На правах рукописи

Бацын Михаил Владимирович

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В СТРАХОВЫХ МОДЕЛЯХ С РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫПЛАТ

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2009

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики Нижегородского Филиала Государственного Университета – Высшей Школы Экономики

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Калягин Валерий Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Хохлов Юрий Степанович
доктор физико-математических наук, профессор Бенинг Владимир Евгеньевич

Ведущая организация: Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского

Защита состоится “____” декабря 2009 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.048.09 при Государственном университете – Высшей школе экономики по адресу: 105679, Москва, ул. Кирпичная, д. 33.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного университета – Высшей школы экономики по адресу: 101990, Москва, ул. Мясницкая, д. 20.

Автореферат разослан “____” ноября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета д.т.н., доцент Фомичев В.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Страхование играет важную роль в экономической деятельности. Оно способствует развитию бизнеса, увеличивая уверенность в том, что намеченные планы не будут разрушены случайными событиями. Это стимулирует компании создавать и развивать бизнес даже в тех областях человеческой деятельности, где существует риск больших убытков случайного характера. В настоящее время страхование является неотъемлемой частью мировой и национальной финансовой системы. Банкротства страховых компаний приносят серьезный ущерб, как отдельному бизнесу, так и экономике в целом. Поэтому оптимизация деятельности страховых компаний необходима для повышения их надежности, а также конкурентоспособности. Для достижения этих целей используются среди прочих такие инструменты как франшиза, предел ответственности, перестрахование. С математической точки зрения использование этих инструментов делает функцию распределения страховых выплат разрывной. Задача оптимизации параметров страховой деятельности является важной и трудной задачей математического моделирования.

Перестрахование является наиболее эффективным и распространенным способом повышения надежности страховой компании, позволяющим обезопасить ее от потерь, связанных с выплатами большого ущерба по различным контрактам страхования. При перестраховании риски больших выплат делятся между страховой и перестраховочной компаниями. Контракты на перестрахование отличаются различными способами разделения рисков. Различные аспекты оптимизации при перестраховании активно исследуются в последние десятилетия.

Первые работы были посвящены поиску оптимальной формы перестрахования, или функции разделения ущерба между страховой и перестраховочной компаниями. В работах [Borch, 1960], [Borch, 1961], [Kahn, 1961], [Arrow, 1963][1] показано, что stop-loss перестрахование обеспечивает минимальную дисперсию выплат и максимальный ожидаемый доход страховой компании по сравнению с любыми другими видами перестрахования (функциями разделения ущерба) той же стоимости при условии, что премия перестраховочной компании определяется из принципа ожидаемого значения (принципа эквивалентности). В статье [Heerwarden & Kaas & Goovaerts, 1989][2] получено обобщение этих результатов на целый класс критериев оптимизации. В работах [Gajek & Zagrodny, 2000], [Kaluszka, 2001], [Gajek & Zagrodny, 2004], [Kaluszka, 2005], [Guerra & Centeno, 2008][3] рассмотрены более общие принципы разделения страховых премий между страховой и перестраховочной компаниями, а также различные критерии оптимизации для задачи определения оптимальной формы перестрахования. В статьях [Cai & Tan & Weng & Zhang, 2008], [Balbas & Balbas & Heras, 2009][4] в качестве критериев оптимизации использованы современные способы измерения риска, такие как Value-at-Risk

---

[1] Borch K. “An attempt to determine the optimal amount of stop loss reinsurance”, Transactions of the XVI International Congress of Actuaries, Vol. 2. IAA, Brussels, 1960, p. 597-610.

Borch K. “The utility concept applied to the theory of insurance”, ASTIN Bulletin 1, 1961, p. 245-255.

Kahn P. “Some remarks on a recent paper by Borch”, ASTIN Bulletin 1, 1961, p. 265-272.

Arrow K. “Uncertainty and the welfare of medical care”, American Economic Review 53, 1963, p. 941-973.

[2] Heerwarden A., Kaas R., Goovaerts M. “Optimal reinsurance in relation to ordering of risks”, Insurance: Mathematics and Economics 8, 1989, p. 11-17.

[3] Gajek L., Zagrodny D. “Insurer’s optimal reinsurance strategies”, Insurance: Mathematics and Economics 27, 2000, p. 105–112.

Kaluszka M. “Optimal reinsurance under mean-variance premium principles”, Insurance: Mathematics and Economics 28, 2001, p. 61–67.

Gajek L., Zagrodny D. “Optimal reinsurance under general risk measures”, Insurance: Mathematics and Economics 34, 2004, p. 227–240.

Kaluszka M. “Optimal reinsurance under convex principles of premium calculation”, Insurance: Mathematics and Economics 36, 2005, p. 375–398.

Guerra M., Centeno M. “Optimal reinsurance policy: The adjustment coefficient and the expected utility criteria”, Insurance: Mathematics and Economics 42, 2008, p. 529–539.

[4] Cai J., Tan K., Weng C., Zhang Y. “Optimal reinsurance under VaR and CTE risk measures”, Insurance: Mathematics and Economics 43, 2008, p. 185–196.

Balbas A., Balbas B., Heras A. “Optimal reinsurance with general risk measures”, Insurance: Mathematics and Economics 44, 2009, p. 374-384.

