

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Булгаков Станислав Александрович

Стохастическое восстановление квадратичноинтегрируемых функций

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ

на соискание ученой степени кандидата наук
по прикладной математике

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор

Хаметов Владимир Минирович

Москва 2024

Постановка задачи стохастического восстановления. Диссертация посвящена теории стохастического восстановления. Под задачей стохастического восстановления понимают следующее:

- i) имеется неизвестная скалярная функция, значения которой наблюдаются со случайными ошибками;
- ii) требуется построить наилучшую оценку этой функции в смысле некоторого критерия оптимальности.

В ней рассматривается задача стохастического восстановления при следующих предположениях:

- i) неизвестная скалярная функция определена на конечномерном компакте и квадратично интегрируема относительно меры Лебега;
- ii) ошибки — это семейство случайных скалярных функций определённых на том же конечномерном компакте что и оцениваемая функция;
- iii) наблюдается семейство случайных скалярных функций, каждый элемент которого — это аддитивная смесь этой неизвестной функции со случайной функцией ошибок, причём наблюдения могут проводиться во всех точках вышеуказанного компакта;
- iv) критерий оптимальности — это минимум среднеквадратического отклонения оценки от неизвестной функции.

Степень разработанности проблемы. Известно, что такого сорта процедура оценивания является бесконечномерной, т.е. непараметрической. В теории непараметрического оценивания рассматривают один из двух видов задач.

Первый вид задач — это построение оценок неизвестной плотности распределения по наблюдениям за соответствующей ей последовательностью случайных функций, таких которые бы доставляли экстремальное значение критерию качества. К настоящему моменту времени известны три способа её решения.

Первый способ, основан на использовании поперечников Колмогорова и теореме Гливенко—Кантелли. Этому способу посвящены работы Вапника В.Н. и др. [1], Вапника В.Н. [2], Ибрагимова И.А. [3]. Следует отметить, что в работе

Вапника В.Н. и др. [1] приведены алгоритмы и программы реализующие восстановление различных зависимостей.

Второй способ состоит в построении ядерных оценок максимального правдоподобия гладких неизвестных функций. Его описанию и обоснованию посвящено довольно много работ, приведём основные: Parzen E. [4], Rosenblatt M. [5], Murthy V. [6], Watson G. [7], Конаков В.Д. [8], Надарая Э.А. [9] и др. В них приведён явный вид этих оценок, описаны их статистические свойства и найдена скорость сходимости к неизвестной функции.

Третий способ основан на использовании проекционных оценок в методе максимального правдоподобия. Такой подход превращает исходную задачу непараметрического оценивания в задачу бесконечномерного линейного оценивания. При этом качество оценивания производится с помощью критерия минимума среднеквадратического отклонения. Такому способу построения оценок гладких неизвестных функций посвящены работы: Ченцова Н.Н. [10], Цыбакова А.Б. [11], Юдицкого А.В. и Немировского А.С. [12]. В этих работах даётся описание почти оптимальных конечномерных процедур восстановления и их свойств.

Теперь опишем второй вид задач оценивания неизвестной функции из некоторого класса, которая наблюдается со случайными ошибками в точках из области определения неизвестной функции. По результатам этих наблюдений требуется построить непараметрическую оценку этой функции оптимальную в смысле критерия минимума среднеквадратического отклонения. Решению таких задач посвящены работы: Стратоновича Р.Л. [13], Ибрагимова И.А. и Хасьминского Р.З. [14], Голубева Г.К. [15], Дарховского Б.С. [16], Немировского и др. [17]. В них описаны алгоритмы оптимального и почти оптимального восстановления, а также статистические и некоторые другие свойства этих алгоритмов.

Цели и задачи исследования. Целью работы является разработка и обоснование процедур стохастического восстановления. В ней решаются следующие задачи:

- i) устанавливается существование таких процедур и вид оптимального стохастического восстановления а также их качество;

- ii) устанавливаются условия существования ε -оптимального стохастического восстановления и его вид.

