Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Пирожков Дмитрий Владимирович

Структура допустимых подкатегорий в производных категориях многообразий

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор,
Александр Кузнецов

Москва - 2024

Введение

В данной диссертации изучаются производные категории когерентных пучков на алгебраических многообразиях. Пусть X — алгебраическое многообразие над полем $\Bbbk$. С многообразием X ассоциирована абелева категория $\mathrm{Coh}(X)$ когерентных пучков на X. По ней можно построить производную категорию $D(\mathrm{Coh}(X))$. Центральным понятием в этой работе является следующее:

0.1. Определение. *Ограниченной производной категорией когерентных пучков* $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ называется полная подкатегория $D(\mathrm{Coh}(X))$, состоящая из комплексов с конечным числом ненулевых пучков когомологий.

Замечание. По техническим причинам более удобно определять $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ как полную подкатегорию в производной категории от абелевой категории квазикогерентных пучков, состоящую из комплексов, у которых лишь конечное число пучков когомологий не равны нулю и все являются когерентными. Поскольку для нас X всегда является нётеровой схемой, это определение эквивалентно данному [Huy06, Prop. 3.5]

Категория $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, которую мы для краткости часто будем называть *производной категорией многообразия* X, это очень большой инвариант, построенный по многообразию. Многие более обозримые инварианты, как, например, алгебраическая K-теория или (ко)гомологии Хохшильда, можно восстановить по производной категории X. Несмотря на то, что производная категория многообразия обычно является слишком большим объектом, чтобы её можно было в удовлетворительном смысле «вычислить», с ней можно продуктивно работать, например, изучая связь с производными категориями других многообразий. Примеры такого рода результатов и описание применяемых при этом методов можно прочесть в обзоре [BO02].

Изучение производных категорий алгебраических многообразий — активно развивающаяся область алгебраической геометрии. В плане истории этой области ограничимся упоминанием двух классических статей, оказавших значительное влияние на всё дальнейшее развитие. В статье [Bei78] 1978 года А. Бейлинсон изучал производную категорию $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbb{P}^n)$ проективного пространства $\mathbb{P}^n$ и описал её в терминах линейно-алгебраических объектов. Используя появившуюся позже терминологию, можно сказать, что Бейлинсон построил для $\mathbb{P}^n$ *исключительный набор*. Его статья послужила важным шагом на пути к будущему изучению исключительных объектов, исключительных наборов и полуортогональных разложений. Чуть позже, в 1981 году, вышла статья [Muk81], где Ш. Мукаи доказал, что для любого абелева многообразия A существует эквивалентность производных категорий $D^b_{\mathrm{coh}}(A) \simeq D^b_{\mathrm{coh}}(A^\vee)$, где $A^\vee \cong \mathrm{Pic}^0(A)$ — двойственное абелево многообразие к A, переводящая линейные расслоения степени ноль на A в пучки-небоскрёбы на соответствующих точках $\mathrm{Pic}^0(A)$. Отметим, что сами многообразия A и $A^\vee$ могут быть не изоморфны. Эта эквивалентность позволила Мукаи ответить на некоторые вопросы, связанные с расслоениями Пикара, и продемонстрировала, что между производными категориями иногда возникают дополнительные симметрии, которые могут быть весьма нетривиальны на геометрическом уровне.

Важным инструментом для изучения производных категорий является понятие полуортогонального разложения. Это способ представить категорию в виде «склейки» нескольких более маленьких подкатегорий. Нам понадобится вспомогательное определение.

0.2. Определение. Строго полная триангулированная подкатегория $\mathcal{A} \subset D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ называется *допустимой*, если у функтора вложения $\mathcal{A} \hookrightarrow D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ есть и левый, и правый сопряжённые функторы.

Свойство допустимости подкатегории на первый взгляд не кажется существенно ограничивающим, но его простота обманчива: допустимые подкатегории — в целом редкое явление. Существование сопряжённых для функторов между «большими» триангулированными категориями часто получается автоматически (см., например, статью [Nee96]), но поскольку мы работаем с «маленькой» категорий $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, а не с неограниченной производной категорией квазикогерентных пучков, то условие допустимости проверять гораздо сложнее.

