Теория пределов: упражнения и примеры

Методическое пособие для факультетов менеджмента, политологии и социологии

П.А.Панов

Государственный Университет Высшая школа экономики

Январь 2010

1 Что такое предел последовательности?

Рассмотрим последовательность чисел:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Член последовательности с номером k определяется по формуле $a_k = \frac{1}{k}$

Никакой член этой последовательности не равен нулю. Однако, чем больше номер члена последовательности, тем ближе сам член последоваетльности к нулю: $a_{100} = 0.01$, $a_{150} \approx 0.0066\,7$, $a_{100000} = 0.000\,01$

В этом случае мы говорим, что предел последовательности равен нулю. Мы пока не дали строгое определение предела, только обсудили его смысл.

1.1 Упражнение *Пределы следующих последовательностей равны нулю. Вычислите (приближенно) по формуле члены последовательности с номерами 2, 5, 10, 20.*

1. $b_n = \frac{1}{n^2}$

2. $c_n = \frac{1}{2^n}$

3. $d_n = (-3)^{-2n}$

Предел последовательности, конечно, не обязательно должен быть равен нулю. Скажем, если мы рассмотрим последовательность $a_k = \frac{4k+1}{2k-5}$, то с ростом k член последовательности a_k будет всё ближе и ближе к 2.

Действительно, $a_{100} = \frac{401}{195} = 2\frac{11}{195}$, $a_{150} = \frac{4\times150+1}{2*150-5} = 2\frac{11}{295}$, $a_{100000} = \frac{4*100000+1}{2*100000-5} = 2\frac{11}{199\,995}$

Однако никакой член последовательности не равен именно двум.

Для предела последовательности есть специальное обозначение $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 2$. Это выражение читается "Предел последовательности a_k при стремлении k к бесконечности равен двум".

1.2 Упражнение *Последовательность b_n определяется формулой $b_n = \frac{6n-2}{7-3n}$. Предел этой посделовательности равен -2 , $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -2$. Найти члены последовательности с номерами 2, 5, 10, 20.*

1.3 Упражнение *Последовательность c_n определяется формулой $c_n = \frac{n^2}{n^2+n+1}$. Предел этой поcделовательности равен 1 , $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$. Найти члены последовательности с номерами 2, 5, 10, 20.*

1.4 Упражнение *Последовательность d_n определяется формулой $d_n = \frac{n+(-1)^n\cdot 10}{2n}$. Предел этой поcделовательности равен $\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \frac{1}{2}$. Найти члены последовательности с номерами 2, 5, 10, 20.*

1.5 Упражнение *Последовательность e_n определяется формулой $e_n = \frac{\sin(\frac{\pi\cdot n}{2})}{n}$. Предел этой поcделовательности равен 0 , $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$. Найти члены последовательности с номерами 11, 12, 13, 14.*

Заметим, что, в предпоследнем примере половина членов последовательности больше предельного значения, а половина - меньше, но для нас важно лишь то, что постепенно и те и другие члены приближаются к $\frac{1}{2}$. В последнем же примере часть членов равна предельному значению - в этом тоже нет никакого противоречия, сами члены могут быть какими угодно, но постепенно они должны становиться все ближе и ближе к своему пределу.

Дадим строгое определение предела.

Если для последовательности a_n существует такое число a, что для любого сколь угодно малого числа ε существует такое число N, что для любого номера $n > N$ будет выполнятся условие $|a_n - a| < \varepsilon$, то число a является пределом последовательности a_n.

Почему же определение такое сложное? И что оно значит? Как мы уже обсудили, все члены последовательности постепенно должны становиться все ближе и ближе к своему пределу. Как задать это условие? Мы должны формально записать, что начиная с некоторого момента все члены будут очень близки к своему пределу, то есть $|a_n - a|$ будет очень маленьким, причем с ростом n должен становиться все меньше и меньше. Для этого в определении предела и сказано "для любого сколь угодно малого числа ε ... будет выполнятся условие $|a_n - a| < \varepsilon$". Но нам не требуется, чтобы все члены последовательности были очень близки к пределу, это условие должно выполнятся с некоторого момента, поэтому мы и говорим "существует такое число N, что для любого номера $n > N$ будет выполнятся условие $|a_n - a| < \varepsilon$"

1.6 Упражнение *Для последовательности* $b_n = \frac{6n-2}{7-3n}$ *найти такое число* N*, что для любого номера* $n > N$ *все члены будут отличаться от предела не более чем на* $0,1$*, не более чем на* $0,01$.

