РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления

Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова

Труды

Четвертой Международной конференции по проблемам управления

(26 – 30 января 2009 года)

Москва 2009

УДК 007(063)

Четвертая международная конференция по проблемам управления
(26 – 30 января 2009 года): Сборник трудов.
– М.: Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2009. – 2030 с.
ISBN – 978-5-91450-026-6

В книге представлены полные тексты пленарных и большинства секционных докладов МКПУ-IV (Четвертой Международной конференции по проблемам управления, которая состоялась с 26 по 30 января 2009 г. в Москве в стенах Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН и входила в состав Мультиконференции "Теория и системы управления").

Рассматриваются фундаментальные основы теории управления; вопросы оптимизации и синтеза систем управления; теории устойчивости; оптимального управления и теории распределенных систем; теории робастных и адаптивных систем и стохастической теории управления; междисциплинарных моделей социально-экономических, организационных и медико-биологических систем; создания средств формализации процессов политического и рефлексивного управления, теории выбора и принятия решений; управления безопасностью; распознавания образов, теории классификации и обработки сложно организованных данных, управления инвестиционными процессами; управления технологическими процессами и промышленными предприятиями; разработки новых технических средств измерения, контроля и управления; теории систем логического управления; надежности и технической диагностики; теории систем с искусственным интеллектом, а также вопросы описания мультиагентных систем и группового управления; информационных технологий в управлении, вычислительно-информационных сетей и массового обслуживания; автоматизированного проектирования и моделирования САУ; управления транспортными потоками и логистики; управления подвижными объектами; а также вопросы организации научно-преподавательской деятельности в области управления. В представленных докладах развиваются новые, оригинальные походы.

Под общей редакцией академика РАН С.Н. Васильева

Утверждено к печати Программным комитетом
Четвертой Международной конференции по проблемам управления.

Текcты тезисов печатаются в виде, утвержденном Программным комитетом

Спонсоры конференции – РФФИ и ЗАО "Концерн Группа Союз"

ISBN – 978-5-91450-026-6

ПРОБЛЕМА ВЫБОРА НЕСКОЛЬКИХ ЛУЧШИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПРЕДПОЧТЕНИЯХ[1]

Подиновский В.В.

Государственный университет – Высшая школа экономики
Россия, 109028, г. Москва, Покровский бульвар, 11
E-mail: podinovski@nccom.ru

Аннотация: Дается строгая постановка задачи формирования набора, включающего в свой состав заданное число наиболее предпочтительных элементов заданного конечного множества объектов, на котором определен частичный квазипорядок. Исследуются свойства оптимальных и недоминируемых наборов и входящих в них объектов.

Введение

В настоящее время активно развивается и приобретает все большее прикладное значение математическая теория принятия (выработки, анализа, разработки) решений. В указанной теории внимание сосредоточено в основном на *задачах единичного выбора*, т.е. задачах выделения из заданного множества объектов (вариантов, планов, стратегий, альтернатив) одного наилучшего, или оптимального объекта (см., например, [1, 2]). Если предпочтения моделируются несвязным бинарным отношением – строгим частичным порядком (это типично, например, для многокритериальных задач, когда предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР) выявлены не полностью [3]), то претендентами на оптимальный объект являются недоминируемые объекты. (Объект называется *недоминируемым*, если во множестве заданных объектов нет более предпочтительного объекта согласно отношению строгого порядка.)

Однако на практике часто встречаются и иные постановки задач принятия решений. К таковым относятся задачи выбора нескольких (заданного числа $l > 1$) лучших объектов из заданного конечного множества. Такие задачи можно разбить на две группы. К одной из групп относятся задачи, в которых вначале нужно выделить несколько лучших объектов, а затем уже из выделенных объектов выбрать один наилучший. Примером служат задачи создания сложных систем: на раннем этапе проектирования из нескольких альтернативных вариантов системы выделяются два (или три) лучших, а затем после более тщательной проработки из них выбирается один наилучший вариант, который в дальнейшем и проектируется с требуемой степенью полноты. Такого рода задачи можно назвать *задачами двухэтапного единичного выбора*. В них на роль лучших также могут претендовать только недоминируемые объекты.

