

Логвенков С.А., Мышкис П.А. Самовол В.С.

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.
ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.**

**Учебное пособие для факультетов менеджмента, политологии и
социологии.**

**Государственный университет – Высшая школа экономики
Кафедра высшей математики**

Введение.

Настоящий сборник задач посвящен одному из основных разделов высшей математики: основам дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной. Он составлен в соответствии с программами курса «Алгебра и анализ», читаемого на различных факультетах ГУ-ВШЭ. Изложение материала в предлагаемом сборнике ориентировано на углубленное изучение фундаментальных математических идей и методов, широко применяемых в исследовании социально-экономических процессов и явлений.

Для облегчения восприятия и удобства пользования весь материал разбит на части. При этом основное внимание сосредоточено на таких темах, как пределы последовательностей и функций, производные и их применение, исследование функций и построение их графиков, неопределенный и определенный интеграл. Большая часть задач снабжена ответами.

При подборе примеров и задач привлекались разнообразные источники и, прежде всего, те книги, которые вошли в приведенный в конце сборника библиографический список.

1. Предел последовательности.

Вычислите пределы

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3n)^3 - 27n^3}{(1+4n)^2 + 2n^2}$$

$$1.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-2n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}$$

$$1.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 - 3n + 1}{3n^2 + n - 5} \right)^2$$

$$1.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n^5 - 3n^2 + 9}{2n^5 + 2n^3 + 5} \right)^3$$

$$1.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 5n + 1}}{n + 7}$$

$$1.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{4n^2 + 1} + n \right)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 3}}$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{3n^2} + \sqrt[4]{4n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n})\sqrt{7 - n + n^2}}$$

$$1.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} - \sqrt[3]{27n^6 + n^4}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt{4 + n^2}}$$

$$1.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}$$

$$1.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} 6^{n+1}}$$

$$1.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^{50}}{(2n-1)^{48} (n+2)^2}$$

$$1.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^{98} (2n-1)^2}{(2n+4)^{100}}$$

$$1.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^6 (9n-4)^4}{(3n-3)^{10}}$$

$$1.14. \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{3n^2+2n+1}{n^2-n+2}}$$

$$1.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(3n^2 + 2n + 1)}{n^2 + 3}$$

$$1.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2}$$

$$1.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+5}$$

$$1.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}$$

$$1.19. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{5 + 4n^2} - 2n)$$

$$1.20. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{1 + n + 9n^2} - \sqrt{2 + n + 9n^2})$$

$$1.21. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + 5n + n^2} - \sqrt{3 + n + n^2})$$

$$1.22. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2 - 3n + 2n^2} - \sqrt{7 + 5n + 2n^2})$$

$$1.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 2n - 7} - n}{4n + 3}$$

$$1.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 7n + 3} - n}{3n - 4}$$

$$1.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 1}{3n + 1} \right)^n$$

$$1.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + n + 1}{5n^2 + 3n + 2} \right)^{n^2 + 1}$$

$$1.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 3}{n - 2} \right)^n$$

$$1.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3} \right)^{n+2}$$

$$1.29. \lim_{n \rightarrow \infty} (n+2)(\ln(2n+4) - \ln(2n+3))$$

$$1.30. \lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)(\ln(3n+7) - \ln(3n+5))$$

$$1.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 3}{n^2 + 2n - 1} \right)^{3n+1}$$

$$1.32. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 5}{2n^2 + n + 1} \right)^n$$

2. Предел функции.

2.1. Вычислите пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4}{x^2 + x - 3}$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 2}{x^2 - 1}$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3}$

г) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 5x^2 + 6x}$

д) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}{x^2 - x - 2}$

е) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x - 2}$

ж) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$

з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

и) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 4}{3x^2 - 2}$

$$\kappa) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x + 3}{x^3 - 1}$$

$$\lambda) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x + 1}{x^2 - 3}$$

$$\mu) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$\omicron) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$$

$$\pi) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$$

$$\rho) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 3x - 4})$$

$$\varsigma) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 3x + 1})$$

$$\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{19x}$$

$$\upsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x^2)}{7x^2 + x}$$

$$\text{ф) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$$

$$\text{х) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x)}{x^2 + x^3}$$

$$\text{ц) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{2x+1} \right)^x$$

$$\text{ч) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1} \right)^{6x+5}$$

