Логвенков С.А., Мышкис П.А. Самовол В.С.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. ФУНКЦИЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Учебное пособие для факультетов менеджмента, политологии и социологии.

Государственный университет – Высшая школа экономики
Кафедра высшей математики

Введение

Настоящий сборник задач посвящен одному из важнейших разделов высшей математики - основам дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких переменных. Кроме того, в него включены некоторые первичные сведения о дифференциальных уравнениях. Сборник составлен в соответствии с программами курса «Алгебра и анализ», читаемого на различных факультетах ГУ-ВШЭ. Изложение материала в предлагаемом сборнике ориентировано на углубленное изучение фундаментальных математических идей и методов, широко применяемых в исследовании социально-экономических процессов и явлений.

Для облегчения восприятия и удобства пользования весь материал разбит на отдельные разделы. Здесь прежде всего представлены задачи, связанные с освоением техникой дифференцирования функций нескольких переменных и нахождения экстремумов этих функций. Отдельный раздел посвящен двойным интегралам. Последний раздел сборника содержит задачи по дифференциальным уравнениям. Большая часть задач снабжена ответами.

При подборе примеров и задач привлекались разнообразные источники и, прежде всего, те книги, которые вошли в приведенный в конце сборника библиографический список.

1. Область определения, линии уровня функции нескольких переменных

Изобразите области определения функций:

1.1. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$.

1.2. $z = \arcsin(x + y)$.

1.3. $z = \sqrt{xy} + acr\sin\dfrac{x}{2}$.

1.4. $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

1.5. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

1.6. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$.

1.7. $z = \arcsin\dfrac{y}{x^2}$.

1.8. $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$.

1.9. $u = \dfrac{x + y + z}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$.

1.10. $u=\sqrt{x+y+z}$.

Постройте линии уровня функций:

1.11. $z=\dfrac{y}{x}$.

1.12. $z=x^2-y^2$.

1.13. $z=x^2+y^2$.

1.14. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

1.15. $z=\sqrt{xy}$.

1.16. $z=\dfrac{y-x^2}{x^2}$.

1.17. $z=x^2y+y$.

1.18. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

1.19. $z=\min(x^2, y)$.

1.20. $z=\max(x+y, 2x-3y)$.

2. Частные производные. Производная сложной функции. Градиент. Производная по направлению.

Найдите частные производные первого порядка от следующих функций:

2.1. $z = x^3 + 2y^3 - 7x^2y^4$.

2.2. $z = \dfrac{x^2 y}{x + y}$.

2.3. $z = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y}{x^2}$.

2.4. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

2.5. $z = x\sqrt[3]{y} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

2.6. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2.7. $z = \sqrt{x}\, e^{\frac{y}{x}}$.

2.8. $z = xe^{-xy}$.

2.9. $z = arctg\dfrac{y}{x}$.

2.10. $z = xye^{x+2y}$.

2.11. $z = e^{3x^2+2y^2-xy}$.

2.12. $u = yx^3 + xz^2 + y^2 z$.

2.13. $u = \dfrac{x}{\sqrt{x + y^2 + z^3}}$.

2.14. $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

2.15. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

2.16. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$.

2.17. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}$.

2.18. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$.

2.19. $u = x^2 - arctg(y + z^3)$.

2.20. $u = x^3 y^2 z + 3x - 5y + z + 2$

2.21. Проверьте, что функция $z = y\ln(x^2 - y^2)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

2.22. Проверьте, что функция $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$.

2.23. Проверьте, что функция $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ удовлетворяет уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

2.24. Проверьте, что функция $z = \frac{y^2}{3x} + xy$ удовлетворяет уравнению $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

2.25. Проверьте, что функция $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$ удовлетворяет уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

2.26. Проверьте, что функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ удовлетворяет уравнению $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$.

2.27. Найдите u'_x и u'_y, если $u = f(t)$ и $t = \frac{y}{x}$.

2.28. Найдите u'_x и u'_y, если $u = f(t)$ и $t = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2.29. Найдите u'_x, u'_y и u'_z, если $u = f(t)$ и $t = xy^2z^3$.