0.3. Определение. Набор допустимых подкатегорий $\langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ в $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ называется (сильным) *полуортогональным разложением* категории $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, если выполнены следующие условия:

- Категории $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ в совокупности порождают $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ в том смысле, что наименьшая триангулированная подкатегория в $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, содержащая каждую из $\mathcal{A}_i$, совпадает с $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$.
- Пусть $A_i \in \mathcal{A}_i$ и $A_j \in \mathcal{A}_j$ — два объекта. Если $j > i$, то $\mathrm{Hom}^\bullet_{D^b_{\mathrm{coh}}(X)}(A_j, A_i) = 0$ (*полуортогональность*).

Замечание. В отдельных ситуациях бывает полезно ослабить понятие полуортогонального разложения, разрешив подкатегориям $\mathcal{A}_i$ не быть допустимыми. Во многих случаях (например, если X — гладкое и собственное многообразие) допустимость получается автоматически. Все полуортогональные разложения, встречающиеся в данной работе, будут иметь допустимые компоненты, поэтому мы опускаем уточняющее прилагательное «сильное» и говорим просто о полуортогональных разложениях.

Допустимые подкатегории тесно связаны с полуортогональными разложениями. Например, верен следующий факт.

0.4. Лемма ([BK90]). *Пусть X — гладкое проективное многообразие, и пусть $\mathcal{A} \subset D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ — допустимая подкатегория. Рассмотрим полную подкатегорию ${}^\perp\mathcal{A} \subset D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, определяемую таким образом:*

$$ {}^\perp\mathcal{A} := \{F \in D^b_{\mathrm{coh}}(X) \mid \forall A \in \mathcal{A}\ \mathrm{Hom}^\bullet(F, A) = 0\}. $$

Тогда ${}^{\perp}\mathcal{A}$ *— допустимая подкатегория в* $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ *и пара* $\langle \mathcal{A}, {}^{\perp}\mathcal{A}\rangle$ *является полуортогональным разложением* $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$*. Для аналогично определяемой подкатегории* $\mathcal{A}^{\perp}$ *пара* $\langle \mathcal{A}^{\perp}, \mathcal{A}\rangle$ *тоже будет полуортогональным разложением* $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$*.*

Приведём важный пример полуортогонального разложения, построенный Д. Орловым [Orl93]:

0.5. Теорема ([Orl93]). *Пусть* X *— гладкое многообразие,* $j\colon Z \hookrightarrow X$ *— гладкое подмногообразие коразмерности* c*,* $\pi\colon Y \to X$ *— раздутие* X *вдоль* Z*. Обозначим через* $j\colon E \hookrightarrow Y$ *вложение исключительного дивизора, и через* $p\colon E \to Z$ *ограничение морфизма* π *на* E*. Тогда существует полуортогональное разложение*

$$D^b_{\mathrm{coh}}(Y) = \langle \pi^* D^b_{\mathrm{coh}}(X), \Phi_0(D^b_{\mathrm{coh}}(Z)), \ldots, \Phi_{c-2}(D^b_{\mathrm{coh}}(Z))\rangle,$$

где функторы $\pi^*\colon D^b_{\mathrm{coh}}(X) \to D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ *и*

$$\Phi_i\colon F \in D^b_{\mathrm{coh}}(Z) \mapsto j_*(p^*(F) \otimes \mathcal{O}_\pi(i)) \in D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$$

являются вложениями допустимых подкатегорий.

Построение полуортогональных разложений на каком-то классе многообразий часто оказывается сложной задачей. Сейчас известно много примеров полуортогональных разложений, есть довольно много методов, позволяющих строить новые разложения, но открытых вопросов ещё больше. Отметим, что общих свойств полуортогональных разложений, позволяющих контролировать их поведение, доказано не очень много. Часть фактов про общее поведение имеют скорее отрицательный характер: например, для полуортогональных разложений не выполняется свойство Жордана–Гёльдера, то есть для двух разложений одной и той же категории ни в каком разумном смысле не найдётся «общего подразложения»; явные контрпримеры построены в [Kuz13] и [BGS14]. Из положительных свойств стоит упомянуть теорему Каватани и Окавы о том, что допустимые подкатегории замкнуты относительно малых деформаций объектов [KO15].