2.2. Найдите порядок малости функции при $x \rightarrow 0$

а) $f(x) = x \sin(5x)$

б) $f(x) = \sin^2(5x) \ln(1 + 3x)$

в) $f(x) = \left(\sqrt[3]{1+2x} - 1 \right)^4 \cos(\pi x)$

г) $f(x) = \frac{x^5}{1+x^7} \operatorname{arctg}(x)$

д) $f(x) = (e^x - 1) \ln(\cos x)$

е) $f(x) = (3^x - 1) \ln(1 + \sin(5x))$

ж) $f(x) = (e^{x^2} - 1) \ln(1 + e^x)$

2.3. Вычислите пределы, используя замены на эквивалентные

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(2x))}{\sin(3x)}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^{2x^2} - 1}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{3x}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{3 \operatorname{arctg}(x)}$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{\sqrt{1 - 3x^2} - 1}$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos(x)} - 1}{\sin^2(x)}$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(2x)}$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(2x)}{\sqrt{\cos(5x)} - 1}$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+1} - e}{\ln(\cos(2x))}$$

$$\kappa) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + \sin(2x))}{\sqrt{1 - 6x^2} - 1}$$

$$\lambda) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{e^{x-1} - 1}$$

$$\mu) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(3x - 8)}{\sqrt{x - 2} - 1}$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln(x)}$$

$$\omicron) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - x - 1} - 1}{\ln(x - 1)}$$

$$\pi) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x + 2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$\rho) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 2} \right)^{2x+1}$$

$$\varsigma) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x)}{\cos(2x)} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\tau) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin(x)}{\sin(3)} \right)^{\frac{1}{x-3}}$$

$$\text{y) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(2x)}}$$

$$\text{ф) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2(x))^{\frac{1}{\ln(\cos(x))}}$$

$$\text{x) } \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos(x))^{\frac{1}{\ln(1+2x^2)}}$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(2x))^{\frac{1}{\sqrt{1-6x}-1}}$$

3. Производная функции.

Найдите производные функций

$$3.1. y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2x^2} + \frac{4}{5\sqrt{x}}$$

$$3.2. y = 2x^3 \ln x$$

$$3.3. y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$3.4. y = \frac{2x^2 - 5x + 6}{3x^4 + x + 1}$$

$$3.5. y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$3.6. y = \frac{x \ln x - 5 \cos x + 1}{2x^3 + 1}$$

$$3.7. y = \sqrt{1 + x^2}$$

$$3.8. y = (3 + 2x^4 - 5x^3)^4$$

$$3.9. y = \sqrt[3]{2x^3 + x + 3}$$

$$3.10. y = \ln(x^2 + 3x - \sqrt{x})$$

$$3.11. y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$3.12. y = \sin^2(3x)$$

$$3.13. y = e^{x \ln(3x+1)}$$

$$3.14. y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

$$3.15. y = \ln^2(1 + \cos(2x))$$

$$3.16. y = \sqrt{\ln(x^2 + \cos x)}$$

$$3.17. y = \cos(4x^2 \ln x)$$

$$3.18. y = e^{\sqrt{(x^2+x)\sin(x)}}$$

$$3.19. y = e^{-x^2} \sqrt{x^3 + 4x^2 - 7}$$

$$3.20. y = \frac{3}{5(2 - \sin x)^3}$$

$$3.21. y = \frac{1 - \cos(4x)}{1 + \cos(4x)}$$

$$3.22. y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$3.23. y = \frac{x \operatorname{arctg}(x)}{1+x^2}$$

$$3.24. y = \ln \sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

$$3.25. y = \frac{e^{-x^2}}{1+\sqrt{x}}$$

$$3.26. y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}}$$

$$3.27. y = x^2 \arcsin \sqrt{1-x^2}$$

$$3.28. y = (x^2 + 1)^x$$

$$3.29. y = (x+1)^{\operatorname{tg}(x)}$$

$$3.30. y = (3x^2 + 3x - 2)^{\operatorname{atctg}(x)}$$

$$3.31. y = e^{x^2} (\cos x)^{\sqrt{x}}$$

$$3.32. y = x^2 (\operatorname{tg} x)^{3x-2}$$

Напишите уравнение касательной к графику функции, заданной параметрически, в точке, соответствующей $t = t_0$

3.33 $y = 2t^2 - 3t + 1, x = -t^2 + 2t + 4, t_0 = 2$

3.34. $y = 2t^2 + 4t - 10, x = 4t^2 - 12t + 7, t_0 = 2$

3.35. $y = -t^2 + 5t + 3, x = 2t^2 - 3t, t_0 = -1$

3.36. $y = 5t^2 - 2t - 5, x = t^2 + 4t - 1, t_0 = -1$

3.37. Найдите значение производной y' функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $e^x + \sqrt{x + y} = y + 1$, в точке $M(0; 1)$.

3.38. Найдите значение производной y' функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\ln(x + y^2) + \arctg(x) = 0$, в точке $M(0; 1)$.

3.39. Найдите значение производной y' функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\sqrt{xy} + \ln(y) = x^5$, в точке $M(1; 1)$.

