Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Международная лаборатория динамических систем и приложений

На правах рукописи

Таланова Елена Анатольевна

ДИФФЕОМОРФИЗМЫ МОРСА-СМЕЙЛА С НЕБЛУЖДАЮЩИМИ ТОЧКАМИ ПОПАРНО РАЗЛИЧНЫХ ИНДЕКСОВ МОРСА НА 3-МНОГООБРАЗИЯХ

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Починка Ольга Витальевна

Нижний Новгород – 2024

Введение

Важный класс структурно устойчивых динамических систем составляют системы Морса-Смейла, существенной особенностью которых является наличие тесной взаимосвязи между динамическими свойствами систем и топологией несущих многообразий. Приведем исследования, которые так или иначе способствовали выделению этого класса систем.

В 1937 году А.А. Андронов и Л.С. Понтрягин [1] ввели понятие грубой системы в ограниченной части плоскости и установили критерий грубости такой системы. Оказалось, что эти системы имеют гиперболическое неблуждающее множество и не имеют связок (траекторий, идущих из седла в седло), более того, они плотны в пространстве всех потоков на плоскости. Этот результат был обобщен М. Пейшото [48], [49] на произвольные замкнутые поверхности с заменой понятия грубости понятием структурной устойчивости (равносильность этих понятий для потоков на плоскости была им установлена в той же работе). В начале 60-х годов прошлого века С. Смейл [65], подобно А.А. Андронову и Л.С. Понтрягину, ввел в рассмотрение класс динамических систем с конечным неблуждающим гиперболическим множеством, инвариантные многообразия которых пересекаются трансверсально, и доказал, что числа неблуждающих орбит разных индексов удовлетворяют соотношениям, подобным неравенствам Морса, после чего такие системы были названы системами Морса-Смейла так же, как и их дискретные аналоги. Позже С. Смейлом и Дж. Палисом [46], [47] была доказана структурная устойчивость динамических систем (потоков и каскадов) Морса-Смейла.

Несмотря на тривиальность неблуждающего множества, топологическая классификация таких систем еще очень далека от своего завершения. Потоки Морса-Смейла исчерпывающе классифицированы с точностью до топологической эквивалентности на поверхностях (в работах Е.А. Леонтович, А.Г. Майера [40], [41] М. Пейшото [50], А.А. Ошемкова и В.В. Шарко [45]). Перечислим известные результаты, связанные с топологической классификацией различных классов потоков Морса-Смейла на многообразиях размерности три и выше. Дж. Флейтас [19] получена топологическая классификация полярных потоков (потоков Морса-Смейла, неблуждающее множество которых содержит в точности две узловые точки и произвольное число седловых периодических точек) на трехмерных многообразиях. Я.Л. Уманским [66] получена топологическая классификация потоков Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических траекторий на трехмерных многообразиях. А.О. Пришляк [64] получил полную классификацию трехмерных градиентно-подобных потоков (потоков Морса-Смейла без периодических траекторий). С.Ю. Пилюгиным [51] получена топологическая классификация потоков Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на сфере размерности больше или равной трех. Классификационные результаты для некоторых классов многомерных градиентно-подобных потоков получены в работах В.З. Гринеса, Е.Я. Гуревич, Е.В. Жужомы, О.В. Починки [23], [24], [22], [21], [38]. В работах О.В. Починки и

Д.Д. Шубина получена классификация трехмерных неособых потоков с малым числом периодических орбит [67], [55], [56].

Диффеоморфизмы Морса-Смейла на поверхностях, в отличие от потоков на поверхностях, допускают траектории, идущие из седла в седло – гетероклинические траектории (открытые еще А. Пуанкаре). Такие движения приводят к сложному асимптотическому поведению инвариантных многообразий седловых периодических орбит, что значительно повышает сложность решения задачи о топологической классификации. Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях была получена в 1998 году Х. Бонатти и Р. Ланжевеном [18] как часть классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов с нульмерными базисными множествами (диффеоморфизмов Смейла). Ими доказано, что каждому диффеоморфизму Смейла соответствует конечный комбинаторный объект, представляющий собой набор геометрических типов марковских разбиений. Однако диффеоморфизмы Морса-Смейла не были выделены для отдельного рассмотрения, в связи с чем для них применение этих инвариантов оказалось неоправданно трудным. При отсутствии гетероклинических точек диффеоморфизм Морса-Смейла называется градиентно-подобным, и для таких диффеоморфизмов различные полные топологические инварианты были найдены в работах А.Н. Безденежных, В.З. Гринеса, С.Х. Капкаевой, О.В. Починки [5], [6], [7], [25]. В работах В.З. Гринеса, Т.М. Митряковой, А.И. Морозова, О.В. Починки [20], [43], [44] получена полная топологическая классификация поверхностных диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических орбит.

Трудности перехода от двумерных многообразий к многообразиям высшей размерности связаны не только с наличием гетероклинических орбит, но и с возможностью дикого вложения сепаратрис седловых периодических точек (т.е. замыкание сепаратрисы не является подмногообразием многообразия). Первый пример такого диффеоморфизма на трехмерной сфере построил Д. Пикстон [52] в 1977 году. В.З. Гринес и Х. Бонатти [9] в 2000 году доказали, что класс топологической сопряженности диффеоморфизма Пикстона описывается узлом в пространстве орбит действия диффеоморфизма на некотором его блуждающем множестве. Работа Х. Бонатти, В.З. Гринеса, О.В. Починки [17] 2019 года, в которой была получена полная топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла на произвольных замкнутых связных 3-многообразиях, завершила большую серию работ Х. Бонатти, В.З. Гринеса, Е.Я. Гуревич, Е.В. Жужомы, Ф. Лауденбаха, В.С. Медведева, Е. Пеку, О.В. Починки, приближающих решение этой проблемы [22], [9], [10],[12],[14], [13], [15], [34], [53] [16], [32], [35].

В том случае, когда размерность несущего многообразия диффеоморфизма равна трём, гетероклиническое множество может быть непустым дизъюнктным объединением кривых. При изучении детерминированных процессов, описываемых системами Морса-Смейла, особую роль играют некомпактные гетероклинические кривые, которые в случае потока являются траекториями, а в случае диффеоморфизма – кривыми, инвариантными для некоторой его степени. С конца двадцатого века и по настоящее время в серии работ Е. Приста и Т. Форбса [62], [63] уделено большое внимание проблеме описания топологии магнитного поля в короне солнца, важную роль в котором играют так называемые сепараторы. Математической моделью сепараторов являются как раз гетероклинические траектории и кривые, а вопрос об их существовании является одной из принципиальных проблем магнитной гидродинамики. Х. Бонатти, В.З. Гринес, В.С. Медведев и Э. Пеку [12] в 2002 году получили результат, следствием которого является критерий существования гетероклинических траекторий и кривых. В.З. Гринесу совместно с Е.В. Жужомой, Т.В. Медведевым и О.В. Починкой [31] удалось его применить для выявления сепараторов в магнитном поле короны солнца.