2.30. Найдите u'_x, u'_y и u'_z, если $u = f(t)$ и $t = xy + \dfrac{z^2}{x}$.

2.31. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^2 y^3$, $x = t^3 + 2$ и $y = 3t^4 - 1$.

2.32. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x \sin \dfrac{x}{y}$, $x = 1 + 3t$ и $y = \sqrt{1 + t^2}$.

2.33. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = e^{3x+2y}$, $x = \cos t$ и $y = t^2$.

2.34. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \dfrac{y^2 - 1}{x}$, $x = 1 - e^{2t}$ и $y = e^t$.

2.35. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = e^{xy} \ln(x + y)$, $x = 2t^2$ и $y = 1 - 2t^2$.

2.36. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \ln(x + \ln y)$, $x = e^{2t^2}$ и $y = \ln t$.

2.37. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = e^{\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{t}}}$ и $x = \sin t$, $y = tgt$.

2.38. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \ln(x + \sqrt{t^2 + y^2})$ и $x = t^2 + 1$, $y = e^t$.

2.39. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^2 e^{\frac{y}{t}}$ и $x = \ln(t^2 + 1)$, $y = t^3$.

2.40. Найдите $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{dz}{dt}$, если $z = arctg\frac{xt}{y}$ и $x = tgt$, $y = e^{t^2+1}$.

2.41. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = e^{xy}$ и $y = \varphi(x)$.

2.42. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = arctg\frac{y}{x}$ и $y = x^2$.

2.43. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln(x^3y^2)$ и $y = e^{x^2+3}$.

Найдите производные z'_u и z'_v функции $z = z(x, y)$, где $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$:

2.44. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = u^2v$, $y = \frac{u}{v^3}$.

2.45. $z = arctg\frac{x}{y}$, $x = u\sin v$, $y = u\cos v$.

2.46. $z = x^3 + y^3$, $x = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$, $y = arctg\frac{u}{v}$.

2.47. $z = \sqrt{xy}$, $x = \ln u$, $y = \ln v$.

2.48. $z = \ln\frac{x}{y}$, $x = \sin\frac{u}{v}$, $y = \sqrt{\frac{u}{v}}$.

Найдите в указанной точке первые частные производные функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением:

2.49. $z^3 + 3xyz + 1 = 0$, (0; 1).

2.50. $e^z - xyz - 2 = 0$, (1; 0).

2.51. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$, $(1;1;\frac{1}{3})$.

2.52. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0$, (1; 1;-2).

2.53. $z - x = y\, ctg(z - x)$, $(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$.

2.54. Найдите производную функции $z = x^3 y - 5xy^2 + 8$, по направлению $\vec{l} = (1;1)$ в точке $M(1;1)$.

2.55. Найдите производную функции $z = \ln\frac{x^2 + y^2}{xy}$, по направлению $\vec{l} = (6;8)$ в точке $M(1;2)$.

2.56. Найдите производную функции $z = x^2 + xy + 2x + 2y$, по направлению $\vec{l} = (3;4)$ в точке $M(1;1)$.

2.57. Найдите производную функции $u = xy - \frac{x}{z}$ в точке $A(-4;3;-1)$ по направлению $\overrightarrow{AB}$, где $B(1;4;-2)$.

2.58. Найдите производную функции $u = x + \ln(z^2 + y^2)$ в точке $A(2;1;1)$ по направлению $\overrightarrow{AB}$, где $B(0;2;0)$.

2.59. Найдите производную функции $u = x^2 y - \ln(xy + z^2)$ в точке $A(1;5;-2)$ по направлению $\overrightarrow{AB}$, где $B(1;7;-4)$.

2.60. Найдите производную функции $z = 3x^4 + y^3 + xy$ в точке $M(1,2)$ по направлению луча, образующего с осью x угол 135^0.

2.61. Найдите производную функции $u = x^2 - 3yz + 4$ в точке $M(1;2;-1)$ по направлению луча, образующего одинаковые углы со всеми координатными осями.

2.62. Найдите единичный вектор $\vec{l}$, по направлению которого производная функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $M(-1;2)$ достигает наибольшего значения.