(VaR), Tail Value-at-Risk (TVaR) и их обобщения. Несмотря на большое число подобных исследований и результатов, страховые компании по-прежнему широко используют стандартные виды перестрахования, такие как stop-loss перестрахование, excess-of-loss (эксцедентное) перестрахование, quota-share (пропорциональное) перестрахование, surplus (условное пропорциональное) перестрахование.

Ряд работ посвящен оптимизации параметров стандартных видов перестрахования (с известной функцией разделения ущерба). К таким работам относится статья [Tapiero & Zukerman, 1981][5], в которой исследуется задача оптимизации ожидаемых доходов страховой и перестраховочной компаний. В работе используется аппроксимация процессом диффузии для вычисления распределения суммы страховых выплат при эксцедентном перестраховании. В работах [Centeno, 2002], [Centeno, 2005][6] рассмотрена задача минимизации верхней границы вероятности разорения при эксцедентном перестраховании. Использована улучшенная оценка Лундберга ([Grandell, 1991][7]). В работе [Verlaak & Beirlant, 2003][8] рассмотрены различные комбинации из двух видов перестрахования и получены оптимальные значения их параметров с точки зрения максимизации меры “среднее-отклонение” (mean-variance) для величины дохода страховой компании. В работе [Kaishev & Dimitrova, 2006][9] предложено численное решение задачи оптимизации эксцедентного перестрахования с помощью полиномов Аппеля. При этом критерием

---

[5] Tapiero C., Zuckerman D. “Optimum execss-loss reinsurance: a dynamic framework”, Stochastic Processes and their Applications 12, 1982, p. 85-96.

[6] Centeno M. Excess of loss reinsurance and Gerber’s inequality in the Sparre Anderson model, Insurance: Mathematics and Economics 31, 2002, p. 415–427.

Centeno M. “Dependent risks and excess of loss reinsurance”, Insurance: Mathematics and Economics 37, 2005, p. 229–238.

[7] Grandell J., “Aspects of Risk Theory”, Springer, New York, 1991.

[8] Verlaak R., Beirlant J. “Optimal reinsurance programs. An optimal combination of several reinsurance protections on a heterogeneous insurance portfolio”, Insurance: Mathematics and Economics 33, 2003, p. 381–403.

[9] Kaishev V., Dimitrova D. “Excess of loss reinsurance under joint survival optimality”, Insurance: Mathematics and Economics 39, 2006, p. 376–389.

оптимизации являлась совместная вероятность выживания страховой и перестраховочной компаний.

Во многих работах исследуется так называемое глобальное перестрахование, при котором суммарный ущерб по всем страховым случаям делится между страховой и перестраховочной компаниями в соответствии с некоторой функцией разделения ущербов. В части работ рассматривается локальное перестрахование, более сложное с математической точки зрения по сравнению с глобальным. При локальном перестраховании выплаты в каждом страховом случае, превышающие некоторый уровень, называемый уровнем собственного удержания (retention limit), передаются перестраховочной компании. Сложность заключается в том, что распределение выплаты страховой компании в страховом случае имеет дискретную составляющую вследствие локального перестрахования (функция распределения становится разрывной). Эта особенность серьезно усложняет задачу получения распределения суммы выплат по всем произошедшим страховым случаям. Большинство работ обходят эту проблему с помощью критериев оптимизации, не требующих знания распределения суммарных выплат страховой компании. Другие работы применяют различные аппроксимации и численные методы.

В диссертации рассмотрены модели страховых портфелей, основной особенностью которых является разрывная функция распределения выплат. Объектом исследования является функция надежности (вероятности неразорения) страхового портфеля. Предложены и реализованы численные методы вычисления распределения суммарной выплаты, необходимого для определения оптимальных параметров.

Цель и задачи работы. Целью настоящей работы является разработка различных подходов к оптимальному выбору параметров страховых моделей с разрывной функцией распределения выплат и их сравнение между собой.

Основными задачами работы являются:

1. Определение оптимальных параметров страхования, обеспечивающих максимальную надежность страхового портфеля для случая разрывной функции распределения выплат.

2. Разработка алгоритмов вычисления распределения суммарных выплат при разрывной функции распределения индивидуальной выплаты. Исследование функции надежности на основе разработанных алгоритмов.

3. Разработка имитационного подхода к вычислению надежности страхового портфеля с разрывной функцией распределения выплат. Анализ точности имитационного подхода.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы теории вероятности, методы математического и функционального анализа, численные методы, методы оптимизации, методы имитационного моделирования.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) В рамках рассматриваемых моделей решены задачи оптимизации параметров страхования, обеспечивающих максимальную надежность страхового портфеля. На основе метода нормальной аппроксимации для общего случая распределения ущерба получены уравнения на оптимальные значения параметров страхования. Для вычисления оптимальных значений параметров реализован комплекс программ в системе Matlab.

2) Разработан подход к вычислению распределения суммарных выплат при разрывной функции распределения выплаты. Получены рекуррентные формулы для вычисления функции распределения. Для равномерного распределения ущерба найдено явное выражение функции распределения суммарных выплат. Разработан комплекс программ численного вычисления функции надежности. Предложены алгоритмы параллельных вычислений. Обнаружено новое явления

скачка функции надежности при непрерывном изменении параметров страхования.