К другой группе относятся *задачи множественного выбора*, или *задачи выбора подмножества*, в которых предполагается использование всех l отобранных лучших объектов (без отсева каких-либо из них). Примерами такого типа задач являются различного рода конкурсы, тендеры и т.п.

Если на множестве всех объектов задано отношение предпочтения, то для решения задачи выбора l лучших из них необходимо расширить это отношение на множество всех наборов, содержащих l объектов. Проблеме расширения отношения предпочтения, заданного на конечном множестве, до отношения на множестве его подмножеств, и построению функции ценности на нем посвящен целый ряд работ [4 – 6]. Однако в них предполагалось, что расширению должно подвергаться полное упорядочение, и притом на множество всех подмножеств данного множества, а также принимался ряд дополнительных допущений (формулируемых в форме аксиом о свойствах искомого связного отношения на множестве подмножеств). Наша цель – расширение частичного упорядочения, и только на множество наборов из l объектов, причем без принятия каких-либо дополнительных допущений.

[1] Работа выполнена при поддержке Научного фонда ГУ-ВШЭ (грант № 08-01-0032).

В литературе рассматривались два подхода к выделению кандидатов на лучшие объекты в таких задачах. Согласно первому из них, следует взять все недоминируемые объекты (они составляют «первый слой»). Если таких объектов меньше l, то к ним нужно добавить второй «слой» (образуемый недоминируемыми объектами во множестве, оставшемся после удаления из исходного множестве объектов первого «слоя»). Если всех этих объектов вместе взятых будет меньше l, то к ним нужно добавить объекты третьего «слоя», и т.д. до тех пор, пока впервые число всех выделенных объектов будет не менее l. Такой подход применительно к отношению Парето описан, например, в [7]. Второй подход предполагает, что нужно сразу взять все l таких «слоев». Но еще в [8] было показано, что первый подход необоснованно сужает число претендентов на лучшие объекты, а второй, напротив, необоснованно расширяет его. (Соответствующий пример будет дан и в этой статье.)

В [8] применительно к задачам множественного выбора были введено обобщение понятия недоминируемого объекта: объект называется *l-недоминируемым*, если существует не более чем l –1 объектов, более предпочтительных, чем он, согласно отношению строгого порядка. Там же было показано, что на роль лучших могут претендовать лишь *l-недоминируемые* объекты. В [9] были приведены основные свойства l-недоминируемых объектов, даны формулы для расчета оценок эффективности решающих правил в задачах множественного выбора и оценена эффективность решающего правила Парето. В [10] были получены оценки эффективности решающих правил, использующих информацию о важности однородных критериев [11]. В [12, 13] дана сводка как полученных ранее, так и новых результатов по оценке эффективности ряда решающих правил применительно к различным постановкам задач принятия решений, включая задачи множественного выбора, и в том числе для правила, использующего сведения об относительной важности неоднородных критериев [14]. В [15] было показано, что уровень развития обсуждаемой теории явно недостаточен и определено направление ее дальнейшей разработки.

В данной работе задача выбора нескольких лучших объектов изучается в рамках общей методологии выбора при частичных отношениях предпочтения, формулируется и обосновывается порядок формирования набора лучших объектов.

1 . Оптимальные и недоминируемые наборы объектов

Будем рассматривать задачу выбора (окончательного отбора) l лучших объектов из конечного множества объектов X. Будем считать, что $|X| = n$, т.е. всего объектов n, причем $n > l > 1$. На множестве X задано отношение нестрогого предпочтения ЛПР R: xRy означает, что объект x не менее предпочтителен, чем y. Отношение R порождает отношения (строгого) предпочтения P, безразличия I и несравнимости N: xIy верно, когда справедливо xRy и yRx; xPy выполняется тогда, когда xRy верно, но yRx неверно; xNy имеет место, когда неверно ни xRy, ни yRx. Отношение R есть квазипорядок (т.е. оно рефлексивно и транзитивно); при этом отношение предпочтения P оказывается порядком (оно иррефлексивно и транзитивно), а отношение безразличия I – эквивалентностью (оно рефлексивно, симметрично и транзитивно). Кроме того, P транзитивно по I: из xPy и yIz, а также из xIy и yPz следует xPz [16].

