И.К. Бусяцкая

# Задачник

Дополнительные задачи к курсу Линейная алгебра.

2023

## Предисловие.

Задачник предназначен студентам, желающим углубить свое понимание курса лекций по Линейной алгебре и расширить свой математический кругозор путем решения дополнительных задач, отличных от типовых и вычислительных, разбираемых на семинарах.

При составлении задачника были использованы


1. И.В. Проскуряков . Сборник задач по линейной алгебре. СПб. Издательство “ Лань “.2010г.
2. А.И. Кострикин. Сборник задач по алгебре. М. МНЦМО. 2009г.
3. Д.К.Фаддеев, И.С.Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. М. “Наука “.1977г.
4. Г.Е.Шилов. Математический анализ ( конечномерные линейные пространства). М.” Наука “. 1969г.


## Глава 1. Алгебра матриц.

1. $E_i^j$ –базисная матрица. Найти a) $E_i^j\ E_k^m$ , b) $A\ E_i^j$

2. Найти все квадратные матрицы такие, что

a) $E_i^1 A = E_i^1$ для всех $i=1,2,\dots,n$

b) $E_i^i A = A E_i^i$ для всех $i=1,2,\dots,n$

3. След квадратной матрицы – это сумма ее диагональных элементов. $trA = \sum_{i=1}^{n} a_i^i$ .

a) доказать, что след произведения двух матриц не зависит от прядка сомножителей.

b) найти все квадратные матрицы A такие, что $trAX = 0$ для всех матриц X того же порядка.

c) A и B – квадратные матрицы одного порядка. Может ли выполняться равенство $AB - BA = E$?

4. $A^T$ - транспонированная матрица, т.е. матрица строками которой служат столбцы матрицы A. Доказать, что

a) $(AB)^T = B^T A^T$

b) если $AA^T = 0$, то $A = 0$.

5. Квадратная матрица называется симметрической, если $A^T = A$.

a) будут ли сумма и произведение симметрических матриц симметрическими матрицами?

b) доказать, что матрицы $AA^T$ и $A^T A$ – симметрические для любой квадратной матрицы A.

6. Квадратная матрица называется кососимметрической, если $A^T = -A$. A и B – кососимметрические матрицы. Будет ли их произведение

a) кососимметрической матрицей ?

b) симметрической матрицей ?

7. Доказать ,что любую квадратную матрицу A можно представить , и притом единственным образом в виде A = B +C, где B –симметрическая матрица, а C –кососимметрическая матрица.

8. Матрицы A и B имеют порядок n. AB=BA для любой матрицы B. Доказать, что $A=\lambda E$.

9. Представить матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ как произведение элементарных матриц.

10. Решить систему матричных уравнений $\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

11. Выяснить, что происходит с матрицей A при умножении справа на элементарную матрицу.

12. Однозначно ли определен ступенчатый (главный ступенчатый) вид матрицы?

13. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

14. Найти все верхние треугольные матрицы третьего порядка, коммутирующие со всеми верхними треугольными матрицами того же порядка.

15. Вычислить $A^n$ , где $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## Глава 2. Системы линейных уравнений и линейные пространства.

1. Пусть система векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$ из пространства $R^n$ линейно независима. При каких $\lambda$ система векторов $\lambda\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_1} + \lambda\mathbf{a_2}$ будет линейно независимой?

2. Доказать, что любая часть линейно независимой системы векторов пространства $R^n$ также линейно независима. Верно ли аналогичное утверждение для линейно зависимой системы векторов?

3. В каком случае конечная система векторов $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_k}$ пространства $R^n$ имеет единственный базис?

4.Система $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ состоит из одного уравнения. Указать два различных базиса в подпространстве решений.

5. Векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ являются базисом линейной оболочки $L(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots \mathbf{a_k})$. Будут ли векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}, \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_3}$ базисом этой оболочки?

6. Сравнить размерности линейных оболочек векторов $L(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_k})$ и $L(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_k}, \dots, \mathbf{a_n})$ .

7. Задать линейную оболочку векторов $\mathbf{a_1} = (1\ 0\ 2\ 0)$ и $\mathbf{a_2} = (1\ 1\ 0\ 1)$ системой линейных уравнений.