Основное содержание диссертации делится на три части, в каждой из которых существенную роль играет понятие полуортогональных разложений и допустимых подкатегорий.

Результаты диссертации опубликованы в следующих трёх статьях:

(a) Pirozhkov D. Semiorthogonal Decompositions on Total Spaces of Tautological Bundles // *International Mathematics Research Notices.* 2022. №3. P. 2250–2273.

(b) Pirozhkov D. Rouquier dimension of some blow-ups // *European Journal of Mathematics.* 2023. Vol. 9, art. 45.

(c) Pirozhkov D. Stably semiorthogonally indecomposable varieties // *Épijournal de Géométrie Algébrique.* 2023. Vol. 7.

В приложении A диссертации, краткое содержание которого описано в разделе 1 данного резюме, строится полуортогональное разложение для многообразия X, полученного как тотальное пространство некоторого векторного расслоения на грассманниане. Это разложение оказывается похоже на исключительный набор в производной категории самого грассманниана, построенный Капрановым. Доказывается и глобальная версия этого результата, которую можно рассматривать как обобщение теоремы 0.5.

В приложении B диссертации, краткое содержание которого описано в разделе 2 данного резюме, для некоторого класса многообразий удаётся подтвердить, что некоторый инвариант триангулированных категорий, называемый *размерностью Рукье*, у производной категории когерентных пучков равен обычной геометрической размерности многообразия. Гипотетически это верно для всех многообразий, хотя известно лишь для очень маленького списка. Полуортогональные разложения позволяют оценить размерность Рукье сверху в терминах размерностей Рукье каждой из компонент, но обычно эта оценка крайне неэффективна. Используя специальным образом построенные полуортогональные разложения удаётся подтвердить гипотезу для, например, раздутия девяти различных точек на проективной плоскости или для раздутия трёх точек в $\mathbb{P}^n$ для любого n.

В приложении C диссертации, краткое содержание которого описано в разделе 3 данного резюме, вводится понятие *стабильной неразложимости* для производной категории многообразия. Наглядным следствием из стабильной неразложимости является то, что эта производная категория неразложима, т.е. не допускает нетривиальных полуортогональных разложений, и более того, то же самое верно и для всех подмногообразий. Стабильную неразложимость удаётся доказать для абелевых многообразий, из чего получается ряд следствий о фантомных подкатегориях.

1 Полуортогональные разложения и тавтологические расслоения

Пусть V — векторное пространство размерности n. Обозначим через $X = \mathrm{Gr}(k, V)$ грассманново многообразие k-мерных векторных подпространств в V. Пусть U и Q — тавтологические подрасслоение и факторрасслоение на X, соответственно, вписывающиеся в точную тройку

$$0 \to U \to V \otimes \mathcal{O}_X \to Q \to 0.$$

Рассмотрим многообразие $Y := \mathrm{Tot}_{\mathrm{Gr}(k,V)}(U)$, тотальное пространство тавтологического подрасслоения на X, и обозначим через $\pi \colon Y \to X$ морфизм проекции. Точки многообразия Y — это пары $(v \in V, W \subset V)$, где W — это k-мерное подпространство в V, содержащее вектор v. Обозначим морфизм, забывающий выбор подпространства, через $p \colon Y \to \mathbb{A}(V)$, где $\mathbb{A}(V)$ — это V, рассмотренное как алгебраическое многообразие, то есть $\mathrm{Spec}\,(\mathrm{Sym}^\bullet(V^\vee))$.

Слой морфизма p над точкой $v \in \mathbb{A}(V)$ — это множество всех k-мерных подпространств в V, содержащих данный вектор. Иными словами, слой над любой точкой, кроме начала координат, изоморфен грассманниану $\mathrm{Gr}(k-1, V/\langle v\rangle) \simeq \mathrm{Gr}(k-1, n-1)$, вложенному в $\mathrm{Gr}(k, V)$. Слой над началом координат же — это весь $\mathrm{Gr}(k, V) \simeq \mathrm{Gr}(k, n)$.