3.40. Найдите значение производной y' функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $e^{y^2-1} + x^2(y + 0,5) = 7$, в точке $M(2; 1)$.

3.41. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $(1;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно $xy + \ln y = 1$.

3.42. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $(2;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно $x^2 + 2xy - y^2 = 7$.

3.43. . Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $(1;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно $x^2 + xy + y^2 = 3$.

3.44. Напишите уравнение нормали, проведенной в точке $M(2;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно

$$y^{2x} + 3xy^2 - 2x - 12y + 9 = 0.$$

3.45. Напишите уравнение нормали, проведенной в точке $M(1;2)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно

$$x^{y-1} - 2x^2y^3 + 3x + 20y - 28 = 0.$$

3.46. Напишите уравнение нормали, проведенной в точке $M(1;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно

$$x^{1+\ln y} + 4x^2y^3 + 3x + 12y - 20 = 0.$$

3.47. Напишите уравнение нормали, проведенной в точке $M(2;1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно

$$y^{x-y} + 5xy^3 - 7x - 21y + 24 = 0.$$

3.48. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x , если $g(-5) = -3$, $g(x) = -2,96$ и $g'(-5) = 2$.

3.49. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x , если $g(5) = 2$, $g(x) = 2,04$ и $g'(5) = -4$.

3.50. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x , если $g(-5) = 2$, $g(x) = 2,04$ и $g'(-5) = -4$.

3.51. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x , если $g(-3) = 5$, $g(x) = 5,04$ и $g'(-3) = -2$.

Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = f(x)$ в точке $x = a$

3.52. $f(x) = x^5$, $a = 2,001$

3.53. $f(x) = \sqrt{4x - 3}$, $a = 0,98$

3.54. $f(x) = \sqrt{x^3}$, $a = 1,02$

3.55. $f(x) = e^{x^2 - x}$, $a = 1,2$

Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно

3.56. $(1,015)^5$

3.57. $\sqrt[4]{80,5}$

3.58. $\text{arctg}(1,04)$

3.59. На сколько изменится начальный вклад, составляющий 980 рублей, за 3 года, если годовая процентная ставка составляет 0,1 %.

4. Формула Тейлора.

4.1. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{x-2}$ по целым неотрицательным степеням двучлена $x-1$ до члена с $(x-1)^4$.

4.2. Найдите три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

4.3. Функцию $f(x) = e^{2x-x^2}$ в окрестности точки $x=0$ приближенно замените многочленом третьей степени.

4.4. Функцию $f(x) = e^{\sin(x)}$ в окрестности точки $x=0$ приближенно замените многочленом третьей степени.

Используя правило Лопиталья, вычислите пределы

4.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\sin 2x}$

4.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

4.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\arcsin 2x}$

4.8. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{2x} - 2}$

$$4.9. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$$

$$4.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^{x/100}}$$

$$4.11. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

$$4.12. \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x)$$

Используя стандартные разложения элементарных функций по формуле Маклорена, вычислите пределы

$$4.13. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

$$4.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

$$4.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$$

$$4.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cos x}{x^4}$$

$$4.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

4.18. Используя разложения по формуле Тейлора для элементарных функций, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где

$f(x) = 3\sin(x) - \sin(3x)$, ограничившись в разложении первым отличным от нуля членом.

4.19. Используя разложение по формуле Тейлора для элементарных функций, найдите приближенное значение $f(0,3)$, где

$f(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x)$, ограничившись в разложении первым отличным от нуля членом.

4.20. Ограничившись тремя отличными от нуля членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где

$$f(x) = 3\cos(2x) - 3 + 6x^2.$$

4.21. Используя разложение по формуле Тейлора для элементарных функций, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где

$f(x) = \sqrt{1 - 2x^2} + x^2 - 1$, ограничившись в разложении первым отличным от нуля членом.

4.22. Ограничившись тремя отличными от нуля членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где

$$f(x) = 2\sqrt{1 + x^2} - 2 - x^2.$$

4.23. Используя разложение по формуле Тейлора для элементарных функций, найдите приближенное значение $f(0,2)$, где

$f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x} - 1 - x$, ограничившись в разложении первым отличным от нуля членом.