2.63. Найдите единичный вектор $\vec{l}$, по направлению которого производная функции $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ в точке $M(3;1)$ достигает наибольшего значения.

2.64. Найдите единичный вектор $\vec{l}$, по направлению которого производная функции $u = xz^y$ в точке $M(-3;2;1)$ достигает наибольшего значения.

3. Первый и второй дифференциал. Касательная плоскость.

3.1. Найдите приращение Δf и дифференциал df функции $f(x,y)=x^2y$ в точке (1; 1).

3.2. Найдите приращение Δf и дифференциал df функции $f(x,y)=x^2+xy-y^2$ в точке (1; 1).

3.3. Найдите первый дифференциал функции *f* в данной точке

а) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, (1; 1)

б) $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$, (2; 1)

в) $f(x,y,z)=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, (1; 0; 1)

г) $f(x,y,z)=arctg\dfrac{xy}{z^2}$, (3; 2; 1)

г) $f(x,y,z)=\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)^z$, (1; 1; 1)

3.4. Найдите первый дифференциал функции

а) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

б) $f(x,y)=\ln(3x+2y)$

в) $f(x,y)=(y^3+2x^2y+3)^4$

г) $f(x,y)=x+y^2+\ln(x+y^2)$

д) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2}$

е) $f(x,y,z)=tg^2\dfrac{xy}{z}$

ж) $f(x,y,z)=e^{x^2yz^3}$

3.5. Найдите все частные производные второго порядка

а) $f(x,y)=xy(x^3+y^3-3)$

б) $f(x,y)=y^2(1-e^x)$

в) $f(x,y)=\ln(x^2+y)$

г) $f(x,y,z)=x(1+y^2z^3)$

д) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$

е) $f(x,y,z)=\sin\dfrac{xy}{z}$

3.6. Покажите, что если $u = xz + e^{yz} + y$, то $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

3.7. Покажите, что если $u = xz + e^{yz} + y$, то $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial z \partial y \partial x}$.

3.8. Найдите все производные третьего порядка

а) $z = x^4 + 5y^3 + 3x - y$

б) $z = xe^y + ye^x$

в) $z = \sin(3x - 2y)$

г) $z = x^2 y^3$

3.9. Найдите вторые дифференциалы

а) $z = e^{3x-2y}$

б) $z = y \ln x$

в) $z = x \ln \dfrac{x}{y}$

г) $z = e^{x+y^2}$

д) $u = xy + yz + xz$

е) $u = x^4 + 2y^3 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$

3.10. Найдите точки, в которых $grad\, f(x, y) = 0$ если

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$

б) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

в) $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$

3.11. Найдите точки, в которых дифференциал функции f равен нулю

а) $f(x, y) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2 + xy + y^2)}$

б) $f(x, y) = 2y^2 + z^2 - xy^2 - yz + 4x + 1$

3.12. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P) = f(x, y)$. Известно, что $f(A) = 2$, $f(B) = 2{,}03$, $f(C) = 1{,}92$, при этом A(2; 6), B(2; 6,01), C(2,02; 6). Найти приближенно частные производные точке в А. В ответе укажите значение производной по направлению вектора $\vec{l} = (3;\ 4)$.

3.13. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P) = f(x, y)$. Известно, что $f(A) = 5$, $f(B) = 5{,}03$, $f(C) = 5{,}08$, при этом A(3; 7), B(3; 7,01), C(3,02; 7). Найти приближенно частные производные в точке А. В ответе укажите значение производной по направлению вектора $\vec{l} = (3;\ 4)$.

3.14. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P) = f(x, y)$. Известно, что $f(A) = 3$, $f(B) = 2{,}97$, $f(C) = 3{,}08$, при этом A(3; 6), B(3; 6,01), C(3,02; 6). Найти приближенно частные производные точке в А. В ответе укажите значение производной по направлению вектора $\vec{l} = (3;\ 4)$.

3.15. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ в точке (2;-1; 1).

3.16. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ в точке (1; 1; 1).

3.17. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке (1; 0; 0).

3.18. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x(y+z)(z-xy) = 8$ в точке (2; 1; 3).

3.19. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ в точке (3; 2; 2).