3) Разработан комплекс программ для вычисления надежности страхового портфеля с разрывной функцией распределения выплат на основе имитационного моделирования. Проведен анализ точности имитационного подхода. С помощью численных экспериментов исследована точность результатов, полученных на основе метода нормальной аппроксимации.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер и имеет прикладное значение. Теоретические результаты могут быть полезны в различных исследованиях в области актуарной математики. Практические результаты могут быть использованы при оптимизации деятельности страховых компаний.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

1. Семинар по теории риска при кафедре математической статистики факультета ВМК МГУ под руководством профессора Королева В.Ю. и профессора Бенинга В.Е., Москва 2009.
2. Семинар «Прикладные задачи теории вероятностей» при кафедре теории вероятностей и математической статистики факультета физико-математических и естественных наук РУДН под руководством профессора Хохлова Ю.С., Москва 2009.
3. Семинар «Математические модели принятия решений» кафедры прикладной математики и информатики НФ ГУ-ВШЭ под руководством профессора Калягина В.А., Нижний Новгород 2008.
4. 14-я Нижегородская сессия молодых ученых (математические науки), Нижний Новгород 2009.
5. V-я Всероссийская межвузовская конференция молодых ученых, СПбГУ ИТМО, Санкт-Петербург 2008.

6. 13-я Нижегородская сессия молодых ученых (математические науки), Нижний Новгород 2008.
7. V-я научно-практическая конференция студентов и преподавателей НФ ГУ-ВШЭ «Современные проблемы в области экономики, менеджмента, социологии, бизнес-информатики и юриспруденции», Нижний Новгород 2007.
8. IV-я Международная молодежная научно-техническая конференция «Будущее технической науки», Нижний Новгород 2005.
9. 15-я Международная научно-практическая конференция по графическим информационным системам КОГРАФ-2005, Нижний Новгород 2005.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 9 работах, которые приведены в конце автореферата.

Структура работы. Диссертация изложена на 115 страницах, состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 45 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен обзор существующих результатов, связанных с темой диссертации, сформулированы основные задачи исследования, кратко изложены использованные подходы и полученные результаты.

В первой главе вводятся основные понятия страховых моделей и доказываются вспомогательные утверждения. В диссертации используются следующие обозначения:

- N – количество страховых контрактов в модели индивидуальных рисков
- p – вероятность страхового случая в модели индивидуальных рисков
- λ – среднее число страховых случаев в модели коллективных рисков
- X – случайная величина ущерба в одном страховом случае
- $F(x)$ – функция распределения ущерба в одном страховом случае
- μ – математическое ожидание ущерба в одном страховом случае
- θ – рисковая надбавка страховой компании

- L – предел ответственности страховой, а также перестраховочной компаний
- ϕ – безусловная франшиза
- r – уровень собственного удержания при эксцедентном перестраховании
- α – рисковая надбавка перестраховочной компании
- β – нагрузка перестраховочной компании
- Rl – функция, отражающая надежность страховой компании при нормальной аппроксимации распределения суммарных страховых выплат

Для безусловного математического ожидания и дисперсии суммарных страховых выплат, общей выручки страховой компании и стоимости перестрахования справедливы следующие формулы в модели индивидуальных рисков:

$$\begin{aligned} M[Y_o] &= NpI(L) \\ D[Y_o] &= Np\left(I_2(L) - pI^2(L)\right) \\ S_o &= Np(1+\theta)I(L) \\ \widetilde{S}_o &= Np(1+\alpha+\beta)\left(I(L)-I(r)\right) \end{aligned} , \quad \text{где} \quad \begin{aligned} I(t) &= \int_0^t \left(1-F(x)\right)dx \\ I_2(t) &= \int_0^t 2x\left(1-F(x)\right)dx \end{aligned}$$

и в модели коллективных рисков:

$$\begin{aligned} M[Y_o] &= \lambda I(L) \\ D[Y_o] &= \lambda I_2(L) \\ S_o &= \lambda(1+\theta)I(L) \\ \widetilde{S}_o &= \lambda(1+\alpha+\beta)\left(I(L)-I(r)\right) \end{aligned}$$

Приведенные формулы применяются во второй, третьей и четвертой главах диссертации при решении задач оптимизации.

Во второй главе исследуются задачи оптимизации уровня безусловной франшизы, предела ответственности и уровня собственного удержания при эксцедентном перестраховании с точки зрения надежности страховой компании. Также во второй главе рассматриваются задачи минимизации вероятности превышения заданного уровня затрат для страхователя с помощью франшизы и предела ответственности.

Под надежностью страховой компании понимается вероятность ее неразорения, или вероятность обеспечить выплаты по всем предъявленным искам (суммарная страховая выплата) за счет средств, собранных со страхователей (суммарная страховая премия). Функция Rl отражает надежность страховой компании при нормальной аппроксимации распределения суммарных страховых выплат.

Первая часть главы посвящена оптимизации предела ответственности для страховой компании и для страхователя. Обозначим ожидаемый доход страховой компании за E.

Теорема 1. Функция $Rl(L)$ является убывающей, а функция $E(L) = S_o - M[Y_o]$ – возрастающей.

Увеличение предела ответственности снижает надежность, но увеличивает ожидаемый доход страховой компании. Таким образом, для обеспечения высокой надежности страхования предел ответственности необходимо устанавливать на низком уровне.

Обозначим пороговый уровень затрат, приемлемый для страхователя за γ, а вероятность превышения порога γ – за $\widetilde{R}u$.