С этой последовательностью мы уже сталкивались и знаем, что ее предел b равен -2. Найдем для произвольного n, чему равна разность $|b_n - b|$:

$|b_n - b| = |\frac{6n-2}{7-3n} - (-2)| = |\frac{6n-2}{7-3n} + 2| = |\frac{6n-2+14-6n}{7-3n}| = |\frac{12}{7-3n}|$

Начиная с какого момента получившееся число будет меньше чем $0,1$? Подставим $N = 10$, получим: $|b_{10} - b| = |\frac{12}{7-3\times10}| = |\frac{12}{7-30}| = \frac{12}{23} > 0,1$. Не подходит. Возьмем сотый член последовательности, b_{100} . Итак, $N = 100$, значит $|b_N - b| = \left|\frac{12}{7-300}\right| = \frac{12}{293} \approx 0,04\,095\,6 < 0,1$. Подходит, причем все значения больше 100 тоже подойдут. То есть мы нашли нужное число. Давайте рассмотрим $N = 90$: $\left|\frac{12}{7-3\cdot90}\right| = \frac{12}{263} = 0,0\,4562\,7 < 0,1$ - это значение нам тоже подходит! Будет ли ошибкой в ответе указать $N = 100$? Дело в том, что в определении и в условии задачи речь не идет о минимально возможном N, так что мы можем указывать любое подходящее число, так что ошибочным такой ответ не будет. С другой стороны, перебирать все возможные числа - неправильно. Мы можем потратить на это очень много времени. Поэтому рассмотрим другой способ - решим соответствующее неравенство:

$|b_n - b| < 0,1$

$|\frac{12}{7-3n}| < 0,1$

$-0,1 < \frac{12}{7-3n} < 0,1$ при $n > 3$ получаем что $7 - 3n < 0$, поэтому

$-0,1(7 - 3n) > 12 > 0,1(7 - 3n)$ домножим на 10

$-(7-3n) > 120 > (7-3n)$, то есть должны одновременно выполнятся два неравенства: $3n > 127$ и $3n > -113$. Решением этих неравенств является $n > \frac{127}{3} \Rightarrow n > 42\frac{1}{3}$.

Отсюда получаем, что при любом целом $n > 42$ член последовательности b_n будет отличаться от -2 не более чем на 0,1, а при меньших номерах это равенство выполняться не будет.

Решим эту задачу для $\varepsilon = 0,01$ - решение будет абсолютно аналогичным:

$|b_n - b| < 0,01$

$|\frac{12}{7-3n}| < 0,01$

$-0,01 < \frac{12}{7-3n} < 0,01$ при $n > 3$ получаем что $7 - 3n < 0$, поэтому

$-0,01(7-3n) > 12 > 0,01(7-3n)$ домножим на 100

$-(7-3n) > 1200 > (7-3n)$, то есть должны одновременно выполнятся два неравенства: $3n > 1207$ и $3n > -1193$. Решением этих неравенств является $n > \frac{1207}{3} \Rightarrow n > 402\frac{1}{3}$. Отсюда получаем, что при любом целом $n > 402$ член последовательности b_n будет отличаться от -2 не более чем на 0,01, а при меньших номерах это равенство выполняться не будет.

Но еще раз отметим, что мы не обязаны находить минимально возможное N.

1.7 Пример *Для последовательности* $e_n = \frac{\sin(\frac{\pi \cdot n}{2})}{n}$ *найти такое число* N, *что для любого номера* $n > N$ *все члены будут отличаться от предела не более чем на* $0,1$. *Предел этой последовательности равен нулю. Начало решения будем таким же как и в предыдущий раз: решим неравенство:* $|e_n - 0| < 0,1$, *т.е.* $|e_n| < 0,1$ *Подставляя формулу для* e_n *получаем* $\left|\frac{\sin(\frac{\pi \cdot n}{2})}{n}\right| < 0,1$. *Выражение* $\sin(\frac{\pi \cdot n}{2})$ *принимает только три значения: 1, 0, -1. Следовательно, при* $N = 10$ *для любого* $n > N$ *все члены последовательности будут отличаться от 0 меньше чем на 0,1.*

1.8 Упражнение *Для последовательности* $d_n = \frac{\sin(\frac{\pi \cdot n}{2})}{n}$ *найти такое число* N, *что для любого номера* $n > N$ *все члены будут отличаться от предела не более чем на* $0,01$.

1.9 Упражнение *Для последовательности* $a_n = \frac{3-4n}{5+8n}$ *найти такое число* N, *что для* *любого номера $n > N$ все члены будут отличаться от предела не более чем на* $0,2$, *не более чем на* $0,015$.