Посмотрим, что получается в случае $k = 1$. Тогда $X \simeq \mathbb{P}^{n-1}$, а морфизм из Y в $\mathbb{A}(V) \simeq \mathbb{A}^n$ — это, как легко убедиться, раздутие аффинного пространства в начале координат. Для проективного пространства существует исключительный набор Бейлинсона:

$$D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbb{P}^{n-1}) = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-n+1), \ldots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \rangle, \tag{1.1}$$

а для раздутия аффинного пространства в начале координат теорема 0.5 влечёт существование полуортогонального разложения

$$D^b_{\mathrm{coh}}(Y) = \langle j_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-n+1), \ldots, j_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1), D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbb{A}^n) \rangle, \tag{1.2}$$

где $j\colon \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow Y$ — вложение исключительного дивизора в раздутие, а подкатегория, эквивалентная $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbb{A}^n)$, порождена структурным пучком $\mathcal{O}_Y$. Можно заметить, что разложения (1.1) и (1.2) устроены очень похоже. Более того, случай $k = n-1$, где у морфизма $p\colon Y \to \mathbb{A}^n$ общий слой это $\mathbb{P}^{n-2}$, а над нулём висит копия $\mathbb{P}^{n-1}$, возник в работе Орлова [Orl06, Prop. 2.10], и в этой ситуации для соответствующего многообразия Y тоже было построено полуортогональное разложение, похожее на исключительный набор Бейлинсона для проективного пространства.

Главным результатом этого раздела диссертации, основанного на статье [Pir22], является построение аналогичного полуортогонального разложения для $D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ при произвольном k:

1.1. Теорема ([Pir22, Th. 3.5]). *Существует полуортогональное разложение*

$$D^b_{\mathrm{coh}}(Y) = \left\langle \binom{n-1}{k} \text{ копий } D^b_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Vect}), \binom{n-1}{k-1} \text{ копий } D^b_{\mathrm{coh}}(V) \right\rangle.$$

Отметим, что в статье не вводится обозначение для многообразия Y, а используется его определение $Y = \mathrm{Tot}(U)$.

В случае $k = 1$ возникает разложение Орлова (1.2) для раздутия точки в аффинном пространстве. Используя тот факт, что раздутие любого гладкого подмногообразия в гладком многообразии локально устроено как раздутие точки в аффинном пространстве, умноженное на другое аффинное пространство, из разложения (1.2) можно вывести общую теорему 0.5 о раздутиях. Аналогичным образом можно из теоремы 1.1 вывести глобальную версию:

1.2. Теорема ([Pir22, Th. 4.5]). *Пусть X — многообразие Коэна–Маколея, E — векторное расслоение на нём, а $s \in \Gamma(X, E)$ — регулярное глобальное сечение E. Обозначим через Z множество нулей s, а через $Y \subset \mathrm{Gr}_X(k, E)$ — подмногообразие в относительном грассманниане k-мерных подпространств в*

E, состоящее из тех подпространств, которые над точкой $x \in X$ содержат вектор $s(x) \in E_x$. Тогда существует полуортогональное разложение

$$D^b_{\mathrm{coh}}(Y) = \left\langle \binom{n-1}{k} \text{ копий } D^b_{\mathrm{coh}}(Z), \binom{n-1}{k-1} \text{ копий } D^b_{\mathrm{coh}}(X) \right\rangle.$$

Отметим, что в статье используется другое обозначение: вместо Y изучаемое многообразие обозначается как $\mathrm{Gr}_s(k, E)$.

Заметим, что базовым частным случаем этой ситуации является как раз многообразие Y из теоремы 1.1: для этого нужно взять $X = \mathbb{A}^n$, в качестве расслоения E взять тривиальное n-мерное расслоение, а в качестве s — тавтологическое сечение. Общий случай выводится из этого частного случая с помощью теории относительных полуортогональных разложений.