Теорема 2. Функция $\widetilde{R}u(L)$ является убывающей и $\min \widetilde{R}u(L) = \widetilde{R}u(\infty) = 0$, если $\gamma \ge p(1+\theta)\mu$. Если $\gamma < p(1+\theta)\mu$, функция $\widetilde{R}u(L)$ является кусочно-монотонной и $\min \widetilde{R}u(L) = \widetilde{R}u(L_\gamma) = p\bigl(1 - F(L_\gamma)\bigr)$, где L_γ – это точка разрыва функции $\widetilde{R}u(L)$, являющаяся решением уравнения

$$p(1+\theta)\int_0^L \bigl(1 - F(x)\bigr)dx = \gamma .$$

Заметим, что $p(1+\theta)\mu$ – это стоимость полного страхования без ограничения ответственности, а приведенное уравнение требует, чтобы стоимость страхования с пределом ответственности L равнялась пороговому значению затрат γ. Таким образом, страхователю выгоднее тратить на страхование максимально возможную для него сумму денег γ, ничего не оставляя на возможный ущерб, превышающий предел ответственности.

Во второй части главы рассмотрены задачи оптимизации уровня безусловной франшизы ϕ для страховой компании и для страхователя.

Теорема 3. Функции $Rl(\phi)$ и $E(\phi)$ являются убывающими.

Увеличение уровня франшизы ϕ снижает и надежность, и ожидаемый доход страховой компании. Поэтому страховой компании следует устанавливать безусловную франшизу на максимально низком уровне или вообще отказаться от ее использования.

Теорема 4. Функция $\widetilde{R}u(\phi)$ является убывающей и $\min \widetilde{R}u(\phi) = \widetilde{R}u(L) = = p(1 - F(\gamma))$, если $\gamma \le p(1+\theta)I(L)$. Если $\gamma > p(1+\theta)I(L)$, то функция $\widetilde{R}u(\phi)$ – кусочно-монотонная и $\min \widetilde{R}u(\phi) = \widetilde{R}u(0) = p\big(1 - F\big(\gamma + L - p(1+\theta)I(L)\big)\big)$.

Заметим, что $p(1+\theta)I(L)$ – это стоимость страхования без франшизы и с некоторым пределом ответственности L. Значение франшизы $\phi = L$ означает отсутствие страхования, потому что все риски остаются на удержании страхователя. Таким образом, если у страхователя достаточно средств, чтобы приобрести страховку без франшизы с каким-либо пределом ответственности, то ему выгоднее сделать это. Если при этом можно выбирать не только уровень франшизы, но и предел ответственности, то оптимальным будет выбор максимально возможного предела ответственности (теорема 2). Если же страхование без франшизы слишком дорого при любом допустимом пределе ответственности, то оптимальным является отказ от страхования.

В третьей части главы исследуется задача определения оптимального уровня собственного удержания при эксцедентном перестраховании. Решение этой задачи получено для обеих моделей страховых рисков.

Общие затраты страховой компании складываются из случайной величины суммарных страховых выплат и фиксированной стоимости перестрахования. При эксцедентном перестраховании чем больше ущербов передается на перестрахование (меньше уровень собственного удержания), тем выше ожидаемые затраты страховой компании, с одной стороны, но ниже дисперсия страховых выплат, а значит и риск больших убытков, с другой стороны. В результате существует уровень собственного удержания r, обеспечивающий такие математическое ожидание и дисперсию затрат страховой компании, при которых ее надежность максимальна.

Теорема 5. Если для модели индивидуальных рисков выполняются условия:

$$\begin{cases} \big(L - pI(L)\big)\big(1 - F(L)\big) - \dfrac{\theta I(L)}{\alpha + \beta}\big(1 - p + pF(L)\big) < 0 \\ I_2(L) - pI^2(L) - \dfrac{\theta I(L)}{\alpha + \beta}\big(L - pI(L)\big) < 0 \end{cases},$$

то функция $Rl(r)$ является унимодальной и достигает своего максимума в точке r^*, где r^* – это единственное решение уравнения

$$I_2(r) - rI(r) + \left(1 - \frac{\theta}{\alpha + \beta}\right) I(L)\big(r - pI(r)\big) = 0, \text{ где}$$

$$r \in [0, L], \quad I(r) = \int_0^r (1 - F(x))dx, \quad I_2(r) = \int_0^r 2x(1 - F(x))dx.$$

В противном случае функция $Rl(r)$ является возрастающей и достигает своего максимума в точке $r = L$.

Заметим, что значение $r = L$ означает отсутствие перестрахования, так как все риски остаются на собственном удержании страховой компании. Приведенная система неравенств представляет собой условия на параметры, при выполнении которых перестрахование выгодно с точки зрения надежности страховой компании. Трансцендентное уравнение на оптимальный уровень собственного удержания имеет единственное решение, которое можно получить численно, используя стандартные методы решения уравнений. Аналогичные результаты получены в рамках модели коллективных рисков.

Теорема 6. Если для модели коллективных рисков выполняются условия:

$$\begin{cases} I_2(L) - \dfrac{\theta\, I(L)}{\alpha + \beta} L < 0 \\ L(1 - F(L)) - \dfrac{\theta\, I(L)}{\alpha + \beta} < 0 \end{cases},$$

то функция $Rl(r)$ является унимодальной и достигает своего максимума в точке r^*, где r^* – это единственное решение уравнения

$$I_2(r) - rI(r) + \left(1 - \frac{\theta}{\alpha + \beta}\right) rI(L) = 0, \quad \text{где}$$

$$r \in [0, L], \quad I(r) = \int_0^r (1 - F(x))dx, \quad I_2(r) = \int_0^r 2x(1 - F(x))dx .$$

В противном случае функция $Rl(r)$ является возрастающей и достигает своего максимума в точке $r = L$.