3.20. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$ в точке (1; 1; 2).

3.21. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $e^z - z + xy = 3$ в точке (2; 1; 0).

3.22. К поверхности $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 21$ проведите касательные плоскости, параллельные плоскости $6x - 4y - z = 0$.

3.23. К поверхности $xy + z^2 + xz = 1$ проведите касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 2z - y = 0$.

3.24. К сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ проведите касательную плоскость, перпендикулярную плоскостям $x - y - z = 2$ и $x - y - \frac{1}{2}z = 2$.

4. Приближенные вычисления. Формула Тейлора.

4.1. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенное значение $\ln(8{,}001+0{,}99^3)$, исходя из значения функции $z=\ln(x^3+y^3)$ при $x=2$, $y=1$.

4.2. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенное значение $\sqrt{3{,}61-0{,}05^2}$, исходя из значения функции $z=\sqrt{x^2-y^2}$ при $x=2$, $y=0$.

4.3. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$

4.4. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$

4.5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\dfrac{(1{,}98)^3}{(2{,}01)^2}$

4.6. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{(0{,}98)\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$

4.7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$

4.8. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $0{,}97^{1{,}05}$

4.9. На сколько изменится диагональ и площадь прямоугольника со сторонами $x = 6$м и $y = 8$м, если первая сторона увеличится на 2 мм, а вторая сторона уменьшится на 5 мм.

4.10. При заданной производственной функции Кобба-Дугласа $Q = AK^{0,9}L^{0,5}$ ($A = const$) установите, как изменится объем выпуска продукции Q (в процентах) при увеличении затрат капитала K и уменьшении трудовых ресурсов L соответственно на 5% и 7%.

4.11. На сколько процентов приближенно изменится спрос, описываемый функцией $z = 5474e^{-\sqrt{n+p^2}}$, где n- число производителей товара, а p- цена товара, если число производителей товара уменьшится на 1%, а цена возрастет на 1%. На рынке товара имеется 7 производителей, цена товара составляет 3 ед.

4.12. Разложите функцию $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ по формуле Тейлора в окрестности точки (1;-2).

4.13. Разложите функцию $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ по формуле Тейлора в окрестности точки (-2; 1).

4.14. Разложите функцию $f(x,y,z) = x^2 + 3z^2 - 2yz - 3z$ по формуле Тейлора в окрестности точки (0; 1; 2).

4.15. Разложите функцию $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ по формуле Тейлора в окрестности точки (1; 1; 1) с точностью до членов второго порядка малости.

4.16. Разложите по формуле Тейлора в окрестности точки (0; 2) до $o(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$, функцию $f(x,y) = \sin x \ln(y)$.

4.17. Разложите по формуле Тейлора в окрестности точки (0; 0; 1) до $o(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$, функцию $f(x, y, z) = \ln(xy + z^2)$.

4.18. Разложите функцию $f(x, y) = x^y$ по формуле Тейлора в окрестности точки (1; 1) с точностью до членов второго порядка малости.

4.19. Разложите функцию $f(x, y) = atctg\dfrac{1+x}{1+y}$ по формуле Тейлора в окрестности точки (0; 0) с точностью до членов второго порядка малости.

4.20. Разложите функцию $f(x, y) = \ln(\pi - 4arctg(x) + \dfrac{x^2}{y})$ по формуле Тейлора в окрестности точки (1; 1) с точностью до членов второго порядка малости.

5. Локальный экстремум функции нескольких переменных.

Найдите локальные экстремумы функций

5.1. $z = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$

5.2. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$

5.3. $u = x^3 - 2y^2 - 3x + 8y$

5.4. $u = x^2 - 2xy + 4y^3$

5.5. $u = y^3 - 3x^2 - 27y + 12x$

5.6. $u = x^2 - 4xy + 8y^3$

5.7. $u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$

5.8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

5.9. $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

5.10. $f(x, y, z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$

5.11. $f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$

5.12. $u(x,y,z)=2x^3-4xy+2y^2+2xz+0{,}5z^2-8y+1$

5.13. $f(x,y,z)=2x^3+2xy+2xz+y^2+z^2+2y-8$

5.14. $u=x^2+xy+y^2+z^3-12x-3y-3z$

5.15. $u=3+2x-y-12z-x^2+xy-y^2+z^3$

5.16. $u=2x^2+xy+y^2-z^3-9x-4y+27z$

5.17. $u=1+4x+2y+24z-x^2+2xy-4y^2-2z^3$

5.18. $u=3x^3+y^2+z^2+6xy-2z+1$

6. Локальный условный экстремум функции нескольких переменных.