Разложения в теоремах 1.1 и 1.2 строятся явным образом. Как разложение (1.2) похоже на разложение (1.1) для проективного пространства, так и для теоремы 1.1 важную роль играет полуортогональное разложение (более точно, исключительный набор) для производной категории грассманниана $\mathrm{Gr}(k, V)$. Однако, в отличие от случаев $k = 1$ и $k = n - 1$, стандартный исключительный набор на грассманниане, построенный Капрановым [Kap84], сам по себе не подходит для построения полуортогонального разложения в $D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$, и потребовалось найти некоторую его перестройку.

2 Размерность Рукье некоторых раздутий

Пусть T — триангулированная категория. В статье [Rou08] Рукье определил некоторый инвариант T, который впоследствии стал известен как *размерность Рукье*. Для его определения введём следующее обозначение, введённое в статье [BV03]. Для объекта $E \in T$ и числа $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ будем обозначать через $\langle E \rangle_k$ подмножество объектов в T, определяемое индуктивно:

- $\langle E \rangle_0$ — это множество всех конечных прямых сумм сдвигов копий объекта E, а так же все их прямые слагаемые. Иными словами, те объекты, которые можно получить из E, используя операции прямой суммы, сдвига, а так же взятия прямого слагаемого.

- $\langle E \rangle_k$ определяется как множество всех объектов F, которые можно вписать в выделенный треугольник $F_0 \to F \to F_{k-1}$, где $F_0 \in \langle E \rangle_0$ и $F_{k-1} \in \langle E \rangle_{k-1}$, а так же всех прямых слагаемых таких объектов F.

Объект E, для которого существует $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, при котором $\langle E \rangle_k = T$, называется *сильным генератором* категории T. В интересующей нас геометрической ситуации, то есть для производных категорий гладких многообразий, сильные генераторы существуют [BV03].

2.1. Определение. *Размерность Рукье* триангулированной категории T — это наименьшее $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, для которого существует сильный генератор $E \in T$ с $\langle E \rangle_k = T$. Размерность считается бесконечной, если сильных генераторов не существует. Обозначим размерность Рукье через $\mathrm{rdim}(T)$.

Вычислить размерность Рукье сложно, потому что определение требует рассмотреть все возможные сильные генераторы для категории. В геометрической ситуации, то есть для триангулированной категории $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, где X — гладкое многообразие, Рукье доказал оценку

$$\dim(X) \leq \mathrm{rdim}(X) \leq 2\dim(X).$$

Здесь и далее для многообразия X мы для краткости пишем $\mathrm{rdim}(X)$ вместо $\mathrm{rdim}(D^b_{\mathrm{coh}}(X))$. Во всех случаях, где размерность Рукье удаётся посчитать явно, оказывается, что она совпадает с обычной геометрической размерностью многообразиия. В связи с этим Орлов высказал гипотезу:

2.2. Гипотеза ([Orl09]). *Для любого гладкого проективного многообразия X верно, что* $\mathrm{rdim}(X) = \dim(X)$.

Она доказана лишь для небольшого списка многообразий, разбором частных случаев. В статье [Pir23a], на которой основан данный раздел диссертации, к списку добавлено несколько новых многообразий, получаемых раздутиями из проективных пространств. Доказательство использует построение полуортогонального разложения специального вида и оценку размерности Рукье с помощью этого разложения. Главный результат — это следующая теорема.

2.3. Теорема ([Pir23a, Th. 4.1]). *Пусть $\{Z_b\}_{b\in B}$ — множество из не более чем трёх попарно непересекающихся подпространств в $\mathbb{P}^n$, где каждое Z_b — это или точка, или линейное подпространство коразмерности* 2. *Пусть X — раздутие $\mathbb{P}^n$ в этих подпространствах. Тогда для X выполняется гипотеза Орлова, то есть* $\mathrm{rdim}(X) = \dim(X) = n$.

В статье вместо X раздутие обозначается через Y. В случае, когда размерность проективного пространства n равна двум или трём, конструкцию специального полуортогонального разложения удаётся итерировать и получаются более сильные утверждения.

