную ловушку Пеннинга и представляет собой гамильтониан гиперболического гармонического осциллятора с тремя частотами. Если эти частоты находятся в резонансе, то спектр гамильтониана имеет бесконечное вырождение. В этом случае к полному гамильтониану системы стандартная теория возмущений неприменима. Зато работает квантовое усреднение с последующей редукцией в алгебру симметрий идеальной ловушки. Это резонансная алгебра, описанная в главе 4. В работе рассматривается вопрос о том, при каких параметрах ловушек возможно возникновение частотного резонанса, и какие резонансные пропорции возникают. Изучены нижний частичный резонанс, когда соизмеримы только две частоты из трех, и нижний полный резонанс, когда все три частоты соизмеримы.

Исследуемые здесь ловушки различаются не только резонансной пропорцией, но также конфигурацией электрического и магнитного полей. Электрическое поле создается электродами различной формы; это пластины, образующие куб, плоские круглые или прямоугольные электроды, цилиндрический электрод. Возмущающее магнитное поле либо однородное, либо неоднородное поле Иоффе.

Для каждой такой системы усредненный гамильтониан явно вычислен и записан в виде функции от генераторов резонансной алгебры идеальной ловушки. В некоторых задачах этого цикла вырождение спектра не снимается в субглавном члене усредненного гамильтониана. Тогда исследуется его “вторичная” алгебра симметрий, которая снова оказывается резонансной, и процедура усреднения в следующем члене теории возмущений выполняется еще раз. Дважды усредненный гамильтониан записывается в виде функции от генераторов вторичной резонансной алгебры.

Далее, применяется техника неприводимых представлений и когерентных состояний. Точнее, с помощью интегрального представления собственных функций через когерентные состояния, спектральная задача переписывается в неприводимом представлении. В результате, во-первых, понижается размерность пространства, в котором разыскиваются решения, и, во-вторых, исходное уравнение с частными производными сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению.

В разделе 5.1 (статьи [5a], [27c]) исследуется кубическая ловушка Пеннинга-Иоффе с резонансом $3 : (-1)$ и алгебра с кубическими коммутационными соотношениями

$$\begin{gathered}
[\widehat{A}_1, \widehat{A}_2] = 0, \quad [\widehat{A}_1, \widehat{A}_4] = -2i\hbar\widehat{A}_5, \quad [\widehat{A}_1, \widehat{A}_5] = 2i\hbar\widehat{A}_4, \\
[\widehat{A}_2, \widehat{A}_4] = -6i\hbar\widehat{A}_5, \quad [\widehat{A}_2, \widehat{A}_5] = 6i\hbar\widehat{A}_4, \quad [\widehat{A}_3, \widehat{A}_k] = 0 \quad (k = 1, 2, 4, 5), \\
[\widehat{A}_4, \widehat{A}_5] = i\hbar(15\hbar^2\widehat{A}_1 + 23\hbar^2\widehat{A}_2 + 9\widehat{A}_1\widehat{A}_2^2 + \widehat{A}_2^3).
\end{gathered} \tag{38}$$

Для алгебры (38) построены неприводимые представления дифференциальными операторами второго порядка, действующими в гильбертовых пространствах антиголоморфных функций одной комплексной переменной, найдены воспроизводящие меры, с помощью которых задается скалярное произведение в пространствах представлений, а также получены гипергеометрические когерентные состояния.

Усредненный гамильтониан выражен в виде функции от генераторов этой алгебры и переписан в неприводимом представлении в виде обыкновенного дифференциального оператора типа Гойна [96].

Для асимптотических собственных функций гамильтониана ловушки Пеннинга построено интегральное представление через гипергеометрические когерентные состояния кубической резонансной алгебры и через решения спектральной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения Гойна.

В разделе 5.2 (статьи [6a], [20b], [21b]) исследуется двойной резонанс в ловушке Пеннинга-Иоффе. Основной резонанс $2:(-1):2$ возникает в главном члене гамильтониана между частотами идеальной ловушки Пеннинга. Ему соответствует алгебра с квадратичными коммутационными соотношениями:

$$\begin{gathered}
[\widehat{S}_+,\widehat{A}_\rho]=\hbar\widehat{A}_\rho,\quad [\widehat{S}_0,\widehat{A}_\rho]=-\hbar\widehat{A}_\rho,\quad [\widehat{S}_+,\widehat{A}_\sigma]=\hbar\widehat{A}_\sigma,\quad [\widehat{S}_-,\widehat{A}_\sigma]=2\hbar\widehat{A}_\sigma,\\
[\widehat{S}_-,\widehat{A}_\theta]=2\hbar\widehat{A}_\theta,\quad [\widehat{S}_0,\widehat{A}_\theta]=\hbar\widehat{A}_\theta,\quad [\widehat{A}_\rho,\widehat{A}^*_\sigma]=-\hbar A^*_\theta,\quad [\widehat{A}_\rho,\widehat{A}_\theta]=\hbar\widehat{A}_\sigma,\\
[\widehat{A}_\sigma,\widehat{A}^*_\theta]=-4\hbar\Big(\widehat{S}_-+\frac{\hbar}{2}\Big)\widehat{A}_\rho,\quad [\widehat{A}^*_\sigma,\widehat{A}_\sigma]=\hbar(4\widehat{S}_+\widehat{S}_-+\widehat{S}_-^2+2\hbar\widehat{S}_++3\hbar\widehat{S}_-+2\hbar^2),\\
[\widehat{A}^*_\rho,\widehat{A}_\rho]=\hbar(\widehat{S}_0-\widehat{S}_+),\quad [\widehat{A}^*_\theta,\widehat{A}_\theta]=\hbar(\widehat{S}_-^2+4\widehat{S}_-\widehat{S}_0+3\hbar\widehat{S}_-+2\hbar\widehat{S}_0+2\hbar^2)
\end{gathered}\tag{39}$$

(другие коммутаторы либо сопряжены к перечисленным, либо равны нулю)

и связями

$$\begin{gathered}
\widehat{A}_\rho\widehat{A}^*_\rho-\widehat{S}_+(\widehat{S}_0+\hbar)=0,\quad \widehat{A}_\sigma\widehat{A}^*_\sigma-\widehat{S}_+\widehat{S}_-(\widehat{S}_--\hbar)=0,\quad \widehat{A}_\theta\widehat{A}^*_\theta-\widehat{S}_0\widehat{S}_-(\widehat{S}_--\hbar)=0,\\
\widehat{A}_\rho\widehat{A}^*_\sigma-\widehat{S}_+\widehat{A}^*_\theta=0,\quad \widehat{A}_\sigma\widehat{A}^*_\theta-\widehat{S}_-(\widehat{S}_--\hbar)\widehat{A}_\rho=0,\quad \widehat{A}_\rho\widehat{A}_\theta-(\widehat{S}_0+\hbar)\widehat{A}_\sigma=0,\\
\widehat{S}^*_0=\widehat{S}_0,\quad \widehat{S}^*_-=\widehat{S}_-,\quad \widehat{S}^*_+=\widehat{S}_+.
\end{gathered}\tag{40}$$

Вторичный резонанс $k:l$ возникает в субглавном члене гамильтониана. Этот резонанс описывается алгеброй с полиномиальными коммутационными соотношениями. В случае нижнего резонанса $1:0$ эта алгебра – квадратичная:

$$\begin{gathered}
[\widehat{A}_0,\widehat{B}]=2\hbar\widehat{B},\qquad [\widehat{A}_-,\widehat{B}]=2\hbar\widehat{B},\qquad [\widehat{A}_+,\widehat{B}]=0,\\
[\widehat{B}^*,\widehat{B}]=2\hbar(\widehat{A}_0^2+2\widehat{A}_0\widehat{A}_-+3\hbar\widehat{A}_0+\hbar\widehat{A}_-+2\hbar^2),\\
\widehat{A}^*_0=\widehat{A}_0,\quad \widehat{A}^*_-=\widehat{A}_-,\quad \widehat{A}^*_+=\widehat{A}_+.
\end{gathered}\tag{41}$$

Для алгебры (41) в работе получены следующие результаты: неприводимые представления обыкновенными дифференциальными операторами второго порядка в гильбертовых простанствах антиголоморфных функций; воспроизводящие ядра, заданные гипергеометрическим рядом; семейства когерентных состояний, представляющие собой результат применения функции Бесселя от оператора рождения $\widehat{B}^*$ к вакуумному вектору; воспроизводящие меры, выраженные через функцию Трикоми.

С помощью когерентного преобразования дважды усредненная спектральная задача для гамильтониана ловушки переписана в неприводимом представлении алгебры (41) в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Для собственных состояний исходного гамильтониана построено интегральное представление через решения этого дифференциального уравнения и когерентные состояния алгебры (41), к которым применяются два унитарных усредняющих оператора (возникших в двух процедурах усреднения).