1.10 Упражнение *Для последовательности $a_n = \frac{n^2+4}{n^2}$ определить, какое из чисел* $5,\ 1$ *или* $1/2$ *будет являться пределом и найти такое число N, что для любого номера $n > N$ все члены будут отличаться от предела не более чем на* $0,1$, *не более чем на* $0,01$.

1.11 Упражнение *Для последовательности $a_n = \frac{n^2}{n^2+n}$ определить, какое из чисел* $1/2,\ 2/3$ *или* 1 *будет являться пределом и найти такое число N, что для любого номера $n > N$ все члены будут отличаться от предела не более чем на* $0,1$, *не более чем на* $0,01$.

Рассмотрим последовательность $a_n = n$. Члены этой последовательности не становятся всё ближе и ближе к какому-то определённому числу, но каждый следующий член последовательности больше предыдущего. Особенно важно то, что члены последовательности с большими номерами не бывают маленькими, и рост членов последоваетльности ничем не ограничен. В таком случае говорят, что предел последовательности равен плюс бесконечнечности. Более точно, предел равен плюс бесконечности в том случае, когда известно, что, начиная с некоторого момента, все члены последовательности станут больше любого наперед заданного числа. Т.е. ставится не только условие, что в последовательности встречаются все большие и большие значения, но еще и условие, что все члены последовательности в конце концов окажутся далеко от нуля.

1.12 Пример *Покажем,что $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. Действительно, какое число C мы не назовём, можно найти такое N, что для любого $n > N$ будет верно $n^2 > C$. Действительно, для любого $C < 1$ можно брать $N = 1$, для $C > 1$ достаточно взять $N = \left[\sqrt{C}\right]$, целую часть числа $\sqrt{C}$ - наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{C}$* .

Рассмотрим последовательность $a_n = -n$. Члены этой последовательности становятся всё меньше и меньше, не "накапливаясь"ни к какому числу. Члены последовательности с больими номреами не бывают большими, уменьшение членов последовательности ничем не ограничено. Предел этой последоваетльности равен минус бесконечности, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.Также, как и в предыдущем определении, необходимо поставить условие, что члены последовательности постепенно отдаляются от нуля в отрицательном направлении, и начиная, с некоторого момента станут дальше, чем любое наперед заданое число. Формально мы получаем следующее: если для любого сколь угодно большого числа существует такое число N, что для любого номера $n > N$ будет выполнятся условие $a_n < -$, то пределом последовательности a_n является $-\infty$.

1.13 Пример *Покажем, что* $\lim\limits_{n\to\infty}(-n+10) = -\infty$ *. Действительно, какое число* > 0 *мы не назовём, можно найти такое* N*, что для любого* $n > N$ *будет верно* $-n+10 < -M$ *. Для любого можно взять* $N = [] + 10$ *, тогда для* $n > N$ *будет выполняться нужное неравенство.*

1.14 Упражнение *Дать определение того, что пределом последовательности является* $+\infty$

Осталось рассмотреть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.Такой предел возникает в том случае, если мы знаем, что члены последовательности становятся все больше и больше по абсолютной величине, и в некоторый момент станут больше любого наперед заданого числа.

1.15 Пример *Покажем, что* $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \cdot 2n + n = \infty$ *. Действительно, какое число* > 0 *мы не назовём, можно найти такое* N*, что для любого* $n > N$ *будет верно* $|(-1)^n \cdot 2n + n| > M$ *. Для любого можно взять* $N = [] + 1$ *, тогда для любого четного* $n > N$ *будет выполняться неравенство* $|a_n| = 3n > 3N > 3 > M$*, а для нечетного* $|a_n| = |-n| > N >$

Последний вопрос, который необходимо обсудить в этой части - это ситуация, когда у последовательности нет предела. Если исходить из определений, то что значит, что предел не равен бесконечности? Это значит, что существует такое число > 0, что всегда будут встречаться в последовательности такие члены, которые меньше чем это число. А что значит, что предел не равен никакому числу ? Это значит, что какое число мы бы не взяли, существует такое $\varepsilon > 0$, что всегда будут встречаться такие члены последовательности, ldля которых $|a_n - a| > \varepsilon$. Другими словами, члены последовательности не начинают концентрироваться ни у одного числа. Рассмотрим простой пример: $a_n = \sin n$. Если мы вспомним график синуса то станет понятно, что так как ее члены - это точки на синусоиде, то в этой последовательности всегда будут встречаться числа из всего промежутка от -1 до 1. Однако строгого доказательства этого факта мы приводить не станем. Последовательность $a_n = n \cdot \sin n$ также не имеет предела - хоть в ней и встречаются сколь угодно большие числа, в ней всегда будут встречаться и числа, меньшие, например, 1.

1.16 Упражнение *Найти предел последовательности* $a_n = n \cdot \cos(2\pi n)$.