6.1. Найдите условные локальные экстремумы функции $z = x^2 + y^2 + xy$ при $x^2 + y^2 = 2$.

6.2. Найдите условные локальные экстремумы функции $z = 2x - 3y$ при $x^2 + y^2 - 13 = 0$.

6.3. Найдите условные локальные экстремумы функции $z = x^2 + y^2 - 4xy$ при $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

6.4. Найдите условные локальные экстремумы функции $z = -x - y$ при $\frac{x^2}{4} + y^2 = 5$.

6.5. Найдите условные локальные экстремумы функции $z = e^{x+y}$ при условии $x^2 + y^2 = 2$.

6.6. Найдите условные локальные экстремумы функции $z = e^{2x-3y}$ при условии $x^2 + y^2 = 13$.

6.7.Найдите условные локальные экстремумы функции $z = e^{-x-y}$ при условии $\frac{x^2}{4} + y^2 = 5$.

6.8. Найдите условные локальные экстремумы функции $z = e^{xy}$ при условии $x^2 + y^2 = 2$.

6.9. Используя метод Лагранжа, найдите условные локальные экстремумы функции $z = x^2 y$ при условии $x + y - 2 = 0$.

6.10. Используя метод Лагранжа, найдите условные локальные экстремумы функции $z = \dfrac{y}{x^2}$ при условии $y - x + 1 = 0$.

6.11. Используя метод Лагранжа, найдите условные локальные экстремумы функции $z = xy^2$ при условии $x + y - 3 = 0$.

6.12. Используя метод Лагранжа, найдите условные локальные экстремумы функции $z = \dfrac{x}{y^2}$ при условии $x - y + 2 = 0$.

6.13. Используя метод Лагранжа, найдите условные локальные экстремумы функции $z = 6 - 5x - 4y$ при условии $x^2 - y^2 = 9$.

6.14. Используя метод Лагранжа, найдите условные локальные экстремумы функции $z = 1 - 4x - 8y$ при условии $x^2 - 8y^2 = 8$.

6.15. Используя метод Лагранжа, найдите условные локальные экстремумы функции $f\left(x, y\right) = 2x + 16y$ при условии $xy + y^2 - 7 = 0$.

6.5. Используя метод Лагранжа, найдите условные локальные экстремумы функции $f\left(x, y\right) = 2x + 4y$ при условии $2xy + y^2 - 3 = 0.$

6.17. Используя метод Лагранжа, найдите условные локальные экстремумы функции $f(x, y) = 3x - 6y$ при условии $y^2 - xy - 1 = 0$.

6.18. Используя метод Лагранжа, найдите условные локальные экстремумы функции $f(x, y) = 4x + 8y$ при условии $y^2 - 2xy + 5 = 0$.

6.19. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 5x^2 - 4xy + 2y^2$ при условии $x^2 + y^2 \le 5$.

6.20 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 \le 1$.

6.21. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = 4xy + 3y^2$ при условии $x^2 + y^2 \le 1$.

6.22. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ при условии $x^2 + y^2 \le 2x$.

6.23. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ в области, ограниченной осями координат и прямой $x + y - 4 = 0$.

6.24. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области, ограниченной осями координат и прямой $x + y + 3 = 0$.

6.25. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - 4x$ в области, ограниченной осями координат и прямой $2x + 3y - 12 = 0$.

6.26. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy + x + y$ в области, ограниченной прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.

6.27.Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

7. Двойные интегралы

Найдите интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Сравните результат с объемом соответствующего тела.

7.1. $D=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$, $f(x,y)=3$.

7.2. $D=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le x\}$, $f(x,y)=3$.