Введем в рассмотрение множество L наборов (комплектов) из l объектов. Это множество также конечно: таких наборов всего C_n^l. Для наборов из L будем использовать обозначения типа $A = \{a^1, \ldots , a^l\}$ и $B = \{b^1, \ldots , b^l\}$. Пусть $\prod$ – множество перестановок множества $\{1, \ldots, l\}$. Под перестановкой набора (множества) $A = \{a^1, \ldots , a^l\}$, соответствующей $\pi \in \prod$, понимается кортеж (упорядоченное множество) $\pi(A) = \langle a^{\pi(1)}, \ldots, a^{\pi(l)}\rangle$. Например, если $l = 3$ и $\pi = (3, 1, 2)$, то $\pi(A) = \langle a^3, a^1, a^2\rangle$.

Поскольку порядок объектов в выделенном наборе никакой роли не играет, то, в соответствии с сутью задачи множественного выбора, зададим на множестве L отношение нестрогого предпочтения R^l следующим образом.

Определение 1. Соотношение AR^lB выполнено тогда и только тогда, когда существуют такие перестановки $\pi, \rho \in \Pi$, что справедливо

$$a^{\pi(i)}Rb^{\rho(i)},\ \ i = 1, \ldots, l. \tag{1}$$

Примечание 1. Определение 1 родственно одному из определений отношения нестрогого предпочтения в многокритериальных задачах с равноважными критериями [17].

Примечание 2. Легко понять, что определение 1 равносильно каждому из следующих двух определений:

$$AR^lB \Leftrightarrow \exists\pi\in\prod: a^iRb^{\pi(i)},\ i = 1, \ldots, l;\ AR^lB \Leftrightarrow \exists\pi\in\prod: a^{\pi(i)}Rb^i,\ i = 1, \ldots, l. \qquad (2)$$

Отношение R^l, как нетрудно убедиться, является квазипорядком. Оно порождает на L отношение (строгого) предпочтения – порядок P^l и отношение безразличия – эквивалентность I^l. Понятно, что AI^lB выполняется, когда в (1) [или в (2)] при каждом i вместо R можно подставить I, и AP^lB верно, когда в (1) [или в (2)] хотя бы при одном i вместо R можно подставить P.

Определение 2. Набор A из L называется *строго оптимальным* (соответственно *оптимальным, недоминируемым*), если для любого набора $B\in L$, отличного от A, верно AP^lB (соответственно верно AR^lB, неверно BP^lA). Набор, не являющийся оптимальным (недоминируемым), называют *неоптимальным* (соответственно, *доминируемым*).

Пусть $P^l(L)$, $R^l(L)$, $\overline{P}^l(L)$ – множества строго оптимальных, оптимальных и недоминируемых наборов соответственно. Согласно определениям 2 – 4, справедливы соотношения: $P^l(L) \subseteq R^l(L) \subseteq \overline{P}^l(L)$. (3)

Если строго оптимальный набор существует, то он, очевидно, исчерпывает множество $P^l(L)$ [причем $R^l(L) = P^l(L)$] и искомые l лучших объектов определяются однозначно – это все объекты из такого набора. При этом в (3) оба $\subseteq$ выполняются как =. Пусть такого набора нет, но существует оптимальный набор. Даже если он не единствен, то все оптимальные наборы эквивалентны (по I^l). Поэтому любой их них может с «равным правом» претендовать быть наилучшим, а образующие его объекты – считаться l лучшими. При этом второе (правое) $\subseteq$ в (3) выполняется как =. Наконец, если и оптимальных наборов нет, то в силу конечности множества L обязательно будут существовать недоминируемые наборы. Более того, множество всех таких наборов будет внешне устойчивым: для любого набора $B \in \overline{P}^l(L)$ найдется набор $A \in \overline{P}^l(L)$ такой, что верно AP^lB (см. приведенную ниже теорему 2). Следовательно, претендентами на оптимальный набор могут быть лишь недоминируемые наборы, а на роль лучших могут претендовать лишь объекты из таких наборов.