1.17 Упражнение *Найти предел последовательности* $a_n = n \cdot \cos(2\pi n + \pi)$.

1.18 Упражнение *Найти предел последовательности* $a_n = n \cdot \cos(\pi n)$.

1.19 Упражнение *Найти предел последовательности* $a_n = n \cdot \cos(\frac{\pi n}{2})$.

2 Что такое предел функции?

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(x-1)\pi}{\sin \pi x}$. Эта функция определена не везде: действительно, выражение в знаменателе $\sin \pi x$ иногда обращается в ноль, а деление на ноль не определено. Например, в точке $x = 1$ знаменатель дроби равен нулю: $\sin \pi x = \sin \pi = 0$. Значит, значение функции в точке $x = 1$ вычислить невозможно.

Однако, что-то узнать о функции в этой точке можно. Вычислим значение функции $f(x) = \frac{(x-1)\pi}{\sin \pi x}$ в точках, близких к $x = 1$:

$x = 0.8$	$x = 0.9$	$x = 0.95$	$x = 0.97$	$x = 0.99$	$x = 0.99$
$f(x) = \frac{(0.8-1)\pi}{\sin 0.8\pi} \approx -1.069$	$f(x) = \frac{(0.9-1)\pi}{\sin 0.9\pi} \approx -1.0166$	-1.0041	-1.0015	-1.000165	-1.000
$x = 1.2$	$x = 1.1$	$x = 1.05$	$x = 1.03$	$x = 1.01$	$x = 1.0$
$f(x) = \frac{(1.2-1)\pi}{\sin 1.2\pi} \approx -1.069$	$f(x) = \frac{(1.1-1)\pi}{\sin 1.1\pi} \approx -1.0166$	-1.0041	-1.0015	-1.000165	-1.000

Мы видим, что чем ближе x к единице, тем значение функции ближе к -1. В этом случае говорят, что предел функции $f(x)$ при стремлении x к единице равен -1. Это выражение записывается так: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$

Позже мы обсудим различия в пределах последовательностей и функций, а пока заметим, что понятие предела функции уже изучалось всеми в школе. Чтобы убедиться в этом, обсудим следующую запись: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$. Что она означает? Проще всего это понять при помощи графика: функция с ростом x (как раз при $x \to +\infty$) становится все ближе и ближе к некоторму числу a. Посмотрим на график $f(x) = 3 + \frac{\sin x}{x}$:

Мы видим что функция постепенно приближается к прямой, которая называется асимптотой, и именно в таком виде мы с этим и встречались ранее - если у функции есть горизонтальная асимптота, то это значит, что у нее есть предел при $x \to +\infty$. Отметим здесь важный момент - да, функция может пересекать асимптоту! И в школе вам не говорили противоположного. Существуют функции, которые ее не пересекают - например гипербола. Но это не означает, что ни одна функция не может ее пересекать.

Заполним табличку со значениями этой функции -

$x =$	10	11	...	30	31	32	...	100	101	102	...
$f(x) = 3 + \frac{\sin x}{x}$	2.946	2.909		2.967	2.987	3.017		2.995	3.004	3.01	

По этим значениям видно, что хотя и при переходе от одного числа к другому функция может и удалиться от своего предела, в целом, с ростом аргумента, значения приближаются к пределу. Запишем определение: если для функции существует такое число , что для любого сколь угодно малого числа ε существует такое число , что при любом $x > M$ будет выполняться неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, то называется пределом функции при стремлении x к бесконечности.

2.1 Упражнение *Записать определение предела при $x \to -\infty$*

2.2 Упражнение *Найти предел $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ при x стремящемся к 1*

Посмотрим, что происходит с функцией при $x = 1$. Мы получаем, что и числитель и знаменатель одновременно равны 0. То есть функция не определена в этой точке. Заполним таблицу со значениями функции при $x \to 1$:

$x = 0.8$	$x = 0.9$	$x = 0.95$	$x = 0.97$	$x = 0.99$	$x = 0.995$	$x = 0.999$
$f(x) = \frac{0.8^2+0.8-2}{0.8^2+2\cdot0.8-3} \approx 0.737$	$f(x) \approx 0.744$	0.747	0.748	0.749	0.74969	0.74993
$x = 1.2$	$x = 1.1$	$x = 1.05$	$x = 1.03$	$x = 1.01$	$x = 1.005$	$x = 1.001$
$f(x) = \frac{1.2^2+1.2-2}{1.2^2+2\cdot1.2-3} \approx 0.762$	$f(x) \approx 0.756$	0.753	0.752	0.751	0.7503	0.75006