7.3. $D=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le x\}$, $f(x,y)=3y$.

7.4. $D=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le x\}$, $f(x,y)=3x$.

7.5. $D=\{0\le x\le 2,\ -x\le y\le x\}$, $f(x,y)=3y$.

7.6. $D=\{0\le x\le 2,\ -x\le y\le x\}$, $f(x,y)=3x$.

7.7. $D=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$, $f(x,y)=6x$.

7.8. $D=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$, $f(x,y)=6y$.

7.9. $D=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$, $f(x,y)=6(1-x-y)$.

7.10. $D=\{0\le x\le 1,\ x-1\le y\le 1-x\}$, $f(x,y)=6x$.

7.11. $D=\{0\le x\le 1,\ x-1\le y\le 1-x\}$, $f(x,y)=6y$.

7.12. $D=\{0\le x\le 1,\ x-1\le y\le 1-x\}$, $f(x,y)=6(1-x-y)$.

Изобразите область D и найдите интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Объясните совпадение ответов в пунктах а и б.

7.13.

а) $D=\left\{0\le x\le 3,\ 0\le y\le x^2\right\}$, $f(x,y)=4x+1$.

б) $D=\left\{0\le y\le 9,\ \sqrt{y}\le x\le 3\right\}$, $f(x,y)=4x+1$.

7.14.

а) $D=\left\{0\le x\le 1,\ x^2-1\le y\le 0\right\}$, $f(x,y)=15y$.

б) $D=\left\{-1\le y\le 0,\ 0\le x\le \sqrt{y+1}\right\}$, $f(x,y)=15y$.

7.15.

а) $D=\left\{0\le x\le 3,\ -x\le y\le x^2\right\}$, $f(x,y)=5y$.

б) $D=\{-3\le y\le 0,\ -y\le x\le 3\}\bigcup\left\{0\le y\le 9,\ \sqrt{y}\le x\le 3\right\}$, $f(x,y)=5y$.

Изобразите область интегрирования на плоскости. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле

7.16. $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-x}^{1}f(x,y)dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{1-x}f(x,y)dy$.

7.17. $\int\limits_{-3}^{0}dy\int\limits_{3y}^{9}f(x,y)dx+\int\limits_{0}^{3}dy\int\limits_{y^2}^{9}f(x,y)$.

7.18. $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{0}^{x+1}f(x,y)dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x^3}^{1}f(x,y)dy$.

7.19. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2y-2}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x,y)dx$.

7.20. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f\left(x,y\right)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-1}^{-y} f\left(x,y\right)dx$

7.21. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^3} f\left(x,y\right)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f\left(x,y\right)dx$

7.22. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{\sqrt{-y}}^{2} f\left(x,y\right)dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} f\left(x,y\right)dx$

7.23. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f\left(x,y\right)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f\left(x,y\right)dy$

Изобразите область интегрирования на плоскости. Измените порядок интегрирования и найдите интеграл.

7.24. $\int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{y/2}^{y} f'(x^2)dx + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{y/2}^{2} f'(x^2)dx$.

7.25. $\int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{1/y}^{2} f'(\ln x)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{1}^{2/y} f'(\ln x)dx$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике. М.: Наука, 1986.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1997.

3. Зимина О.В., и др. Высшая математика. Решебник. М.: Физико-математическая литература, 2001.

4. Самовол В.С. Основы математического анализа для политологов.
Ч. I, Ч. II. Учебное пособие. М.: ГУ-ВШЭ, 2001.

5. Сборник задач по математическому анализу. Т.1-3, Под ред. Л.Д.Кудрявцева, М.:Физматлит, 2003.

6. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие. Под ред. В.И.Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2005.

7. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001.

Ответы

2.49. $z'_x = 1$, $z'_y = 0$. **2.50.** $z'_x = 0$, $z'_y = \frac{\ln 2}{2}$. **2.51.** $z'_x = -2$, $z'_y = \frac{10}{3}$. **2.52.** $z'_x = -1$, $z'_y = -\frac{14}{9}$. **2.53.** $z'_x = 1$, $z'_y = \frac{2}{2+\pi}$.