Численные расчеты (проводимые с помощью разработанного в Matlab комплекса программ) показывают, что перестрахование позволяет повысить надежность на 1-3%. Получить такое повышение надежности при высоких ее значениях (например, с 97% до 99%) сложно, потому что функция распределения суммарных страховых выплат растет очень медленно в этом диапазоне. Например, увеличение надежности с 97% до 99% с помощью рисковой надбавки может потребовать двукратного увеличения стоимости страхования, что негативно скажется на конкурентоспособности страховой компании.

В третьей главе разработан подход к вычислению функции надежности при разрывной функции распределения выплат. В работе получена рекуррентная формула для функции распределения суммы страховых выплат при эксцедентном перестраховании. Формула позволяет разработать алгоритм последовательного вычисления распределения суммарных выплат. Для равномерного распределения ущерба из рекуррентной формулы выведена явная аналитическая формула функции распределения. Основная сложность заключается в том, что распределение выплаты в одном страховом случае имеет разрыв в точке *r* вследствие перестрахования. Дискретная составляющая распределения серьезно усложняет задачу вычисления функции распределения для суммы случайных величин.

Обозначим функцию распределения выплаты в одном страховом случае при эксцедентном перестраховании за $F_1(x)$, а ее плотность вероятности за $f_1(x)$:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0 \\ F(x), & \text{если } 0 < x \le r \\ 1, & \text{если } x > r \end{cases} .$$

Если при этом ущерб имеет равномерное распределение ($F(x)=U(x)$), то будем обозначать функцию распределения выплаты за $U^r(x)$:

$$U^r(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0\\ x, & \text{если } 0<x\le r\\ 1, & \text{если } x>r\end{cases}.$$

Функцию распределения суммы n независимых случайных величин, имеющих распределение $F_1(x)$, обозначим за $F_n(x)$.

<u>Лемма 1</u>. Справедлива следующая рекуррентная формула для функции $F_n(x)$:

$$F_{n+1}(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0\\ \int\limits_0^x f_1(x-t)F_n(t)dt, & \text{если } 0\le x\le r\\ \int\limits_{x-r}^x f_1(x-t)F_n(t)dt+(1-F_1(r))\cdot F_n(x-r), & \text{если } r\le x\le nr\\ \int\limits_{x-r}^{nr} f_1(x-t)F_n(t)dt+F_1(x-nr)+(1-F_1(r))\cdot F_n(x-r), & \text{если } nr\le x\le (n+1)r\\ 1, & \text{если } x>(n+1)r\end{cases}$$

<u>Теорема 7</u>. Функция $F_n(x)$ удовлетворяет следующей рекуррентной формуле:

$$F_{n+1}(x)=\begin{cases}F_{n+1}^1(x)=\int\limits_0^x f_1(x-t)F_n^1(t)dt, & x\in[0,r]\\ F_{n+1}^2(x)=\int\limits_{x-r}^r f_1(x-t)F_n^1(t)dt+\int\limits_r^x f_1(x-t)F_n^2(t)dt+(1-F_1(r))\cdot F_n^1(x-r), & x\in[r,2r]\\ \ldots & \\ F_{n+1}^k(x)=\int\limits_{x-r}^{(k-1)r} f_1(x-t)F_n^{k-1}(t)dt+\int\limits_{(k-1)r}^x f_1(x-t)F_n^k(t)dt+(1-F_1(r))\cdot F_n^{k-1}(x-r), & x\in[(k-1)r,kr]\\ \ldots & \\ F_{n+1}^n(x)=\int\limits_{x-r}^{(n-1)r} f_1(x-t)F_n^{n-1}(t)dt+\int\limits_{(n-1)r}^x f_1(x-t)F_n^n(t)dt+(1-F_1(r))\cdot F_n^{n-1}(x-r), & x\in[(n-1)r,nr]\\ F_{n+1}^{n+1}(x)=\int\limits_{x-r}^{nr} f_1(x-t)F_n^n(t)dt+F_1(x-nr)+(1-F_1(r))\cdot F_n^n(x-r), & x\in[nr,(n+1)r]\end{cases}$$

Здесь за $F_n^k(x)$ обозначена функция $F_n(x)$ на отрезке $[(k-1)r,kr]$, или k-я часть этой кусочно-непрерывной функции.

Лемма 2. Если $F_1(x)=U^r(x)$, то для n-й части ($x\in[(n-1)r,\ nr]$) функции $F_n(x)$ справедлива следующая формула:

$$F_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (r-1)^j \frac{(x-ir)^{n-j}}{(n-j)!}\right] \quad при \quad x\in[(n-1)r,\ nr].$$

Теорема 8. Если $F_1(x)=U^r(x)$, то для k-й части ($x\in[(k-1)r,\ kr]$) функции $F_n(x)$ справедлива следующая общая формула:

$$F_n(x)=\sum_{i=0}^{k-1}\left[(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (r-1)^j \frac{(x-ir)^{n-j}}{(n-j)!}\right] \quad при \quad x\in[(k-1)r,\ kr].$$

При $r=1$ получаем известную формулу для равномерного распределения ([Feller, 1950][10]):

$$U_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_n^i (x-i)^n \quad при \quad x\in[k-1,\ k].$$

С помощью найденной формулы можно получить функцию распределения суммарных выплат страховой компании и вычислить ее в любой точке с заданной точностью. Обозначим за $G_o^U(x)$ функцию распределения суммарных выплат страховой компании при эксцедентном перестраховании в случае равномерного распределения ущерба.