По таблице видно, что значения функции приближаются к числу 0.75. И хотя мы и не можем по этим значениям ДОКАЗАТЬ, что предел равен именно этому числу, такой вывод был бы самым разумным. И действительно, предел равен 0.75. Но можно ли решить этот пример проще - без таблиц? И желательно так, чтобы это решение признали правильным на контрольной? Для этого давайте изучим функцию. Мы имеем отношение двух многочленов - в числителе и знаменателе стоят квадратные трехчлены. Разложим их на множители: $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}$, и теперь видно, почему у нас возникли проблемы - в знаменателе стоит множитель $(x-1)$, который равен нулю в предельной точке. Но этот же самый множитель стоит и в числителе, а так как мы рассматриваем точки, лежащие рядом с 1, но не равные 1, то можно сократить дробь на этот множитель (он не равен нулю), а затем снова подставить в функцию предельную точку:$\lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(x+2)}{(x+3)} = \lim\limits_{x\to1} \frac{1+2}{1+3} = 0.75$. Мы решили этот пример. И сразу же два замечания: ситуация, с которой мы столкнулись, называется неопределенностью вида $[\frac{0}{0}]$. Дело в том, что получив и в числителе и в знаменателе 0, мы никогда заранее не можем сказать, чему будет равен предел и будет ли он вообще. Второе замечание - прием, который мы использовали, всегда можно использовать для нахождения предела отношения многочленов вида $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=[\frac{0}{0}]$. Если $f(a)=0$, то этот многочлен всегда можно разложить на множители, один из которых равен $(x-a)$, а так как нулю равны оба многочлена, то мы сможем сократить дробь и изучать точно также новую функцию.

2.3 Упражнение $f\left(x\right)=\frac{4x^3-2x^2+x-2}{2x^3+6x^2-3x}$.

А если значении функции в интересующей нас точке определено, имеет ли смысл вычислять предел функции в этой точке? Для тех функций, которые встречались в школьной программе этот предел совпадает со значением функции в точке.. Но это верно совершенно не для любых функций. Например, целая часть.

3 Когда возникают сложности?

Мы научились находить пределы суммы, произведения, отношения функций и последовательностей. Однако, есть интересные ситуации, когда пользоваться "арифметикой пределов"не удаётся. Например, мы уже видели, что предел функции $f\left(x\right)=\frac{(x-1)\pi}{\sin\pi x}$ при стремлении x к единице равен -1. Почему мы не воспользовались здесь теоремой об отношении пределов, ведь найти пределы функций $\left(x-1\right)\pi$ и $\sin\pi x$ при стремлении x к единице просто? Дело в том, что, как мы уже говорили, знаменатель $\sin\pi x$ стремится к нулю при стремлении x к единице, а значит, и теорема об отношении пределов не применима. Бывает же, что наоборот, и числитель, и знаменатель дроби стремиться к бесконечности. Эти случаи легко сводятся один к другому. В некоторых случаях эту сложность можно при помощи небольшой хитрости

3.1 Пример *Найдём* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+x-2}{2x^3+6x^2-3x}$ *. Мы не можем воспользоваться теоремой о частном пределов, т.к. при стремлении x к бесконечности и числитель и знаменатель* *стремится к бесконечности. Мы могли бы "перевернуть"дробь, свести нахождение предела к такой задаче:* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3-2x^2+x-2}{2x^3+6x^2-3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2x^3+6x^2-3x}}{\frac{1}{4x^3-2x^2+x-2}}$ *. Сейчас и числитель, и занменатель дроби имеют предел при стремлении x к бесконечности, но эти пределы равны нулю, и воспрльзоваться теоремой о частном пределов опять не удаётся. Сделаем другое преобразование дроби. Заметим, что* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3-2x^2+x-2}{2x^3+6x^2-3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^3-2x^2+x-2}{x^3}}{\frac{2x^3+6x^2-3x}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{6x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4-\frac{2}{x}+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{2+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}}$ *. В этой дроби предел числителя и знаменателя легко ищется, а главное, предел знаменателя уже не равен нулю. (Дорешать аккуратно). Почему мы поделили числитель и знаменатель дроби именно на x^3 ? Дело в том, что x^3 - это самая старшая степень, встречающаяся в знаменателе, выполнив такое деление мы обеспечили себе ненулевой предел в знаменателе.*

При помощи этого приёма решаются и более сложные задачи.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)\sin x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+8}{\sqrt{x^2+6x-5}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+8}{\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^4+5x^3-4}}$

А чему раве предел суммы двух последовательностей или функций, если одна из них стремится к плюс, а другая к минус бесконечности? Ответ может быть разым. В этом случае теоремы о сложении, умножении и делении пределов ничем не могут нам помочь. Однако и на этот случай есть небольшая хирость: если слагаемые не сокращаются просто, как в случае $x-(x-1)$, нужно попытаться удачно умножить и поделить выражение на что-то, что упростит выражение хотя бы в числителе.