К сожалению, в последнем случае (он чаще всего может встретиться на практике, если информация о предпочтениях ЛПР и/или неопределенных факторах неполна, так что отношение R лишь частичное и существует «много» объектов, не сравнимых по R), множество $\overline{P}^l(L)$ будет содержать не сравнимые по R^l наборы. И для осмысленного (обоснованного) выбора одного набора из множества всех недоминируемых необходимо расширить отношение R^l. А это можно осуществить лишь за счет расширения отношения R, для чего необходимо привлечь дополнительную информацию о предпочтениях ЛПР (если это, конечно, возможно) и/или принять дополнительные допущения о свойствах его предпочтений и проверить их выполнение.

Пример 1. Пусть на множестве X, состоящем их пяти объектов, определено отношение нестрогого предпочтения R – квазипорядок, граф которого представлен на рис. 1. Требуется выбрать три лучших объекта (l = 3). Всего наборов из трех объектов C_5^3 = 10. Их частичное упорядочение согласно R^3 представлено на рис. 2. Здесь оптимального (и, тем более, строго оптимального) набора нет. Недоминируемых наборов три – это $\{x^1, x^2, x^3\}$, $\{x^1, x^2, x^4\}$ и $\{x^1, x^3, x^4\}$, причем последние два эквивалентны: $\{x^1, x^2, x^4\}I^3\{x^1, x^3, x^4\}$.

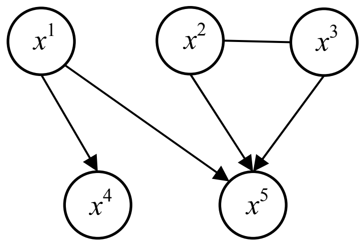

Рис. 1. Граф квазипорядка *R* на множестве объектов.

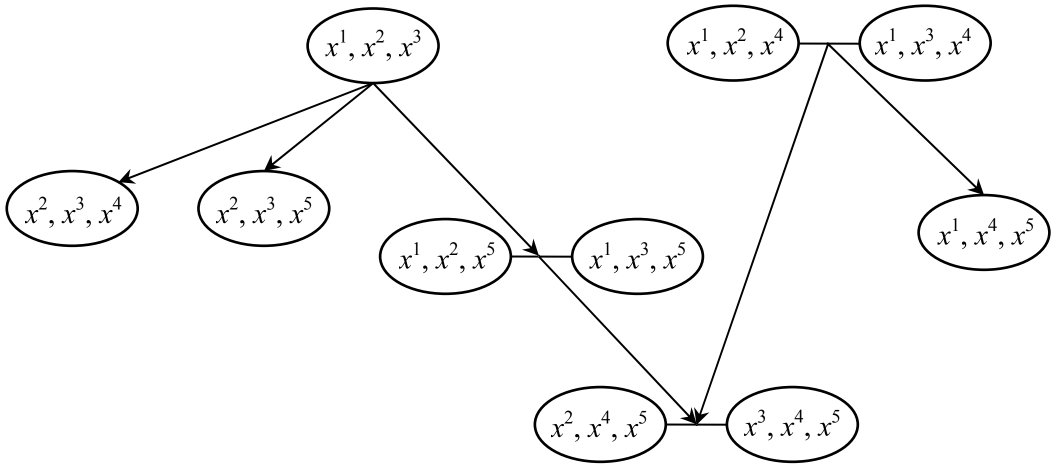

Рис. 2. Частичное упорядочение наборов согласно R^3.