В разделе 5.3 (статьи [7a], [22b], [28c], [29c]) для планарной ловушки с круглыми электродами иследуется случай основного резонанса $2 : (-1) : 2$ и вторичного резонанса $6 : (-1)$. Основной резонанс описывается алгеброй (39), (40), а вторичный резонанс – ее подалгеброй с квадратичными коммутационными соотношениями. В этой задаче, помимо квантовой редукции гамильтониана ловушки, изучается ее классическая версия; здесь акцент сделан на исследование дважды усредненного гамильтониана, записанного в виде функции от образующих пуассоновой $6 : (-1)$–резонансной алгебры

$$\{A, B\} = 2iB, \qquad \{\overline{B}, B\} = i(6A^2 + 4dA), \qquad \overline{A} = A.$$

Исследуется зависимость картины его точек покоя от параметров ловушки.

В разделе 5.4 (статьи [8a], [23b], [30c]) исследуется планарная ловушка Пеннинга с прямоугольными электродами. Получено соотношение между управляющими (геометрическими и физическими) параметрами ловушки, приводящее к резонансу $3 : (-1)$ между частотами осциллятора. Этот резонанс описывается алгеброй (38). Наряду с квантовой версией, рассмотрена также классическая – пуассонова алгебра симметрий $3 : (-1)$–резонансного осциллятора. На симплектических листах этой алгебры в работе изучены линии уровня усредненного гамильтониана.

В разделе 5.5 ([11a], [12a]) последняя задача этого цикла – о цилиндрической ловушке Пеннинга с резонансом $2 : (-1) : 2$ – исследуется с помощью нового подхода к вычислению коэффициентов усредненного гамильтониана. А именно, с помощью скрученного произведения процедура усреднения гамильтониана гармонического осциллятора (в том числе гиперболического), возмущающенного диииференциальным оператором с полиномиальными коэффициентами, переносится в пространство градуированной алгебры символов. Процедура усреднения, выполненная в пространстве символов, сразу дает выражение усредненного гамильтониана в виде функции от генераторов $\widehat{S}_j$, $\widehat{A}_\rho$ (30) резонансной алгебры, описанной в разделе 4.6.

Разработанный подход основан на том, что произвольный дифференциальный оператор $\widehat{H}$ с полиномиальными коэффициентами на $\mathbb{R}^n$ может быть единственным образом представлен в виде конечной линейной комбинации $\widehat{H} = \sum_{\rho\in\mathbb{Z}^n} p_\rho(\widehat{S})\widehat{A}_\rho$ операторов $\widehat{A}_\rho$ с полиномиальными коэффициентами p_ρ от "действий" $\widehat{S}_j$, и ему можно однозначно сопоставить его символ, названный в работе vs-полиномом. На пространстве vs-полиномов определяется операция $*$-произведения, соответствующая обычному ассоциативному произведению дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. Далее, процедура квантового усреднения переписывается в пространстве символов. В таком виде громоздкие рутинные вычисления, связанные с усреднением, легко переносятся на компьютер и реализуются, например, в пакете символьных вычислений Wolfram Mathematica.

В главе 6 (статья [13а]), состоящей из трех разделов, вместо семейства обычных когерентных состояний алгебры Гейзенберга в $L^2(\mathbb{R})$ предлагается использовать семейство обобщенных функций в оснащенном гильбертовом пространстве – тройке Гельфанда. Оно образовано из двух семейств функционалов на пространстве Шварца. Каждое из этих семейств обладает ключевыми свойствами обычных когерентных состояний: сплетает представления данной алгебры, обладает свойством полноты и минимизирует произведение неопределенностей в соотношении Гейзенберга. Но, в отличие от обычных когерентных состояний, являющихся собственными для оператора уничтожения, построенные функционалы принадлежат непрерывному спектру эрмитовых генераторов алгебры Гейзенберга. Скалярное произведение функционалов из разных семейств обладает главными свойствами функции перекрытия обычных когерентных состояний: непрерывно по параметрам, удовлетворяет воспроизводящему тождеству и имеет соответствующий геометрический смысл. Перечисленные свойства дают основание назвать объединение построенных двух семейств функционалов семейством когерентных распределений Шварца.

В разделе 6.1 в оснащенном гильбертовом пространстве (тройке Гельфанда) $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'$, где $\mathcal{S}$ – пространство Шварца, а $\mathcal{S}'$ – сопряженное пространство обобщенных функций умеренного роста, определены когерентные распределения алгебры Гейзенберга и описаны их свойства.