8. $L_1$ и $L_2$ – линейные подпространства в $R^n$ . Будет ли линейным подпространством множество а) $L_1 \cap L_2$ , б) $L_1 \cup L_2$ ?

9. $L_1$ и $L_2$ – линейные подпространства в $R^n$ , $L_1 \subset L_2$ . Доказать, что $\dim L_1 \leq \dim L_2$ .

10. $L_1$ и $L_2$ – линейные подпространства в $R^n$ . $L_1 \subset L_2$ , $\dim L_1 = \dim L_2$ . Доказать, что $L_1 = L_2$ .

11. $L_1$ и $L_2$ – линейные подпространства в $R^n$ , $\dim L_1 + \dim L_2 > \dim R^n$ Доказать, что $L_1 \cap L_2$ содержит ненулевой вектор.

12. Проверить, что множество M является линейным подпространством в $R_5$, и задать его системой однородных линейных уравнений. Найти базис и размерность множества M .

a) $M=\left\{ x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta \in R \right\}$, b) $M=\left\{ x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta \in R \right\}$

c) $M=\left\{ x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta \in R \right\}$. d) $M=\left\{ x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta \in R \right\}$

13. Векторы **$a_1, a_2, a_3$** линейно зависимы, **в** принадлежит линейной оболочке этих векторов**.** Сколькими способами можно представить вектор **в** как линейную комбинацию векторов **$a_1, a_2, a_3$** ?

14. Докажите, что ранг суммы матриц не превосходит суммы рангов этих матриц.

15. Найти решение системы $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 = 1 \end{cases}$ при различных значениях параметра $\lambda$.

## Глава 3. Теория определителей .

1. Как изменится определитель матрицы порядка n ,если у всех его элементов изменить знак на противоположный?

2. Как изменится определитель матрицы порядка n, если его строки написать в обратном порядке?

3. Многочленом степени n от квадратной матрицы A называется выражение $f(A)= a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E$ .

a) Доказать, что для каждой квадратной матрицы существует многочлен f(x) такой ,что f(A)=0. ($n \geq 1$)

Такой многочлен называется аннулирующим многочленом матрицы A.

b) Доказать, что аннулирующих многочленов данной матрицы бесконечно много.

4. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - квадратная матрица второго порядка. Доказать, что многочлен $f(x) = x^2 - \mathrm{tr}A\, x + \det A$ будет аннулирующим для матрицы A.

5. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - квадратная матрица второго порядка, причем $A^2 = O$. Найти trA – след матрицы A.

6. Как изменится определитель матрицы порядка n, если его строки написать в обратном порядке?

7. $A^T = A$, $\det A \neq 0$. Будет ли $A^{-1}$ симметрической матрицей?

8. $A^T = -A$, $\det A \neq 0$. Будет ли $A^{-1}$ кососимметрической матрицей?

9. $A^T A = E$. Чему равен $\det A$?

10. A – целочисленная обратимая матрица. В каком случае матрица $A^{-1}$ будет целочисленной?

11. Решить уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots. & 1 \\ 0 & 1 & \ldots. & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ X=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & n \\ 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}$

12. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$ =0

13. Найти сумму алгебраических дополнений всех элементов определителя

$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$.

14. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

15. Как изменится $A^{-1}$, если в матрице A переставить две строки?

16. Как изменится $A^{-1}$, если в матрице A умножить строку на число , отличное от нуля?

17. Как изменится $A^{-1}$, если в матрице A к одной строке прибавить другую строку, умноженную на число?

18. Чему равен определитель целочисленной матрицы, если ее обратная матрица целочисленная?

19. A- квадратная матрица. $A^2 + 2A + E = 0$.

а) доказать, что A- невырожденная матрица.

в) найти $A^{-1}$.

20. $(E+A)^{-1}A$ – невырожденная диагональная матрица. Доказать, что A диагональная.

21. $A^k=O$. Доказать, что матрица E-A обратима и $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\ldots+A^{k-1}$. Будет ли обратимой матрица A + E?