2.4. Теорема ([Pir23a, Prop. 4.2]). *Рассмотрим цепочку раздутий*

$$X_3 \to X_2 \to X_1 \to X_o = \mathbb{P}^2,$$

где каждое отображение $X_i \to X_{i-1}$ — это раздутие не более чем трёх различных точек. Тогда для X_3 выполняется гипотеза Орлова, то есть $\mathrm{rdim}(X_3) = 2$.

Замечание. Отметим, что так можно получить все поверхности дель Пеццо, а так же в целом раздутия не более, чем девяти различных точек на $\mathbb{P}^2$. Для поверхностей дель Пеццо гипотеза Орлова уже была доказана в работе [BF12] совсем другими методами.

2.5. Теорема ([Pir23a, Prop. 4.4]). *Рассмотрим цепочку раздутий*

$$X_2 \to X_1 \to X_0 = \mathbb{P}^3,$$

где каждое отображение $X_i \to X_{i-1}$ — это раздутие несвязного объединения нескольких точек и прямых, не более трёх штук суммарно для каждого раздутия, где под прямой имеется в виду строгий прообраз одномерного линейного подпространства в $\mathbb{P}^3 = X_0$. Тогда для X_2 выполняется гипотеза Орлова, то есть $\operatorname{rdim}(X_2) = 3$.

3 Стабильная неразложимость производных категорий

Как отмечалось выше, производные категории многообразий бывает удобно изучать, строя в них полуортогональные разложения. Не для каждого многообразия это возможно; те производные категории, для которых не существует никаких нетривиальных полуортогональных разложений, называют *неразложимыми.* Было бы полезно и интересно знать, у каких многообразий производная категория неразложима.

Примерами таких многообразий являются многообразия с тривиальным каноническим классом [Bri99], кривые положительного рода [Oka11] и, более общо, многообразия, чья каноническая линейная система глобально порождена [KO15].

В связи с понятием неразложимости возникают несколько естественных вопросов. Например, если у многообразия X производная категория неприводима, а Y — какое-нибудь другое многообразие, то верно ли, что любое полуортогональное разложение для производной категории произведения $X \times Y$ индуцировано с разложения для производной категории Y? Под процедурой индукции здесь имеется в виду следующее: если $\mathcal{A} \subset D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ — допустимая подкатегория, то можно рассмотреть подкатегорию $D^b_{\mathrm{coh}}(X) \boxtimes \mathcal{A} \subset D^b_{\mathrm{coh}}(X \times Y)$, порождённую объектами вида $E \boxtimes F$, где $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ произвольный объект, а $F \in \mathcal{A} \subset D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$. Тогда эта подкатегория будет допустимой в $D^b_{\mathrm{coh}}(X \times Y)$, и можно проверить, что полуортогональное разложение для $D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ так переводится в полуортогональное разложение $D^b_{\mathrm{coh}}(X \times Y)$ (см., например, [Kuz11]).

Ответ на вопрос о полуортогональных разложениях для произведений многообразий в полной общности неизвестен. В статье [Pir23b], на которой основан этот раздел диссертации, было введено понятие *NSSI многообразие*, что расшифровывается как noncommutatively stably semiorthogonally indecomposable, то есть некоммутативно стабильно полуортогонально неразложимое. Если X — NSSI многообразие, то его производная категория неразложима и то же самое верно для всех его подмногообразий; кроме того, из этого свойства следует и положительный ответ на вопрос выше, то есть для всех многообразий Y любое полуортогональное разложение $D^b_{\mathrm{coh}}(X \times Y)$ индуцировано с разложения для Y. В этой же статье свойство NSSI доказано для некоторого класса многообразий, включающего абелевы многообразия (см.

ниже теорему 3.2).

