

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

В.И. Моторин

**КРИТЕРИИ И МЕТОДЫ
ДЕКОМПОЗИЦИИ ДИНАМИКИ
МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ
ПОКАЗАТЕЛЕЙ**

Препринт WP2/2005/02

Серия WP2

«Количественный анализ в экономике»

Москва
ГУ ВШЭ
2005

УДК 519.8
ББК 22.18
М85

Редактор серии WP2 «Количественный анализ в экономике»
В.А. Бессонов

Моторин В.И.

М85 Критерии и методы декомпозиции динамики макроэкономических показателей: Препринт WP2/2005/02. — М.: ГУ ВШЭ, 2005. — 60 с.

Предложена полная методическая схема анализа временных рядов значений макроэкономических показателей на основе оптимизационных алгоритмов последовательного аддитивного разложения ряда на календарную, сезонную, осциллирующую, нерегулярную и трендовую компоненты. Особое внимание уделено исследованию априорных свойств различных компонент и разработке критериев последовательной структурной декомпозиции динамического ряда, обеспечивающих непосредственный учет формализуемых свойств его составляющих в виде ограничений в задачах математического программирования. Приведен иллюстративный пример построения структурной модели динамики отечественного промышленного производства в 1995 — 2004 гг.

Классификация JEL: C32, O47

УДК 519.8
ББК 22.18

Motorin V.I.

Decomposition of Macroeconomic Time-Series: Criteria and Methods: Working paper WP2/2005/02. — Moscow: State University — Higher School of Economics, 2005. — 60 p. (in Russian).

The paper studies a new optimization-based approach to macroeconomic time-series analysis on the basis of additive representation of any initial time-series by the sum of calendar, seasonal, oscillating, irregular and trend components. The special attention is paid to prior component properties analysis and elaboration of sequential decomposition criteria that provide direct handling of formalized properties as constraints of mathematical programming problems. An illustrative example of structural dynamics model of domestic industrial production index in 1995—2004 is given.

JEL Classification: C32, O47

Моторин Владимир Ильич
Государственный университет —
Высшая школа экономики
103074, Москва, Славянская пл., д. 4, стр. 2
E-mail: motoriny@rol.ru

Motorin Vladimir Ilyich
State University — Higher School of Economics
4 b.2, Slavyanskaya pl., Moscow, 103074, Russia
E-mail: motoriny@rol.ru

Препринты ГУ ВШЭ размещаются на сайте: <http://www.hse.ru/science/preprint/>

© В.И. Моторин, 2005
© Оформление. ГУ ВШЭ, 2005

ВВЕДЕНИЕ

Анализ временных рядов — научная дисциплина с более чем вековой историей и сложившимися традициями. Цель анализа временных рядов состоит в компактном математическом описании феномена исходных данных и последующем использовании построенного описания для прогнозирования их будущей динамики. Главным направлением исследований в течение всего этого времени являлось построение различных вероятностных моделей, генерирующих (по предположению) временные ряды или их структурные компоненты, и использование обширного математического аппарата теории статистических выводов для идентификации параметров, проверки свойств и прогностической способности моделей.

Вместе с тем применение «классических» вероятностных моделей для исследования макроэкономической динамики сопряжено с целым рядом методологических трудностей от весьма туманной интерпретации исходных данных как выборки из генеральной совокупности до катастрофического падения надежности и качества статистических выводов в условиях логически возможного сокращения горизонта анализа.

Основным побудительным мотивом для написания настоящей работы послужило стремление автора создать комплекс методов, пригодных для декомпозиции как длинных, так и коротких временных рядов при более строгом и точном учете априорных свойств различных компонент динамики макроэкономических показателей. Предпринятый в связи с этим отказ от вероятностных моделей обусловил преимущественное использование для достижения поставленной цели аппарата математического программирования, широко применяемого в рамках логико-алгебраического подхода к анализу данных [1].

Изложение разработанных методов декомпозиции и структурного анализа временных рядов ведется ниже для объемных макроэкономи-

ческих показателей потокового типа. Это обстоятельство не ограничивает общности полученных теоретических результатов, поскольку динамику любого объемного показателя типа «запас» можно представить в виде композиции постоянного начального уровня «запаса», динамики входного потока, обеспечивающего его пополнение, и динамики выходного потока, характеризующего интенсивность расхода «запаса». В случае отсутствия статистических данных о динамике входного и выходного потоков достаточно рассмотреть их алгебраическую сумму, выражаемую потоком цепных приростов (первых конечных разностей) значений исходного показателя типа «запас». Таким образом, задачи декомпозиции динамики «запасов» и «потоков» оказываются в известном смысле эквивалентными.

Автор выражает свою признательность Г.Е. Масловской и Г.О. Куранову за систематическое конструктивное обсуждение различных аспектов работы и организационную поддержку. Вопросы, замечания, пожелания и предложения можно направлять по адресу [motoriny @ rol.ru](mailto:motoriny@rol.ru).

1. Структурные модели динамики макроэкономических показателей

Исходная теоретическая предпосылка анализа динамических рядов основывается на концепции причинно-следственного характера развития экономических систем и постулирует возможность представлении исследуемого ряда в виде композиции следующих компонент, порождаемых различными совокупностями факторов и каузальных связей:

тренд (долгосрочная тенденция);

календарная составляющая;

сезонная составляющая;

более или менее регулярные колебания (осцилляции) относительно тренда;

несистематическая (нерегулярная) компонента.

Сформулированная предпосылка по своей сути не является жесткой или сколько-нибудь ограничительной для целей исследования динамических рядов, однако для того, чтобы сделать ее базой для построения операциональных прогнозно-аналитических моделей, требуется специфицировать указанную выше композицию компонент ряда в некоторой конструктивной форме. Вообще говоря, истинные свой-

ства причинно-следственного механизма формирования компонент того или иного динамического ряда на практике априори не известны. Поэтому обобщенная структурная модель динамики исследуемого макроэкономического показателя потокового типа V может быть представлена в виде

$$V_t = F(R_t, C_t, S_t, O_t, N_t), t = 0 \div T, \quad (1)$$

где t — темпоральный индекс, пробегающий значения от 0 до $T > 0$;

V_t — номинальное значение показателя V за период времени t ;

R_t — трендовое значение показателя V за период времени t ;

C_t — значение календарной компоненты динамики V за период времени t ;

S_t — значение сезонной компоненты динамики V за период времени t ;

O_t — значение осциллирующей компоненты динамики V за период времени t ;

N_t — значение нерегулярной компоненты динамики V за период времени t ;

F — числовая функция векторного аргумента с подходящими аналитическими свойствами.

Выбор адекватной спецификации функции F в модели (1) представляет собой самостоятельную проблему, не допускающую четкой формальной постановки и разрешаемую в процессе исследования динамического ряда на основе проб и ошибок. Например, если предположить, что эффекты влияния причинно-следственных связей, порождающих компоненты ряда значений объемного макроэкономического показателя V , обладают свойством аддитивности или мультипликативности, то структурная модель его динамики может быть записана соответственно в виде разложения

$$V_t = R_t + C_t + S_t + O_t + N_t, t = 0 \div T, \quad (2)$$

или в форме произведения

$$V_t = R_t C_t S_t O_t N_t, t = 0 \div T, \quad (3)$$

где все нетрендовые компоненты моделируемого динамического ряда представлены безразмерными множителями.

Аддитивная и мультипликативная формы структурной модели динамического ряда не являются эквивалентными, поскольку по ре-

результатам идентификации модели (2), вообще говоря, нельзя однозначно построить модель (3) и наоборот. Разложение (2) естественно использовать при анализе динамики объемных (стоимостных или натуральных) показателей и их сумм, а модель (3) оказывается весьма полезной для описания динамики отношений объемных величин ввиду невозможности выразить все слагаемые (2) динамического ряда значений относительного показателя через одноименные компоненты аддитивных разложений для соответствующих объемных показателей в числителе и знаменателе. Пусть U — макроэкономический показатель, образованный отношением двух объемных показателей V и W . Тогда уравнение

$$U_t = \frac{V_t}{W_t} = \frac{R_t^V C_t^V S_t^V O_t^V N_t^V}{R_t^W C_t^W S_t^W O_t^W N_t^W} = \frac{R_t^V}{R_t^W} \frac{C_t^V}{C_t^W} \frac{S_t^V}{S_t^W} \frac{O_t^V}{O_t^W} \frac{N_t^V}{N_t^W} = \\ = R_t^U C_t^U S_t^U O_t^U N_t^U, \quad t = 0 \div T,$$

определяет мультипликативную модель динамики показателя U , согласованную в отличие от аддитивного случая (2) с мультипликативными моделями (3) для динамических рядов значений объемных показателей V и W . Нетрудно видеть, что здесь трендовые значения показателя U могут быть рассчитаны как частные от деления трендовых значений V на трендовые значения W и т. д. для всех остальных компонент.

Количество неизвестных величин в структурной модели (1) существенно превосходит число имеющихся наблюдений T . В подобной ситуации одновременная идентификация структурных компонент динамического ряда сопряжена с алгоритмической реализацией неустойчивых в вычислительном отношении процедур и на практике представляется затруднительной и малоэффективной. В связи с этим целесообразно ограничиться поэтапным подходом к идентификации компонент модели (1), в рамках которого все составляющие ряда фильтруются поочередно в заранее установленном и логически обоснованном порядке следования.

Можно показать, что при поочередном оценивании компонент динамического ряда структурные модели (2) и (3) находятся во взаимно однозначном соответствии. Действительно, пусть на некотором этапе реализации каких-либо двух последовательных идентификационных процедур по моделям (2) и (3) из «текущего» ряда X удалены одно-

именные компоненты Y^a и Y^m и в результате получены «отфильтрованные» ряды Z^a и Z^m соответственно. Запишем результаты проведенной идентификации в виде системы уравнений

$$X_t = Z_t^a + Y_t^a, \quad X_t = Z_t^m Y_t^m, \quad t = 0 \div T; \quad Y_0^a = 0, \quad Y_0^m = 1.$$

Разрешив эти уравнения относительно Z_t^a и Z_t^m соответственно и применив условие совпадения результатов фильтрации в форме $Z_t^a = Z_t^m$ при $t = 1 \div T$, получим

$$X_t - Y_t^a = \frac{X_t}{Y_t^m}, \quad t = 1 \div T, \quad \text{откуда} \quad Y_t^a = \frac{Y_t^m - 1}{Y_t^m} X_t$$

$$\text{или} \quad Y_t^m = \frac{X_t}{X_t - Y_t^a}$$

для всех $t = 1 \div T$.