Семейство когерентных распределений Шварца определяется как объединение $\{X^+_{x^+},\, X^-_{x^-} \mid x^+, x^- \in \mathbb{R}\}$ следующих двух семейств функционалов:

$$X^{\pm} = \Big\{ X^{\pm}_x(q) = \exp\Big\{ \pm \frac{i}{h} x\, q \mp \frac{i}{4h} x^2 \Big\}\, X^{\pm}_0(q) \mid x \in \mathbb{R} \Big\}, \tag{42}$$

где

$$X^{\pm}_0(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\Big\{ \mp \frac{i}{2h} q^2 \pm \frac{i\pi}{8} \Big\}.$$

Теорема 5. (a) *Функционалы* $X_x^{\pm}(q)$ (42) *являются обобщенными собственными функциями непрерывного спектра эрмитовых генераторов* $\hat{A}_{\pm} = \hat{q} \mp \hat{p}$ (*где* $\hat{q} \equiv q$, $\hat{p} = -ih\,\partial/\partial q$) *алгебры Гейзенберга* $[\hat{A}_-, \hat{A}_+] = -2ih\hat{I}$. *Они удовлетворяют уравнениям*

$$\hat{A}_{\mp}\, X_x^{\pm}(q) = x\, X_x^{\pm}(q), \qquad \hat{A}_{\pm}\, X_x^{\pm}(q) = \mp 2ih\frac{\partial}{\partial x} X_x^{\pm}(q).$$

(b) *Каждое семейство* $X_x^{\pm}$ *является полным в* $\mathcal{S}$. *Любой вектор* $\psi \in \mathcal{S}$ *может быть разложен по функционалам* $\{X_x^{\pm} \mid x \in \mathbb{R}\}$:

$$\psi = \int_{\mathbb{R}} \langle \psi,\, X_x^{\pm} \rangle\, X_x^{\pm}\, dx.$$

(c) *Скалярное произведение двух функционалов из одного семейства имеет вид* $\langle X_{x'}^{\pm},\, X_{x''}^{\pm} \rangle = \delta(x' - x'')$. *Скалярное произведение двух функционалов из разных семейств задается функцией*

$$K(x^+, x^-) \stackrel{def}{=} \langle X_{x^+}^{+},\, X_{x^-}^{-} \rangle = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \exp\Big\{ \frac{i}{2h} x^+\, x^- \Big\} \tag{43}$$

и удовлетворяет воспроизводящему свойству

$$\int_{\mathbb{R}} dy_+ \int_{\mathbb{R}} dy_-\, K(x^+, y^-)\, K(y^+, x^-)\, M(y^+, y^-) = K(x^+, x^-)$$

с (комплексной) плотностью меры

$$M(x^+, x^-) = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \exp\Big\{ -\frac{i}{2h} x^+\, x^- \Big\}. \tag{44}$$

(d) *Когерентное преобразование* $\mathcal{K}^{[\pm]} :\, L^2(\mathbb{R}_q) \to L^2(\mathbb{R}_{x^{\pm}})$, *заданное формулой*

$$\mathcal{K}^{[\pm]}[\psi(q)] = \langle \psi(q), X_{x^{\pm}}^{\pm}(q) \rangle,$$

является унитарным. Обратное преобразование задается формулой

$$(\mathcal{K}^{[\pm]})^{-1}[\varphi(x^{\pm})] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^{\pm})\, X_{x^{\pm}}^{\pm}(q)\, dx^{\pm}.$$

Преобразование $\mathcal{K}^{[\pm]}$ *сплетает неприводимое эрмитово представление алгебры Гейзенберга операторами* $\hat{A}_- = q - ih\partial/\partial q$, $\hat{A}_+ = q + ih\partial/\partial q$ *в пространстве* $L^2(\mathbb{R}_q)$ *с эквивалентным ему неприводимым эрмитовым представлением этой алгебры операторами* $\overset{[\pm]}{A}_{\mp} = x^{\pm}$, $\overset{[\pm]}{A}_{\pm} = \pm 2ih\,\partial/\partial x^{\pm}$ *в пространстве* $L^2(\mathbb{R}_{x^{\pm}})$:

$$\mathcal{K}^{[\pm]} \circ \hat{A}_- = \overset{[\pm]}{A}_- \circ \mathcal{K}^{[\pm]}, \qquad \mathcal{K}^{[\pm]} \circ \hat{A}_+ = \overset{[\pm]}{A}_+ \circ \mathcal{K}^{[\pm]}.$$

В разделе 6.1 также обсуждается геометрический смысл обобщенного воспроизводящего ядра $K(x^+, x^-)$ (43) и плотности $M(x^+, x^-)$ (44) воспроизводящей меры.