4.24. Ограничившись тремя отличными от нуля членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0,4)$, где

$$f(x) = e^{2x} - 1 - 2x.$$

4.25. Ограничившись тремя отличными от нуля членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где

$$f(x) = 6 \ln(1 + x^2) - 6x^2 + 3x^4.$$

4.26. Используя формулу Тейлора найдите $f^{(IV)}(0)$, где

$$f(x) = \frac{1}{1 - x + x^2} - \cos(x^2).$$

4.27. Используя формулу Тейлора найдите $f^{(IV)}(0)$, где

$$f(x) = \sin^2 x - \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

4.28. Используя формулу Тейлора найдите $f^{(IV)}(0)$, где

$$f(x) = \ln(1 - x + x^2) + x - x^2/2$$

4.29. Используя формулу Тейлора или правило Лопиталья, найдите

значение $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - 5\Delta x)}{3\Delta x}$, если $f(x)$

дифференцируема в точке $x = x_0$ и $f(x_0) = 3$, $f'(x_0) = 6$

4.30. Используя формулу Тейлора или правило Лопиталья, найдите

значение $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5\Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - 7\Delta x)}{2\Delta x}$, если $f(x)$

дифференцируема в точке $x = x_0$ и $f(x_0) = 4$, $f'(x_0) = 8$

4.31. Применяя формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности

точки x_0 и, сохраняя члены до второго порядка малости

включительно относительно Δx , найдите приближенное значение

выражения $2f(x_0 + 2\Delta x) - 3f(x_0) + f(x_0 - 4\Delta x)$.

4.32. Применяя формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности

точки x_0 и, сохраняя члены до второго порядка малости

включительно относительно Δx , найдите приближенное значение выражения $2f(x_0 + 3\Delta x) - 5f(x_0) + 3f(x_0 - 2\Delta x)$.

4.33. Применяя формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 и, сохраняя члены до второго порядка малости включительно относительно Δx , найдите приближенное значение выражения $f(x_0 + 4\Delta x) - 3f(x_0) + 2f(x_0 - 2\Delta x)$.

4.34. Применяя формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 и, сохраняя члены до второго порядка малости включительно относительно Δx , найдите приближенное значение выражения $4f(x_0 + 3\Delta x) - 7f(x_0) + 3f(x_0 - 4\Delta x)$.

5. Исследование функций и построение их графиков.

5.1. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x) = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[0; 3]$.

5.2. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на отрезке $[-3; 1]$.

5.3. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 6$ на отрезке $[0; 2]$.

5.4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 4|x - 1| - 4$ на отрезке $[-1; 2]$.

5.5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 6|x - 2| - 12$ на отрезке $[-1; 3]$.

5.6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 8|x - 3| - 24$ на отрезке $[-1; 4]$.

Проведя необходимое исследование, постройте графики функций

5.7. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

5.8. $y = \frac{4x^2 + 3x}{2x + 2}$

5.9. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

$$5.10. y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$5.11. y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

$$5.12. y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$$

$$5.13. y = \frac{27 - 2x^3}{6x^2}$$

$$5.14. y = \frac{x^2}{(x + 4)^2}$$

$$5.15. y = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 4}$$

$$5.16. y = \frac{x^2 - 3x - 18}{x - 9}$$

$$5.17. y = \frac{x^4}{(x + 1)^3}$$

$$5.18. y = \frac{x^3 - x^2}{(x + 1)^2}$$

$$5.19. y = \frac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$$

$$5.20. y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$$5.21. y = e^{2x-x^2}$$

$$5.22. y = xe^{-x}$$

$$5.23. y = \frac{e^x}{x+1}$$

$$5.24. y = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$$

$$5.25. y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

$$5.26. y = xe^{-x^2}$$

$$5.27. y = x^2 e^{-x^2}$$

$$5.28. y = x \ln x$$

$$5.29. y = x^2 \ln x$$

$$5.30. y = \frac{\ln x}{x}$$

$$5.31. y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$$

5.32. $y = x + \operatorname{arctg}(x)$

5.33. $y = x - \operatorname{arctg}(2x)$

6. Интеграл.

Найдите неопределенный интеграл

$$6.1. \int \left(x^4 + 3\sqrt[5]{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$6.2. \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx$$

$$6.3. \int \frac{5x^8 + 1}{x^4} dx$$

$$6.4. \int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$6.5. \int \sqrt[3]{3-7x} dx$$

$$6.6. \int \frac{6x-1}{\sqrt{1-3x}} dx$$

$$6.7. \int \frac{2x+3}{2x+1} dx$$

$$6.8. \int \frac{1-3x}{3+2x} dx$$

$$6.9. \int \frac{3\operatorname{arctg}^2 x}{x^2 + 1} dx$$

$$6.10. \int \frac{3tg^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$6.11. \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$$

$$6.12. \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$$

$$6.13. \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$$

$$6.14. \int x^2 \sqrt[5]{x^3-8} dx$$

$$6.15. \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$6.16. \int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} dx$$

$$6.17. \int \sqrt{3+\cos(5x)} \sin(5x) dx$$

$$6.18. \int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^4} dx$$

$$6.19. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$6.20. \int \frac{3\sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x+x}} dx$$