2.54. $-11/\sqrt{2}$. **2.55.** -3/25. **2.56.** 27/5. **2.57.** $20\sqrt{3}/9$. **2.58.** $-\sqrt{6}/3$.

2.59. $2\sqrt{2}/9$. **2.60.** $-1/\sqrt{2}$. **2.61.** $-1/\sqrt{3}$. **2.62.** $\frac{-4\vec{i}+5\vec{j}}{\sqrt{41}}$.

2.63. $\frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}$. **2.64.** $\frac{\vec{i}-6\vec{k}}{\sqrt{37}}$.

3.1 $\Delta f = 2dx + dy + (dx)^2 + 2dx\,dy + (dx)^2\,dy$, $df = 2dx + dy$.

3.2 $\Delta f = 3dx - dy + (dx)^2 + dx\,dy - (dy)^2$, $df = 3dx - dy$. **3.3. а)** $dx - dy$.

3.3. б) $\frac{1}{2}dx$. **3.3. в)** $-\frac{dz}{2}$. **3.3. г)** $\frac{2dx + 3dy - 12dz}{37}$.

3.3. г) $2dx + \ln 4\,dz$. **3.10. а)** (2; 0). **3.10. б)** (0; 0), (1; 1).

3.10. в) (7; 2; 1). **3.11. а)** $(1;3)$, $(-1/26;-3/26)$. **3.11. б)** $(7/4;2;1)$, $(7/4;-2;-1)$. **3.12.** 0. **3.13.** 24/5. **3.14.** 0. **3.15.** $2x + 2y - z - 1 = 0$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$. **3.16.** $x - 2y + z = 0$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

3.17. $2x - z - 2 = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$. **3.18.** $2x + 7y - 5z + 4 = 0$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-5}$. **3.19.** $3x - 2y - 2z = 1$, $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$.

3.20. $2x + y + 11z = 25$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{11}$. **3.21.** $x + 2y = 4$, $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$. **3.22.** $6x - 4y - z = \pm 21$. **3.23.** $x - y + 2z = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

3.24. $x + y = 1 \pm \sqrt{2}$.

4.1. 2,194. **4.2.** 1,9. **4.3.** 1,00. **4.4.** 4,998. **4.5.** 1,92. **4.6.** 1,055. **4.7.** 2,95. **4.8.** 0,97. **4.9**. Диагональ уменьшится на 3 мм, площадь уменьшится на 140 см^2. **4.10.** Вырастет на 1%. **4.11.** 3,12%.

4.12. $f(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.

4.13. $f(x,y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2$.

4.14. $f(x,y) = 2 - 4(y-1) + 7(z-2) + x^2 + 3(z-2)^2 - 2(y-1)(z-2)$.

4.15. $f(x,y,z)=3(x-1)^2+3(y-1)^2+3(z-1)^2-3(x-1)(y-1)-3(x-1)(z-1)-3(y-1)(z-1)+o(\rho^2)$,

$\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$.

4.16. $f(x,y) = x\ln 2 + 0,5x(y-2) + o(\rho^2)$.

4.17. $f(x,y) = 2(z-1) - (z-1)^2 + xy + o(\rho^2)$.

4.18. $f(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + o(\rho^2)$.

4.19. $f(x,y) = \dfrac{\pi}{4} + 0,5(x-y) - 0,25(x^2 - y^2) + o(\rho^2)$.

4.20. $f(x,y) = -(y-1) + 2(x-1)^2 + 0,5(y-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + o(\rho^2)$.

5.1. (1; 2) – max. **5.2.** (0; 3)- max. **5.3.** (1, 2) – нет экстремума, (-1, 2) –max. **5.4.** (0, 0) –нет экстремума, (1/6, 1/6) –min. **5.5.** (2, -3) -- max; (2, 3)-- нет экстремума. **5.6.** (0, 0) – нет экстремума, (2/3, 1/3) – min. **5.7.** (3, 2) – min, (-3, -2) – max. **5.8.** (-1;-2; 3) – min. **5.9.** $(0;0;1)$ -- нет экстремума, (24;-144;-1) – min. **5.10.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ -- min; $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ -- нет экстр. **5.11.** $\left(1, -2, \frac{1}{2}\right)$ -- min; $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ -- нет экстр. **5.12.** (2; 4;-4) -- min; $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ -- нет экстр.