В разделе 6.2 (статья [13a]) показано, что последовательность волновых пакетов

$$\{\psi^{\pm}_{x,n}(q) \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x-y)\, X^{\pm}_y(q)\, dy \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad \text{где} \quad \delta_n(x) \stackrel{def}{=} ne^{-n^2x^2}/\sqrt{\pi},$$

приближает когерентное распределение (42), а нормированные волновые пакеты

$$\widetilde{\psi}^{\pm}_{x,n}(q) \stackrel{def}{=} \psi^{\pm}_{x,n}(q)/\|\psi^{\pm}_{x,n}(q)\|_{L^2(\mathbb{R}_q)}$$

этой последовательности доставляют минимум произведению неопределенностей в соотношении Гейзенберга

$$(\Delta_\psi \hat{A}_+)\cdot(\Delta_\psi \hat{A}_-) \geq h$$

для операторов $\hat{A}_-$ и $\hat{A}_+$. Но для операторов координаты $\hat{q}$ и импульса $\hat{p}$ произведение неопределенностей на последовательности нормированных волновых пакетов $\widetilde{\psi}^{\pm}_{x,n}$ при $n \to \infty$ стремится к бесконечности.

В разделе 6.3 (статья [13a]) с помощью когерентного преобразования, интегральным ядром которого являются когерентные распределения, решена спектральная задача о непрерывном спектре гамильтониана перевернутого осциллятора

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\Big(-h^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} - q^2\Big), \tag{45}$$

т.е. показано, что когерентные распределения можно использовать для решения задач с непрерывным спектром.

Кроме того, в этом разделе доказано, что семейство когерентных распределений (42) удовлетворяет не только двум первым (общим) аксиомам Газо–Клаудера (аксиоме непрерывности функции перекрытия по параметрам и свойству полноты), но и двум другим (специальным) аксиомам когерентных состояний – аксиоме временной стабильности и так называемому тождеству действия. Эти аксиомы выполнены для нормированного семейства когерентных распределений $\widetilde{X}^{\pm}_x = \sqrt{|x|}\, X^{\pm}_x$ по отношению к гамильтониану (45) перевернутого осциллятора. Согласно этим аксиомам, эволюция нормированного когерентного распределения во времени всегда остается когерентным распределением; при этом эволюция параметров когерентных распределений соответствует классической эволюции координатных функций (с которыми ассоциируются параметры когерентных распределений) в фазовом пространстве перевернутого осциллятора.

В заключении диссертационной работы кратко перечислены полученные результаты.

Список литературы

[1] L. C. Biedenharn, *The quantum group $SU_q(2)$ and a q-analogue of the boson operators*, J. Phys. A, 1989, **22**, L873–L878.

[2] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, In: Proc. of Intern. Congress of Math. (Berkeley), Amer. Math. Soc., Providence, 1987, 789–820.

[3] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, and L. A. Takhtajan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Preprint LOMI, Leningrad, E-14-87, 1987.

[4] I. M. Gelfand and D. B. Fairlie, *The algebra of Weyl symmetrized polynomials and its quantum extension*, Comm. Math. Phys., 1991, **136**, 487–499.

[5] P. P. Kulish and N. Yu. Reshetikhin, *Universal R-matrix of the quantum superalgebra* $\mathrm{osp}\,(2|1)$, Lett. Math. Phys., 1989, **18**(2), 143–149.

[6] E. K. Sklyanin, *Some algebraic structures connected with the Yang–Baxter equation*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 1982, **16**, 27–34. English transl. in Functional Anal. Appl., 1982, **16**.

[7] V. P. Maslov, *Application of ordered operators method for obtaining exact solutions*, Teoret. Mat. Fiz., 1977, **33**, 185–209. English transl. in Theoret. and Math. Phys., 1977, **33**.

[8] M. V. Karasev, *Simple quantization formula*, In: "Symplectic Geometry and Mathematical Physics", Actes du colloque en l'honneur de J.-M.Souriau, 1991, Birkhäuser, Basel–Boston, *eds* P. Donato et al., 234–243.

[9] M. V. Karasev and E. M. Novikova, *Representation of exact and semiclassical eigenfunctions via coherent states. The Hydrogen atom in a magnetic field*, Teoret. Mat. Fiz., 1996, **108**(3), 339–387. English transl. in Theoret. and Math. Phys., **108**, 1996.

[10] M. V. Karasev and E. M. Novikova, *Coherent transform of spectral problem and algebras with nonlinear commutation relations*, J. Math. Sci., 1999, **95**(6), 2703-2798.

[11] M. V. Karasev and V. P. Maslov, "Nonlinear Poisson Brackets. Geometry and Quantization", Nauka, Moscow, 1991. English transl. in Ser. Translations of Mathematical Monographs **119**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[12] Л. Д. Фаддеев, *Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля*, Проблемы квантовой теории поля, Дубна, 1979, Р.12462, 249–299.