3.2 Пример $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-5x+7}\right)$ *Здесь нам нужно найти предел разности двух бесконечно возрастающих последовательностей. Для того, чтобы выражение хоть немного упростилось, умножим и поделим выражение на сумму этих же корней и воспользуемся в числителе формулой разности квадратов.*

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-5x+7}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-5x+7}\right)\left(\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+7}\right)}{\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+7}} =$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-3x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-5x+7}\right)^2}{\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+7}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(x^2-3x+3\right)-\left(x^2-5x+7\right)}{\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+7}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+3-x^2+5x-7}{\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+7}} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+7}}$

такие пределы искать мы уже умеем. Поделим числитель и знаменатель на x

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-5x+7}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2x-4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-3x+3}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-5x+7}}{x}} =$

Аналогично решаются такие задачи и для последовательностей.

3.3 Пример

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-3n+5}-2\sqrt{n^2-7x+12}\right) \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2-3n+5}-2\sqrt{n^2-7x+12}\right)\left(\sqrt{4n^2-3n+5}+2\sqrt{n^2-7x+12}\right)}{\left(\sqrt{4n^2-3n+5}+2\sqrt{n^2-7x+12}\right)} = \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2-3n+5)-4\left(n^2-7x+12\right)}{\sqrt{4n^2-3n+5}+2\sqrt{n^2-7x+12}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+5-4n^2+28x-48}{\sqrt{4n^2-3n+5}+2\sqrt{n^2-7x+12}} = \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+5-4n^2+28x-48}{\sqrt{4n^2-3n+5}+2\sqrt{n^2-7x+12}} = \lim_{n\to\infty}\frac{25n-43}{\sqrt{4n^2-3n+5}+2\sqrt{n^2-7x+12}} = \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{25n-43}{n}}{\frac{\sqrt{4n^2-3n+5}}{n}+\frac{2\sqrt{n^2-7x+12}}{n}} = \frac{25}{4}
\end{aligned}$$

3.4 Упражнение *Натйти предел функци* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-7}-\sqrt{x^2-7x+8}\right)$

3.5 Упражнение *Натйти предел функци* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-x+3}-3\sqrt{x^2-6}\right)$

3.6 Упражнение *Натйти предел функци* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\sqrt{x^2-7x+4}-\sqrt{4x^2-6x+5}\right)$

3.7 Упражнение *Натйти предел последовательности* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+3}-\sqrt{n^2-3n+5}\right)$

3.8 Упражнение *Натйти предел последовательности* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n-4}-\sqrt{n^2-2n+7}\right)$

3.9 Упражнение *Натйти предел последовательности* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sqrt{n^2-n+5}-\sqrt{4n^2-2n+3}\right)$

4 Замечательные пределы

Пока в вычислении пределов мы обходились несложными соображениями, сводящимися почти всегда к разным свойствам многочленов. Теперь посмотрим на более сложные выраженией.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ около точки $x = 0$. В самой точке функция не определена, т.к. знаменатель обращается в ноль. Числитель дроби тоже равен нулю в точке ноль. Сравним числитель и знаменатель дроби около нуля.

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01
$\sin x$	0.84147	0.47943	0.099833	0.049979	0.0099998
$x - \sin x$	0.15853	0.02057	0.000167	0.000021	0.0000002
$\frac{\sin x}{x}$					

Мы видим, что числитель и знаменатель стремятся к нулю, но разница между числителем и знаменателем стремится к нулю гораздо быстрее, числитель и знаменатель становятся очень-очень близки. Это значит, что отношение $\frac{\sin x}{x}$ становится всё ближе и ближе к единице, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Конечно, мы не доказали это равенство, и мы не будем его доказывать, просто проиллюстрировали равенство примерами. Доказательство этого замечательного равенства можно найти в любом стандартном учебнике математического анализа.