Из результатов, полученных в [12], следует, что 3-многообразие допускает диффеоморфизм Морса-Смейла без гетероклинических кривых тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно $\mathbb{S}^3$ или связной сумме конечного числа копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, явно выражающегося через число седловых и узловых периодических орбит диффеоморфизма. В.З. Гринесом, Е.В. Жужомой и В.С. Медведевым [33] доказано, что в случае локально плоского (не дикого) вложения одномерных сепаратрис седловых точек несущее многообразие градиентно-подобного 3-диффеоморфизма допускает разложение Хегора, род которого однозначно выражается через число седловых и узловых периодических орбит диффеоморфизма. Существует ли подобная связь в случае дикого вложения сепаратрис – вопрос, открытый на сегодняшний день.

Цели и задачи исследования

В настоящей работе рассмотрен класс G градиентно-подобных диффеоморфизмов, заданных на ориентируемых замкнутых связных 3-многообразиях и имеющих неблуждающие точки попарно различных индексов. Из определения класса следует, что неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in G$ состоит в точности из четырех точек $\omega_f, \sigma_f^1, \sigma_f^2, \alpha_f$ с индексами Морса $0, 1, 2, 3$, соответственно. Первые примеры таких диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами были построены в работе Е.В. Круглова и Е.А. Талановой [39]. Любой диффеоморфизм $f \in G$ имеет в точности две седловые точки σ_f^1, σ_f^2 индексов Морса 1 и 2, соответственно, пересечение двумерных многообразий которых образует гетероклиническое множество (см. Рис. 1)

$$H_f = W^s_{\sigma_f^1} \cap W^u_{\sigma_f^2}.$$

Из результатов В.З. Гринеса, Е.В. Жужомы и В.С. Медведева, полученных в работе [33], следует, что в случае локально плоского вложения одномерных сепаратрис несущее многообразие диффеоморфизма $f \in G$ гомеоморфно линзовому пространству $L_{p,q}$. При этом множество H_f содержит не менее p некомпактных гетероклини-

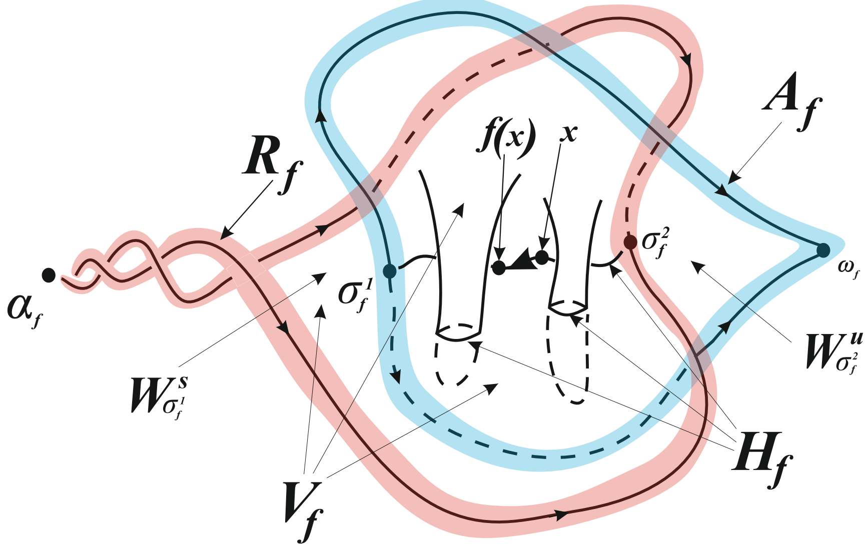

Рис. 1: Фазовый портрет диффеоморфизма $f \in G$ с множеством H_f, состоящим из компактных и некомпактных гетероклинических кривых

ческих кривых. Верно и обратное утверждение о существовании на любом линзовом пространстве диффеоморфизма из класса G с локально плоско вложенными одномерными сепаратрисами. Основной целью настоящей работы является доказательство существования в рассматриваемом классе диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами и описание топологии несущего многообразия для таких диффеоморфизмов. Задачами исследования также являются нахождение топологических инвариантов и построение квази-энергетических функций некоторых подклассов диффеоморфизмов множества G.

Научная новизна результатов

Все результаты являются новыми. Именно:

1. Для диффеоморфизмов Морса-Смейла с четырьмя неблуждающими точками попарно различных индексов Морса на ориентируемых замкнутых связных 3-многообразиях описан сценарий перехода от произвольного диффеоморфизма к диффеоморфизму с наименьшим числом гетероклинических кривых.

2. Доказано, что объемлющим многообразием для рассматриваемых диффеоморфизмов являются линзовые пространства.

3. Получена топологическая классификация диффеоморфизмов из рассматриваемого класса с единственной гетероклинической кривой; доказано, что полным инвариантом является класс (относительно объемлющего гомеоморфизма) узла Хопфа на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

4. Построены квази-энергетические функции для диффеоморфизмов, порожденных элементарным хопфовским узлом.

5. Получена точная оценка числа критических точек квази-энергетической функции для диффеоморфизмов из рассматриваемого класса.