В итоге имеем

$$X_t = Z_t^a + Y_t^a = Z_t^m + \frac{Y_t^m - 1}{Y_t^m} X_t, \quad X_t = Z_t^m \cdot Y_t^m = Z_t^a \cdot \frac{X_t}{X_t - Y_t^a},$$

$$t = 1 \div T. \quad (4)$$

Полученные равенства устанавливают взаимно однозначное соответствие между структурными моделями (2) и (3). Таким образом, по аддитивной модели (2), построенной путем реализации той или иной процедуры последовательной идентификации компонент исходного динамического ряда, с помощью равенств (4) можно однозначно воспроизвести соответствующую мультипликативную модель (3), и наоборот. При анализе потоковой динамики в качестве базовой естественно выбрать аддитивную модель (2).

Поэтапный подход к идентификации составляющих макроэкономической динамики по структурной модели (1) требует логического обоснования очередности фильтрации компонент исходного ряда. Последовательную идентификацию компонент динамического ряда, значения которого измерены в стоимостном выражении, естественно начать с ценовой компоненты, которая полностью определяется направленностью и интенсивностью инфляционных процессов в соответствующей сфере экономики и поэтому не включена в структурную модель (1). Негативным следствием инфляции является неполная сопоставимость значений стоимостного показателя-«потока» в различные одноименные периоды времени (годы, кварталы, месяцы). Идентификация

ценовой компоненты с помощью индексов-дефляторов позволяет оценить вклад инфляционных факторов в номинальную динамику показателя и преобразовать исходный временной ряд к свободному от ценовых эффектов виду. Для любого натурального показателя ценовую компоненту следует приравнять нулю во всех точках периода наблюдений.

Второй этап последовательной структурной декомпозиции динамического ряда — устранение календарных эффектов, которое должно предшествовать анализу других компонент ряда, поскольку именно оно наряду с дефлятированием обеспечивает сопоставимость разновременных значений исследуемого показателя. Ясно, что в случае нарушения такой сопоставимости использование любых способов выявления сезонных и конъюнктурных циклов или других компонент ряда лишено элементарного логического смысла.

При обосновании очередности фильтрации остальных компонент динамического ряда следует принять во внимание то обстоятельство, что прямая идентификация тренда календарно скорректированного ряда весьма затруднительна, поскольку какие-либо априорные сведения о тренде в большинстве практических случаев отсутствуют, а спецификация тренда в виде того или иного параметрического семейства функций времени является чрезмерно «жесткой» (и, следовательно, неприемлемой) процедурой. Вместе с тем отдельные свойства сезонной, осциллирующей и нерегулярной компонент известны априори, т.е. устанавливаются на основе базовых определений и логических соображений, и могут быть положены в основу более гибких алгоритмов непараметрической идентификации. В связи с этим естественно определять тренд по «остаточному» принципу как плавно меняющийся ряд, получаемый из исходного путем последовательного элиминирования других компонент.

На третьем этапе последовательной структурной декомпозиции динамического ряда следует оценить сезонные эффекты как наиболее значимый объективный фактор искажения реальной динамики макроэкономических показателей. Здесь целесообразно подчеркнуть, что анализ сезонности лучше проводить до элиминирования осцилляций и нерегулярной компоненты, так как в противном случае «картина» сезонности может оказаться в существенной степени размытой. По аналогичной причине четвертый этап декомпозиции исходного ряда должен быть ориентирован на устранение осцилляций (конъюнктур-

ных циклов), а выделение нерегулярной компоненты следует проводить на заключительном, пятом этапе работы. Идентификация составляющих экономической динамики, как отмечалось выше, завершается после элиминирования нерегулярной компоненты построением «остаточного» тренда исходного ряда.

2. Априорные свойства компонент макроэкономических временных рядов

Свойства календарной компоненты

Необходимость учета календарности при анализе динамических рядов порождается, во-первых, имеющимися различиями в продолжительности одноименных периодов времени (лет, кварталов, месяцев), в течение (или на рубеже) которых производятся статистические наблюдения. В связи с этим можно говорить о годовых, квартальных и месячных календарных эффектах, обусловленных общепринятой хронометрической практикой.

Во-вторых, каждому календарному периоду можно поставить в соответствие некоторый «рабочий» период функционирования экономического агрегата, динамику которого отражает исследуемый ряд. Длительность такого «рабочего» периода зависит от числа официально установленных нерабочих дней, а также от объективно сложившегося соотношения между дискретной (осуществляемой только в рабочие дни периода) и непрерывной (осуществляемой в течение всех дней периода) составляющими деятельности рассматриваемого экономического агрегата. В результате равным календарным периодам могут соответствовать «рабочие» периоды различной продолжительности. Это обстоятельство обуславливает очевидное нарушение сопоставимости данных при анализе динамики показателей-«потоков».

Таким образом, имеют место «вторичные» календарные эффекты, определяемые политикой государства в сфере регулирования трудовых отношений и особенностями функционирования конкретных экономических агрегатов. Корректный учет трудовых и производственных эффектов при идентификации календарных компонент динамических рядов (в отличие от эффектов хронометрической природы) может быть проведен только на основе дополнительных статистических

данных, позволяющих оценить продолжительность указанных выше «рабочих» периодов.

Негативным следствием хронометрических, трудовых и производственных календарных эффектов для анализа динамических рядов значений макроэкономических показателей является неполная сопоставимость значений того или иного показателя в различные одноименные периоды времени. В связи с этим возникает задача оценки вклада календарных факторов в искажение «реальной» динамики макроэкономических показателей и преобразования временных рядов их значений к свободному от всех календарных эффектов виду.

Обозначим через D_t и D'_t количества календарных и официально установленных рабочих дней соответственно, а через ξ_t — долю непрерывной составляющей производственно-хозяйственной деятельности экономического агрегата, с которым ассоциирован исследуемый показатель, в t -м периоде времени ($D_t \geq D'_t$, $0 \leq \xi_t \leq 1$). Введем вспомогательный показатель D^E , значения которого рассчитываются по формуле

$$D_t^E = \xi_t D_t + (1 - \xi_t) D'_t, t = 0 \div T. \quad (5)$$

При варьировании ξ_t от 0 до 1 величина D_t^E изменяется от числа официально установленных рабочих дней до общего числа календарных дней в t -м периоде времени; ее естественно классифицировать как количество эффективных (приведенных) рабочих дней в периоде, оцененное с учетом непрерывной составляющей деятельности экономического агрегата и официального регламента трудовой деятельности.

Без ограничения общности можно утверждать, что любая корректная процедура элиминирования календарной компоненты равносильна некоторому перераспределению уровней ряда значений макроэкономического показателя-«потока» внутри интервала наблюдений в соответствии с динамикой количества эффективных рабочих дней в шаговом периоде. При этом сумма всех значений показателя по рассматриваемому горизонту наблюдений после устранения календарных эффектов должна оставаться неизменной. Сформулированное условие отражает то очевидное обстоятельство, что календарная корректировка как алгоритмическая процедура обработки динамического ряда не может служить источником увеличения или уменьшения суммарного (за весь период наблюдений) значения показателя в сопоставимых це-

нах. При использовании структурной модели (2) введенное условие можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{t=1}^T C_t = 0. \quad (6)$$

Следовательно, календарная компонента представляет собой знакочередующийся числовой ряд с нулевой суммой, принимающий положительные значения при относительно больших D_t^E и отрицательные — при относительно малых D_t^E .

Свойства циклических компонент

Циклический характер поведения является существенной особенностью практически всех экономических систем и агрегатов. Среди основных факторов, порождающих циклические эффекты, следует выделить краткосрочные, среднесрочные и долгосрочные изменения конъюнктуры финансовых, сырьевых и товарных рынков, а также объективные условия функционирования ряда базовых отраслей, в частности, сельского хозяйства, строительства, промышленности строительных материалов и электроэнергетики, которые через механизм межотраслевых связей распространяют сезонные волны по всем сферам и секторам экономики. Мощным «возбудителем» сезонности и других циклических процессов служат также колебания спроса и потребительских предпочтений населения и хозяйствующих субъектов. Наконец, отдельные сезонные эффекты обусловлены неравномерной динамикой занятости населения, подверженной влиянию политики ежегодных отпусков работников и привлечения дополнительных кадров для выполнения сезонных работ, а также пиков и спадов временной нетрудоспособности персонала и т. п.

Количество факторов, определяющих циклический характер эволюции экономических систем и агрегатов, весьма велико, их влияние на динамику макроэкономических и отраслевых показателей зачастую носит косвенный, опосредованный характер, а дополнительная статистическая информация, позволяющая достоверно оценить направление и интенсивность такого влияния, обычно отсутствует. Кроме того, циклические эффекты сами эволюционируют во времени и зачастую — весьма быстро и значительно [2]. В связи с этим при анализе циклических компонент временных рядов используются математичес-

кие модели кинематического типа, которые не объясняют сезонные и другие периодические эффекты, а лишь описывают их.

Эффект сезонности в силу своей природы проявляется с периодом в один год, тогда как осцилляционные эффекты могут демонстрировать разную периодичность. Для обеспечения возможности однозначной идентификации циклической компоненты длина анализируемого динамического ряда T должна превышать количество шаговых временных интервалов, эквивалентное периоду колебаний циклической компоненты. Обозначим это количество через $\tau \leq T$; заметим, что в случае анализа сезонных эффектов $\tau = 12, 6, 4, 3$ или 2 в зависимости от величины шагового интервала (месяц, два месяца, квартал, четыре месяца и полугодие соответственно). Требования кратности длины ряда T величине τ и совпадения периода наблюдений с несколькими календарными годами, часто принимаемые при анализе циклических эффектов, здесь не являются существенными.