[13] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, *Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. I*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, **13**, ВИНИТИ, М., 1979, 5–144.

[14] M. V. Karasev and V. P. Maslov, *Algebras with general permutation relations and their applications.* II, In: "Itogi Nauki i Tekhniki: Sovremennye Problemy Mat.", 1979, **13**, VINITI, Moscow, 145–267. English transl. J. Soviet Math., 1981, **15**(3), 273–368.

[15] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов* Наука, М., 1986.

[16] M. Karasev, E. Novikova, Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding, In: "Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry", *ed.* M. Karasev, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Providence, RI, 1998, **187**, 1–202.

[17] B. M. Levitan, "Theory of Generalized Shift Operators", rev. ed., Nauka, Moscow, 1973. English transl. of 1st ed. Israel Program Sci Transl., Jerusalem, and Davey, New York, 1964.

[18] M. V. Karasev, "Problems in Operator Methods", Moscow Inst. of Electronics & Math. (MIEM) Publ., Moscow, 1979, 80pp, Russian.

[19] M. V. Karasev, *Advances in quantization: quantum tensors, explicit $*$-products, and restriction to irreducible leaves*, Diff. Geom. Appl., 1998, **9**, 89–134.

[20] A. Connes, "Noncommutative Geometry", Acad. Press, London, 1994.

[21] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, *Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics*, Lett. Math. Phys., 1975/77, **1**, 521–530.

[22] J. Vey, *Deformation du crochet de Poisson sur une variete symplectique*, Comment. Math. Helv., 1975, **50**(3), 421–454.

[23] A. Connes, M. Flato, and D. Sternheimer, *Closed star products and cyclic cohomology*, Lett. Math. Phys., 1992, **24**, 1–12.

[24] H. Omori, Y. Maeda, and A. Yoshioka, *Weyl manifolds and deformation quantization*, Adv. Math., 1991, **85**(2), 224–255.

[25] A. Weinstein, *Deformation quantization*, In: Sem. Bourbaki N 789, Asterisque, 1995, **227**, 389–409.

[26] M. V. Karasev and V. P. Maslov, *Asymptotic and geometric quantization*, Uspekhi Mat. Nauk, 1984 **39**(6), 115–173. English transl. Russian Math. Surveys, 1984, **39**(6), 133–205.

[27] E. Schrödinger, *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik*, Naturwiss, 1926, **14**, 664–666.

[28] W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, Z. Phys., 1927, **43**, 172–198.

[29] R. J. Glauber, *The quantum theory of optical coherence*, Phys. Rev., 1963, **130**, 2529–2539.

[30] R. J. Glauber, *Coherent and incoherent states of radiation field*, Phys. Rev., 1963, **131**, 2766–2788.

[31] J. R. Klauder, *The action option and a Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers*, Ann. Phys., 1960 **11**, 123–168.

[32] J. R. Klauder, *Continuous representation theory*, J. Math. Phys., 1963, **4**, 1055–1073.

[33] F. A. Berezin, *Covariant and contravariant symbols of operators*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 1972, **36**(5), 1134–1167. English transl. Math. USSR-Izv., 1972, **6**, 1117–1151.

[34] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc., 1950 **68**(1), 337–401.

[35] V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform*, Comm. Pure Appl. Math., 1961, **14**, 187.

[36] S. Bergmann, *The kernel functions and conformal mapping*, Amer. Math. Soc., Math. Surveys, 1950, **5**.

[37] V. A. Fock, *Verallgemeinerung und Lösung der Diracschen statistischen Gleichung*, Z. Phys., 1928, **49**, 339–357.

[38] P. A. M. Dirac, *Quantum electrodynamics*, Comm. Dublin Inst. Adv. Stud. Ser. A, 1943, **1**, 1–36.

[39] A. M. Perelomov, *Coherent states for arbitrary Lie group*, Comm. Math. Phys., 1972, **26**(3), 222–236.

[40] A. M. Perelomov, “Generalized Coherent States and Their Applications”, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1986.

[41] P. P. Kulish, *Contraction of quantum algebras and q-oscillators*, Teoret. Mat. Fiz., 1991, **86**, 157–160. English transl. in Theoret. and Math. Phys., 1991, **86**.

[42] F. A. Berezin, *Quantization*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 1974, **38**(5). English transl. Math. USSR Izv., 1974, **8**(5), 1109–1165.

[43] S. T. Ali, J.-P. Antoine, and J.-P. Gazeau, *Coherent States, Wavelets, and their Generalizations*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 2000.