Теоретическая и практическая значимость проведенных исследований

Проведенные исследования относятся к классическим фундаментальным направлениям. Полученные результаты вносят вклад в развитие фундаментальной математики, при этом направление динамических систем на 3-многообразиях и в частности диффеоморфизмы Морса-Смейла имеют приложения в математических моделях большинства естественных и социальных наук. Одним из примеров может быть моделирование процесса мышления на базе теории динамических систем, которое восходит к модели Дж. Хопфилда и М. Коэна, С. Гроссберга [8], [36]. При достаточно естественных ограничениях на правые части автономной системы дифференциальных уравнений Коэна–Гроссберга в фазовом пространстве системы существует ограниченная область, в которую входят все траектории системы, что делает возможным применение результатов данной работы (в частности по классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла из рассматриваемого класса на 3-многообразиях) к исследованию моделей нейронных сетей. Другой пример — подход к моделированию искусственных нейронных сетей (ИНС), описанный в работах В. Афраймовича, М. Рабиновича, П. Вароны и др. [4], [3], основой которого является принцип взаимодействия участков сети в условиях конкуренции и приводящий к последовательной смене метастабильных (неустойчивых) состояний модельной динамической системы. Динамическим образом метастабильного состояния в фазовом пространстве модели является седловое состояние равновесия, а переход из одного метастабильного состояния в другое описывается гетероклинической траекторией, соединяющей два седловых состояния равновесия. На сегодняшний день гетероклинический канал — это единственная известная динамическая конструкция, с помощью которой разрешается фундаментальное противоречие между чувствительностью (к информационным сигналам за счёт информационного выбора метастабильных состояний — информационной реорганизации гетероклинического канала) и надёжностью (устойчивостью канала). И в этом случае также возможно применение результатов, полученных в данной работе для диффеоморфизмов Морса-Смейла с единственной гетероклинической кривой.

Методология и методы исследования

При исследовании использован оригинальный метод, который заключается во введении понятия гетероклинического индекса p диффеоморфизма f. Было установлено, что именно от него зависит топологическая структура несущего многообразия диффеоморфизмов из рассматриваемого класса.

Для качественного исследования рассматриваемых в работе систем используются классические методы теории динамических систем и топологии: отыскание подходящего характеристического пространства, изучение его топологических свойств и вложения в него следов инвариантных многообразий седловых состояний равновесия. Также используется теория гомологий и теория узлов. Для построения энергетических функций привлекается теория Морса и перестройки Морса.

Положения, выносимые на защиту

1. Доказано, что для любого диффеоморфизма Морса-Смейла с четырьмя неблуждающими точками попарно различных индексов Морса на ориентируемом замкнутом связном 3-многообразии с индексом гетероклинического пересечения,равным p существует изотопный ему диффеоморфизм, индекс которого равен p, и гетероклиническое множество ориентируемо (Теорема 1).

2. Доказано, что если у диффеоморфизма из рассматриваемого класса ровно одна гетероклиническая кривая, то он изотопен диффеоморфизму источник-сток (Теорема 2).

3. Доказано, что класс топологической сопряженности диффеоморфизма с единственной гетероклинической кривой полностью определяется классом узла Хопфа, являющегося проекцией одномерной сепаратрисы в пространство орбит бассейна стока. Более того, любой узел Хопфа реализуется таким диффеоморфизмом (Теоремы 3, 4).

4. Построены квази-энергетические функции для диффеоморфизмов, порожденных элементарным хопфовским узлом, и получена точная оценка числа критических точек квази-энергетической функции для диффеоморфизмов из рассматриваемого класса (Теорема 5).

5. Доказано, что независимо от вложения сепаратрис несущее многообразие любого диффеоморфизма с индексом гетероклинического пересечения, равным p, гомеоморфно линзовому пространству $L_{p,q}$ (Теорема 6).

6. Доказано, что каждое линзовое пространство $L_{p,q}$ допускает диффеоморфизм с индексом, равным p, с дико вложенными одномерными сепаратрисами (Теорема 7).

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 84 страницы, включая 47 рисунков. Список литературы содержит 86 наименований.

Личный вклад автора

Все представленные в диссертации результаты получены автором самостоятельно. Научному руководителю О.В. Починке принадлежит постановка задач и общее руководство научно-исследовательской деятельностью диссертанта с целью подготовки к защите диссертации. Е.В. Круглов и В.И. Шмуклер являлись консультантами по топологическим вопросам.

1 Содержание работы

В первой главе приведен перечень статей и докладов с основными результатами работы, представленными на конференциях. **Во второй главе** содержатся необходимые для исследования сведения и факты. **Третья глава** включает описание динамики диффеоморфизмов рассматриваемого класса.

В четвертой главе для любого диффеоморфизма $f \in G$ введно понятие гетероклинического индекса I_f следующим образом. Если множество H_f не содержит некомпактных кривых, то положим $I_f = 0$. В противном случае обозначим через $\tilde{H}_f$ подмножество, состоящее из некомпактных кривых. Так как любая кривая $\gamma \subset \tilde{H}_f$ содержит вместе с любой точкой $x \in \gamma$ точку $f(x)$, будем считать кривую γ ориентированной в направлении от x к $f(x)$. Также зафиксируем ориентацию на многообразиях $W^s_{\sigma_1}$ и $W^u_{\sigma_2}$. Для некомпактной гетероклинической кривой γ обозначим через

$$v_\gamma = (\vec{v}^1_\gamma, \vec{v}^2_\gamma, \vec{v}^3_\gamma)$$

тройку векторов с началом в точке $x \in \gamma$ таких, что $\vec{v}^1_\gamma$ – вектор нормали к $W^s_{\sigma_1}$, $\vec{v}^2_\gamma$ – вектор нормали к $W^u_{\sigma_2}$ и $\vec{v}^3_\gamma$ – касательный вектор к ориентированной кривой γ. Назовем v_γ репером некомпактной гетероклинической кривой γ (см. Рис. 2).

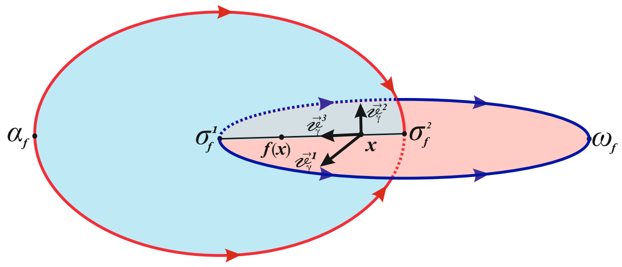

Рис. 2: Репер некомпактной гетероклинической кривой

Очевидно, что ориентация (положительная или отрицательная) репера v_γ не зависит от выбора точки x на γ. Положим $I_\gamma = +1\,(I_\gamma = -1)$ в случае положительной (отрицательной) ориентации. Число

$$I_f = \left| \sum_{\gamma \subset \tilde{H}_f} I_\gamma \right|$$

назовем *гетероклиническим индексом диффеоморфизма* f. Для целого числа $p \geqslant 0$ обозначим через $G_p \subset G$ подмножество диффеоморфизмов $f \in G$ таких, что $I_f = p$.