Циклическая компонента Y в соответствии со строгим определением («сумма сезонных эффектов за год равна нулю» [3, с. 63]) должна обладать свойством равенства нулю суммы значений по любому подпериоду длины τ в пределах горизонта наблюдений:

$$\sum_{t=\theta+1}^{\theta+\tau} Y_t = 0 \text{ при } \theta = 0, 1, 2, \dots, T - \tau. \quad (7)$$

Из (7) непосредственно следует, что $Y_{t+\tau} = Y_t$ для любых t и $t + \tau$ из области $1 \div T$, т. е. Y является периодической функцией дискретного аргумента на интервале наблюдений. Подобные циклические компоненты можно классифицировать как статические, поскольку их последовательные значения с шагом τ не изменяются во времени.

Общий способ динамизации циклической компоненты заключается в отказе от строгого свойства цикличности (7) в пользу ослабленной модификации этого свойства, которое в общем случае можно представить в следующем виде:

$$\sum_{t=\theta+1}^{\theta+\tau} Y_t = \sigma_\theta \text{ при } \theta = 0, 1, 2, \dots, T - \tau, \quad (8)$$

где σ_θ — числовой параметр, характеризующий направление и величину нарушения строгого свойства цикличности для θ -го подпериода

длины τ . Заметим, что при нулевых значениях всех параметров σ_0 ослабленное свойство (8) становится строгим.

Важно подчеркнуть, что величину периода колебаний τ можно заранее определить лишь при анализе сезонных эффектов, а вектор σ априори не известен за исключением случаев идентификации статической циклической компоненты (тогда σ следует положить равным 0). Таким образом, операциональная (пригодная для практического использования) постановка задачи идентификации циклической (сезонной или осциллирующей) компоненты ряда в общем случае требует разработки способов оценки периода ее колебаний τ , а также методов определения оптимальной (рациональной) степени нарушения строгого свойства цикличности, выражаемой вектором σ .

Свойства нерегулярной компоненты

Нерегулярную компоненту естественно интерпретировать как модельную оценку совокупного влияния на динамику ряда различных несистематических факторов, в том числе случайного характера, т. е. рассматривать как добавленный к тренду ряда стохастический «шум». Поэтому первым априорным свойством, которое должно быть учтено при идентификации нерегулярной компоненты, является равенство нулю ее среднего значения или — в эквивалентной форме — суммы ее значений по всему периоду наблюдений:

$$\sum_{t=1}^T N_t = 0. \quad (9)$$

Второе априорное свойство нерегулярной компоненты, вытекающее из ее стохастической трактовки, базируется на том очевидном соображении, что она должна демонстрировать отсутствие существенной автокорреляции — как положительной, так и отрицательной. Отражение этого свойства в задаче идентификации нерегулярной компоненты связано с выбором эффективного критерия оценки степени автокорреляции динамического ряда и его статистики.

Наконец, вполне логично потребовать, чтобы часть динамики исходного ряда, объясняемая несистематическими эффектами, существенно уступала аналогичным долям других, более «содержательных» компонент. Общий способ формализации этого требования заключается в ограничении размаха нерегулярной компоненты с помощью

тех или иных технических приемов, обеспечивающих выполнение условий

$$\max_{t=1+T} |N_t| \leq k_S \cdot \max_{t=1+T} |S_t| \text{ и } \max_{t=1+T} |N_t| \leq k_O \cdot \max_{t=1+T} |O_t|, \quad (10)$$

где k_S и k_O — положительные коэффициенты, не превосходящие единицы.

Дополнительное свойство циклических компонент

При анализе априорных свойств календарной компоненты утверждалось, что любая корректная процедура ее элиминирования должна сводиться к перераспределению уровней ряда динамики макроэкономического показателя в пределах периода наблюдений. Аналогичному требованию удовлетворяют также нерегулярная компонента, наделенная свойством (9), и статический сезонный или конъюнктурный цикл при условии кратности горизонта наблюдений T периоду его колебаний τ .

Четкая логическая основа этого утверждения делает вполне естественным и даже целесообразным его распространение на общий случай идентификации сезонной и осциллирующей компонент исходного ряда. Запишем в дополнение к свойствам (7) и (8) условие

$$\sum_{t=1}^T S_t = \sum_{t=1}^T O_t = 0. \quad (11)$$

Тогда из (2) с учетом (6), (9) и (11) получаем равенство

$$\sum_{t=1}^T V_t = \sum_{t=1}^T (R_t + C_t + S_t + O_t + N_t) = \sum_{t=1}^T R_t, \quad (12)$$

которое существенно облегчает и проясняет экономическую интерпретацию тренда как результата перераспределения уровней ряда динамики рассматриваемого показателя потокового типа.

Идемпотентность операторов оценивания нетрендовых компонент

Другим общим признаком корректности алгоритма элиминирования любой нетрендовой компоненты Z исходного ряда V является идем-

потентность оператора ее оценивания Q , по определению которого выполняется соотношение $Z = Q(V)$. Требование идемпотентности оператора Q здесь означает, что его «вторичное» применение к остаточному ряду $V - Z$ не должно изменять этого ряда: $Q(V - Z) = Q(V - Q(V)) = 0$. В случае линейного оператора фильтрации нетрендовой компоненты с матрицей Q имеем $QV = QQV$, откуда $Q^2 = Q$, т. е. Q — идемпотентная матрица [4].

Таким образом, для обеспечения корректности всей процедуры декомпозиции динамического ряда на основе аддитивной структурной модели (2) свойством идемпотентности должны обладать операторы (алгоритмические процедуры) оценивания календарной, сезонной, осциллирующей и нерегулярной компонент. Здесь следует подчеркнуть, что экспериментальная проверка степени идемпотентности оператора сезонности часто используется в специальной литературе при сравнительном анализе различных методов декомпозиции динамических рядов [5].

Свойства тренда

Выше отмечалось, что какие-либо априорные сведения о тренде в большинстве практических случаев анализа динамических рядов отсутствуют. Тем не менее можно утверждать, что трендовая компонента должна демонстрировать меньшую изменчивость, нежели исходный ряд, а ее изменения должны быть относительно плавными. Кроме того, естественно потребовать выполнения условия (12) как признака корректности всей процедуры декомпозиции динамического ряда.

Условия ортогональности компонент

При декомпозиции динамического ряда в соответствии с аддитивной структурной моделью (2) было бы весьма желательным обеспечить попарную ортогональность отклонений слагаемых векторного разложения $V = R + C + S + O + N$ от своих средних значений $\bar{R} = \bar{V}$ и $\bar{C} = \bar{S} = \bar{O} = \bar{N} = 0$, которая со статистической точки зрения эквивалентна отсутствию корреляции между ними [1]. Представленные выше формулы для средних значений компонент ряда непосредственно следуют из (12), (6), (11) и (9).

Заметим, что проверка степени ортогональности структурных компонент ряда составляет один из основных критериев эмпирического сопоставления различных методов декомпозиции динамических рядов [5]. Прямой учет требования ортогональности в условиях последовательной идентификации компонент ряда приводит к существенному расширению совокупности их формализованных свойств за счет введения десяти следующих условий равенства нулю попарных скалярных произведений:

$$(R - \bar{R}, C) = (V - C, C) = 0, \quad (13)$$

$$(S, \hat{C}) = 0, \quad (R - \bar{R}, S) = (V - S, S) = 0, \quad (14)$$

$$(O, \hat{C}) = 0, \quad (O, \hat{S}) = 0, \quad (R - \bar{R}, O) = (V - O, O) = 0, \quad (15)$$

$$(N, \hat{C}) = 0, \quad (N, \hat{S}) = 0, \quad (N, \hat{O}) = 0, \quad (16)$$

$$(R - \bar{R}, N) = (V - N, N) = 0,$$

где \hat{C} , \hat{S} и \hat{O} — последовательно получаемые оценки календарной, сезонной и осциллирующей компонент ряда. Равенства (13) — (16) выражают дополнительные свойства соответственно календарной, сезонной, осциллирующей и нерегулярной компонент, обеспечивающие отсутствие корреляции между слагаемыми векторного разложения $V = R + C + S + O + N$. Отметим, что из десяти введенных условий только 6 являются линейными, а в остальных четырех фигурируют квадратичные функции векторных аргументов C , S , O и N , порождающие значительные вычислительные трудности при решении задач идентификации компонент ряда. В связи с этим в настоящей работе условия ортогональности компонент используются лишь для апостериорной проверки качества декомпозиции исходного динамического ряда.

3. Критерии последовательной структурной декомпозиции динамических рядов

Запишем аддитивную модель (2) для n -го этапа последовательной структурной декомпозиции динамического ряда в редуцированной форме:

$$V_t^{(n-1)} = V_t^{(n)} + Y_t^{(n)}, V_t^{(0)} = V_t, t = 0 \div T, \quad (17)$$

где $V_t^{(n-1)}$ — значение ряда, построенного на $(n - 1)$ -м этапе реализации алгоритма декомпозиции, за период времени t ; $Y_t^{(n)}$ — значение оцениваемой на n -м этапе структурной компоненты за период времени t ; $V_t^{(n)}$ — значение «остаточного» динамического ряда с элиминированной компонентой $Y_t^{(n)}$ за период времени t .

Поскольку конечной целью оценки составляющих макроэкономической динамики является построение как можно менее изменчивого и более «гладкого» тренда, естественно потребовать, чтобы устранение каждой компоненты в процессе их поочередной идентификации обеспечивало бы последовательное выравнивание исходного ряда при переходе от одного этапа структурной декомпозиции к другому. Для того чтобы сделать это требование операциональным, необходимо тем или иным способом квантифицировать «качественное» понятие изменчивости динамического ряда.

Количественный измеритель степени изменчивости «остаточного» ряда в общем случае представляет собой числовую функцию нескольких аргументов (уровней ряда), принимающую значения на множестве неотрицательных действительных чисел. Если такая функция Ω задана в аналитическом виде, идентификация n -й структурной компоненты ряда на соответствующем этапе реализации алгоритма последовательной декомпозиции теоретически может быть сведена к решению задачи условной минимизации целевой функции

$\Omega(V^{(n)}) = \Omega(Y^{(n)}; V^{(n-1)})$ с $T+1$ переменными $Y_t^{(n)}$ и $T+1$ экзогенными параметрами $V_t^{(n-1)}$ при ограничениях, определяемых априорными свойствами оцениваемой компоненты динамического ряда. Таким образом, введение измерителя изменчивости ряда обеспечивает критерийную основу для оценивания его компонент методами математического программирования [6]. Вычислительная сложность алгоритмов идентификации определяется аналитическим видом целевой функции, выбор которого представляет собой самостоятельную проблему, не допускающую четкой формальной постановки и решаемую на экспертно-логическом уровне.