Для определения свойства NSSI требуется понятие «категории, линейной над $\mathrm{Perf}(X)$», где X — какая-то схема, а $\mathrm{Perf}(X)$ — её категория совершенных комплексов. Грубо говоря, речь о триангулированной категории, на которой задано действие тензорно-триангулированной категория $\mathrm{Perf}(X)$, то есть для каждого объекта $E \in \mathrm{Perf}(X)$ задан функтор «умножения на E», согласованный с тензорным произведением в $\mathrm{Perf}(X)$. Чтобы определение имело хорошие свойства, на самом деле нужно работать не с триангулированными категориями, а с некоторыми их оснащениями. Используемый формализм линейных категорий подробно изложен в статье [Per18], краткое напоминание есть в [Pir23b]. В качестве иллюстрации заметим, что для любой схемы Y морфизм проекции $X \times Y \to X$ делает категорию $\mathrm{Perf}(X \times Y)$ линейной над $\mathrm{Perf}(X)$: функтором умножения на объект $E \in \mathrm{Perf}(X)$ в данном случае будет тензорное умножение на пулбэк объекта E в $\mathrm{Perf}(X \times Y)$.

3.1. Определение. Схема X обладает *свойством NSSI*, если для любых выборов следующих данных:

1. $\mathfrak{D}$ — категории, линейной над $\mathrm{Perf}(X)$, собственной над X и допускающей классический генератор;

2. $\mathcal{A} \subset \mathfrak{D}$ — допустимой подкатегории в $\mathfrak{D}$;

подкатегория $\mathcal{A}$ всегда оказывается линейной над $\mathrm{Perf}(X)$.

Несмотря на то, что это определение очень абстрактное, для некоторых многообразий удаётся его проверить. Два главных результата таковы:

3.2. Теорема ([Pir23b, Th. 1.4]). *Пусть X — схема над полем $\Bbbk$, допускающая аффинный морфизм в какое-нибудь абелево многообразие над $\Bbbk$. Тогда X обладает свойством NSSI.*

Замечание. Если X — гладкое собственное многообразие, у которого морфизм Альбанезе $\mathrm{alb}\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$ является конечным, то по теореме 3.2 X является NSSI-многообразием. В частности, все абелевы многообразия и все кривые положительного рода являются NSSI-многообразиями.

3.3. Теорема ([Pir23b, Th. 1.5]). *Пусть $\pi\colon X \to B$ — плоский собственный морфизм квази-компактных отделимых схем над полем $\Bbbk$. Предположим, что B обладает свойством NSSI, и для любой замкнутой точки $b \in B$ слой $X_b := \pi^{-1}(b)$ тоже обладает свойством NSSI. Тогда X является NSSI схемой.*

Замечание. В опубликованной статье в обеих теоремах схема обозначается не как X, а как Y.

Замечание. Если X — биэллиптическая поверхность, то её морфизм Альбанезе $\mathrm{alb}\colon X \to E$ — это морфизм в эллиптическую кривую, слои которого все являются эллиптическими кривыми. Следовательно, по теореме 3.2 все условия теоремы 3.3 выполнены и X является NSSI-многообразием.

Список литературы

[Bei78] A.A. Beilinson. «Coherent sheaves on $\mathbb{P}^n$ and problems of linear algebra». English. В: *Functional Analysis and Its Applications* 12.3 (1978), с. 214—216. ISSN: 0016-2663. DOI: 10.1007/BF01681436. URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF01681436.

[BF12] Matthew Ballard и David Favero. «Hochschild dimensions of tilting objects». В: *Int. Math. Res. Not. IMRN* 11 (2012), с. 2607—2645. ISSN: 1073-7928. DOI: 10.1093/imrn/rnr124. URL: https://doi.org/10.1093/imrn/rnr124.

[BGS14] Christian Böhning, Hans-Christian Graf von Bothmer и Pawel Sosna. «On the Jordan-Hölder property for geometric derived categories». В: *Adv. Math.* 256 (2014), с. 479—492. ISSN: 0001-8708. DOI: 10.1016/j.aim.2014.02.016.

[BK90] A. I. Bondal и M. M. Kapranov. «Representable functors, Serre functors, and Mutations». В: *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 35.3 (1990), с. 519. URL: http://stacks.iop.org/0025-5726/35/i=3/a=A02.