Говорят [16, 18], что квазипорядок $\hat{R}$ *непротиворечиво продолжает* квазипорядок *R,* или что *R* является *подотношением* отношения $\hat{R}$*,* и пишут $\hat{R} \succ R$, если верны соотношения

$$\hat{R} \supset R, \;\; \hat{I} \supseteq I, \;\; \hat{P} \supseteq P$$

(второе из них есть следствие первого). Из этих соотношений следует, что

$$P^l(L) \subseteq \hat{P}^l(L), \quad R^l(L) \subseteq \hat{R}^l(L), \quad \overline{\hat{P}}^l(L) \subseteq \overline{P}^l(L). \tag{4}$$

Соотношения (4) показывают, что при непротиворечивом расширении отношения нестрогого предпочтения *R* множества $P^l(L)$ и $R^l(L)$, вообще говоря, расширяются, а множество $\overline{P}^l(L)$ сужается. Если $\hat{R}$ будет связным квазипорядком (т.е. несравнимых объектов не будет), то множество $\hat{R}^l(L)$ будет не пусто. Следовательно, при «достаточно связном» отношении нестрого предпочтения $\hat{R}$ окажется выполненным равенство $\hat{R}^l(L) = \overline{\hat{P}}^l(L)$ и любой набор из $\hat{R}^l(L)$ можно будет считать решением рассматриваемой задачи выбора *l* лучших объектов.

2. Строго *l*-наилучшие, *l*-наилучшие и *l*-недоминируемые объекты

Поскольку выделять наилучшие и недоминируемые наборы непосредственно на основании их определения 1 [с использованием (1) или (2)] весьма обременительно даже при «не очень широком» множестве объектов *X*, то встает вопрос о поиске конструктивных способов решения возникающей проблемы. Для этого оказываются полезными следующие понятия.

Определение 3. Объект x называется *строго l-наилучшим* (соответственно *l-наилучшим*, *l-недоминируемым*), если xPy верно для всех объектов y, отличных от x, кроме, быть может, некоторого их числа, меньшего, чем l(соответственно если xRy верно для всех объектов y, кроме, быть может, некоторого их числа, меньшего, чем l; если число объектов y, для которых верно yPx, меньше, чем l). Объект, не являющийся l-недоминируемым, называется *l-доминируемым.*

Отметим, что если эквивалентность I есть отношение равенства, то понятия строго l-наилучшего и l-наилучшего объектов совпадают. А при $l = 1$ определения l-наилучших и l-недоминируемых объектов оказываются соответственно определениями оптимального и недоминируемого объектов, широко используемыми при анализе задач оптимизации (задач выбора одного наилучшего объекта).

Пусть $P_l(X), R_l(X), \overline{P}_l(X)$ − множества строго l-наилучших, l-наилучших и l-недоминируемых объектов соответственно. Непосредственно из определения 2 вытекает, что верны утверждения:

$$P_l(X) \subseteq R_l(X) \subseteq \overline{P}_l(X)\,; \tag{5}$$

$$\text{Если } k < l, \text{ то } P_k(X) \subseteq P_l(X),\ R_k(X) \subseteq R_l(X),\ \overline{P}_k(X) \subseteq \overline{P}_l(X). \tag{6}$$

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения:

1.1. Число строго l-наилучших объектов не может превосходить l.

1.2. Число классов эквивалентности I в $R_l(X)$ не больше, чем l.

1.3. Множество l-недоминируемых объектов не пусто и *внешне l-устойчиво*:

1.3.1. если $x \notin \overline{P}_l(X)$, то в $\overline{P}_l(X)$ найдется не менее l объектов y, таких, что yPx;

1.3.2. если $x^1, \dots, x^s \notin \overline{P}_l(X)$, $x^{s+1}, \dots, x^l \in \overline{P}_l(X)$, где $s \le l$, то в $\overline{P}_l(X)$ найдётся s объектов $x^{01}, \dots, x^{0s}$, отличных от $x^{s+1}, \dots, x^l$ и таких, что $x^{01}Px^1, \dots, x^{0s}Px^s$.

1.4. Множества $P_l(X)$, $R_l(X)$ и $\overline{P}_l(X)$ *замкнуты сверху по R*:

1.4.1. если $x \in P_l(X)$ и yRx, то $y \in P_l(X)$;

1.4.2. если $x \in R_l(X)$ и yRx, то $y \in R_l(X)$;

1.4.3. если $x \in \overline{P}_l(X)$ и yRx, то $y \in \overline{P}_l(X)$.