Величина шагового изменения ряда при переходе от одного наблюдения к другому выражается первой конечной разностью $V_t^{(n)} - V_{t-1}^{(n)}$, $t = 1 \div T$, и, следовательно, совокупное изменение ряда за весь период наблюдений характеризуется суммой модулей первых

разностей. Заметим, что эта сумма для любого монотонно возрастающего ряда равна $(V_T^{(n)} - V_0^{(n)})$, для любого монотонно убывающего — $(V_0^{(n)} - V_T^{(n)})$, а для ряда с нетривиальной динамикой может значительно превышать абсолютную величину разности его начального и конечного значений.

Далее, простым и весьма наглядным способом измерения изменчивости ряда является оценка длины ломаной линии, соединяющей последовательные уровни ряда. Квадрат длины t -го звена ломаной определяется по теореме Пифагора: $L_t^2 = (V_t^{(n)} - V_{t-1}^{(n)})^2 + a^2$, где a — длина временного интервала $[t-1, t]$, а суммарная длина всех звеньев ломаной линии составляет

$$\sum_{t=1}^T L_t = \sum_{t=1}^T \left[(V_t^{(n)} - V_{t-1}^{(n)})^2 + a^2 \right]^{1/2}.$$

Полученная функция зависит от выбора единицы измерения времени и имеет не вполне удобный для последующих преобразований аналитический вид, поэтому в качестве измерителя изменчивости ряда рассмотрим функцию

$$\sum_{t=1}^T L_t^2 = \sum_{t=1}^T (V_t^{(n)} - V_{t-1}^{(n)})^2 + Ta^2,$$

которая с точностью до постоянного слагаемого совпадает с суммой квадратов первых конечных разностей значений остаточного ряда в редуцированной аддитивной модели (17).

Обобщив приведенные выше соображения, можно утверждать, что легко интерпретируемым и весьма универсальным измерителем степени изменчивости динамического ряда может служить неотрицательная функция, определяемая формулой

$$\begin{aligned} \Omega^m(Y^{(n)}) &= \sum_{t=1}^T w_t |V_t^{(n)} - V_{t-1}^{(n)}|^m = \\ &= \sum_{t=1}^T w_t |(V_t^{(n-1)} - V_{t-1}^{(n-1)}) - (Y_t^{(n)} - Y_{t-1}^{(n)})|^m, \end{aligned} \quad (18)$$

где $w_t \geq 0$ при $t = 1 \div T$ — экзогенно задаваемые неотрицательные весовые коэффициенты, характеризующие информационную «ценность» слагаемых функции Ω в пределах периода наблюдений; $m \geq 1$ — показатель степени. Здесь следует подчеркнуть, что использование в (18) экзогенных весовых параметров позволяет реализовать «внешнее» управление процессом практических расчетов неизвестной компоненты ряда, например, обеспечить ее более точную подгонку к данным последних наблюдений путем задания весовых коэффициентов в экспоненциальной форме $w_t = w^{T-t}$, где w — неотрицательный числовой множитель, не превосходящий единицы.

Функция (18) выражает m -ю степень взвешенной гильдеровой нормы вектора первых конечных разностей значений ряда $V^{(n)}$ с показателем m [7, с. 101]. Кроме того, заметим, что выражение (18) с точностью до весовых коэффициентов совпадает с известной формулой для Φ -вариации m -го порядка дискретной функции одной переменной (в данном случае — остаточного динамического ряда) по Жордану — Винеру [8, с. 606—609].

Введенный измеритель степени изменчивости остаточного динамического ряда может быть использован в качестве критериальной основы для построения различных алгоритмов последовательной непараметрической идентификации составляющих макроэкономической динамики по редуцированной аддитивной модели (18). Сформулируем базовую задачу идентификации компоненты динамического ряда на n -м этапе его структурной декомпозиции в форме задачи нахождения точки безусловного минимума целевой функции (19) векторного аргумента $Y^{(n)}$.

В данной формулировке задача минимизации функции (18), как нетрудно показать непосредственно, имеет неоднозначное тривиальное решение $Y_t^{(n)} = V_t^{(n-1)} + \text{const}$, $t = 0 \div T$, которому соответствует нулевое значение (абсолютный минимум) целевой функции. Таким образом, любой исходный ряд в результате элиминирования компоненты $Y^{(n)}$ преобразуется в постоянный. Разумеется, полученное решение не представляет существенного практического интереса, однако оказывается важным в теоретическом отношении как база для построения операциональных модификаций базовой задачи путем учета ограничений, отражающих специфические априорные свойства компонент динамического ряда.

Переходя к обсуждению способов решения базовой задачи идентификации компоненты динамического ряда с учетом дополнительных ограничений, отметим, что функции типа (18), в формулах для аналитической записи которых фигурирует операция модуля, недифференцируемы в конечном числе точек при нечетном показателе m . Кроме того, при больших значениях m частные производные $\Omega^m(Y^{(n)})$ по компонентам вектора $Y^{(n)}$ представляют собой полиномы высоких порядков. Это существенно осложняет разработку алгоритмических подходов к решению семейства задач последовательной идентификации компонент динамического ряда с целевыми функциями (18). Вместе с тем при $m = 1, 2$ или $+\infty$ можно предложить вполне эффективные и реализуемые на практике способы нахождения условных минимумов этих функций. Рассмотрим три указанных случая минимизации целевой функции (18), принимая во внимание то очевидное обстоятельство, что точки минимума функций $\Omega(Y^{(n)})$ и $\Omega^m(Y^{(n)})$ совпадают.

При выборе евклидовой нормы ($m = 2$) функция (18) является полиномом второго порядка, частные производные которого — линейные функции. Если дополнительные ограничения, выражающие априорные свойства оцениваемой компоненты $Y^{(n)}$, записаны в виде линейных равенств, то использование стандартного для таких ситуаций метода множителей Лагранжа приводит к линейной системе необходимых условий наличия минимума с учетом ограничений. Ввиду «хороших» аналитических свойств евклидовой целевой функции (18) именно она используется при дальнейшем изложении разработанных методов идентификации календарной, сезонной, осциллирующей и нерегулярной компонент ряда.

При $m = 1$ метод множителей Лагранжа неприменим, поскольку целевая функция имеет разрывные производные. Вместе с тем нетрудно показать, что безусловная минимизация взвешенной суммы модулей в (18) эквивалентна решению следующей линейной экстремальной задачи:

$$\text{минимизировать функцию } \Omega_1(\eta) = \sum_{t=1}^T \eta_t \quad (19)$$

$$\text{при ограничениях } -\eta_t \leq w_t \left\{ \left(V_t^{(n-1)} - V_{t-1}^{(n-1)} \right) - \left(Y_t^{(n)} - Y_{t-1}^{(n)} \right) \right\} \leq \eta_t,$$

$$t = 1 \div T,$$

где $\eta_t \geq 0$ — вспомогательная инструментальная переменная, ассоциированная с t -м слагаемым целевой функции (18). Итак, при $m = 1$ идентификация компоненты исходного ряда сводится к задаче линейного программирования с инструментальными переменными и ограничениями в виде двойных неравенств, дополненной линейными ограничениями, выражающими априорные свойства оцениваемой компоненты.

Аналогичным образом можно поступить и в случае, когда $m \rightarrow +\infty$. Из векторной алгебры известно [7, с. 101], что для любого вектора $X = (X_1, X_2, \dots, X_T)$ имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\sum_{t=1}^T |X_t|^m \right]^{1/m} = \max_{t=1+T} |X_t|$$

Следовательно, функция $\Omega(Y^{(n)})$ с единичными весовыми коэффициентами при $m = +\infty$ совпадает с максимальным значением абсолютных величин первых конечных разностей остаточного ряда. Ее безусловная минимизация может быть сведена к решению линейной экстремальной задачи, аналогичной (19), в которой все вспомогательные переменные равны между собой. Тогда задача линейного программирования, в которой требуется минимизировать функцию

$$\Omega_{\infty}(\eta) = \eta \tag{20}$$

$$\text{при ограничениях } -\eta \leq (V_t^{(n-1)} - V_{t-1}^{(n-1)}) - (Y_t^{(n)} - Y_{t-1}^{(n)}) \leq \eta, \quad t = 1 + T,$$

как нетрудно показать, эквивалентна задаче нахождения безусловного минимума функции (18) при $m = +\infty$ с единичными весовыми коэффициентами. Для обеспечения зависимости ее решения от информационной ценности точек исходного ряда при проведении практических расчетов во внутреннюю часть двойных неравенств экстремальной задачи (20) можно ввести весовые коэффициенты $w_t > 0, \quad t = 1 + T$. Таким образом, при $m = +\infty$ идентификация компоненты исходного ряда сводится к задаче линейного программирования с целевой функцией единственной переменной и ограничениями в виде неравенств, дополненной ограничениями, выражающими априорные свойства оцениваемой компоненты ряда.

Разумеется, возможны и другие, отличные от (18) варианты построения критериальной функции, пригодные для практического при-

менения на всех этапах реализации последовательной структурной декомпозиции ряда. Значительный интерес здесь представляют измерители, не базирующиеся на первых разностях значений остаточного ряда, использование которых приводит к «потере» одного (базисного) наблюдения. Так, заменив в (18) первую разность остаточного ряда $V^{(n)}$ отклонением уровня ряда от его среднего значения, получим неотрицательную функцию

$$\begin{aligned} \Omega^m(Y^{(n)}) &= \sum_{t=1}^T w_t |V_t^{(n)} - \bar{V}^{(n)}|^m = \\ &= \sum_{t=1}^T w_t |(V_t^{(n-1)} - \bar{V}^{(n-1)}) - (Y_t^{(n)} - \bar{Y}^{(n)})|^m, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\bar{V}^{(n)}$, $\bar{V}^{(n-1)}$ и $\bar{Y}^{(n)}$ — векторы-столбцы средних значений соответствующих рядов. Задача минимизации целевой функции (21), как и функции (18), имеет неоднозначное тривиальное решение $Y_t^{(n)} = V_t^{(n-1)} + \text{const}$, $t = 0 \div T$, которому соответствует нулевой абсолютный минимум. Нетривиальные решения задачи минимизации (21) могут быть получены только на основе введения дополнительных ограничений, отражающих специфические априорные свойства компонент динамического ряда.