$$6.21. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$6.22. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$6.23. \int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$$

$$6.24. \int \frac{x dx}{2x^2 + 3}$$

$$6.25. \int \frac{2\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$6.26. \int e^{-(x^2+1)} x dx$$

$$6.27. \int \sin(\ln x) \frac{dx}{x}$$

$$6.28. \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$6.29. \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

$$6.30. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 8}}$$

$$6.31. \int x \sin(3x) dx$$

$$6.32. \int x^2 \sin x \, dx$$

$$6.33. \int (x^2 + 2x + 3) \cos x \, dx$$

$$6.34. \int (x + 1)e^{-x} dx$$

$$6.35. \int (x + 1) \cos 3x \, dx$$

$$6.36. \int (6x + 3) \cos(2x) dx$$

$$6.37. \int (2x + 2)e^{2x} dx$$

$$6.38. \int x^2 e^{-x} \, dx$$

$$6.39. \int x^2 \cos x \, dx$$

$$6.40. \int (4x^3 + 6x - 7) \ln x \, dx$$

$$6.41. \int x \ln(3x + 2) dx$$

6.42. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

6.43. $\int x \operatorname{arctg} x dx$

6.44. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

6.45. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}$, проходящую через точку $(1/\sqrt{2}, -1)$. Используйте замену переменной $\frac{1}{x^2} - 1 = t^2$.

6.46. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{1}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2-x^3}}$,

проходящую через точку $(1, 1)$. Используйте замену переменной $\frac{2}{x^3} - 1 = t^3$.

6.47. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}}$,

проходящую через точку $(1, 0)$. Используйте замену переменной $\frac{1}{x^2} + 1 = t^2$.

6.48. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$,

проходящую через точку $(1, 0)$. Используйте замену переменной $\frac{4}{x^2} + 1 = t^3$.

6.49. Если $f(x)$ непрерывна на $[0;15]$ и $F'(x) = f(x)$, то чему равен определенный интеграл $\int_3^7 f(2x+1)dx$.

6.50. Если $f(x)$ непрерывна на $[0;11]$ и $F'(x) = f(x)$, то чему равен определенный интеграл $\int_2^4 f(3x-2)dx$.

6.51. Если $f(x)$ непрерывна на $[-1;19]$ и $F'(x) = f(x)$, то чему равен определенный интеграл $\int_1^3 f(4x+2)dx$.

6.52. Если $f(x)$ непрерывна на $[-1;19]$ и $F'(x) = f(x)$, то чему равен определенный интеграл $\int_2^5 f(3x-4)dx$.

Найдите определенный интеграл

6.53. $\int_1^3 x^3 dx$

6.54. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$

6.55. $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$

6.56. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$$6.57. \int_1^2 \frac{x dx}{1+x^2}$$

$$6.58. \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$$6.59. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$$

$$6.60. \int_{-2}^1 x^2 \sqrt{1-x^3} dx$$

$$6.61. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$$

$$6.62. \int_4^5 x \sqrt{x^2 - 16} dx$$

$$6.63. \int_0^1 x(2-x^2)^5 dx$$

$$6.64. \int_3^4 \frac{xdx}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$6.65. \int_0^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{2x+1})\sqrt{2x+1}}$$

6.66. $\int_1^{\sqrt[7]{2}} \frac{x^6 dx}{1 + (x^7 - 1)^2}$

7. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Однородные уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнение Бернулли.

7.1. Найдите общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

а) $xy' + y = 0$.

б) $x^2y' + y = 0$.

в) $(x+1)y' + xy = 0$.

г) $(2x+1)y' = 2y$

д) $yy' + x = 0$

е) $xyy' = 1 - x^2$.

ж) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$.

з) $xydy = \sqrt{y^2 + 1} dx$.

и) $x^2y^2y' + 1 = y$.

7.2. Решите задачу Коши

а) $y' = y$, $y(-2) = 4$.

б) $xy' - 2y = 0$, $y(2) = 12$.

в) $y' = \frac{y}{x+1}$, $y(2) = 6$.

г) $(1+x^2)y' + y = 0$, $y(1) = 1$.

7.3. Найдите решение дифференциального уравнения $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$, удовлетворяющее условию $y = 0$ при $x = 1$.

7.4. Найдите решение дифференциального уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, удовлетворяющее условию $y = 0$ при $x = 2$.

7.5. Найдите решение дифференциального уравнения $y' + y^2 e^x = 0$, удовлетворяющее условию $y = 1$ при $x = 0$.

7.6. Найдите решение дифференциального уравнения $2y'\sqrt{x} = y$, удовлетворяющее условию $y = 1$ при $x = 4$.