1.5. Объекты из разных множеств соотносятся следующим образом:

1.5.1. если $x \in \overline{P}_l(X)$ и $y \notin \overline{P}_l(X)$, то xNy или xPy;

1.5.2. если $x \in R_l(X)$ и $y \notin \overline{P}_l(X)$, то xPy;

1.5.3. если $x \in R_l(X)$ и $y \in \overline{P}_l(X) \setminus R_l(X)$, то xNy или xPy;

1.5.4. если $x \in P_l(X)$ и $y \in R_l(X) \setminus P_l(X)$, то xNy или xPy.

1.6. Условия $|\overline{P}_l(X)| = l$, $|P_l(X)| = l$ и $\overline{P}_l(X) = P_l(x)$ равносильны.

1.7. Если $R' \succ R$, то $P_l(X) \subseteq P'_l(X)$, $R_l(X) \subseteq R'_l(X)$, $\overline{P}'_l(X) \subseteq \overline{P}_l(X)$.

1.8. Для $x \in \overline{P}_l(X) \setminus R_l(X)$ существуют квазипорядки $R' \succ R$ и $R'' \succ R$ такие, что $x \in R_l'(X)$, но $x \notin R_l''(X)$.

1.9. Если выполнено условие

$$R_l(X) = \overline{P}_l(X)\,, \tag{7}$$

то для любого квазипорядка $R' \succ R$ верно равенство $R'_l(X) = R_l(X)$.

1.10. Если $P_l(X) = \overline{P}_l(X)$, то для любого квазипорядка $R' \succ R$ верно равенство $P'_l(X) = P_l(X)$.

1.11. Пусть эквивалентность I есть отношение равенства. Тогда:

1.11.1. справедливо равенство $R_l(X) = P_l(X)$;

1.11.2. число вариантов в $R_l(X)$ не больше l;
1.11.3. если $|R_l(X)| = l$, то верно равенство (7).
1.12. Если квазипорядок R связный, то верно равенство (7).
1.13. При $k < l$ справедливы утверждения:
1.13.1. если $P_k(X) \subset P_l(X)$, то $|P_k(X)| \leq l - 1$;
1.13.2. если $R_k(X) \subset R_l(X)$, то $|P_l(X) \cup R_k(X)| \leq l - 1$.

Примечание 3. Если эквивалентность I не является отношением равенства, то выполнение условия $|R_l(X)| \geq l$ не гарантирует справедливости равенства (7).

***Пример* 2.** В условиях примера 1:

$$P_3(X) = \{x^1\} \subset R_3(X) = \{x^1, x^2, x^3\} \subset \overline{P}_3(X) = \{x^1, x^2, x^3, x^4\} \subset X.$$

Заметим, что здесь $|R_3(X)| = 3$, однако оптимального (и, тем более, строго оптимального) набора нет.

3. Использование *l*-наилучших и *l*-недоминируемых объектов для формирования оптимальных или недоминируемых наборов

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения:
2.1. Существование и свойства строго оптимального набора:
2.1.1. строго оптимальный набор может состоять только из строго l-наилучших объектов;
2.1.2. строго оптимальный набор существует тогда и только тогда, когда $|P_l(X)| = l$, причем $P^l(L) = \{P_l(X)\}$; строго оптимальный набор единствен.
2.2. Существование и свойства оптимальных наборов:
2.2.1. в оптимальный набор могут входить только l-наилучшие объекты;
2.2.2. оптимальный набор включает все строго l-наилучшие объекты;
2.2.3. если $|R_l(X)| = l$, то оптимальный набор существует, причем $R^l(L) = = \{R_l(X)\} = P^l(L)$, тогда и только тогда, когда выполнено равенство (7);
2.2.4. если $|R_l(X)| > l$, то оптимальный набор существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство (7) и в $R_l(X)$ существует наименьший по R объект;
2.2.5. если сужение эквивалентности I на множество $\overline{P}_l(X)$ является отношением равенства, то выполнение равенства $|R_l(X)| = l$ есть необходимое и достаточное условие существования оптимального набора, причем $R^l(L) = \{R_l(X)\} = P^l(L)$;
2.2.6. если $k < l$, $R_k(X) \subset R_l(X)$ и объект $x \in R_k(X)$ не включен в набор $A \in L$, то этот набор не является оптимальным;
2.3. Существование и свойства недоминируемых наборов:
2.3.1. каждый недоминируемый набор состоит только из l-недоминируемых объектов;
2.3.2. каждый недоминируемый набор включает все строго l-наилучшие объекты;
2.3.3. множество недоминируемых наборов не пусто и внешне устойчиво при любых n, l и R;
2.3.4. если $x \notin A$, $y \in A$ и верно xPy, то набор A является доминируемым.