5.13. (1;-2;-1) -- min; $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ -- нет экстр. **5.14.** (7, -2, 1) – min, (7, -2, -1) – нет экстремума. 5.**15** (1, 0, -2) – max, (1, 0, 2) – нет экстремума. **5.16.** (2, 1, -3) – min, (2, 1, 3) – нет экстремума.

5.17. (3, 1, 2) – max, (3, 1, -2) – нет экстремума. **5.18.** (2, -6, 1) – min, (0, 0, 1) – нет экстремума.

6.1. (1, 1), (-1, -1) – max, (-1, 1), (1, -1) – min. **6.2.** (2, -3) – max, (-2, 3) – min. **6.3.** (-1; 1) (1;-1) – max, (1; 1) (-1;-1) – min. **6.4.** (-4, -1) – max, (4, 1) – min. **6.5.** (1, 1) – max, (-1, -1) – min. **6.6.** (2, -3) – max, (-2, 3) – min. **6.7.** (4, 1) – min, (-4, -1) – max. **6.8.** (1, 1) (-1, -1) – max, (-1, 1) (1, -1) – min. **6.9.** (0, 2) – min, (4/3, 2/3) – max. **6.10.** (2, 1) – max. **6.11.** (3, 0) – min, (1, 2) – max. **6.12.** (2, 4) – max. **6.13.** (-5, 4) – min, (5, -4) – max. **6.14.** (-4, 1) – min, (4, -1) – max. **6.15.** (6, 1) – min, (-6, -1) – max . **6.16.** (1, 1) – min, (-1, -1) – max . **6.17.** (0, -1) – min, (0, 1) – max. **6.18.** (3, 1) – min, (-3, -1) – max. **6.19.** (-2; 1), (2;-1) – max, (1; 2), (-1;-2) – min.
6.20. наибольшее значение $z(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = \sqrt{5}$, наименьшее значение $z(-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$. **6.21.** наибольшее значение $z(1/\sqrt{5}; 2/\sqrt{5}) = z(-1/\sqrt{5}; -2/\sqrt{5}) = 4$, наименьшее значение $z(-2/\sqrt{5}; 1/\sqrt{5}) = z(2/\sqrt{5}; 1/\sqrt{5}) = 12/5$. **6.22.** наибольшее значение $z(2; 0) = 4$, наименьшее значение $z(1/2; \pm\sqrt{3}/2) = -1/2$.
6.23. наибольшее значение $z(4; 0) = 13$, наименьшее значение $z(1; 2) = -4$. **6.24.** наибольшее значение: 6, наименьшее значение: -1.
6.25. наибольшее значение 16, наименьшее значение -16/3.
6.26. наибольшее значение 11, наименьшее значение 5.
6.27. наибольшее значение $z(2, -1) = 13$, наименьшее значение $z(1,1) = z(0,-1) = -1$.

7.1. 6. **7.2.** 6. **7.3.** 4. **7.4.** 8. **7.5.** 0. **7.6.** 16. **7.7.** 1. **7.8.** 1. **7.9.** 1. **7.10.** 2. **7.11.** 0. **7.12.** 4. **7.13.** 90. **7.14.** -4. **7.15.** 99.

7.16. $\int_0^1 dy \int_{-y}^{1-y} f(x,y)dx$. **7.17.** $\int_0^9 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\frac{x}{3}} f(x,y)dy$. **7.18.** $\int_0^1 dy \int_{y-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$.

7.19. $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-x/2-1}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$. **7.20.** $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^3}^{-x} f\left(x,y\right)dy$.

7.21. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{2-x} f\left(x,y\right)dy$. **7.22.** $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-x^2}^{x} f\left(x,y\right)dy$.

7.23. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f\left(x,y\right)dx$. **7.24.** $\frac{1}{2}(f(4)-f(0))=\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f'(x^2)dy$.

7.25. $f(\ln 2)-f(0)=\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{1/x}^{2/x} f'(\ln x)dy$.