7.7. Найдите решение дифференциального уравнения $x^2 y' + y^2 = 0$, удовлетворяющее условию $y = 1$ при $x = -1$.

7.8. Решите однородные дифференциальные уравнения

а) $xy' = x + 2y$

б) $(x+y)dy + (x-y)dx = 0$

$$\text{в) } x^2 dy + (y^2 - 2xy) dx = 0$$

$$\text{г) } (xy - x^2) y' = y^2$$

$$\text{д) } (x^2 + y^2) y' = 2xy$$

7.9. Решите линейное дифференциальное уравнение

$$\text{а) } y' - \frac{3y}{x} = x$$

$$\text{б) } y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$$

$$\text{в) } xy' + y = \ln x + 1$$

$$\text{г) } xy' - 2y = 2x^4$$

$$\text{д) } x^2 y' + xy + 1 = 0$$

$$\text{е) } (xy + e^x) dx - x dy = 0$$

$$\text{ж) } x \ln x dy = (2y + \ln x) dx$$

7.10. Решите уравнение Бернулли

$$\text{а) } y' x + y = -xy^2$$

$$\text{б) } y' + 2y = y^2 e^x$$

$$\text{в) } y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$$

$$\text{г) } x^2 y' = y^2 + xy$$

$$\text{д) } y' + xy = xy^3$$

7.11. Решите задачу Коши

$$\text{а) } x^2 y' = 2xy - 3, \quad y = 1 \text{ при } x = -1$$

$$\text{б) } y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}, \quad y = 1 \text{ при } x = -1$$

$$\text{в) } 3y^2 y' + y^3 = x + 1, \quad y = -1 \text{ при } x = 1$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике. М.: Наука, 1986.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1997.
3. Зими́на О.В., и др. Высшая математика. Решебник. М.: Физико-математическая литература, 2001.
4. Самовол В.С. Основы математического анализа для политологов. Ч. I, Ч. II. Учебное пособие. М.: ГУ-ВШЭ, 2001.
5. Сборник задач по математическому анализу. Т.1-3, Под ред. Л.Д.Кудрявцева, М.:Физматлит, 2003.
6. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие. Под ред. В.И.Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2005.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
8. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001.

Ответы.

1.1. $3/2$. 1.2. $-2/3$. 1.3. $25/9$. 1.4. 64. 1.5. 2. 1.6. 9. 1.7. $\sqrt{2}$.
1.8. -3. 1.9. $-15/2$. 1.10. $1/6$. 1.11. 4. 1.12. 1. 1.13. $1/9$. 1.14. 8.
1.15. 0. 1.16. 1. 1.17. $1/2$. 1.18. $4/3$. 1.19. $5/4$. 1.20. $-1/6$. 1.21. 2.
1.22. $-4/\sqrt{2}$. 1.23. $1/2$. 1.24. $1/3$. 1.25. 0. 1.26. 0. 1.27. e^5 .

1.28. e^{-2} . 1.29. $1/2$. 1.30. $2/3$. 1.31. e^{-3} . 1.32. $e^{1/2}$.

2.1. а)-5. 2.1. б) ∞ . 2.1. в) 0. 2.1. г) $4/3$. 2.1. д) $-4/3$.

2.1. е) $2/3$. 2.1. ж) -12. 2.1. з) 1. 2.1. и) $1/3$. 2.1. к) 0. 2.1. л) ∞ .

2.1. м) 1. 2.1. н) -1. 2.1. о) 2. 2.1. п) $+\infty$. 2.1. р) 3. 2.1. с) $-3/2$.

2.1. т) $3/19$. 2.1. у) 0. 2.1. ф) $2/3$. 2.1. х) 8. 2.1. ц) 0. 2.1. ч) e^2 .

2.2. а) x^2 . 2.2. б) x^3 . 2.2. в) x^4 . 2.2. г) x^6 . 2.2. д) x^3 . 2.2. е) x^2 .

2.2. ж) x^2 . 2.3. а) $2/3$. 2.3. б) 1. 2.3. в) $1/6$. 2.3. г) $1/36$. 2.3. д) -6.

2.3. е) $-1/6$. 2.3. ж) $-1/8$. 2.3. з) $-8/25$. 2.3. и) $-e/2$. 2.3. к) $-4/3$.

2.3. л) $1/5$. 2.3. м) 6. 2.3. н) 3. 2.3. о) $3/2$. 2.3. п) $e^{2/3}$. 2.3. р) e^{10} .

2.3. с) $e^{3/2}$. 2.3. т) $e^{ctg(3)}$. 2.3. у) $e^{-1/8}$. 2.3. ф) e^{-2} . 2.3. х) $e^{1/4}$.

2.3. ц) $e^{-2/3}$.