***Пример* 3.** В условиях примера 1 три недоминируемых набора – $\{x^1, x^2, x^3\}$, $\{x^1, x^2, x^4\}$ и $\{x^1, x^3, x^4\}$. Каждый из указанных наборов состоит из 3-недоминируемых объектов и содержит единственный строго 3-оптимальный объект x^1. Заметим, что равенство (7) здесь не выполняется и в $R_3(X)$ нет наименьшего по R объекта.

При формировании оптимальных или же недоминируемых наборов следует опираться на теорему 2 и учитывать свойства l-наилучших и l-недоминируемых объектов. Прежде всего, согласно 2.3.1, из претендентов на роль l лучших объектов должны быть исключены все l-доминируемые объекты.

Если строго l-наилучших объектов ровно l, то именно они составляют строго оптимальный набор, и только они должны считаться l лучшими объектами (см. 2.1). Условия существования строго оптимального набора указывают также 2.2.3 и 2.2.5.

Если объектов в $R_l(X)$ больше, чем l и выполнены условия, указанные в 2.2.4 (справедливо равенство (7) и в $R_l(X)$ существует наименьший по R объект), то оптимальный набор следует составить так. Вначале нужно взять из $R_l(X)$ все объекты, не являющиеся наименьшими (их не более $l - 1$), а затем добавить недостающее до l число любых наименьших объектов (все наименьшие объекты безразличны между собой). Если же условия, указанные в 2.2.4, не выполнены, то оптимальный набор не существует.

Если оптимального набора нет, то из множества всех l-недоминируемых объектов можно, согласно (6), 1.7 и 2.2.5, выделить объекты, которые заведомо должны быть отнесены к числу l лучших (т.е. включены в состав строго оптимального или оптимального набора). Это все объекты из множества $P_l(X) \cup R_k(X)$, где k – наибольшее число $k < l$ такое, что $R_k(X) \subset R_l(X)$. Таких объектов не более $l - 1$. Оставшиеся l-недоминируемые объекты являются лишь претендентами на роль l лучших.

Для обоснованного формирования (строго) оптимального набора необходимо, как уже указывалось выше, непротиворечиво расширить отношение R, получив дополнительную информацию (и проверив ее непротиворечивость) и/или приняв дополнительные допущения (и убедившись в их выполнении) о предпочтениях ЛПР. Такое расширение R желательно производить за счет сравнения по предпочтению объектов-претендентов на роль оптимальных между собой и с объектами, которые заведомо отнесены к числу l лучших.

***Пример* 4.** При рассмотрении примера 1 легко видеть, что для выяснения вопроса о формировании оптимального набора необходима дополнительная информация только о соотношении по предпочтению объектов x^2 и x^4 (или же x^3 и x^4). Если окажется, что x^2Px^4 (а потому и x^3Px^4), то будет верно $\{x^1, x^2, x^3\}P^3\{x^1, x^2, x^4\}$ и $\{x^1, x^2, x^3\}P^3\{x^1, x^3, x^4\}$, так что единственным строго оптимальным набором будет $\{x^1, x^2, x^3\}$. Если же выяснится, что, наоборот, x^4Px^2 (а потому и x^4Px^3), то оптимальными будут эквивалентные наборы $\{x^1, x^2, x^4\}$ и $\{x^1, x^3, x^4\}$ и любой из них можно принять за решение задачи выбора трех лучших объектов. Наконец, если станет известно, что x^2Ix^4 (а потому и x^3Px^4), то все три набора $\{x^1, x^2, x^3\}$, $\{x^1, x^2, x^4\}$ и $\{x^1, x^3, x^4\}$ будут эквивалентными и оптимальными, и в качестве решения задачи выбора трех лучших объектов можно взять любой из этих наборов.