Аналогичным образом определяется репер компактной гетероклинической кривой γ, ограничивающей диск $d_\gamma \subset W^s_{\sigma^1_f}$, содержащий седло σ^1_f. При этом кривая γ ориентирована так, что при движении вдоль нее диск d_γ остается слева.

Для диффеоморфизма $f \in G_p$, $p > 0$, множество H_f назовем ориентируемым, если оно состоит только из некомпактных кривых, и реперы всех кривых в H_f имеют одинаковую ориентацию(см. Рис. 3).

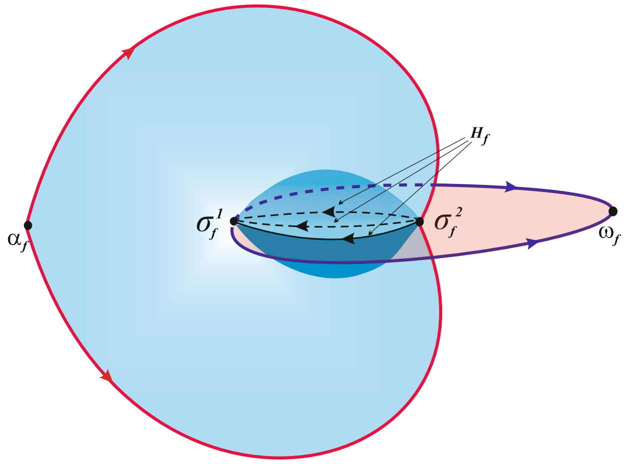

Рис. 3: Диффеоморфизм $f \in G_1$ с неориентируемым множеством H_f, состоящим из трех некомпактных кривых

Для диффеоморфизма $f \in G_0$ множество H_f назовем ориентируемым, если оно либо пусто, либо состоит только из компактных кривых, ограничивающих диски на $W^s_{\sigma^1_f}$, содержащие седло σ^1_f, и реперы всех кривых в H_f имеют одинаковую ориентацию (см. Рис. 4).

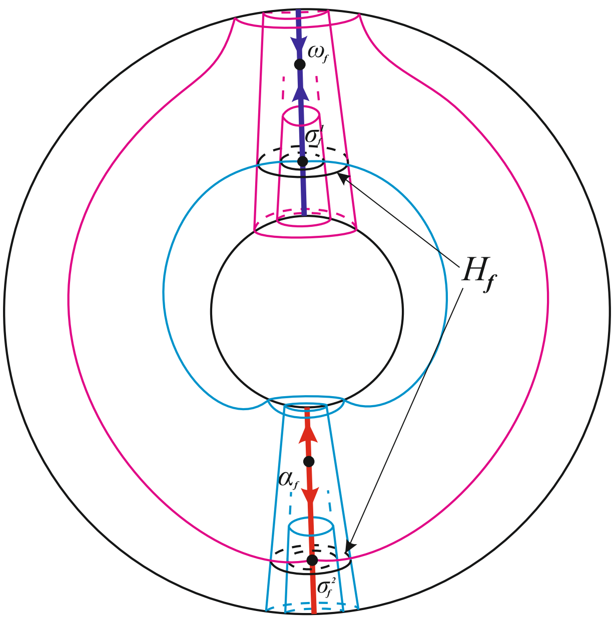

Рис. 4: Диффеоморфизм $f \in G_0^+$ с ориентируемым множеством H_f, состоящим из бесконечного множества компактных кривых

Обозначим через $G_p^+ \subset G_p$, $p \geqslant 0$, подмножество диффеоморфизмов $f \in G_p$ с ориентируемым множеством H_f.

Следующий доказанный в этой главе факт является ключом к описанию топологии многообразий, допускающих диффеоморфизмы класса G.

Теорема 1. ([57]*, Теорема 1) *Для любого диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ из класса G_p, $p \geqslant 0$, существует изотопный ему диффеоморфизм $f_+ \in G_p^+$.*

Этот и следующий результаты позволяют установить, что несущее многообразие любого диффеоморфизма $f \in G_1$ гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^3$.

Теорема 2. ([60]*, Theorem 2) *Любой диффеоморфизм $f \in G_1$ изотопен диффеоморфизму источник-сток.*

Полный топологический инвариант, полученный в [17] для 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла, состоит из замкнутого связного ориентируемого простого 3-многообразия и двух вложенных в него трансверсально пересекающихся ламинаций, состоящих из торов и бутылок Клейна. В работе [16] выделены все допустимые инварианты, и по каждому из них реализован диффеоморфизм Морса-Смейла. Однако, отсутствие классификации простых 3-многообразий и вложенных в них ламинаций не всегда позволяет реализовывать диффеоморфизмы с заданными свойствами. В некоторых частных случаях инварианты могут быть найдены более естественным образом. Так для диффеоморфизмов, имеющих в точности одну седловую точку (диффеоморфизмов Пикстона), в работе [9] установлено, что их топологическая сопряженность полностью определяется эквивалентностью узлов Хопфа (узлов в $S^2 \times \mathbb{S}^1$, принадлежащих гомотопическому классу стандартного узла $L_0 = \{s\} \times \mathbb{S}^1$), являющихся проекциями одномерных неустойчивых седловых сепаратрис в соответствующее каждому диффеоморфизму пространство орбит бассейна стока. Среди хопфовских узлов различают эквивалентные стандартному узлу и неэквивалентные. Из результатов П.М. Ахметьева и О.В. Починки [2] следует, что существует счетное число попарно не эквивалентных стандартному хопфовских узлов. В силу [52], [9], любой узел Хопфа может быть реализован диффеоморфизмом Пикстона на 3-сфере. **В пятой главе** настоящей работы аналогичный результат получен для диффеоморфизмов класса G_1^+.

Пусть $f \in G_1^+$. Обозначим через ℓ_f^1, ℓ_f^2 неустойчивые сепаратрисы точки σ_f^1 и положим $L_f^i = p_{\omega_f}(\ell_f^i)$, $i = 1, 2$ (см. Рис. 5).