[44] M. Bordemann, E. Meinrenken, and M. Schlichenmaier, *Toeplitz quantization of Kähler manifolds and $gl(N)$, $N \to \infty$ limit*, Comm. Math. Phys. 1994, **165** 281–296.

[45] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer, *Painless nonorthogonal expansions*, J. Math. Phys., 1986, **27**, 1271–1283.

[46] S. De Biévre, *Coherent states over symplectic homogeneous spaces*, J. Math. Phys., 1989, **30**, 1401–1407.

[47] R. Gilmore, *On properties of coherent states*, Rev. Mexicana Fís, 1974, **23**, 143–187.

[48] A. V. Karabegov, *Deformation quantization with separation of variables on a Kähler manifold*, Comm. Math. Phys., 1996, **180**, 745–755.

[49] J. R. Klauder and B. S. Skagerstam, "Coherent states. Applications in Physics and Mathematics", 1985, World Scientific, Singapore.

[50] C. Moreno, *$*$-product on some Kähler manifolds*, Lett. Math. Phys., 1986, **11**, 361–372.

[51] A. Odzijewicz, *On reproducing kernels and quantization of states*, Comm. Math. Phys., 1988, **114**, 577–597.

[52] E. Onofri and M. Pauri, *Analyticity and quantization*, Lett Nuovo Cimento (2), 1972, **3**, 35–42.

[53] W.-M. Zhang, D. H. Feng, and R. Gilmore, *Coherent states. Theory and some applications*, Rev. Modern Phys., 1990, **26**, 867–927.

[54] S. T. Ali and G. G. Emch, *Geometric quantization. Modular reduction theory and coherent states*, J. Math. Phys., 1986, **27**, 2936–2943.

[55] M. Cahen, S. Gutt, and J. Rawnsley, *Quantization of Kähler manifolds.* I, J. Geom. Phys., 1990, **7**, 45–62. II Trans. Amer. Math. Soc., 1993, **337**, 73–98. III Lett. Math. Phys., 1994, **30**, 291–305. IV Lett. Math. Phys., 1995, **30**, 159–168.

[56] I. M. Gelfand, M. I. Graev, and I. I. Pyatetskii-Shapiro, "Representation Theory and Automorphic Functions", Nauka, Moscow, 1966, Russian.

[57] J. Huebschmann, *On the quantization of Poisson algebras*, In: "Symplectic Geometry and Mathematical Physics", Actes du colloque en l'honneur de J.-M.Souriau, 1991, Birkhäuser, Basel–Boston, *eds* P. Donato et al., 204–233.

[58] A. A. Kirillov, *Geometric quantization*, In: "Itogi Nauki i Tekhniki: Sovremennye Problemy Mat. Fundamental'nye Napravleniya", 1985 **4**, VINITI, Moscow, 141–178. English transl. in Encyclopedia of Math. Sci., **4** (Dynamical Systems, IV), Springer-Verlag, Berlin and New York, 1990.

[59] M. V. Karasev and M. V. Kozlov, *Representations of compact semisimple Lie algebras over Lagrangian submanifolds*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 1994, **28**(4), 16–27. English transl. Functional Anal. Appl., 1994, **28**, 238–246.

[60] M. V. Karasev and Yu. M. Vorobjev, *Hermitian bundles over isotropic submanifolds and correction to Kostant–Souriau quantization rule*, Preprint Inst. Theor. Phys. ITP–90–85E, Kiev, 1991.

[61] J. Rawnsley, *Coherent states and Kähler manifolds*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 1977, **28**, 403–415.

[62] G. M. Tuynman, *Generalized Bergman kernels and geometric quantization*, J. Math. Phys. 1987, **28**(3), 573–583.

[63] М. В. Карасев, Е. М. Новикова, *Квадратичные скобки Пуассона в эффекте Зеемана. Неприводимые представления и когерентные состояния*, УМН, 1994, **49**(5), 169–170; англ. пер.: M. V. Karasev, E. M. Novikova, *Quadratic Poisson brackets in the Zeeman effect. Irreducible representations and coherent states*, Russian Math. Surveys, 1994, **49**(5), 179–180.

[64] М. В. Карасев, Е. М. Новикова, *Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана–Штарка в атоме водорода*, ТМФ, 2005, **142**(3), 530–555;

[65] M. Karasev, E. Novikova, *Algebras with polynomial commutation relations for a quantum particle in electric and magnetic fields*, In: "Quantum Algebras and Poisson Geometry in Problems of Mathematical Physics", *ed/* M. Karasev, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Providence, RI, 2005, **216**, 19–135.