Заключение

В работе изложены основные результаты развитой теории множественного выбора для задач, когда требуется сформировать набор из заданного числа лучших объектов, причем не требуется упорядочивать их по предпочтению. Полученные результаты необходимо учитывать и при создании компьютерных систем поддержки принятия решений о выборе нескольких лучших объектов.

Актуальным направлением дальнейшего развития теории является исследование *задач множественного выбора и упорядочения*, в которых требуется сформировать набор из заданного числа лучших объектов и все эти объекты (или же только установленное число лучших из них) ранжировать по предпочтению.

Литература

1. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Пер. с англ. – М.: Радио и связь. 1981.
2. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения / Пер. с англ. – М.: Радио и связь. 1992.
3. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: Учебник. Изд. третье, перераб. и доп. – М.: Университетская книга, Логос, 2006.
4. *Heiner R.A., Packard D.J.* A uniqueness result for extending orders; with application to collective choice as inconsistency resolution // Journal of economic theory. 1984. V. 32. P. 180 – 184.
5. *Bossert W.* On the extension of preferences over a set to the power set; an axiomatic characterization of a quasi-ordering // Journal of economic theory. 1989. V. 49. P. 84 – 92.
6. *Fishburn P.C., LaValle I.H.* Binary interaction and subset choice // European journal of operational research. 1996. V. 92. P. 182 – 192.
7. *Лапаев Д.Н., Юрлов Ф.Ф.* Многокритериальное принятие решений в экономике. – Н. Новгород: НГТУ. 2006.

8. *Подиновский В.В.* Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Многокритериальные задачи принятия решений / Под ред. Д.М. Гвишиани и С.В. Емельянова. – М.: Машиностроение, 1978. С. 48 – 82.
9. *Подиновский В.В.* Об оценке эффективности решающих правил в многокритериальных задачах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1987. № 1. С. 3 – 9.
10. *Барышников Ю.А., Подиновский В.В., Поляшук М.В.* Эффективность решающих правил в многокритериальных задачах выбора нескольких объектов // Автоматика и телемеханика. 1990. № 12. С. 136 – 142.
11. *Подиновский В.В.* Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н.Н. Моисеева. – М.: Наука, 1979. – С.117 – 145.
12. *Подиновский В.В.* Оценка эффективности решающих правил в дискретных многокритериальных задачах // Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании / Под ред. Е.Г. Гольштейна. – М.: Наука, 1991. С. 324 – 336.
13. *Podinovski V.V.* Efficiency estimation of decision rules in discrete multiobjective problems // Modern mathematical methods of optimization / K.-H. Elster (Ed.). – Berlin: Akademie, 1993. P. 267 – 277.
14. *Меньшикова О.Р., Подиновский В.В.* Построение отношения предпочтения и ядра в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности неоднородными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. № 5. С. 647 – 659.
15. *Подиновский В.В.* О задаче выбора нескольких лучших объектов при неполной информации о предпочтениях // Информационные технологии моделирования и управления. 2008. № 1 (44). С. 61 – 66.
16. *Sen A.K.* Collective choice and social welfare. – San Francisco: Holden Day, 1970.
17. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. № 2. С. 330 – 344.
18. *Озерной В.М., Гафт М.Г.* Методология решения дискретных многокритериальных задач // Многокритериальные задачи принятия решений / Под ред. Д.М. Гвишиани и С.В. Емельянова. – М.: Машиностроение. 1978. С. 14 – 47.