4.1 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{5}$

4.2 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} =$

4.3 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin x} =$

4.4 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-3x^2}{\sin x} =$

4.5 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+5x^2} =$

4.6 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+2x^2-4} =$

4.7 Пример $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-3x^2+2}{\sin x} =$

4.8 Пример $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{3x} =$

4.9 Пример *Найдём предел* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{x}$ *. Если x стремится к нулю, то и $6x$ стремится к нулю . Это значит, что* $\lim\limits_{6x\to 0} \frac{\sin 6x}{x} = \lim\limits_{6x\to 0} \frac{6\sin 6x}{6x} = 6$

4.10 Пример *Найдём предел* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

4.11 Пример $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{2x}$

4.12 Пример $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 2x}$

4.13 Пример $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{\sin 4x}$

4.14 Пример $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{\sin x+x^2}$

4.15 Пример $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x-x^3}$

4.16 Пример *Найдём предел* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x}$ *. Мы умеем искать предел* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{6x}$ *, воспользуемся этим умением для нахождения нашего предела:*$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{6x} \cdot \frac{6x}{\sin 3x}$ *Мы умножили и поделили дробь на $6x$ ...*

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ Дробь $\frac{e^x-1}{x}$ тоже не определена в нуле: и числитель и знаменатель равны нулю при $x = 0$. Если мы сравним числительи знаменатель этой дроби, то, так же как и в случае с $\frac{\sin x}{x}$ увидем, что они очень близки, сближаются гораздо быстрее, чем каждое из значений стремится к нулю.

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01
$e^x - 1$					
$(e^x - 1) - x$					
$\frac{e^x-1}{x}$					

Мы видим, что отношение $\frac{e^x-1}{x}$ становится всё ближе и ближе к единице, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$. Конечно, мы не доказали это равенство, и мы не будем его доказывать, просто проиллюстрировали равенство примерами. Доказательство этого замечательного равенства можно найти в любом стандартном учебнике математического анализа (например: Зорич, 1997).

4.17 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

4.18 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+x^2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(3+x)}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}(3+x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} \times \lim\limits_{x\to 0}(3+x) = 3$

4.19 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1+\sin x}{4x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{4x} + \frac{\sin x}{4x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{4x} + \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Мы видим, что если какая-то величина y стремится к нулю, то отнлошение $\frac{e^y-1}{y}$ стремится к единице

4.20 Пример *Найдём предел* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$ *. Если* x *стремится к нулю, то и* $3x$ *стремится к нулю . Это значит, что* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} = \lim\limits_{3x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} = \lim\limits_{3x\to 0}\frac{3\left(e^{3x}-1\right)}{3x} = 3$

4.21 Пример *Найдём предел* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$

4.22 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{10x}-1}{5x}$

4.23 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\frac{2x}{\sin 5x} = 1 \times \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

4.24 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{1-e^{2x}}$

4.25 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-1\right)\sin 2x}{(1-e^{4x})\sin 5x}$

4.26 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x-xe^{4x}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ Используя замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ несложно получить следствие, тоже очень полезное для вычисления пределов. Итак, нас интересует предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. Воспользуемся тригонометрической формулой для косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Пусть $2\alpha = x$, ведь именно $\cos x$ участвует в интересующем нас примере. Тогда $\alpha = \frac{x}{2}$. Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Итак, мы получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

4.27 Пример *Найдём* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin x\sin 3x}$. *Если* $x \to 0$, *то* $2x \to 0$, *т.е.* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin x\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\times\frac{(2x)^2}{\sin x\sin 3x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2}{\sin x\sin 3x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\times 3x}{\sin x\sin 3x}\times\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

4.28 Упражнение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{\sin x(e^x-1)}$

4.29 Упражнение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{\sin x(e^{2x}-1)}$ *Указание:* $\cos 3x - \cos 2x = (\cos 3x - 1) - (\cos 2x - 1)$

4.30 Упражнение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - e^{2x}\sin x}{1-\cos 3x}$

4.31 Упражнение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{3x}-1\right)}{1-\cos 2x}$

4.32 Упражнение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\left(e^{3x}-1\right)}{\cos 3x-1}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$ Этот замечательный предел можно вычислить, используя равенство $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1$. Пусть $\ln(x+1) = y$. Тогда если $x = 0$, то и $y = \ln(0+1) = 0$, более того, если $x \to 0$, то и $y \to 0$. Если $\ln(x+1) = y$, то $e^{\ln(x+1)} = e^y$, а значит $(x+1) = e^y$ и $x = e^y - 1$.

Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}} = 1$$

4.33 Пример $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(2x+1)}{\sin 3x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$ Мы можем вычислить этот предел, а потом использовать его для любых положительных α, дробных, иррациональных, любых. Однако подробно мы разберём случаи с несколькими целыми α.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда предел вычислить очень просто:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{x} = 1$$

Пусть $\alpha = 2$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x+x^2-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+x^2}{x} = \lim_{x\to 0} (2+x) = 2$$

Несложно провести вычисления и при $\alpha = 3$ и $\alpha = 4$, для этого нужно лишь воспользоваться формулами

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{3}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+3x+3x^2+x^3-1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(3+3x+x^2\right) = 3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{4}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+4x+6x^2+4x^3+x^4-1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(4+6x+4x^2+x^3\right) = 4$$