[BO02] A. Bondal и D. Orlov. «Derived categories of coherent sheaves». В: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*. Higher Ed. Press, Beijing, 2002, с. 47—56.

[Bri99] Tom Bridgeland. «Equivalences of triangulated categories and Fourier-Mukai transforms». В: *Bull. London Math. Soc.* 31.1 (1999), с. 25—34. ISSN: 0024-6093.

[BV03] A. Bondal и M. Van den Bergh. «Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry». В: *Mosc. Math. J.* 3.1 (2003), с. 1—36, 258. ISSN: 1609-3321.

[Huy06] D. Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006, с. viii+307. ISBN: 978-0-19-929686-6. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199296866.001.0001. URL: http://dx.doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199296866.001.0001.

[Kap84] M. M. Kapranov. «On the derived category of coherent sheaves on Grassmann varieties». В: *USSR Math. Izvestija* 48 (1984), с. 192—202.

[KO15] K. Kawatani и S. Okawa. *Nonexistence of semiorthogonal decompositions and sections of the canonical bundle.* Авг. 2015. arXiv: 1508.00682 [math.AG].

[Kuz11] Alexander Kuznetsov. «Base change for semiorthogonal decompositions». В: *Compositio Mathematica* 147.3 (2011), с. 852—876. DOI: 10.1112/S0010437X10005166. arXiv: 0711.1734 [math.AG].

[Kuz13] Alexander Kuznetsov. *A simple counterexample to the Jordan-Hölder property for derived categories.* 2013. arXiv: 1304.0903 [math.AG].

[Muk81] Shigeru Mukai. «Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves». B: *Nagoya Math. J.* 81 (1981), c. 153—175. ISSN: 0027-7630.

[Nee96] Amnon Neeman. «The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability». B: *J. Amer. Math. Soc.* 9.1 (1996), c. 205—236. ISSN: 0894-0347. DOI: 10.1090/S0894-0347-96-00174-9. URL: https://doi.org/10.1090/S0894-0347-96-00174-9.

[Oka11] Shinnosuke Okawa. «Semi-orthogonal decomposability of the derived category of a curve». B: *Adv. Math.* 228.5 (2011), c. 2869—2873. ISSN: 0001-8708.

[Orl06] D. O. Orlov. «Triangulated categories of singularities, and equivalences between Landau-Ginzburg models». B: *Mat. Sb.* 197.12 (2006), c. 117—132. ISSN: 0368-8666.

[Orl09] Dmitri Orlov. «Remarks on generators and dimensions of triangulated categories». B: *Mosc. Math. J.* 9.1 (2009), 153—159, back matter. ISSN: 1609-3321. DOI: 10.17323/1609-4514-2009-9-1-143-149. URL: https://doi.org/10.17323/1609-4514-2009-9-1-143-149.

[Orl93] D.O. Orlov. «Projective Bundles, Monoidal Transformations, and Derived Categories of Coherent Sheaves». B: *Izvestiya: Mathematics* 41 (1993), c. 133—141.

[Per18] A. Perry. *Noncommutative homological projective duality.* Март 2018. arXiv: 1804.00132 [math.AG].

[Pir22] Dmitrii Pirozhkov. «Semiorthogonal decompositions on total spaces of tautological bundles». B: *Int. Math. Res. Not. IMRN* 3 (2022), c. 2250—2273. ISSN: 1073-7928.

[Pir23a] Dmitrii Pirozhkov. «Rouquier dimension of some blow-ups». B: *Eur. J. Math.* 9.2 (2023), Paper No. 45, 13. ISSN: 2199-675X.

[Pir23b] Dmitrii Pirozhkov. «Stably semiorthogonally indecomposable varieties». B: *Épijournal Géom. Algébrique* 7 (2023), Art. 11, 15.

[Rou08] Raphaël Rouquier. «Dimensions of triangulated categories». B: *J. K-Theory* 1.2 (2008), c. 193—256. ISSN: 1865-2433. URL: http://www.math.ucla.edu/~rouquier/papers/dimension.pdf.