Актуальность. Известно, что задача стохастического восстановления — это задача непараметрического оценивания являющаяся (N, p) -полной. Поэтому актуальной является проблема разработки процедур оценивания имеющих полиномиальную сложность. По этой причине в диссертации большое внимание уделяется созданию таких конечномерных линейных процедур восстановления как ε -оптимальных так и эквивалентных им по порядку величины.

Методология исследования. Установленные в диссертации результаты существенным образом опираются на математические методы:

- i) теории вероятностей;
- ii) статистики случайных последовательностей;
- iii) стохастического анализа;
- iv) теории рядов Фурье;
- v) теории оптимальных стохастических систем.

Основные результаты, выносимые на защиту.

- 1) Предложен новый подход к исследованию наблюдений, позволяющий построить оптимальные проекционные оценки неизвестной функции, а также установлены условия состоятельности и несмещённости таких оценок (глава 1).
- 2) Установлена зависимость СКО оптимальной проекционной оценки от числа используемых ортогональных функций и числа наблюдений. Найдены рекуррентные соотношения которым удовлетворяет это СКО (глава 1).
- 3) Дано определение проекционной оценки Ченцова (ПОЧ). Доказан критерий (необходимое и достаточное условие) существования минимального числа ортогональных функций $N^0(m)$, дающих оптимальную (по СКО) проекционную оценку неизвестной функции при любом фиксированном числе наблюдений m . Предложен способ нахождения $N^0(m)$ (глава 2).
- 4) Установлены следующие свойства СКО ПОЧ:

- i) порядок величины $V_m(N^0(m))$ (см формулу (2.9) теоремы 2.2.1);
 - ii) независимость верхней оценки для СКО ПОЧ от неизвестной функции $f(x) \in L_2(K, \Lambda)$ (глава 2);
- 5) Дано определение ε -оптимальной проекционной оценки, доказан критерий её существования и достаточные условия для ε -оптимальности (глава 3).

Научная новизна. Все результаты выносимые на защиту являются новыми, т.е. не имеют аналогов изложенных в как российских так и зарубежных изданиях.

Общие выводы исследования. В диссертации предложена модель наблюдений за неизвестной, детерминированной, скалярной, квадратично интегрируемой функцией определённой на конечномерном компакте, причём её значения измеряются с независимыми гауссовскими ошибками в каждой точке области её определения.

Для такой модели наблюдений установлены условия существования проекционных оптимальных, ε -оптимальных оценок в смысле минимума среднеквадратического отклонения, а также оценок Ченцова. Найдены условия несмещённости и состоятельности у вышеуказанных оценок.

Личный вклад автора в решение проблемы стохастического восстановления. Все постановки задач по теме диссертации принадлежат профессору Хаметову В.М. Автором диссертации доказаны все результаты выносимые на защиту.

Список опубликованных статей, где отражены основные научные результаты диссертации.

[1] Булгаков С. А., Горшкова В. М., Хаметов В. М. Стохастическое восстановление квадратично интегрируемых функций // *Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки.* — 2020. — № 6. — С. 4–22.

[2] Булгаков С. А., Хаметов В. М. Моделирование оптимального и ε -оптимального алгоритмов восстановления квадратично интегрируемой фу-