Оказывается, аналогичная формула верна для любых положительных α :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$$

Например, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x} = \frac{1}{2}$

4.34 Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[2]{1+3x}-\sqrt[3]{1+2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-(1+2x)^{\frac{1}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}-\frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}\right)=$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

4.35 Упражнение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[2]{1+4x}-\sqrt[3]{1+3x}}{2x}$

4.36 Упражнение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+6x}-1}{3x}$

4.37 Упражнение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[2]{1+4x}-(1+x)^2}{2x}$

Сдвиг переменной Почти все пределы, которые мы искали, были при $x \to 0$. Конечно, в задачах встречаются и другие переменные, не стремящиеся к нулю, однако это не мешает использовать нам замечательные пределы: сдвиг переменной сводит задачу к уже решенным

4.38 Пример $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$ *Пусть* $y=x-\frac{\pi}{2}$ *, тогда если* $x\to\frac{\pi}{2}$ *, то*

$$y=x-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0,$$

т.е. $y\to 0$*. Если* $y=x-\frac{\pi}{2}$ *то* $x=y+\frac{\pi}{2}$ *. Возвращаемся к поставленной задаче*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi-2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{\pi-2y-\pi}=\frac{1}{2}$$

Здесь мы воспользовались формулой приведения $\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin y$

5 Другие типы неопределённости

Все пределы, которые мы искали раньше, относились к типам $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ или $(\infty-\infty)$, т.е. мы искали предел отношения двух величин, каждая из которых стремится к нулю или к бесконечности или искали разность двух величин, стремящихся к бесконечности. Конечно, среди задач о нахождении пределов, встречаются не только такие.

5.1 Пример *Найти предел* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Казалось бы, в чём тут сложность? $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$, единица в любой степени равна единице, значит $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$. Однака это совершенно не так, для того, чтобы это увидеть, достаточно провести несколько численных экспериментов:

x	1	10	100	1000
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2	≈ 2.5937	≈ 2.705	≈ 2.718

По численным данным можно предположить, что величина $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ сходится при $x\to\infty$ к некоторму числу, и это число совершенно не равно единице. Это действительно так.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx 2.718281828$$

Число e одна из замечательных мировых констант, величин, встречающихся неожиданным образом в самых разных областях знаний. Это число нельзя представить в виде конечной дроби, т.е. оно иррационально. Число e не может буть корнем никакого уравнения конечной степени с целыми коэффициентами: ни квадратного, ни кубического, ни даже уранения сотой степени. Число e можно определять поразному, у него много замечательных определелний, и предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ одно из них. Однако, если мы считаем известным предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, то предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ можно вычислить. (Обычно, при строгом изложении теории пределов эти пределы находят в обратном порядке). Мы будем пользоваться определением натурального логарифма: $a=e^{\ln a}$ и свойством $\ln\left[a^b\right]=b\ln a$. Итак:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]}=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Пусть $y=\frac{1}{x}$. Тогда если $x\to\infty$, то $y\to 0$. Значит,

$$\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{y\to 0}e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=e^1=e$$

В последнем действии мы сделали ещё один нетривиальный ход. Почему, собственно, $\lim\limits_{y\to 0}e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$? Вовсе не всегда можно менять местами значок предела и функцию, а только если функция непрерывная. Это и есть, в каком-то смысле, определение непрерывности функции в точке. Функция e^x непрерывна (это утверждение мы не доказывалаи, и для того, чтобы его доказать, нужно много возиться с пределами), с ней такой переход делать можно. А функция $f(x) = [x]$ - целая часть числа не непрерывна, с ней такой фокус бы не прошёл. Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n}\right] = 0$, т.к. для любого n число $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ не меньше нуля, но меньше единицы. Однако $\left[1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right] = 1$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

5.2 Пример *Найти предел* $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}$ *. Воспользуемся опять определением логарифма* $a = e^{\ln a}$ *. Итак,* $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln(1+2x)\frac{3}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{3\ln(1+2x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln(1+2x)}{x}}$ *. Задача свелась к нашождению предела* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln(1+2x)}{x}$ *, найдём его.* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln(1+2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{6\ln(1+2x)}{2x} = 6$ *, итак,* $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln(1+2x)}{x}} = e^6$

5.3 Пример *Найти предел* $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{3}{e^{2x}-1}}$

5.4 Пример *Найти предел* $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{\frac{1}{\sin 2x \sin 3x}}$

5.5 Пример *Найти предел* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{4x}$

Литература

Зорич, В.А. (1997) Математический анализ, т. 1 и 2, Фазис: Москва.