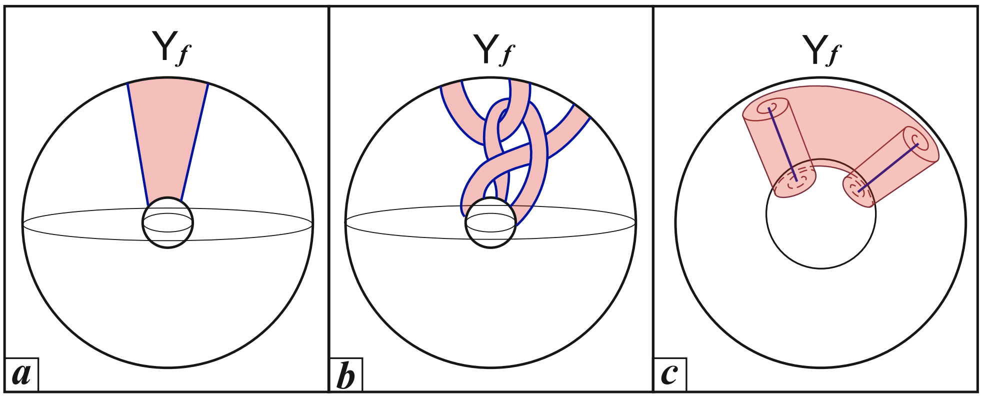

Рис. 5: Возможные варианты проекции Y_f двумерного неустойчивого седлового многообразия

Лемма 5.1 ([61]*, Лемма 1.1) *Для любого диффеоморфизма $f \in G_1^+$ множества L_f^1, L_f^2 являются изотопными узлами Хопфа.*

Обозначим через $\mathcal{L}_f = [L_f^1] = [L_f^2]$ класс эквивалентности узлов L_f^1, L_f^2.

Теорема 3. ([61]*, Теорема 1.1) *Диффеоморфизмы $f, f' \in G_1^+$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{f'}$.*

Теорема 4. ([61]*, Теорема 1.2) *Для любого класса эквивалентности $\mathcal{L}$ хопфовских узлов в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ существует диффеоморфизм $f \in G_1^+$ такой, что $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}$.*

Этапы реализации диффеоморфизма $f_L \in G$ по узлу Мазура L изображены на рисунках 6, 7, 8.

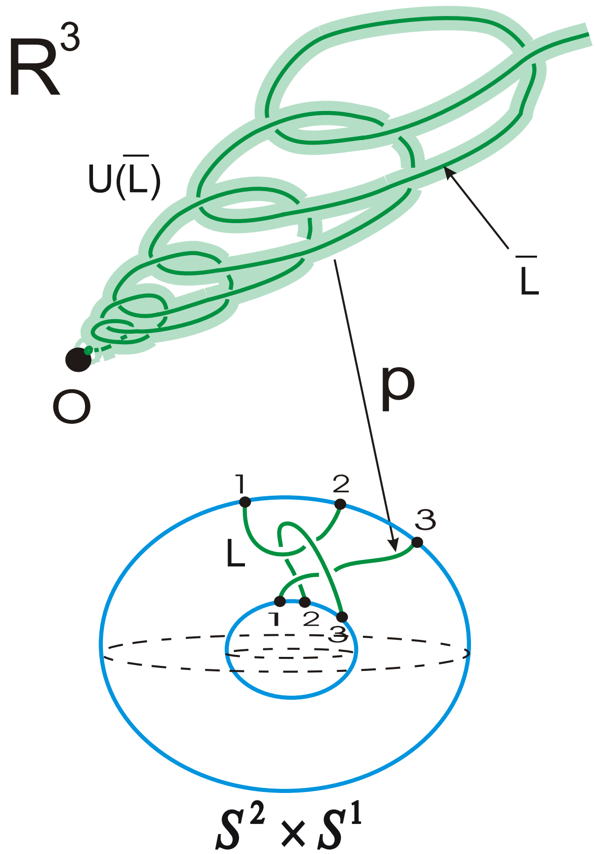

Рис. 6: Поднятие узла Хопфа L

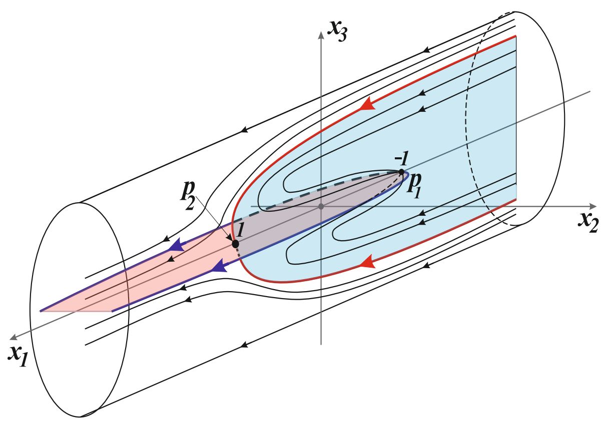

Рис. 7: Траектории потока ϕ^t

Из результатов В.З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О.В. Починки [26], [27], [29], [30] известно, что для любого диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ из класса G существует функ-

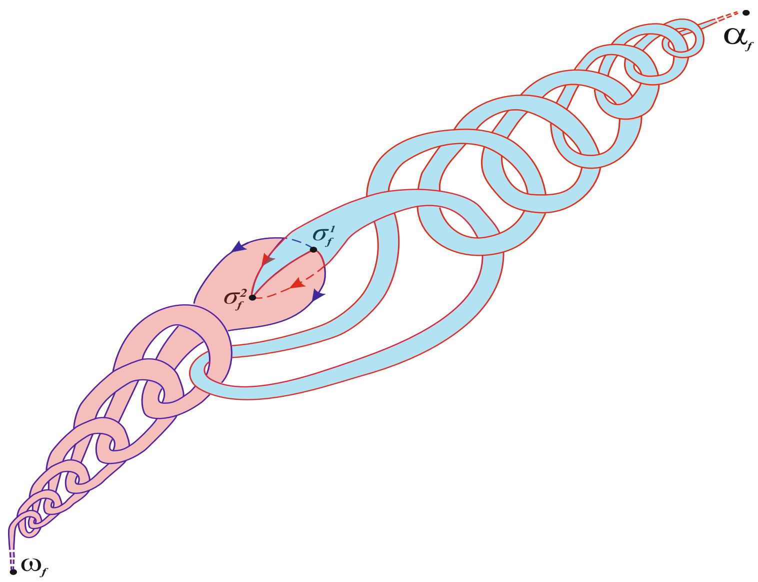

Рис. 8: Диффеоморфизм $f = f_L$

ция Морса-Ляпунова – функция Ляпунова $\varphi : M^3 \to \mathbb{R}$, являющаяся непрерывной функцией Морса. Если при этом функция φ не имеет критических точек вне неблуждающего множества диффеоморфизма f, то, следуя [52], мы называем ее энергетической функцией для диффеоморфизма f. Согласно работе [30], дикое вложение седловых сепаратрис является препятствием к существованию энергетической функции у диффеоморфизма $f \in G$. В связи с этим в работе [28] было введено понятие квази-энергетической функции для диффеоморфизма f (функции Морса-Ляпунова с минимальным числом критических точек). Заметим, что число критических точек квази-энергетической функции является топологическим инвариантом диффеоморфизма f. Обозначим его ρ_f.