3.33. $y = -2.5x + 13$. 3.34. $y = 3x + 9$. 3.35. $y = -x + 2$.

3.36. $y = -6x - 22$. 3.37. 3. 3.38. -1. 3.39. 3. 3.40. -1.

3.41. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. 3.42. $y = -3x + 7$. 3.43. $y = -x + 2$.

3.44. $y = 4x - 7$. 3.45. $y = \frac{1}{7}x + \frac{13}{7}$. 3.46. $y = 2x - 1$.

3.47. $y = -5x + 11$. 3.48. -4,98. 3.49. 4,99. 3.50. -5,01. 3.51. -3,02.

3.52. 32,08. 3.53. 0,96. 3.54. 1,03. 3.55. 1,2. 3.56. 1,075. 3.57. 2,995.

3.58. 0,805. 3.59. 2,94 руб.

- 4.1. $f(x) = -1 - (x-1) - (x-1)^2 - (x-1)^3 - (x-1)^4 + o((x-1)^4)$.
- 4.2. $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.
- 4.3. $f(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$. 4.4. $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$.
- 4.5. 0. 4.6. 1/3. 4.7. 3/2. 4.8. 3/2. 4.9. 1/3. 4.10. 0. 4.11. 0. 4.12. 0.
- 4.13. 0. 4.14. 2. 4.15. -1/12. 4.16. 1/3. 4.17. 1/3. 4.18. $f(x) \approx 4x^3$,
0,5. 4.19. $f(x) \approx -3x^2$, -0,27. 4.20. $f(x) \approx 2x^4$, 1/8.
- 4.21. $f(x) \approx -\frac{1}{2}x^4$, -1/32. 4.22. $f(x) \approx -\frac{1}{4}x^4$, -1/64. 4.23. $f(x) \approx -x^2$,
-0,04. 4.24. $f(x) \approx 2x^2$, 0,32. 4.25. $f(x) \approx 2x^6$, 1/32.
- 4.26. $f(x) = x - x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$, $f^{(IV)}(0) = -12$.
- 4.27. $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$, $f^{(IV)}(0) = 16$.
- 4.28. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$, $f^{(IV)}(0) = 6$. 4.29. -6. 4.30. -8.
- 4.31. $12f''(x_0)\Delta x^2$. 4.32. $15f''(x_0)\Delta x^2$. 4.33. $12f''(x_0)\Delta x^2$.
- 4.34. $42f''(x_0)\Delta x^2$.
- 5.1. 16. 5.2. 688. 5.3. 58. 5.4. $y_{\min} = -3$, $y_{\max} = 5$.
- 5.5. $y_{\min} = -8$, $y_{\max} = 7$. 5.6. $y_{\min} = -15$, $y_{\max} = 9$.
- 6.1. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C$. 6.2. $2\arctg(x) - 3\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$.
- 6.3. $x^5 - \frac{1}{3x^3} + C$. 6.4. $x^3 + \arctg(x) + C$. 6.5. $-\frac{3}{28}(3-7x)^{4/3} + C$.
- 6.6. $\frac{4}{9}(1-3x)^{3/2} - \frac{2}{3}(1-3x)^{1/2} + C$. 6.7. $x + \ln|1+2x| + C$.
- 6.8. $-\frac{3}{2}x + \frac{11}{4}\ln|3+2x| + C$. 6.9. $\arctg^3 x + C$. 6.10. $\tg^3 x + C$.

6.11. $2\sqrt{\ln x} + C$. **6.12.** $\frac{2}{3}(1 + \ln x)^{3/2} + C$. **6.13.** $\frac{1}{4}(1 + x^3)^{\frac{4}{3}} + C$.
6.14. $\frac{5}{18}(x^3 - 8)^{6/5} + C$. **6.15.** $\frac{1}{2\cos^2 x} + C$. **6.16.** $e^{tgx} + C$.
6.17. $-\frac{2}{15}(3 + \cos(5x))^{3/2} + C$. **6.18.** $-\frac{1}{9(x^3 + x + 1)^3} + C$.
6.19. $x - 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x} + 1)^2 + C$. **6.20.** $\ln(2x\sqrt{x} + x) + C$.
6.21. $\sqrt{x^2 + 1} + C$. **6.22.** $\frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$. **6.23.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + C$.
6.24. $\frac{1}{4}\ln(2x^2 + 3) + C$. **6.25.** $\arcsin^2 x - \sqrt{1 - x^2} + C$.
6.26. $-\frac{1}{2}e^{-(x^2+1)} + C$. **6.27.** $-\cos(\ln x) + C$. **6.28.** $\arctg(x + 2) + C$.
6.29. $\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$. **6.30.** $\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+8}\right) + C$.
6.31. $-\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x) + C$. **6.32.** $2x\sin x - x^2\cos x + 2\cos x + C$.
6.33. $(x+1)^2\sin x + 2(x+1)\cos x + C$. **6.34.** $-(x+2)e^{-x} + C$.
6.35. $\frac{x+1}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$. **6.36.** $(3x+1,5)\sin(2x) + 1,5\cos(2x) + C$.
6.37. $(x+0,5)e^{2x} + C$. **6.38.** $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$.
6.39. $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$.
6.40. $(x^4 + 3x^2 - 7x)\ln x - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 7x + C$.
6.41. $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}\right)\ln(3x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + C$. **6.42.** $x\operatorname{tg}x + \ln|\cos x| + C$.
6.43. $\frac{x^2+1}{2}\arctg x - \frac{x}{2} + C$. **6.44.** $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$.