[66] M. Karasev, *Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances, I*, In: "Quantum Algebras and Poisson Geometry in Problems of Mathematical Physics", *ed.* M. Karasev, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Providence, RI, 2005, **216**, 1–17.

[67] M. Karasev, *Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances, III*, Russ. J. Math. Phys., 2006, **13**(2), 131–150.

[68] М. В. Карасев, Е. М. Новикова, *Алгебра и квантовая геометрия многочастотного резонанса*, Известия РАН, серия матем., 2010, **74**(6), 55–106.

[69] E. M. Novikova, *Minimal basis of the symmetry algebra for three-frequency resonance*, Russ. J. Math. Phys., 2009, **16**(4), 518-528.

[70] M. V. Karasev, E. M. Novikova *Algebra of Symmetries of Three-Frequency Resonance: Reduction of a Reducible Case to an Irreducible Case*, Mathematical notes, 2018, **104**(5-6), 833-847.

[71] E. M. Novikova, *Algebra of Symmetries of Three-Frequency Hyperbolic Resonance*, Mathematical notes, 2019, **106**(6), 940-956.

[72] J-P. Gazeau, *Coherent States in Quantum Physics*, Wiley-VCH, Berlin, 2009.

[73] S. T. Ali, J-P. Antoine, J-P. Gazeau, and U.A. Mueller, *Coherent states and their generalizations: a mathematical overview*, Reviews in Math. Phys., 1995, **7**, 1013-1104.

[74] J. Klauder, *The current state of coherent states*, arXiv: Quantum Physics 14, 2001.

[75] И. А. Малкин, В. И. Манько *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, М.: Наука, 1979.

[76] T. Appl and D. H. Schiller, *Generalized hypergeometric coherent states*, J. Phys. A: Math. Gen., 2004, **37**, 2731.

[77] D. Popov and M. Popov, *Some operatorial properties of the generalized hypergeometric coherent states*, Phys. Scr., 2015, **90**, 035101.

[78] J-P. Gazeau, J. R. Klauder, *Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum*, J. Phys. A, 1999, **32**(1), 123–132.

[79] J. R. Klauder, *Continuous-representation theory I. Postulates of continuous-representation theory*, J. Math. Phys., 1963, **4**, 1055–1058.

[80] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Москва, МГУ, 1965.

[81] В. Е. Назайкинский, *Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающемуся на границе волновому уравнению*, Матем. заметки, 2014, **96**(2), 261–276.

[82] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, *Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход* ТМФ, 1992, **92**(2), 215–254.

[83] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний"*, Гостехиздат, 1955.

[84] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, 1979.

[85] В. В. Козлов, *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*, Изд-во УдГУ, 1995.

[86] M. Massini, M. Fortunato, S. Mancini, P. Tombesi, D. Vitali, *Schrodinger-cat entangled state reconstruction in the Penning trap*, New Journal of Physics, 2000, **2**(1), 20.

[87] L. H. Pedersen, C. Rangan, *Controllability and Universal three-qubit quantum computation with trapped electron states*, Quantum Information Processing, 2008, **7**(1), 0070.

[88] J. Goldman, G. Gabrielse, *Optimized planar Penning traps for quantum information studies* Hyperfine Interact., 2011, **199**, 279-289.

[89] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции* Наука, Москва, 1965, т. I; 1966, т. II.

[90] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Cambridge Univ. Press, Cambridge and New York, 1990.

[91] J.-M. Souriau, *Sur la varieté de Kepler*, In: Sympoisia Math. XIV, Academic Press, London and New York, 1974.

[92] H. V. McIntosh and A. Cisneros, *Degeneracy in the Presence of a Magnetic Monopole*, J. Math. Phys., 1970, **11**(3), 896–916.

[93] A. Yoshioka, K. Ii, *The quantization condition in the presence of a magnetic field and quasiclassical eigenvalues of the Kepler problem with a centrifugal potential and Dirac's monopole field*, J. Math. Phys., 1990, **31**(6), 1388–1394.

[94] T. Iwai and Y. Uwano, *The quantised mic-Kepler problem and its symmetry proup for negative energies*, J. Phys. A: Math. Gen., 1988, **21**, 4083–4104.

[95] М. В. Карасев, *Асимптотика собственных значений операторов с пуассоновской алгеброй симметрии у старшего символа* Функц. анализ и его прилож., 1984, **18**(2), 65–66.

[96] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М.: Наука, 1971.

[97] M. Karasev, *Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances. II"*, Adv. Stud. Contemp. Math., 2005 **11**(1), 33–56.