Как было упомянуто выше, по любому хопфовскому узлу L можно построить диффеоморфизм $f_L \in G_1^+$, для которого класс эквивалентности узла L является полным топологическим инвариантом. Среди хопфовских узлов различают эквивалентные стандартному узлу и неэквивалентные. Согласно работе [30] диффеоморфизм f_L обладает энергетической функцией Морса тогда и только тогда, когда узел L эквивалентен стандартному узлу.

Любой хопфовский узел гладко гомотопен стандартному хопфовскому узлу L_0 (см. например [37]), но не является изотопным или эквивалентным ему в общем случае. Б. Мазур [42] построил хопфовский узел L_M, неэквивалентный и неизотопный узлу L_0 (см. Рис. 9). В работе [2] построено счетное семейство хопфовских узлов L_n (см. Рис. 10), для которых там же доказано, что они попарно неэквивалентны. **В пятой главе** настоящей работы получена формула для вычисления количества критических точек квази-энергетической функции для диффеоморфизмов из рассматриваемого класса.

Теорема 5. ([58]*, Теорема 1) *Для диффеоморфизма $f \in G_1^+$, построенного по обобщенному узлу Мазура L_n, $n \in \mathbb{N}$, число ρ_f критических точек квази-*

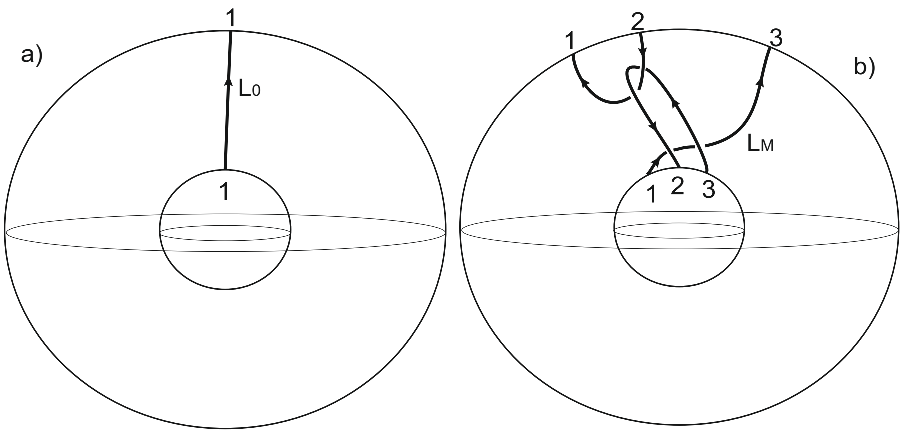

Рис. 9: Неизотопные и не эквивалентные хопфовские узлы L_0 и L_M: a) стандартный хопфовский узел L_0; b) узел Мазура L_M

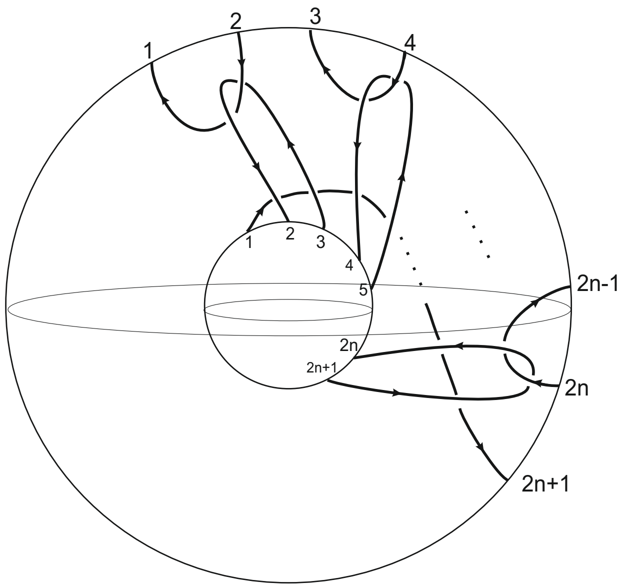

Рис. 10: Обобщенный узел Мазура L_n

энергетической функции диффеоморфизма f вычисляется по формуле

$$\rho_f = 4 + 2n.$$

В шестой главе доказан следующий факт, являющийся одним из основных результатов работы.

Теорема 6. ([59]*, Theorem 1) *Несущее многообразие любого диффеоморфизма $f \in G_p$, $p \geqslant 0$, гомеоморфно линзовому пространству $L_{p,q}$.*

Также в этой главе дано конструктивное доказательство следующего утверждения.

Теорема 7. ([59]*, Theorem 2]) *На любом линзовом пространстве $L_{p,q}$ существует диффеоморфизм $f \in G$ с дико вложенными одномерными седловыми сепаратрисами.*

Заметим, что все ранее известные примеры диффеоморфизмов рассматриваемого класса с дико вложенными одномерными сепаратрисами строились только на S^3.

2 Публикации по результатам исследования

Диссертация написана на основании 4 статей, опубликованных в журналах, входящих в международные библиографические базы.

- О. В. Починка, Е. А. Таланова, *Квази-энергетическая функция для 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла с неподвижными точками попарно различных индексов*, Математические заметки, 115:4, (2024), 1-13.
- О. В. Починка, Е. А. Таланова, *Диффеоморфизмы Морса–Смейла с неблуждающими точками попарно различных индексов Морса на 3-многообразиях*, Успехи математических наук, 79:1, (2024), 135-184.
- O. Pochinka, V. Shmukler, E. Talanova, *Bifurcation of a disappearance of a non-compact heteroclinic curve*, Selecta Mathematica, New Series, 29:60, (2023), 1-14.
- Е.В. Круглов, Е.А. Таланова, *О реализации диффеоморфизмов Морса–Смейла с гетероклиническими кривыми на трехмерной сфере*, Труды МИАН, 236 (2002), 212-217.