$$6.45. -\frac{1}{3}t^3 + C = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}. \quad 6.46. -\frac{1}{4}t^2 + C = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{x^3} - 1\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{5}{4}.$$

$$6.47. -t + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \sqrt{2}. \quad 6.48. \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{5}}.$$

$$6.49. \frac{1}{2}F(15) - \frac{1}{2}F(7). \quad 6.50. \frac{1}{3}F(10) - \frac{1}{3}F(4). \quad 6.51. \frac{1}{4}F(14) - \frac{1}{4}F(6).$$

$$6.52. \frac{1}{3}F(11) - \frac{1}{3}F(2). \quad 6.53. 20. \quad 6.54. 21/8. \quad 6.55. \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1).$$

$$6.56. \pi/6. \quad 6.57. \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}. \quad 6.58. 4 - 2\sqrt{2}. \quad 6.59. 2. \quad 6.60. 6. \quad 6.61. 1.$$

$$6.62. 9. \quad 6.63. \frac{1}{2}\int_1^2 t^5 dt = \frac{63}{12}. \quad 6.64. \frac{1}{2}\int_9^{16} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_3^4 dz = 1. \quad 6.65. \int_1^3 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$$

$$6.66. \frac{1}{7}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{28}.$$

$$7.1. \text{ а) } y = \frac{C}{x}. \quad 7.1. \text{ б) } y = Ce^{\frac{1}{x}}. \quad 7.1. \text{ в) } y = C(x+1)e^{-x}.$$

$$7.1. \text{ г) } y = C(2x+1). \quad 7.1. \text{ д) } x^2 + y^2 = C. \quad 7.1. \text{ е) } x^2 + y^2 = \ln(Cx^2).$$

$$7.1. \text{ ж) } y = 2 + C \cos x. \quad 7.1. \text{ з) } x = 0, \ln|x| = C + \sqrt{y^2 + 1}. \quad 7.1. \text{ и) } y = 1,$$

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C. \quad 7.2. \text{ а) } y = 4e^{x+2}. \quad 7.2. \text{ б) } y = 3x^2.$$

$$7.2. \text{ в) } y = 2(x+1). \quad 7.2. \text{ г) } y = e^{\frac{\pi}{4} - \text{arctg}(x)}. \quad 7.3. 2(y+1)e^{-y} = x^2 + 1.$$

$$7.4. y = 0, y = (x-2)^3. \quad 7.5. y = e^{-x}. \quad 7.6. y = e^{\sqrt{x-2}}. \quad 7.7. y = -x.$$

$$7.8. \text{ а) } x + y = Cx^2. \quad 7.8. \text{ б) } \ln(x^2 + y^2) = C - \text{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$7.8. \text{ в) } x(y-x) = Cy, y = 0. \quad 7.8. \text{ г) } y = Ce^{\frac{y}{x}}. \quad 7.8. \text{ д) } y^2 - x^2 = Cy,$$

$$y = 0. \quad 7.9. \text{ а) } y = Cx^3 - x^2. \quad 7.9. \text{ б) } y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}. \quad 7.9. \text{ в) } y = \ln x + \frac{C}{x}.$$

7.9. г) $y = Cx^2 + x^4$. **7.9. д)** $xy = C - \ln|x|$. **7.9. е)** $y = e^x(\ln|x| + C)$.

7.9. ж) $y = C \ln^2 x - \ln x$. **7.10. а)** $y = \frac{1}{x \ln Cx}$. **7.10. б)** $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$,

$y = 0$. **7.10. в)** $y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x+C}$. **7.10. г)** $y = \frac{x}{C - \ln x}$.

7.10. д) $y^2 = \frac{1}{1 + Ce^{x^2}}$. **7.11. а)** $y = 2x^2 + \frac{1}{x}$. **7.11. б)** $y = \frac{2x}{1 - 3x^2}$.

7.11. в) $y^3 = x - 2e^{1-x}$.