- нкции по наблюдениям с гауссовскими ошибками // *Наноструктуры. Математическая физика и моделирование*. — 2020. — Т. 20, № 1. — С. 57–69.
- [3] Булгаков С. А., Хаметов В. М. Оптимальное восстановление квадратично интегрируемой функции по наблюдениям за ней с гауссовскими ошибками // *Автоматика и телемеханика*. — 2023. — № 2. — С. 122–149.
- [4] Булгаков С. А. ϵ -оптимальный алгоритм восстановления квадратично интегрируемых функций, заданных на конечномерном компакте // *СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ: тезисы Международной (49-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции*. — Екатеринбург : Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского. — 2018. — С. 61–61.
- [5] Булгаков С. А. О некоторых подходах к восстановлению графических изображений // *Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений*. — Ростов на Дону : ООО "ДГТУ-Принт". — 2017. — С. 36–44.
- [6] Булгаков С. А., Хаметов В. М. Восстановление квадратично интегрируемой функции по наблюдениям с гауссовскими ошибками // *УБС*. — 2015. — Т. 54. — С. 45–65.
- [7] Булгаков С. А. Оптимальное стохастическое восстановление квадратично интегрируемой функции по наблюдениям за ней с гауссовскими ошибками // *Научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов НИУ ВШЭ им. Е.В. Арменского. Материалы конференции / под ред. Тихонов А. Н., Азаров В. Н., Аристова У. В. и др.* — Москва : МИЭМ НИУ ВШЭ. — 2015.

Работа прошла апробацию на следующих международных и всероссийских конференциях.

- [1] Современные проблемы математики и ее приложений Международная (49-я Всероссийская) молодежная школа-конференция. — Екатеринбург. — 2018.
- [2] Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений. — Ростов на Дону. — 2017.
- [3] Научно-исследовательский семинар аспирантской школы по компьютерным наукам. — Москва : Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ. — 2015.
- [4] Научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов НИУ ВШЭ им. Е.В. Арменского. — Москва. — 2015.

Литература

- [1] Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / Вапник В. Н., Глазкова Т. Г., Кощеев В. А., Михальский А. И. и Червоненкис А. Я. ; под ред. Вапник В. Н. — Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 816 с.
- [2] Вапник В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. — Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. — 448 с.
- [3] Ибрагимов И. А. Об оценке многомерной регрессии // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2003. — Т. 48, № 2. — С. 301–320.
- [4] Parzen E. On Estimation of a Probability Density Function and Mode // *Ann. Math. Statist.* — 1962. — Vol. 33, no. 3. — P. 1065–1076.
- [5] Rosenblatt M. Curve Estimates // *Ann. Math. Statist.* — 1971. — Vol. 42, no. 6. — P. 1815–1842.
- [6] Murthy V. K. Nonparametric estimation of multivariate densities with applications // *Multivariate Analysis.* — 1966. — P. 43–56.
- [7] Watson G. S. Density Estimation by Orthogonal Series // *Ann. Math. Statist.* — 1969. — Vol. 40, no. 4. — P. 1496–1498.
- [8] Конаков В. Д. Непараметрическая оценка плотности распределения вероятностей // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1972. — Т. 17, № 2. — С. 377–379.
- [9] Надарая Э. А. Непараметрическое оценивание плотностей вероятностей и кривой регрессии. — Тбилиси : Издательство Тбилисского университета, 1983. — 194 с.
- [10] Ченцов Н. Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. — Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. — 520 с.
- [11] Tsybakov A. B. Introduction to Nonparametric Estimation. — New York : Springer, 2009. — 214 p.

- [12] Юдицкий А. Б., Немировский А. С. Восстановление сигналов с помощью стохастической оптимизации // *Автомат. и телемех.* — 2019. — № 10. — С. 153–172.
- [13] Стратонович Р. Л. Эффективность методов математической статистики в задачах синтеза алгоритмов восстановления неизвестной функции // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика.* — 1969. — № 1. — С. 32–46.
- [14] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. — Москва : Наука, 1979. — 528 с.
- [15] Голубев Г. К. Об адаптивном оценивании линейных функционалов по наблюдениям в белом шуме // *Пробл. передачи информ.* — 2020. — Т. 56, № 2. — С. 95–111.
- [16] Дарховский Б. С. О стохастической задаче восстановления // *Теория вероятностей и ее применения.* — 1998. — Т. 43, № 2. — С. 357–364.
- [17] Немировский А. С., Поляк Б. Т., Цыбаков А. Б. Обработка сигналов непараметрическим методом максимума правдоподобия // *Пробл. передачи информ.* — 1984. — Т. 20, № 3. — С. 29–46.