Теорема 9. В модели индивидуальных рисков справедлива формула:

$$G_o^U(x)=\sum_{n=0}^{[x/r]} C_N^n p^n (1-p)^{N-n} + \sum_{n=[x/r]+1}^{N}\left[C_N^n p^n (1-p)^{N-n}\cdot F_n(x)\right], \quad \text{где}$$

$$F_n(x)=\sum_{i=0}^{k-1}\left[(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (r-1)^j \frac{(x-ir)^{n-j}}{(n-j)!}\right], \qquad \text{при } x\in[(k-1)r,\ kr].$$

С помощью теоремы 9 можно вычислить $G_o^U(x)$ с любой наперед заданной точностью ε. Пусть m – это минимальное значение индекса суммы n, до которого достаточно посчитать обе суммы в формуле для $G_o^U(x)$, R_m – остаток любой из этих сумм, тогда при выполнении условий

[10] Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. John Wiley & Sons. Inc. New York. 1950.

$$\begin{cases} m > \nu = \dfrac{Np}{1-p} \\ (1-p)^N \cdot \dfrac{m}{m-\nu} \cdot \dfrac{\nu^{m+1}}{(m+1)!} < \varepsilon \end{cases}$$

имеет место оценка точности $R_m < \varepsilon$.

<u>Теорема 10</u>. В модели коллективных рисков справедлива формула:

$$G_o^U(x) = \sum_{n=0}^{[x/r]} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + \sum_{n=[x/r]+1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot F_n(x), \qquad \text{где}$$

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \left[(-1)^i C_n^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (r-1)^j \frac{(x-ir)^{n-j}}{(n-j)!} \right], \text{ при } x \in [(k-1)r,\, kr].$$

С помощью теоремы 10 можно вычислить $G_o^U(x)$ с любой наперед заданной точностью ε. Пусть m – это минимальное значение индекса суммы n, до которого достаточно посчитать обе суммы в формуле для $G_o^U(x)$, R_m – остаток любой из этих сумм, тогда при выполнении условий

$$\begin{cases} m > \lambda \\ e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \dfrac{m}{m-\lambda} < \varepsilon \end{cases}$$

имеет место оценка точности $R_m < \varepsilon$.

Надежность равна значению функции распределения суммы выплат $G_o^U(x)$ в точке $S_o - \widetilde{S}_o$ и может быть точно вычислена по приведенным выше формулам. Для автоматизации вычислений разработаны соответствующие программы в Matlab, позволяющие точно вычислять надежность страховой компании при различных значениях параметров, получать функцию зависимости надежности от уровня собственного удержания и находить оптимальное значение этого уровня, обеспечивающее максимум надежности. Сравнение точных результатов с результатами, полученными во второй главе, позволяет сделать вывод о том, что подход главы II достаточно точно определяет оптимальный уровень собственного удержания, однако немного завышает надежность страховой компании (см. рис. 1).

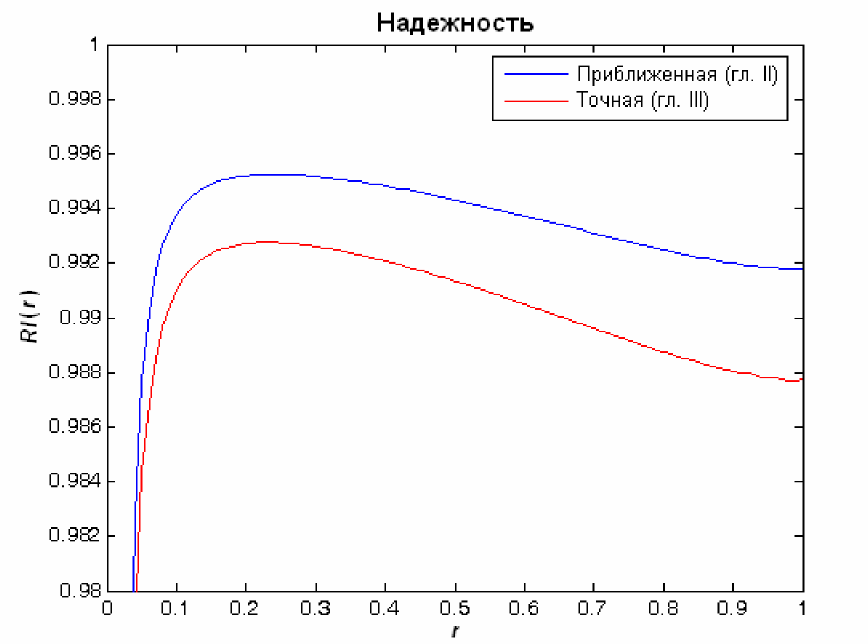

Рис. 1. Сравнение функции надежности *Rl* с точной

С помощью точных вычислений обнаружен необычный феномен функции надежности при эксцедентном перестраховании. Функция надежности при малом среднем числе страховых случаев (Np в модели индивидуальных рисков и λ в модели коллективных рисков) имеет значительный скачок, достигающий 10% при определенных значениях параметров (см. рис. 2).