Заключение

В настоящей работе рассмотрен класс G диффеоморфизмов Морса-Смейла f, заданных на ориентируемых замкнутых связных многообразиях M^3 и имеющих неблуждающие точки попарно различных индексов: $\omega_f, \sigma_f^1, \sigma_f^2, \alpha_f$ с индексами Морса $0, 1, 2, 3$ соответственно. Для любого диффеоморфизма $f \in G$ введено понятие гетероклинического индекса I_f, а также ориентируемости гетероклинического пересечения. Для целого числа $p \geqslant 0$ через $G_p \subset G$ обозначено подмножество диффеоморфизмов $f \in G$ таких, что $I_f = p$, и через $G_p^+ \subset G_p$, $p \geqslant 0$ – подмножество диффеоморфизмов $f \in G_p$ с ориентируемым гетероклиническим пересечением.

Основными результатами диссертации, выносимыми на защиту являются следующие доказанные в работе факты:

1. Для любого диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ из класса G_p, $p \geqslant 0$ существует изотопный ему диффеоморфизм $f_+ \in G_p^+$ (Теорема 1).

2. Любой диффеоморфизм $f \in G_1$ изотопен диффеоморфизму источник-сток (Теорема 2).

3. Класс топологической сопряженности диффеоморфизма $f \in G_1^+$ полностью определяется классом узла Хопфа, являющегося проекцией одномерной сепаратрисы в пространство орбит бассейна стока. Более того, любой узел Хопфа L может быть реализован диффеоморфизмом $f_L \in G_1^+$, для которого класс эквивалентности узла L является полным топологическим инвариантом (Теоремы 3, 4).

4. Для диффеоморфизма f_{L_n}, $n \in \mathbb{N}$, реализованного по обобщенному узлу Мазура L_n, число критических точек его квази-энергетической функции вычисляется по формуле $\rho_f = 4 + 2n$ (Теорема 5).

5. Несущее многообразие любого диффеоморфизма $f \in G_p$, $p \geqslant 0$, гомеоморфно линзовому пространству $L_{p,q}$ (Теорема 6).

6. Каждое линзовое пространство $L_{p,q}$ допускает диффеоморфизм f из класса G_p с дико вложенными одномерными сепаратрисами (Теорема 7).

Список литературы

[1] А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, *Грубые системы*, Докл. АН СССР, 219:6, (1937), 247–250.

[2] P. M. Akhmetiev, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *On the Number of the Classes of Topological Conjugacy of Pixton Diffeomorphisms*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, Springer, 20:3, (2021), 76.

[3] V. S. Afraimovich, L. A. Bunimovich, S. V. Moreno, *Dynamical networks: continuous time and general discrete time models*, Regular and Chaotic Dynamics, 15, (2010),127-145.

[4] V. S. Afraimovich, M. I. Rabinovich, P. Varona, *Heteroclinic contours in neural ensembles and the winnerless competition principle*, International Journal of Bifurcation and Chaos, World Scientific, 14:04, (2004), 1195–1208.

[5] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, *Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях*, Часть 1. Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Лентович-Андроновой, Горький, (1985), 22–38, [Имеется перевод: A.N. Bezdenezhykh, V.Z. Grines, Dynamical Properties and Topological Classification of Gradient-Like Diffeomorphisms on Two-Dimensional Manifolds I, Sel. Math. Sov., 11:1, (1992), 1–11].

[6] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, *Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий*, Дифференциальные и интегральные уравнения, Сб. науч. тр. под ред. Н.Ф. Отрокова, Горький ГГУ, (1985), 33–37, [Имеется перевод: A.N. Bezdenezhykh, V.Z. Grines, Realization of Gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds, Sel. Math. Sov., 11:1, (1992), 19–23].

[7] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, *Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. I, II* , Горький: ГГУ, (1987), 24–32.

[8] И. В. Бойков, В. А. Руднев, А. И. Бойкова, *Устойчивость нейронных сетей Коэна-Гроссберга с запаздываниями, зависящими от времени*, Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2:66, (2023), 41-58.

[9] C. Bonatti, V. Z. Grines, *Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3*, J. Dynam. Control Systems, 6:4 (2000), 579–602.

[10] C. Bonatti, V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka, *Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves on 3-manifolds*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 39:9, (2019), 2403–2432.

[11] К. Бонатти, В.З. Гринес, В.С. Медведев, *О диффеоморфизмах Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на трехмерных многообразиях*, Труды Математического института имени ВА Стеклова, 236:0, (2002), 66–78.

[12] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou, *Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves*, Topology and its Applications, 117:3, (2002), 335–344.

[13] Хр. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е.Пеку, *Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на 3-многообразиях*, Труды Института Математики Стеклова, 236, (2002), 58–69.

[14] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou, *Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds*, Topology, 43:2, (2004), 369–391.

[15] Хр. Бонатти, В. З. Гринес, О. В. Починка, *Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях*, ДАН, 396:4, (2004).

[16] C. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, *Realization of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 297, (2017), 35–49.

[17] C. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, *Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds*, Duke Mathematical Journal, 168:13, (2019), 2507–2558.

[18] C. Bonatti, R. Langevin, *Diffeomorphismes de Smale des surfaces. (French) [Smale diffeomorphisms of surfaces] With the collaboration of E. Jeandenans*, Asterisque, (1998), 250.

[19] G. Fleitas, *Classification of gradient-like flows on dimensions two and three*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica-Bulletin/Brazilian Mathematical Society, 6, (1975), 155–183.

[20] В. З. Гринес, *Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях*, Матем. заметки, 54:3, (1993), 3–17.

[21] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, *Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме* $S^{n-1} \times S^1$, Математический сборник, 214:5, (2023), 97–127.

[22] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, О. В. Починка, *Классификация систем Морса-Смейла и топологическая структура несущих многообразий*, Успехи математических наук, 74:1, (2019), 41–116.

[23] В. З. Гринес , Е. Я. Гуревич, О. В. Починка, *Энергетическая функция градиенто-подобных потоков и проблема топологической классификации*, Математические заметки, 96:6, (2014), 856–863.

[24] В. З. Гринес, Е. В. Жужома , О. В. Починка, *Динамические системы и топология магнитных полей в проводящей среде*, Современная математика. Фундаментальные направления, 63:3, (2017), 455- -474.

[25] В. З. Гринес, С. Х. Капкаева, О. В. Починка, *Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей*, Математический сборник, 205:10, (2014), 19–46.

[26] В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, *Энергетическая функция для градиентно-подобных диффеоморфизмов на 3-многообразиях*, ДАН, 422:3, (2008), 299–301.

[27] V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka, *Self-indexing function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds*, Moscow Math. Journal, 4, (2009), 801–821.

[28] В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, *Квазиэнергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами*, Математические заметки, 86:1-2, (2009), 163–170.