22. Три прямые на плоскости $A_1x + B_1y + C_1=0$, $A_2x + B_2y + C_2=0$ и $A_3x + B_3y + C_3=0$ пересекаются в одной точке. Чему равен определитель матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$?

## Глава IV. Комплексные числа и многочлены.

1. Доказать неравенства:

a) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

b) Если $|z| < 1$, то $|z^2 - z + i| < 3$.

2. Доказать, что если $z+z^{-1} = 2\cos\varphi$, то $z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$

3. Совпадают ли множества ?

a) $\sqrt{z_1 z_2}$ и $\sqrt{z_1}\,\sqrt{z_2}$ , b) $\sqrt[3]{z_1 z_2}$ и $\sqrt[3]{z_1}\,\sqrt[3]{z_2}$ .

4. Как расположены точки $z_1, z_2, z_3$ на комплексной плоскости, если $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, а $z_1+z_2+z_3=0$.

5.Изобразить кривую на комплексной плоскости $z=\frac{1+ti}{1-ti}$, $t\in R$ .

6.Найти произведение всех корней степени n из 1. 7.

7. Доказать тождество $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$ и указать его геометрический смысл.

8.Изобразить на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих условию

a) $1\le |z - i| \le 2$, b) $\frac{\pi}{4} \le \arg i\bar{z} \le \frac{\pi}{2}$, c) Re(z+1)=1, d) $\operatorname{Im}\frac{1}{i\bar{z}}=1$.

9. Доказать, что многочлен $x^3\sin\alpha - 4x\sin 3\alpha + 8\sin 2\alpha$ делится на $x^2 - 4x\cos\alpha + 4$.

10. При каких a и b многочлен $p(x) = a x^{n+1} + b x^n + 1$ делится на $(x-1)^2$.

11.Доказать, что многочлен $p(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на $x^2 + x + 1$.

12.Какой многочлен делится на свою производную?

13.Найти кратность корня $x=1$ многочлена $x^{2n}-n\,x^{n+1}+n\,x^{n-1}-1$.

14.Решить уравнение $8x^3-12x^2-2x+3=0$, зная, что его корни образуют арифметическую прогрессию.

15.Определить соотношения между коэффициентами уравнения $x^3+px+q=0$, если его корни связаны соотношением $x_1=\frac{1}{x2}+\frac{1}{x3}$ .

16.Показать, что многочлен $x^5+ax^3+b$ не может иметь корней, отличных от нуля, выше второй кратности.

17. При каком условии многочлен $x^5+ax^3+b$ имеет корень кратности два, отличный от нуля.

18. При каком а многочлен $x^5-ax^2-ax+1$ имеет -1 корнем кратности не ниже второй.

19.Решить уравнение $36x^3-12x^2-5x+1=0$ ,если известно, что один из корней равен сумме двух других.

20. Найти сумму квадратов корней уравнения $x^5+10x^4+25x^3-10x^2-5x+7=0$.

21.Пусть $x_1,x_{2,\ldots\ldots,}x_n$ - корни многочлена $p(x)=a_nx^n+\ldots\ldots+a_1x+a_0$ .

a. Найти корни многочлена $a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+(-1)^na_0$ .

b. Найти корни многочлена $a_0x^n+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n$ .

22.Число называется алгебраическим, если оно - корень многочлена с целыми коэффициентами. Будет ли число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ алгебраическим?

23. Доказать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $a,b\in R$ операциями сложения и умножения матриц образуют поле и найти в нем матрицу J такую, что $J^2=-E$.

24. Разложить многочлен $x^5-1$ на неприводимые множители над полем R

## Глава 5. Евклидовы пространства.

1. V- $\{\alpha \in R;\ \alpha > 0\}$ $-$ множество положительных вещественных чисел с операциями сложения " $\alpha+\beta$ "= $\alpha\beta$ и умножения на число $\lambda\in R$ "$\lambda\alpha$"=$\alpha^\lambda$.

а). Будет ли V с указанными операциями линейным пространством ?

в). Найти базис пространства V.

с). Найти dim V.

d). Будут ли пространства V и $R^1$ изоморфны? Если да, то указать изоморфизм.