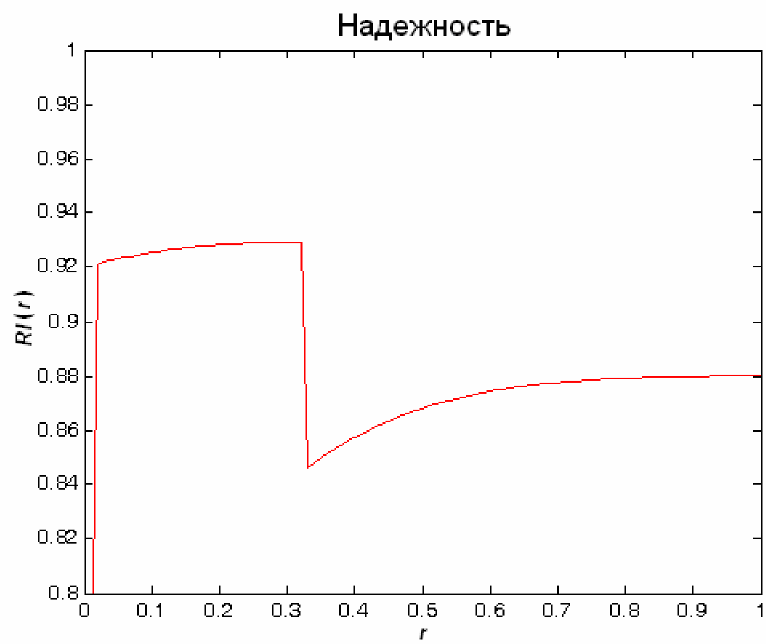

Рис. 2. Эффект скачка функции надежности

Эта особенность зависимости надежности от уровня собственного удержания имеет важное практическое значение для страховой деятельности. Она возникает не только при равномерном распределении ущерба, но и при любом другом. Результаты, полученные в следующей главе с помощью имитационного эксперимента, подтверждают этот факт.

В четвертой главе рассматривается применение методов имитационного моделирования для анализа оптимальных параметров в страховых моделях. Необходимо отметить, что полученные имитационным методом результаты обладают определенным разбросом. Поэтому к значениям любой вычисленной функции применяется сглаживание. В диссертации разработана и программно реализована имитационная модель деятельности страховой компании, позволяющая численно находить оптимальные параметры страхования. Рассмотрено применение этой модели для определения оптимального уровня собственного удержания при эксцедентном перестраховании. Результаты, найденные с помощью имитационного подхода, сравниваются с результатами главы II и главы III (см. рис. 3). Для широкого класса распределений подход главы II определяет оптимальный уровень собственного удержания с хорошей точностью, однако несколько завышает надежность страховой компании.

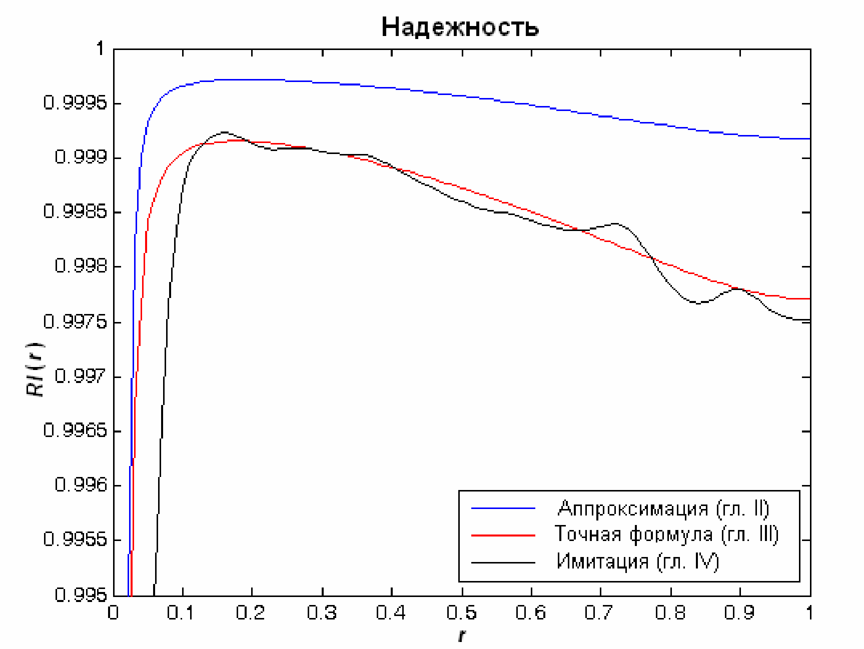

Рис. 3. Сравнение функций надежности

Результаты, полученные на основе имитационного подхода, подтверждают для различных распределений ущерба феномен скачка функции надежности, обнаруженный в третьей главе (см. рис. 4).