Далее, особого внимания заслуживает идея критериальной фильтрации компонент на основе «стягивания» остаточного ряда сверху и снизу двумя гладкими функциями, заранее специфицированными в виде некоторых параметрических семейств. Введем в рассмотрение функцию, выражающую взвешенную сумму гельдеровых расстояний между точками стягивающих кривых:

$$\Omega^m(\alpha, \beta, Y^{(n)}) = \sum_{t=1}^T w_t [u(t, \alpha) - d(t, \beta)]^m, \quad (22)$$

где $u(t, \alpha)$ и $d(t, \beta)$ — зависящие от векторных параметров α и β функции времени, определяющие соответственно верхнюю и нижнюю границу для значений ряда $V^{(n)}$.

В результате возникает задача условной минимизации целевой функции (22) при естественных ограничениях в форме двойных неравенств

$$u(t, \alpha) \geq V_t^{(n-1)} - Y_t^{(n)} \geq d(t, \beta), \quad t = 1 \div T, \quad (23)$$

и с учетом априорных свойств идентифицируемой компоненты $Y^{(n)}$. Следует подчеркнуть, что структура ограничений (23) делает необязательным использование операции модуля под знаком суммы в формуле (22).

Логический смысл предложенной алгоритмической схемы очевиден: элиминировать компоненту $Y^{(n)}$ таким образом, чтобы заключить остаточный ряд в как можно более узкий интервал между двумя «хорошими» функциями. Следует ожидать, что полиномиальные функции времени достаточно высокого порядка окажутся пригодными для решения задачи минимизации целевой функции (22) с учетом ограничений (23) при любой динамике исходного временного ряда. Для эффективного подбора «стягивающих» полиномов или других граничных функций можно использовать математический аппарат регрессионного анализа интервальных данных, предложенный автором в статье [9].

4. Методы оценивания календарных эффектов

Основу для оценки календарных эффектов составляет аддитивная модель (2) в редуцированной форме

$$V_t = V_t^c + C_t, \quad t = 0 \div T, \quad (24)$$

где V_t^c — неизвестное значение остаточного динамического ряда с элиминированной календарной компонентой в периоде времени t . При дальнейшем изложении без ограничения общности предполагается, что анализируемый ряд изначально представлен в безразмерной форме базисных темпов роста V_t/V_0 , $t = 1 \div T$, т. е. $V_0 = 1$.

Простой, но вполне общий способ формального описания календарной компоненты заключается в ее представлении в виде параметрического линейного соотношения

$$C_t = \alpha_t (D_t^E - \bar{D}^E) = \alpha_t \left(D_t^E - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T D_i^E \right), \quad t = 1 \div T, \quad (25)$$

где $\alpha_t \geq 0$ при $t = 1 \div T$ — априори неизвестные числовые параметры, интерпретируемые как приростные объемы «производства» в расчете на один эффективный рабочий день. Нетрудно видеть, что в этом случае условие нормировки (6) определяет гиперплоскость в T -мер-

ном линейном пространстве переменных α_t , ортогональную вектору отклонений величины D_t^E от своего среднего значения по всему периоду наблюдений \bar{D}^E .

Преобразовав невзвешенную евклидову целевую функцию (18) с учетом (24) и (25), получим следующее матричное выражение для квадратичной Φ -вариации остаточного ряда:

$$\Omega^2(\alpha) = (V^c)' V^c = (\Delta_0 V - \Delta D \alpha)' (\Delta_0 V - \Delta D \alpha), \quad (26)$$

где Δ_0 — прямоугольная матрица оператора первых конечных разностей ряда размерности $T \times (T+1)$, элементы которой определяются формулой

$$(\Delta_0)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, i = 1 \div T, j = 1 \div T; \\ -1 & \text{при } i - 1 = j, i = 1 \div T, j = 0 \div (T-1); \\ 0 & \text{— в остальных случаях;} \end{cases}$$

Δ — квадратная матрица порядка T с элементами $(\Delta)_{ij} = (\Delta_0)_{ij}$, $i = 1 \div T$, $j = 1 \div T$; D — диагональная матрица порядка T с элементами $(D_t^E - \bar{D}^E)$, а α — вектор-столбец неизвестных неотрицательных параметров α_t , $t = 1 \div T$. Далее, равенство (6) в матричной записи приобретает следующий вид:

$$\sum_{t=1}^T C_t = \sum_{t=1}^T \alpha_t (D_t^E - \bar{D}^E) = d' \alpha = 0, \quad (27)$$

где d — вектор-столбец с элементами $(D_t^E - \bar{D}^E)$ размерности $T \times 1$.

В соответствии с выдвинутым выше требованием последовательного выравнивания исходного ряда в процессе его структурной декомпозиции задача идентификации календарной компоненты может быть сформулирована как задача минимизации целевой функции (26) при линейном ограничении (27) и условии неотрицательности вектора α .

Запишем функцию Лагранжа для (26) и ограничения-равенства в матричной форме:

$$L(\alpha; \lambda) = (\Delta_0 V - \Delta N \alpha)' (\Delta_0 V - \Delta N \alpha) - \lambda d' \alpha,$$

где λ — множитель Лагранжа, ассоциированный с ограничением (27).

Вычислив частные производные $L(\alpha; \lambda)$ по вектору α и скалярному аргументу λ и подставив их в необходимые условия минимума,

получим матричную запись следующей системы $(T+1)$ линейных уравнений:

$$2D'\Delta'\Delta D\alpha - \lambda d = 2D'\Delta'\Delta_0 V, \quad -d'\alpha = 0,$$

которую можно представить в блочной форме:

$$\left[\begin{array}{c|c} 2D'\Delta'\Delta D & -d \\ \hline -d' & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \alpha \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2D'\Delta'\Delta V \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Можно показать, что при $\det D \neq 0$ матрица полученной системы невырождена и обеспечивает нахождение единственного нетривиального решения $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$. Однако результаты экспериментальных расчетов, проведенных на массивах реальных и гипотетических данных, позволяют утверждать, что в большинстве практических случаев это решение не удовлетворяет дополнительному условию неотрицательности вектора параметров α , т. е. оказывается лишенным экономического смысла.

Целевая функция (26) — выпуклая, ограничение (27) и дополнительное условие неотрицательности параметров — линейные. Из теории оптимизации известно, что если в подобном случае точка полученного минимума лежит вне пределов допустимой области, определяемой дополнительными ограничениями, то условный минимум достигается на границе этой области. В частности, на данном утверждении базируется вычислительная схема обобщенного метода множителей Лагранжа, когда поочередно активизируются одно, два и т. д. ограничений, пока не будет получено допустимое решение [10].

Следовательно, решение системы линейных уравнений (28) с учетом условия неотрицательности параметров представляет собой вектор α , содержащий один или несколько нулевых элементов. Поскольку оценки параметров α_t при $t = 1 \div T$ интерпретируются как приростные объемы «производства» в расчете на один эффективный рабочий день в t -м периоде времени, такое решение не может быть признано корректным с экономической точки зрения. Итак, рассмотренный «прямой» подход к идентификации календарной составляющей по критерию минимума квадратичной Ф-вариации календарно скорректированного ряда, вообще говоря, не дает практически значимых результатов.

Вместе с тем нетрудно видеть, что задаваемая уравнением (27) гиперплоскость содержит, в частности, любой постоянный вектор $\alpha_t = \text{const} > 0$, $t = 1 \div T$, поскольку сумма компонент вектора d равна нулю по определению среднего значения. Следовательно, если усреднить суточную «выработку» по всему периоду наблюдений, положив

$$\hat{\alpha}_t = \hat{\beta} = \frac{\bar{V}}{\bar{D}^E} > 0, \quad t = 1 \div T,$$

то однопараметрическая календарная компонента

$$C_t = \hat{\beta} (D_t^E - \bar{D}^E), \quad t = 1 \div T \quad (29)$$

будет допустимым, но, вообще говоря, не оптимальным решением задачи условной минимизации функции (26) при ограничении (27). Кроме того, формула (29) не обеспечивает соблюдения требования идемпотентности алгоритма устранения календарных эффектов: «вторичная» календарная корректировка ряда приводит к элиминированию той же самой компоненты, поскольку оценка среднесуточной «выработки» в этом случае не изменяется ввиду того, что средние значения исходного и календарно скорректированного ряда, очевидно, совпадают.

Положив в целевой функции (26) $\alpha_t = \delta > 0$ для всех $t = 1 \div T$ и проведя несложные преобразования, сформулируем задачу безусловной одномерной минимизации функции

$$\begin{aligned} \Omega^2(\delta) = & \left[(V_1 - \delta(D_1^E - \bar{D}^E)) - V_0 \right]^2 + \\ & + \sum_{t=2}^T \left[(V_t - V_{t-1}) - \delta(D_t^E - D_{t-1}^E) \right]^2. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение динамический ряд \tilde{D}_t^E , значения которого равны D_t^E при $t = 1 \div T$ и \bar{D}^E при $t = 0$. Тогда формулу для $\Omega^2(\delta)$ можно переписать в следующем виде:

$$\Omega^2(\delta) = \sum_{t=1}^T \left[(V_t - V_{t-1}) - \delta(\tilde{D}_t^E - \tilde{D}_{t-1}^E) \right]^2. \quad (30)$$

Приравняв первую производную $\Omega^2(\delta)$ к нулю и разрешив это уравнение относительно δ , получим следующее решение задачи идентификации календарной компоненты исходного динамического ряда:

$$C_t = V_t - \hat{\delta} (D_t^E - \bar{D}^E) = V_t - \frac{\sum_{t=1}^T (V_t - V_{t-1}) (\tilde{D}_t^E - \tilde{D}_{t-1}^E)}{\sum_{t=1}^T (\tilde{D}_t^E - \tilde{D}_{t-1}^E)^2} (D_t^E - \bar{D}^E),$$

$$t = 1 \div T. \quad (31)$$

В случае «нормальных» исходных данных знаки двух сомножителей в числителе оценки $\hat{\delta}$ преимущественно совпадают. Тогда $\hat{\delta} > 0$, и элиминирование календарных эффектов по формуле (31) является логически обоснованным. Полученную оценку естественно интерпретировать как среднюю приростную величину суточного объема «производства» по всему периоду наблюдений (в отличие от представленной в (29) средней абсолютной величины).