2. $L_1$ , $L_2$ $L_3$ – линейные подпространства в линейном пространстве V. Верно ли, что $L_1 \cap ( L_2+ L_3 ) = L_1 \cap L_2+ L_1 \cap L_3$ ?

3. $L_1$ , $L_2 \ldots L_n$ – линейные подпространства в линейном пространстве V такие, что $L_i \cap L_j =\{\mathbf{0}\}$. Будет ли сумма этих подпространств прямой ?

4. $L_1 =\{\mathbf{x}\in R^n , x_1 +\ldots+x_n =0\}$ ,$L_2 =\{\mathbf{x}\in R^n , x_1 =x_2 =\ldots= x_n \}$. Доказать, что $R^n$ – прямая сумма $L_1$ и $L_2$ .

5. Доказать что для любого линейного подпространства $L_1$ в пространстве $R^n$ найдется линейное подпространство $L_2$ такое, что $R^n$ – прямая сумма $L_1$ и $L_2$ .Однозначно ли определено подпространство $L_2$ ?

6. Пусть $V= L_1 \oplus L_2$ .Доказать, что $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim V$.

7. f(L)-функция, определенная на множестве линейных подпространств в $R^n$ , обладающая свойствами

a ) $f (L_1 + L_2 ) =f( L_1 )+ f( L_2 )$ ,если $L_1 \cap L_2 =0$ . b) Если dim(L)=1 ,то f(L)=1.

Доказать, что f(L)= dimL.

8.V=$P_2[x]$ –линейное пространство многочленов степени не выше второй . L –линейная оболочка многочленов t-1, $t^2+2$, $2t^2+3t+1$. Найти базис пространства V, содержащий базис подпространства L.

9.Скалярное произведение в пространстве $R^2$ задано матрицей Грама G(**i**,**j**) $=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.Найти

а) длину векторов **i** и **j** и угол между ними.

б) длину вектора **a**= (1,1).

в) проекцию вектора **a** на линейную оболочку вектора **i.**

г) ортонормированный базис в пространстве $R^2$.

10.Скалярное произведение в пространстве $R^3$ задано матрицей Грама G(i,j,к)$=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.L- линейная оболочка векторов $\mathbf{a_1}$=(1,0,1) и $\mathbf{a_2}$=(-1,1,1). Найти

а ) ортогональное дополнение к пространству L.

б) проекцию вектора **i** на линейное подпространство L.

в) длину ортогональной составляющей вектора **i** .

11. В пространстве $R^3$ скалярное произведение задано матрицей Грама

$$G(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти проекцию вектора **a** = $(1, \quad 1, \quad 1)$ на плоскость $x_1+2x_2-2x_3=0$.

12. В пространстве $R^3$ скалярное произведение задано матрицей Грама

$$G(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти проекцию вектора **a** = $(1, \quad 0, \quad 0)$ на прямую $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$.

13. В пространстве $R^3$ скалярное произведение задано матрицей Грама

$$G(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти ортогональное дополнение к плоскости $x+y+z=0$.

14. В пространстве $R^3$ скалярное произведение задано матрицей

$$G(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти ортогональное дополнение к прямой $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$.

## Глава 6. Линейные операторы.

1. Доказать, что линейный оператор переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую. Верно ли аналогичное утверждение для линейно независимой системы?

2. Описать все линейные операторы в $R^1$ и в $C^1$ . Указать их геометрический смысл.

3. Доказать, что всякое линейное подпространство является ядром некоторого линейного оператора. Однозначно ли определен этот оператор?

4. Доказать, что всякое линейное подпространство является образом некоторого линейного оператора.

5.Пусть ф- линейный оператор, определенный на линейном подпространстве L пространства $R^n$ .Доказать, что существует бесконечно много линейных операторов в пространстве $R^n$ совпадающих с ф на L.

6.Доказать, что образ линейного подпространства под действием линейного оператора также является линейным подпространством. Как связаны размерности этих двух подпространств?

7. ф – оператор умножения слева на матрицу $A =\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ в пространстве $M_2$ . Найти его матрицу в базисе $E_1 =\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ , $E_2 =\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ , $E_3 =\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ , $E_4 =\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ .

8. ф – оператор умножения справа на матрицу $A =\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ в пространстве $M_2$ . Найти его матрицу в базисе $E_1 =\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ , $E_2 =\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ , $E_3 =\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ , $E_4 =\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ .

9.ф – оператор транспонирования в пространстве $M_2$ . $ф(A)=A^T$. Доказать его линейность и найти его матрицу в базисе $E_1 =\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ , $E_2 =\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ ,

$E_3 =\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ , $E_4 =\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ .

10. Линейный оператор отображает базис пространства $R^n$ снова в некоторый базис этого пространства. Будет ли оператор обратимым?

11.ф – оператор умножения на матрицу $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ в пространстве $R^2$ .Каков его геометрический смысл?

12.ф – оператор умножения на матрицу $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ в пространстве $R^2$ .Каков его геометрический смысл?

13.ф – оператор умножения на матрицу $\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$ в пространстве $R^2$ .Каков его геометрический смысл?

14. $A =\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ - матрица линейного оператора в базисе **i ,j** . Найти матрицу этого оператора в базисе **j ,i**.

15.Доказать, что множество линейных операторов в пространстве $R^2$ относительно операций сложения и умножения на число является линейным пространством. Найти его размерность и какой-нибудь базис.

16. Доказать, что в пространстве $R^2$ существует единственный линейный оператор, переводящий векторы $\mathbf{a_1}$=(1,1) , $\mathbf{a_2}$=(1,0) соответственно в векторы

$\mathbf{b}_1=(0,1)$, $\mathbf{b}_2=(1,-1)$. Найти матрицу этого оператора в базисе **i,j**. Верно ли это утверждение для произвольного набора векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ ?

17. Оператор ф отображает $R^3$ в $R^3$ по формуле $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1+3, x_2-5, x_3)$. Найти ядро Kerф . Будет ли оно линейным подпространством? Как это согласуется с теорией?

18.Найти матрицу линейного оператора ф в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k, \ldots, \mathbf{e}_n$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ Є Kerф. Будут ли векторы ф($\mathbf{e}_{k+1}$)......ф($\mathbf{e}_n$) линейно зависимыми?

19. ф – оператор поворота на плоскости на угол $\alpha$, $\psi$ – симметрия относительно прямой y=0. Найти операторы $\psi\phi$ и $\phi\psi$. ( Описать их геометрически ).

20. ф – оператор умножения на матрицу A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в пространстве $R^2$ . $A^n=O$ ($n > 2$). Доказать, что $\phi^2=0$.

21. Линейный оператор ф , действующий в пространстве $R^n$ , называется идемпотентным, если $\phi^2=\phi$. Доказать , что если ф идемпотентный оператор, то

a) оператор $\psi = id - \phi$ идемпотентный,

b) Ker ф = Im ψ,   c) Im ф = Ker ψ ,

d) V = Kerф ⊕ Imф.

Выяснить геометрический смысл идемпотентного оператора.

( проектирование на линейное подпространство вдоль другого линейного подпространства ).

22. Линейный оператор ф , действующий в пространстве $R^n$ , называется инволютивным, если $\phi^2=id$.

а). Найти Kerф и Imф.

в). Проверить, что $L_1=\{x; \varphi(x)=x\}$, $L_2=\{x; \varphi(x)=-x\}$ инвариантные подпространства оператора ф.

с). Доказать, что $R^n = L_1 \oplus L_2$

d). Выяснить геометрический смысл инволютивного оператора.

( симметрия относительно $L_1$ вдоль $L_2$) .

23. Доказать, что ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого сомножителя.

## Глава 7. Канонический вид линейного оператора.

1. Все ненулевые векторы пространства $R^3$ – собственные векторы линейного оператора ф. Что это за оператор?

2. ф – ненулевой линейный оператор в пространстве $R^2$, такой что $ф^2 =0$.

Каким может быть канонический вид матрицы этого оператора?

3. Линейный оператор ф необратим. Доказать. что у него есть собственные векторы.

4. Линейный оператор ф обратим. Доказать. что ф и $ф^{-1}$ имеют одни и те же собственные векторы .

5. Доказать, что характеристические многочлены матриц А и $A^T$ совпадают.