[29] В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, *О существовании энергетической функции для диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях*, ДАН, 440:1, (2011), 7–10.

[30] В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, *Динамически упорядоченная энергетическая функция для диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях*, Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 278:5, (2012), 34–48.

[31] V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, E. Zhuzhoma, *On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids*, Physica D: Nonlinear Phenomena, 294, (2015), 1–5.

[32] V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical systems on 2-and 3-manifolds*, Cham : Springer, 46, (2016).

[33] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, *Новые соотношения для систем Морса-Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами*, Мат. сборник, 194, (2003), 979–1007.

[34] V. Grines, O. Pochinka, *On topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms*, Dynamics, Games and Science II DYNA2008 in honor of Mauricio Peixoto and David Rand, University of Minho, (2010), 403–424.

[35] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, *Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла*, Тр. МИАН, 271, (2010), 111–133.

[36] J. Hopfield, *Learning algorithms and probability distributions in feed-forward and feed-back networks*, Proceedings of the national academy of sciences, 84:23, (1987), 8429-8433.

[37] P. Kirk, C. Livingston, *Knots invariants in 3-manifolds and essential tori*, Pacific Journal of Math., 191:1, (2001), 73–96.

[38] V. E. Kruglov, D. S. Malyshev, O. V. Pochinka, D. D. Shubin, *On Topological Classification of Gradient-like Flows on an-sphere in the Sense of Topological Conjugacy*, Regular and Chaotic Dynamics, (2020), 25:6, 716–728.

[39] Е. В. Круглов, Е. А. Таланова, *О реализации диффеоморфизмов Морса–Смейла с гетероклиническими кривыми на трехмерной сфере*, Труды Математического института имени В. А. Стеклова, 236:0, (2002), 212–217.

[40] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, *О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории*, Докл. АН СССР, 14:5, (1937), 251–257.

[41] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, *О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории*, Докл. АН СССР, 103:4, (1955), 557–560.

[42] B. Mazur, *A note on some contractible 4-manifolds*, Annals of Mathematics, 73:1, (1961), 221–228.

[43] T. Mitryakova, O. Pochinka, *On necessary and sufficient conditions for the topological conjugacy of surface diffeomorphisms with a finite number of orbits of heteroclinic tangency*, Proc. Steklov Inst. Math., 270:1, (2010), 194–215.

[44] D. Malyshev, A. Morozov, O. Pochinka, *Combinatorial invariant for Morse–Smale diffeomorphisms on surfaces with orientable heteroclinic*, Chaos, 31:2, (2021), Article 023119.

[45] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, *О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях*, Математический сборник, 189:8, (1998), 93–140.

[46] J. Palis, *On Morse-Smale dynamical systems*, Topology, 8:4, (1969), 385–404.

[47] J. Palis, S. Smale, *Structural stability Theorems*, Proceedings of the Institute on Global Analysis, American Math. Society, 14, (1970), 223–231 [Русский перевод: Теоремы структурной устойчивости, Математика, 13:2, (1969), 145–155].

[48] M. Peixoto, *Structural stability on two-dimensional manifolds*, Topology, 1:2, (1962), 101–120.

[49] M. Peixoto, *Structural stability on two-dimensional manifolds (a further remarks)*, Topology, 2:2, (1963), 179–180.

[50] M. Peixoto, *On the classification of flows on two-manifolds*, Dynamical systems Proc., Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador, Brasil, (1971), M. Peixoto (ed.) N.Y.London. Academic Press., (1973), 389–419.

[51] С. Ю. Пилюгин, *Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах*, Дифференциальные уравнения, 14:2, (1978), 245–254.

[52] D. Pixton, *Wild unstable manifolds*, Topology, 16:2, (1977), 167–172.

[53] O. Pochinka, *Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices*, Universitatis Iagelonicae Acta Mathematica, Fasciculus XLVII, (2009), 149-154.

[54] В. И. Шмуклер, О. В. Починка, *Бифуркации, меняющие тип гетероклинических кривых 3-диффеоморфизма Морса-Смейла*, Таврический вестник информатики и математики, 50:1, (2021), 101-114.

[55] О. В. Починка, Д. Д. Шубин, *Неособые потоки Морса–Смейла с тремя периодическими орбитами на ориентируемых 3-многообразиях*, Математические заметки, 112:3, (2022), 426–443.

[56] O. V. Pochinka, D. D. Shubin, *Non-singular Morse–Smale flows on n-manifolds with attractor–repeller dynamics*, Nonlinearity, 35:3, (2022), 1485–1499.

[57] О. В. Починка, Е. А. Таланова, *Минимизация числа гетероклинических кривых 3-диффеоморфизма с неподвижными точками, имеющими попарно различные индексы Морса*, Теоретическая и математическая физика, 215:2, (2023), 311–317.

[58] О. В. Починка, Е. А. Таланова, *Квази-энергетическая функция для 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла с неподвижными точками попарно различных индексов*, Математические заметки, принято в печать.

[59] O. Pochinka, E. Talanova, *On the topology of 3-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms with four fixed points of pairwise different Morse indices*, Cornell University. Series arXiv "math (2023). No. 2306.02814.

[60] O. Pochinka, V. Shmukler, E. Talanova, *Bifurcation of a disappearance of a non-compact heteroclinic curve*, Selecta Mathematica, New Series, 29:60, (2023), 1-14.

[61] О. В. Починка, Е. А. Таланова, Д. Д. Шубин, *Узел как полный инвариант 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла с четырьмя неподвижными точками*, Математический сборник, 214:8, (2023), 94-107.

[62] E. R. Priest, *Solar magnetohydrodynamics*, Springer Science and Business Media, 21, (2012).

[63] E. Priest, T. Forbes, *Magnetic Reconnection*, Magnetic Reconnection, (2007).

[64] А. О. Пришляк, *Полный топологический инвариант потоков Морса–Смейла и разложений на ручки трёхмерных многообразий*, Фундаментальная и прикладная математика, 11:4, (2005), 185–196.

[65] S. Smale, *Morse inequalities for a dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc., 66, (1960), 43–49. [Русский перевод: сб. Математика, 11:4, (1967), 79–87.]

[66] Я. Л. Уманский, *Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий*, Математический сборник, 181:2, (1990), 212–239.

[67] Д. Д. Шубин, *Топология несущих многообразий несингулярных потоков с тремя нескрученными орбитами*, Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика, 29:6, (2021), 863–868.