Можно показать, что оценка параметра $\hat{\delta}$, рассчитанная не для исходного, а для календарно скорректированного ряда, равняется нулю. Таким образом, формула (31) определяет идемпотентный оператор оценивания календарной компоненты динамического ряда.

Вместе с тем использование однопараметрического представления календарной компоненты (27) позволяет получить еще одну оценку календарных эффектов непосредственно из квадратичного условия ортогональности (13). Положим $\alpha_t = \gamma > 0$ для всех $t = 1 \div T$. Неполное квадратное уравнение

$$(V - C, C) = \gamma \sum_{t=1}^T V_t (D_t^E - \bar{D}^E) - \gamma^2 \sum_{t=1}^T (D_t^E - \bar{D}^E)^2 = 0$$

имеет единственный ненулевой корень, которому соответствует календарная компонента

$$C_t = V_t - \hat{\gamma} (D_t^E - \bar{D}^E) = V_t - \frac{\sum_{t=1}^T V_t (D_t^E - \bar{D}^E)}{\sum_{t=1}^T (D_t^E - \bar{D}^E)^2} (D_t^E - \bar{D}^E),$$

$$t = 1 \div T, \quad (32)$$

ортогональная остаточному ряду и являющаяся, как и (29), допустимым, но, вообще говоря, не оптимальным решением задачи условной минимизации функции (26) при ограничении (27). Однако нетрудно

установить, что календарная компонента (32) является точкой условного минимума евклидовой критериальной функции (21) при использовании однопараметрического представления календарных эффектов в форме (27). Кроме того, формула (32) также определяет идемпотентный оператор оценивания календарной компоненты динамического ряда, в чем легко убедиться непосредственно.

Для измерения степени снижения изменчивости ряда (24) в результате устранения календарных эффектов можно использовать отношение (невзвешенных) квадратичных Φ -вариаций календарно скорректированного и исходного рядов

$$G(C) = \frac{\sum_{t=1}^T (V_t^c - V_{t-1}^c)^2}{\sum_{t=1}^T (V_t - V_{t-1})^2} = \frac{\sum_{t=1}^T (V_t - C_t - V_{t-1} + C_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T (V_t - V_{t-1})^2}, \quad (33)$$

которое естественно назвать коэффициентом выравнивания исходного ряда в результате календарной корректировки. Коэффициент (33) изменяется в пределах от нуля до единицы и показывает, какую часть квадратичной Φ -вариации временного ряда V_t , $t = 1 \div T$, не удастся объяснить влиянием календарной компоненты, рассчитанной по формулам (29), (31) или (32).

Таким образом, в результате проведенного анализа проблемы оценки календарных эффектов предложены три достаточно четко интерпретируемых способа идентификации календарной компоненты, пропорциональной вектору $(D_t^E - \bar{D}^E)$, в динамическом ряде значений потокового показателя V — на основе формул (29), (31) и (32) соответственно. В заключение установим общее условие, при выполнении которого устранение календарных компонент указанного вида обеспечивает уменьшение квадратичной Φ -вариации исходного ряда, т. е. позволяет сделать календарно скорректированный ряд менее изменчивым и тем самым более «гладким».

Прирост квадратичной Φ -вариации (30), обусловленный элиминированием календарной компоненты вида $C_t = a (D_t^E - \bar{D}^E)$, равен

$$\begin{aligned} & \Omega^2(a) - \Omega^2(0) = \\ & = -a \left[2 \sum_{t=1}^T (V_t - V_{t-1}) (\tilde{D}_t^E - \tilde{D}_{t-1}^E) - a \sum_{t=1}^T (\tilde{D}_t^E - \tilde{D}_{t-1}^E)^2 \right]. \end{aligned}$$

Уменьшение вариации исходного ряда в результате устранения календарных эффектов обеспечивается при $\Omega^2(a) - \Omega^2(0) \leq 0$, откуда при $a > 0$ имеем

$$0 < a \leq 2\delta. \quad (34)$$

Абсолютный минимум функции $\Omega^2(a)$, как нетрудно видеть, достигается в средней точке интервала (34) и равен

$$\begin{aligned} \Omega^2(\hat{\delta}) &= \sum_{t=1}^T (V_t - V_{t-1})^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^T (V_t - V_{t-1}) (\tilde{D}_t^E - \tilde{D}_{t-1}^E) \right)^2}{\sum_{t=1}^T (\tilde{D}_t^E - \tilde{D}_{t-1}^E)^2} \leq \\ &\leq \sum_{t=1}^T (V_t - V_{t-1})^2 = \Omega^2(0) = \Omega^2(2\hat{\delta}). \end{aligned}$$

Условие (34) означает, что любой метод идентификации календарной компоненты вида $C_t = a(D_t^E - \bar{D}^E)$, при реализации которого получено расчетное значение параметра a , превышающее величину $2\hat{\delta}$, использовать в дальнейших практических расчетах нецелесообразно, так как он увеличивает степень изменчивости ряда, измеряемую евклидовой целевой функцией (18) при однопараметрическом представлении календарной компоненты. Из трех предложенных выше способов устранения календарных эффектов наилучшим в этом смысле является использование формулы (31), которое всегда обеспечивает максимальное сокращение квадратичной Ф-вариации исходного динамического ряда, а также соблюдение требования идемпотентности алгоритма оценивания календарной компоненты.

Вместе с тем нельзя не подчеркнуть, что при выборе в качестве измерителя степени изменчивости остаточного ряда евклидовой критериальной функции (21) наилучшая оценка календарной компоненты определяется по формуле (32), которая обеспечивает не только соблюдение требования идемпотентности оператора оценивания, но и

выполнение квадратичного условия ортогональности (13). В этом случае полученное выше в форме (34) условие сокращения степени изменчивости остаточного ряда принимает вид $0 < a \leq 2\hat{\gamma}$.

5. Анализ обобщенной задачи идентификации циклических компонент

Редуцированная форма аддитивной модели (2) после реализации процедуры элиминирования календарной составляющей принимает следующий вид:

$$V_t^c = V_t^{cy} + Y_t, \quad t = 0 \div T, \quad V_0^c = 1, \quad (35)$$

где V_t^{cy} и Y_t при $t = 1 \div T$ — неизвестные значения циклической компоненты и остаточного динамического ряда с элиминированными календарными и циклическими эффектами соответственно.

Запишем ослабленное свойство цикличности (8) в матричной форме:

$$Hy = \sigma, \quad (36)$$

где $y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_T)'$ — вектор значений циклической компоненты, $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{T-\tau})'$ — вектор-столбец правых частей ограничений (8), а H — прямоугольная матрица размерности $(T - \tau + 1) \times T$ с элементами

$$(H)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ пр}\theta \ i = 1 \div (T - \tau + 1), j = i \div (i + \tau - 1); \\ 0 - \beta \text{ остальных случаях.} \end{cases}$$

Из (8) непосредственно следует, что $Y_{i+\tau} = Y_i + \sigma_i - \sigma_{i-1}$, $t = 1 \div (T - \tau)$, т. е. при $\sigma_i - \sigma_{i-1} \neq 0$ циклическая компонента уже не является периодической функцией дискретного темпорального аргумента на интервале имеющихся наблюдений. Такие циклические компоненты естественно называть динамическими, поскольку их последовательные значения с шагом τ эволюционируют во времени, причем направленность и интенсивность этой эволюции находятся в прямой зависимости от величин первых разностей временного ряда σ .

Использование равенства $Y_0 = Y_\tau$ в качестве граничного условия для улучшения «склейки» остаточного ряда с его значением в базис-

ном периоде позволяет записать взвешенную евклидову целевую функцию (18) в следующей матричной форме:

$$\begin{aligned}\Omega^2(Y_1, \dots, Y_T) &= \Omega^2(y) = (V^{cy})' W V^{cy} = \\ &= (\Delta_0 V^c - \Delta_\tau y)' W (\Delta_0 V^c - \Delta_\tau y),\end{aligned}\quad (37)$$

где W — диагональная матрица весовых коэффициентов порядка T , а Δ_τ — квадратная матрица порядка T , элементы которой определяются формулой

$$(\Delta_\tau)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{пр } \theta \ i = j, i = 1 \div T, j = 1 \div T; \\ -1 & \text{пр } \theta \ i - 1 = j, i = 2 \div T, j = 1 \div (T - 1), \theta \text{ пр } \theta \ i = 1, i = \tau; \\ 0 - \beta & \text{остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим задачу оценивания вектора y с учетом априорных свойств циклической компоненты и запишем функцию Лагранжа для (37) и равенств (8), (11) в виде

$$L(y; \lambda_1, \lambda_2) = (\Delta_0 V^c - \Delta_\tau y)' W (\Delta_0 V^c - \Delta_\tau y) - \lambda'(Hy - \sigma) - \Lambda e'y,$$

где λ — вектор-столбец множителей Лагранжа размерности $(T - \tau + 1) \times T$, ассоциированный с ограничениями (8) или (36); Λ — скалярный множитель Лагранжа для ограничения (11); $e = (1, 1, \dots, 1)$ — вспомогательный вектор-столбец единичных значений. Вычислив частные производные $L(y; \lambda, \Lambda)$ по аргументам y, λ, Λ и подставив их в необходимые условия минимума, получим систему $2T - \tau + 2$ линейных уравнений

$$2\Delta_\tau' W \Delta_\tau y - H'\lambda - \Lambda e = 2\Delta_\tau' W \Delta_0 V^c, \quad -Hy = -\sigma, \quad -e'y = 0,$$

которую можно записать в блочной форме:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 2\Delta_\tau' W \Delta_\tau & -H' & -e \\ \hline -H & 0 & 0 \\ \hline -e' & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} y \\ \lambda \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Delta_\tau' W \Delta_0 V^c \\ -\sigma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Можно показать, что матрица полученной системы невырождена за исключением случаев, когда $\sigma = 0$ и значение T кратно τ , а ограничение (11) становится избыточным. Отметим, что левый верхний блок матрицы этой системы вырожден при любом выборе матрицы весо-

вых коэффициентов W и точная идентифицируемость вектора циклической компоненты на основе решения системы (38) достигается только за счет априорных ограничений.