6. ф – линейный оператор в пространстве матриц $M_2$ . ф: $A \to A^T$ . Найти его собственные векторы и собственные значения.

7. ф- оператор в пространстве многочленов $P_n[x]$ . ф(p(x))= x p′(x). Проверить линейность этого оператора, найти его матрицу в стандартном базисе, собственные векторы и собственные значения.

8. ф- оператор в пространстве многочленов $P_n[x]$ . ф(p(x))=p(ax+b). Проверить линейность этого оператора, найти его матрицу в стандартном базисе, собственные векторы и собственные значения.

9. ф – оператор умножения на матрицу $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & в \end{pmatrix}$ в пространстве $R^2$ .

$M=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\ x^2 + y^2 = 1\right\}$ – подмножество в пространстве $R^2$ .Найти образ этого подмножества. Описать его геометрически.

10. Пусть операторы ф и ψ коммутируют, тогда собственное подпространство $V_\lambda$ оператора ф инвариантно относительно оператора ψ.

11. Пусть $\lambda^2$ –собственное значение оператора $ф^2$, тогда одно из чисел λ или –λ является собственным значением оператора ф.

12. Доказать, что собственный вектор оператора ф будет собственным вектором оператора $ф^2$ .

13. Найти инвариантные подпространства оператора дифференцирования в пространстве многочленов $P_n\,[x]$ .

14. Описать все инвариантные подпространства оператора умножения на Жорданову клетку.

15. В каком случае матрица A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ подобна диагональной?

16. ф – оператор умножения на матрицу A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в пространстве $R^3$ .

Будет ли оператор диагонализируемым? Найти Жорданову форму матрицы A.

17. ф – оператор умножения на матрицу A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Будет ли оператор диагонализируемым? Найти канонический вид матрицы оператора ф .

18. ф – оператор умножения на матрицу A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Будет ли оператор диагонализируемым? Найти Жорданову форму матрицы A.

19. ф – оператор умножения на матрицу A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Будет ли оператор диагонализируемым? Найти Жорданову форму матрицы A.

20. ф- линейный оператор в $R^n$, переводящий линейно независимые векторы **$a_1$, $a_2$ …, $a_n$** в векторы **$b_1$, $b_2$ ..., $b_n$**. A и B- матрицы, в столбцах которых стоят координаты соответственно векторов **$a_1$, $a_2$ …, $a_n$** и **$b_1$, $b_2$ ..., $b_n$** в стандартном базисе **$e_1$ ,$e_2$ ,…, $e_n$**. Найти матрицу оператора ф в базисах **$a_1$, $a_2$ …, $a_n$** и **$e_1$ ,$e_2$ ,…, $e_n$**.

21. Линейный оператор ф в пространстве $R^n$ имеет n различных собственных значений . Найти все инвариантные подпространства оператора ф . Сколько их?

## Глава 8. Линейные операторы в евклидовых пространствах.

1. Доказать, что фф * - самосопряженный оператор, спектр которого лежит на полуоси x$\geq 0$.

2. Доказать, что если $|\mathbf{x}|=|\varphi(\mathbf{x})|$ для любого вектора **x**,то ф- изометрический оператор.

3.Пусть ф и f – самосопряженные операторы, причем фf=fф. Доказать, что фf-самосопряженный оператор. Верно ли обратное утверждение?

4.Доказать, что Kerф* является ортогональным дополнением к Im ф.

5.Доказать, что Imф* является ортогональным дополнением к Ker ф.

6. Евклидово пространство E – прямая сумма линейных подпространств $L_1$ и $L_2$ .ф – оператор проектирования на $L_1$ вдоль $L_2$ . Найти ф* .

7. Евклидово пространство E – прямая сумма линейных подпространств $L_1$ и $L_2$ ф – оператор проектирования на $L_1$ вдоль $L_2$. Доказать, что ф =ф* тогда и только тогда, когда линейные подпространства ортогональны.

8. Доказать, что если ф – самосопряженный оператор , спектр которого лежит на полуоси x$\geq 0$, то существует самосопряженный оператор f , , спектр которого также лежит на полуоси x$\geq 0$ , и такой, что $f^2$ =ф.