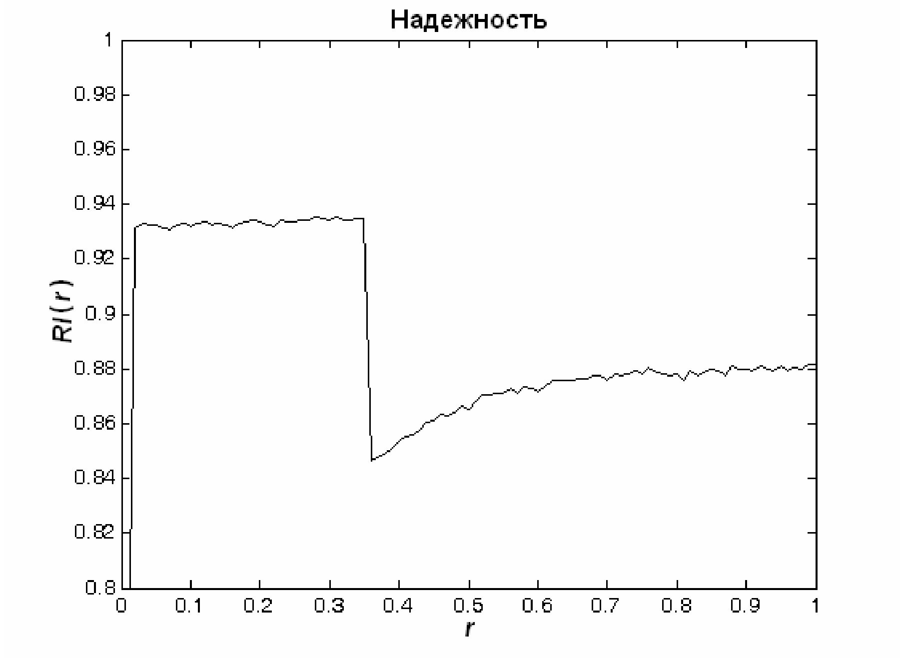

Рис. 4. Эффект скачка функции надежности при нормальном распределении ущерба

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. В рамках моделей индивидуальных и коллективных рисков получены уравнения на оптимальные значения параметров страхования, обеспечивающих максимальную надежность страхового портфеля для случая разрывной функции распределения выплат. Для вычисления оптимальных значений параметров реализован комплекс программ в системе Matlab.

2. Разработан подход к вычислению распределения суммарных выплат при разрывной функции распределения индивидуальной выплаты. Найдено явное выражение функции распределения суммарных выплат для равномерного распределения ущерба. Разработан комплекс программ численного вычисления функции надежности.

3. Разработан комплекс программ для вычисления надежности страхового портфеля с разрывной функцией распределения выплат на основе

имитационного моделирования. Проведен анализ точности имитационного подхода.

Работа выполнена при поддержке лаборатории ТАПРАДЕСС НФ ГУ-ВШЭ.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Работы, опубликованные автором в ведущих рецензируемых научных журналах и журналах рекомендованных ВАК Министерства образования и науки России:

1. Бацын М.В., Калягин В.А. Об одном случае вычисления распределения суммарных выплат в задаче перестрахования индивидуальных рисков // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. Выпуск 3(14). 2009. С. 81-100. 1,3 п.л. (вклад автора 0,9 п.л.).

Другие работы, опубликованные автором по теме кандидатской диссертации:

2. Бацын М.В., Калягин В.А. О качестве одной имитационной модели для определения оптимального уровня собственного удержания при эксцедентном перестраховании убытка // Известия АИН им. А.М. Прохорова. Бизнес-информатика. Т. 17. 2006. С. 117-125. 0,9 п.л. (вклад автора 0,6 п.л.).
3. Бацын М.В., Калягин В.А. Определение оптимального уровня собственного удержания при эксцедентном перестраховании убытка // Известия АИН им. А.М. Прохорова. Бизнес-информатика. Т. 12. 2005. С. 67-74. 0,8 п.л. (вклад автора 0,6 п.л.).
4. Бацын М.В. О точном вычислении оптимального уровня собственного удержания при перестраховании индивидуальных рисков // Тезисы докладов 14-й Нижегородской сессии молодых ученых (математические науки). Нижний Новгород. 2009. 0,1 п.л.
5. Бацын М.В., Калягин В.А. Об одном алгоритме вычисления функции распределения выплат в модели коллективных страховых рисков // Сборник

трудов V-й Всероссийской межвузовской конференции молодых ученых. СПбГУ ИТМО. Санкт-Петербург. 2008. 1,0 п.л. (вклад автора 0,7 п.л.).
6. Бацын М.В. Аналитическая формула для функции распределения выплат в модели коллективных страховых рисков // Тезисы докладов 13-й Нижегородской сессии молодых ученых (математические науки). Нижний Новгород. 2008. 0,1 п.л.
7. Бацын М.В., Калягин В.А. О точном вычислении функции распределения выплат в однопериодной модели страховых рисков // Материалы V-й научно-практической конференции студентов и преподавателей НФ ГУ-ВШЭ «Современные проблемы в области экономики, менеджмента, социологии, бизнес-информатики и юриспруденции». Нижний Новгород. 2007. 0,4 п.л. (вклад автора 0,3 п.л.).
8. Бацын М.В. Уровень собственного удержания в эксцедентном перестраховании // Тезисы докладов IV-й Международной молодежной научно-технической конференции «Будущее технической науки». Нижний Новгород. 2005. 0,1 п.л.
9. Бацын М.В. О точности нормальной аппроксимации при расчетах уровня собственного удержания в эксцедентном перестраховании // Тезисы докладов 15-й Международной научно-практической конференции по графическим информационным системам КОГРАФ-2005. Нижний Новгород. 2005. 0,1 п.л.

Лицензия ЛР № 020832 от 15 ноября 1993 г.

Подписано в печать 09 ноября 2009 г.

Формат 60 х 84/16

Бумага офсетная.

Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1

Тираж 100 экз. Заказ № ______

Типография издательства

Государственного университета – Высшая школа экономики,

125319, г. Москва, Кочновский проезд, д.3