Сформулированную задачу минимизации целевой функции (37) при наличии дополнительных априорных ограничений (8) и (11) будем называть обобщенной задачей непараметрической идентификации динамической циклической компоненты временного ряда значений потокового показателя V . Решением системы (38) при экзогенно заданных периоде колебаний τ и ненулевом векторе σ является $(2T - \tau + 2)$ -мерный вектор $(\hat{y}, \hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$, первые T компонент которого определяют последовательные значения искомой составляющей ряда, удовлетворяющие ослабленному свойству цикличности (8) и условию (11), а остальные $T - \tau + 2$ компонент доставляют значения множителей Лагранжа в оптимальном решении задачи минимизации целевой функции (37) с ограничениями-равенствами (8) и (11).

6. Алгоритмы построения динамической сезонной компоненты

Логическая основа оценки динамических сезонных эффектов определяется тем обстоятельством, что вектор σ в отличие от величины τ априори не известен за исключением случаев идентификации статической компоненты ($\sigma = 0$). Мерой «качества» выбора вектора σ при решении системы (38) может служить величина условного минимума целевой функции (37). Если она превосходит минимальное значение (37) при $\sigma = 0$, следует считать выбор σ неудачным, так как полученная динамическая компонента оказывается «хуже» статического сезонного цикла. Таким образом, возникает задача нахождения вектора $\sigma \neq 0$, обеспечивающего максимальное уменьшение оптимума целевой функции (37) при ослаблении строгого свойства сезонности в определенных пределах.

Для измерения степени нарушения строгого свойства сезонности естественно воспользоваться гельдеровой векторной нормой с показателем $m = +\infty$, которая выражает максимальное абсолютное расхождение сумм значений исходного и остаточного рядов в модели (35) для всех подпериодов длины τ . Сформулируем задачу идентификации динамической сезонной компоненты в следующем виде: миними-

зировать целевую функцию (37) при ограничениях-равенствах (8) и (11) с учетом дополнительных условий

$$|\sigma_{\theta}| \leq \sigma_{\max}, \theta = 0, 1, 2, \dots, T - \tau, \quad (39)$$

где $\sigma_{\max} > 0$ — экзогенно устанавливаемый скалярный порог ослабления строгого свойства сезонности. Неизвестными переменными в этой задаче являются вектор динамической сезонной компоненты $y = s$ размерности $T \times 1$ и вектор σ размерности $(T - \tau + 1) \times 1$.

Ввиду наличия ограничений-неравенств получение точного решения этой задачи на основе условий Куна — Таккера представляется весьма трудоемким в вычислительном отношении [10]. Тем не менее специальная структура ограничений задачи идентификации динамической сезонной компоненты позволяет предложить эффективный итерационный алгоритм нахождения ее приближенного решения, в основу которого положена идея целенаправленного пошагового ослабления строгого свойства сезонности.

Известно, что множители Лагранжа в оптимальном решении экстремальной задачи с ограничениями в виде равенств представляют собой компоненты градиента оптимума целевой функции в пространстве правых частей ограничений [10]. Запишем это утверждение в принятых выше обозначениях:

$$\hat{\lambda}_{\theta} = \hat{\lambda}_{\theta}(\sigma) = \frac{\partial \Omega^2(\hat{s}; \sigma)}{\partial \sigma_{\theta}}, \theta = 0, 1, 2, \dots, T - \tau,$$

где $\hat{\lambda}_{\theta}(\sigma)$ — значение q -го множителя Лагранжа в решении системы (38).

Пусть найдено текущее решение $(\hat{s}, \hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$ экстремальной задачи (37), (36), (11) при заданном векторе σ . Изменим вектор правых частей ограничений (36), сделав шаг в направлении, определяемом антиградиентом $-\hat{\lambda}(\sigma)$, т. е. положим $\sigma' = \sigma - a\hat{\lambda}(\sigma)$, где $a > 0$ — экзогенно задаваемая величина шага. Решив систему уравнений (38) с измененной правой частью, получим «улучшенный» минимум $\Omega^2(\hat{s}; \sigma') < \Omega^2(\hat{s}; \sigma)$, который в свою очередь также может быть уменьшен при продолжении пошагового движения по антиградиенту в процессе адаптации динамической сезонной компоненты к необъясненным статическим циклом особенностям календарно скорректированного ряда.

Таким образом, на начальном этапе реализации итерационной процедуры следует решить систему (38) при $\sigma_0 = 0$ (это возможно только для T , не кратных τ). Основной итерационный цикл алгоритма заключается в выборе величины шага по антиградиенту (в общем случае переменного), пересчете подвектора в правой части системы по формуле

$$\sigma_{(m)} = \sigma_{(m-1)} - a_{(m)} \hat{\lambda}_{(m-1)}, \quad (40)$$

где m — номер итерации, и, наконец, в последующем решении системы (38) при $\sigma = \sigma_{(m)}$.

По мере выполнения итераций степень ослабления строгого свойства сезонности будет нарастать, а идентифицируемая сезонная компонента — все более отклоняться от статической. Поэтому длительное движение по антиградиенту целевой функции (37) может привести в область чрезмерно больших по модулю параметров σ , следствием чего станут значительные расхождения поперiodных сумм значений исходного и остаточного рядов в модели (35). Если экзогенно ввести дополнительные условия (39), то возникает простой, но эффективный терминальный критерий для рассматриваемой итерационной процедуры.

Обозначим через $\sigma_{(m)}^{\max}$ максимальную по модулю компоненту вектора $\sigma_{(m)}$ в текущем решении на m -й итерации алгоритма. Пусть на $(m + 1)$ -й итерации при выполнении шага по антиградиенту величиной $a_{(m+1)}$ в соответствии с (40) она впервые превосходит экзогенно установленный верхний предел, т. е. $\sigma_{(m)}^{\max} < \sigma_{\max}$, но $\sigma_{(m+1)}^{\max} > \sigma_{\max}$. Тогда корректировка величины текущего шага в (40) по формуле

$$a'_{(m+1)} = a_{(m+1)} \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{(m)}^{\max}}{\sigma_{(m+1)}^{\max} - \sigma_{(m)}^{\max}},$$

обеспечивает выполнение условия $\sigma_{(m+1)}^{\max} = \sigma_{\max}$ с вполне достаточной для практических расчетов точностью. Описанный «укороченный» шаг завершает итерационный процесс идентификации динамической сезонной компоненты ряда.

Следует подчеркнуть, что выбор величины σ_{\max} в (39) составляет самостоятельную задачу, поскольку установление σ_{\max} на относительно низком уровне не позволяет получить адекватного представления об истинном характере эволюции сезонной компоненты, на чрезмер-

но высоком — приводит к «захвату» сезонной компонентой части не-систематической динамики исследуемого временного ряда.

Выше отмечалось, что описанный выше итерационный алгоритм нереализуем, когда τ является делителем T (т. е. $T = K\tau$, где K — количество сезонных циклов в периоде наблюдений), поскольку матрица системы (38) вырождена на начальной итерации. В этом случае из (38) следует исключить избыточное ограничение (11) вместе со скалярным множителем Λ и решить невырожденную редуцированную систему при $\sigma_0 = 0$. Однако любой шаг по антиградиенту $-\hat{\lambda}_{(m-1)}$ на m -й итерации может вывести за пределы области допустимых решений задачи (37), (36), (11), так как не гарантирует выполнения определяемого ограничением (11) условия $u'\sigma_{(m)} = 0$, где u — булев вектор-столбец размерности $(T - \tau + 1) \times 1$ с элементами $u_{\theta} = 1$ при $\theta = k\tau$, $k = 0 \div (K - 1)$, и $u_{\theta} = 0$ — в остальных случаях.

В подобной ситуации естественно заменить движение по антиградиенту $-\hat{\lambda}_{(m-1)}$ шагами вдоль его ортогональной проекции $-\tilde{\lambda}_{(m-1)}$ на линейное подпространство $u'\sigma = 0$ пространства векторов σ , которая определяется идемпотентной матрицей $P = I - u(u'u)^{-1}u'$, где I — единичная матрица порядка $T - \tau + 1$ (см., например, [11]). Тогда формула (40) приобретает следующий вид:

$$\sigma_{(m)} = \sigma_{(m-1)} - a_{(m)} \tilde{\lambda}_{(m-1)},$$

$$\text{где } \tilde{\lambda}_{(m-1)} = P\hat{\lambda}_{(m-1)} = \hat{\lambda}_{(m-1)} - \frac{1}{K}uu'\hat{\lambda}_{(m-1)},$$

и модифицированный метод проекции антиградиента обеспечивает соблюдение условия (11) на всех итерациях вплоть до завершения работы в соответствии с предложенным терминальным критерием.

Экспериментальные расчеты показывают, что ряд с элиминированной динамической сезонной компонентой при попытках повторной фильтрации статического сезонного цикла на основе решения системы (38) с $\sigma = 0$ остается неизменным. Использование в этой ситуации разработанного итерационного алгоритма приводит к получению ненулевой «вторичной» динамической сезонной компоненты, которая отражает естественный эффект дальнейшего ослабления строгого свойства сезонности. Таким образом, можно утверждать, что предложенный метод оценивания динамического сезонного цикла обладает свойством идемпотентности.

7. Критериальный выбор периода колебаний статической осцилляции

Следующий по значимости после сезонного фактор искажения реальной динамики макроэкономического показателя — более или менее регулярные колебания относительно тренда, выражаемые осциллирующей компонентой. Простой, но вполне эффективный на практике способ моделирования осцилляций заключается в их представлении в виде набора (одной, двух или более) статических циклических компонент с различными периодами, для идентификации которых можно использовать инструментарий фильтрации циклических компонент на основе решения системы (38) с учетом априорных ограничений (36) и (11). Поскольку при этом $\sigma = 0$, число уравнений (и неизвестных) в системе с помощью строчковых преобразований и подстановок может быть сокращено до $(\tau + i)$, где $i = 1$ при $T = K\tau$ и $i = 2$ — в противном случае, $K = [T/\tau]$. Нетрудно также показать, что определяемый системой (38) линейный оператор оценивания статического цикла является идемпотентным.