9. Линейный оператор ф в вещественном евклидовом пространстве называется кососимметрическим, если ф=-ф*. Доказать, что любой линейный оператор в вещественном евклидовом пространстве является суммой симметрического ( самосопряженного ) и кососимметрического операторов. Обобщить это утверждение на комплексный случай.

10. Доказать, что если векторы **x** и **y** в евклидовом пространстве имеют одинаковую длину, то существует изометрический оператор, переводящий **x** в **y.**

11. Линейный оператор в евклидовом пространстве самосопряженный и изометрический одновременно. Каков его геометрический смысл?

12. V = $R^3$ , ф-оператор поворота на угол $90^o$ против часовой стрелки вокруг оси OX, ψ – оператор поворота на угол $90^o$ против часовой стрелки вокруг оси OX. Выяснить

а) коммутируют ли операторы ф и ψ?

в) коммутируют ли операторы $ф^2$ и $ψ^2$?

с) каков геометрический смысл произведений фψ и ψф ?

## Глава 9. Квадратичные формы и поверхности второго порядка.

1.f(x) –линейная форма на пространстве V, dim V = n. Ker f= $\{x; f(x) = 0\}$ - ядро формы .Доказать, что если Ker $f_1$ =Ker $f_2$ , то $f_1 = \lambda f_2$ .

2.Доказать, что Ker f – линейное подпространство в V, и найти его размерность.

3. Доказать, что для любой ненулевой линейной формы в V существует базис, в котором матрица формы имеет вид $A_f$ =(100....0).

4.Доказать, что множество линейных форм на V образует линейное пространство относительно операций сложения и умножения на число, и найти его размерность.

5.Пусть $f_1$ и $f_2$ линейные формы на V , причем $f_1(x)\, f_2(x)=0$. Доказать,что одна из форм нулевая.

6. V=$P_n[x]$- пространство многочленов степени не выше n. f(p(x))=p(0).

а) проверить, что f- линейная форма.

в) найти ее матрицу в базисе 1,x,…,$x^n$ .

7. V=$P_n[x]$- пространство многочленов степени не выше n. f(p(x))=$\int_0^1 p(x)dx$

а) проверить, что f- линейная форма.

в) найти ее матрицу в базисе 1,x,…,$x^n$ .

8.V=$M_2$ –пространство матриц второго порядка. f(A)=TrA- след матрицы A.

а) проверить, что f- линейная форма.

в) найти ее матрицу в базисе $E_i^j$ i,j=1,2.

9 .E-евклидово пространство над полем действительных чисел, ф-линейный оператор с матрицей $A_\phi$ в стандартном базисе,f(x,y)=(x,ϕ(y)).

а ) проверить, то f-билинейная форма.

в ) будет ли эта форма симметрической?

с) найти ее матрицу в стандартном базисе.

10.E-евклидово пространство. ф-линейный оператор с матрицей $A_\phi$ , f(x,y)-билинейная форма с матрицей $A_f$ в стандартном базисе, g(x,y)=f(ϕ(x),(y)).

а ) проверить, то g-билинейная форма.

в ) будет ли эта форма симметрической?

с) найти ее матрицу в стандартном базисе.

11. Найти симметрическую билинейную форму, соответствующую квадратичной форме $F(x)=f(x,x)$, где $f(x,y)=2x_1y_1 -3x_1y_2-4x_1y_3+x_2y_1 -5x_2y_2+x_3y_3$.

12.Доказать, что симметрические билинейные формы образуют линейное пространство относительно операций сложения и умножения на число. Найти размерность этого пространства.

13.При каких значениях λ квадратичная форма $F(x)=5x_1^2 +x_2^2 +\lambda x_3^2 +4x_1x_2 -2x_1x_2 -2x_1x_3 -2x_2x_3$ будет положительно определенной?

14. При каких значениях λ квадратичная форма $F(x)=-x_1^2 +\lambda x_2^2 -x_3^2 +4x_1x_2 +8x_2x_3$ будет отрицательно определенной?

15. $V=M_2$ –пространство матриц второго порядка, $f(A,B) = Tr(AB)$. Проверить, что f билинейная форма. Пусть $F(A)$-соответствующая ей квадратичная форма. Найти ее индексы инерции.