Однако основная проблема, возникающая в ходе оценивания осциллирующей компоненты, заключается в том, что периоды осцилляционных циклов априори неизвестны (в отличие от случая анализа сезонных эффектов). Следуя основной идее анализа циклических эффектов, определим статическую осцилляцию $O = (O_0, O_1, O_2, \dots, O_T)$ с неизвестным периодом колебаний $\tau \geq 2$ как точку условного минимума взвешенной квадратичной Φ -вариации (18) динамического ряда

$$V_t^{cso} = V_t - C_t - S_t - O_t = V_t^{cs} - O_t, \quad t = 0 \div T,$$

при априорных ограничениях (7) и (11). Обратимся к разработке критериального подхода к выбору периода колебаний статической осцилляции τ для практического использования при анализе динамических рядов. В основу подхода положим оценки степени снижения изменчивости остаточного ряда в результате последовательного элиминирования его компонент.

Для оценки степени снижения изменчивости ряда после устранения динамической сезонной компоненты воспользуемся отношением взвешенных квадратичных Φ -вариаций сезонно и календарно скорректированных рядов

$$G_w(S) = \frac{\sum_{t=1}^T w_t (V_t^{cs} - V_{t-1}^{cs})^2}{\sum_{t=1}^T w_t (V_t^c - V_{t-1}^c)^2} = \frac{\sum_{t=1}^T w_t (V_t^c - S_t - V_{t-1}^c + S_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T w_t (V_t^c - V_{t-1}^c)^2}, \quad (41)$$

которое естественно назвать коэффициентом выравнивания ряда с устраненными календарными эффектами в результате сезонной корректировки. Коэффициент (41) изменяется в пределах от нуля до единицы и показывает, какую часть взвешенной квадратичной Φ -вариации временного ряда V_t^c , $t = 0 \div T$, не удастся объяснить влиянием динамической сезонной компоненты.

Для оценки степени снижения изменчивости ряда в результате последующего устранения статической осцилляции с периодом τ рассмотрим отношение взвешенных квадратичных Φ -вариаций полученного и календарно скорректированного рядов

$$G_w(S; O, \tau) = \frac{\sum_{t=1}^T w_t (V_t^c - S_t - O_t - V_{t-1}^c + S_{t-1} + O_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T w_t (V_t^c - V_{t-1}^c)^2}, \quad (42)$$

которое естественно назвать коэффициентом выравнивания ряда с элиминированными календарными эффектами в результате сезонной корректировки и устранения осцилляции O с периодом τ . Коэффициент (42) характеризует часть взвешенной квадратичной Φ -вариации временного ряда V_t^c , $t = 1 \div T$, которую не удастся объяснить совокупным влиянием динамической сезонной компоненты и статической осцилляции.

Поскольку $G_w(S; O, \tau) \leq G_w(S)$ при любых значениях τ , разность коэффициентов (41) и (42) может составить критериальную основу выбора периода колебаний статической осцилляции. Нетрудно видеть, что неотрицательная и не превосходящая единицы величина

$$R_w(S; O, \tau) = 1 - G_w(S; O, \tau) / G_w(S) \quad (43)$$

характеризует часть взвешенной квадратичной Φ -вариации календарно и сезонно скорректированного ряда, которая объясняется влиянием статической осцилляции O с периодом τ , т. е. представляет собой аналог коэффициента множественной детерминации, широко приме-

няемого в регрессионном анализе [1]. Таким образом, критериальный выбор периода колебаний статической осцилляции может быть сведен к определению значения τ , соответствующего максимуму величины $R_w(S; O, \tau)$.

Предложенный критерий можно уточнить, если (опять-таки по аналогии с коэффициентом множественной детерминации) ввести в него поправку на число степеней свободы числителя и знаменателя отношения в формуле (43). Статическая осцилляция с периодом τ полностью определяется $(\tau - 1)$ независимыми параметрами, откуда с учетом (11) следует, что число степеней свободы числителя в (43) равно $(T - \tau + 1)$, где $i = 1$ при $T = K\tau$ и $i = 2$ — в противном случае. В задаче идентификации статического цикла коэффициент $G_w(S)$ характеризует квадратичную Φ -вариацию исходного (по отношению к процедуре идентификации цикла) ряда, поэтому число степеней свободы знаменателя естественно положить равным T . Уточненная критериальная функция

$$\begin{aligned} \bar{R}_w(S; O, \tau) &= 1 - \frac{T}{T - \tau + i} [1 - R_w(S; O, \tau)] = \\ &= 1 - \frac{G_w(S; O, \tau) / (T - \tau + i)}{G_w(S) / T} \end{aligned} \quad (44)$$

выражает долю взвешенной квадратичной вариации календарно и сезонно скорректированного ряда, объясняемую влиянием статической осцилляции O с периодом τ , в расчете на одну степень свободы. Заметим, что коэффициент (44) в отличие от $R_w(S; O, \tau)$ в некоторых точках τ может принимать отрицательные значения, которые следует рассматривать как свидетельства отсутствия в анализируемом ряде циклов с соответствующими периодами. Оптимальный выбор периода колебаний здесь заключается в нахождении точки абсолютного (или локального) положительного максимума критериальной функции (44) целочисленного аргумента τ .

Поскольку осциллирующую компоненту в общем случае можно представить в виде суммы нескольких циклических рядов O^1, O^2, \dots, O^M с различными периодами $\tau_m, m = 1 \div M$, описанный выше алгоритм фильтрации осцилляционных циклов необходимо последовательно применить несколько раз до тех пор, пока критериальная функция (44) не перестанет демонстрировать ярко выраженный положитель-

ный максимум. После этого процесс идентификации циклов осциллирующей компоненты исходного динамического ряда естественно считать завершенным.

8. Методы идентификации неавтокоррелированной нерегулярной компоненты

Редуцированная форма аддитивной модели (2) после реализации процедур последовательного устранения календарной, сезонной и осциллирующей (т. е. набора статических циклических) компонент приобретает следующий вид:

$$V_t^{cso} = R_t + N_t, \quad t = 0 \div T, \quad (45)$$

где N_t при $t = 1 \div T$ — неизвестные значения нерегулярной компоненты $n = (N_1, N_2, \dots, N_T)'$. Запишем взвешенную евклидову целевую функцию (18) в следующей матричной форме:

$$\Omega^2(N_1, \dots, N_T) = \Omega^2(n) = (\Delta_0 V^{cso} - \Delta n)' W (\Delta_0 V^{cso} - \Delta n), \quad (46)$$

где Δ_0 и Δ совпадают с соответствующими матрицами в формуле (26). Можно показать, что рассчитанная без учета априорных ограничений оценка нерегулярной компоненты

$$\hat{n} = (\Delta' W \Delta)^{-1} \Delta' W \Delta_0 V^{cso} = V^{cso} - e,$$

доставляет целевой функции (46) абсолютный минимум, равный нулю. Таким образом, безусловная минимизация (46) приводит к тривиальному решению, соответствующему постоянному остаточному ряду (тренду) с единичными значениями.

Рассмотрим задачу условной минимизации целевой функции (46) при наличии единственного ограничения-равенства (9); в этом случае функция Лагранжа имеет следующий вид:

$$L(n; \lambda) = \Omega^2(n) - \lambda \sum_{t=1}^T n_t = (\Delta_0 V^{cso} - \Delta n)' W (\Delta_0 V^{cso} - \Delta n) - \lambda e' n,$$

где λ — множитель Лагранжа, ассоциированный с ограничением (9). Вычислив частные производные $L(n; \lambda)$ по вектору n и скаляру λ и

подставив их в необходимые условия минимума, получим следующую систему $T + 1$ линейных уравнений:

$$2\Delta'W\Delta n - \lambda e = 2\Delta'W\Delta_0V^{cso}, \quad -e'n = 0,$$

которую можно записать в блочной форме:

$$\left[\begin{array}{c|c} 2\Delta'W\Delta & -e \\ \hline -e' & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Delta'W\Delta_0V^{cso} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Невырожденность матрицы этой системы при $\det W \neq 0$ обеспечивает нахождение единственного и нетривиального решения $(\hat{n}, \hat{\lambda})$. Однако результаты экспериментальных расчетов позволяют утверждать, что в большинстве практических случаев оценки нерегулярной компоненты, полученные путем решения системы (47), оказываются положительно автокоррелированными, имеют весьма значительный размах и, как следствие, приводят к построению слишком «гладких» остаточных рядов (трендов), зачастую вырождающихся в почти горизонтальные кривые. Это обуславливает необходимость учета сформулированных выше второго и третьего априорных свойств нерегулярной компоненты.

Для проверки наличия автокорреляции нерегулярной компоненты естественно воспользоваться эффективным для малых выборок критерием Дарбина — Уотсона [4], в соответствии с которым следует рассчитать выборочное значение статистики по формуле

$$d = d(n) = \frac{\sum_{t=2}^T (n_t - n_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T n_t^2}$$

и по близости полученного значения к 0, 2 или 4 сделать вывод о наличии существенной положительной, малой или существенной отрицательной автокорреляции n . Поэтому второе априорное свойство нерегулярной компоненты можно формализовать в виде равенства $d(n) = 2$, а его использование эквивалентно добавлению к задаче условной минимизации функции (46) нелинейного ограничения. Таким образом, формальная постановка задачи идентификации нерегулярной компоненты в модели (45) сводится к требованию минимизировать целевую функцию (46) при линейном и нелинейном ограничениях-равенствах (9) и $d(n) = 2$ с учетом неравенств (10). К сожалению,

подобная постановка не является операциональной и представляет главным образом теоретический интерес.

Вместе с тем учет второго и третьего априорных свойств нерегулярной компоненты технически может быть осуществлен по аналогии с построением так называемых ридж-оценок (или гребневых оценок) в регрессионном анализе, которые используются в случаях высокой мультиколлинеарности факторов [12]. Введем в целевую функцию (46) дополнительное слагаемое $\mu n'Wn$, где μ — неотрицательный числовой множитель, который будем называть параметром размаха нерегулярной компоненты. Введенное слагаемое здесь призвано играть роль штрафной функции, способствующей уменьшению абсолютных значений (т. е. размаха) нерегулярной компоненты с ростом μ .

Необходимые условия минимума модифицированной целевой функции (46) записываются в виде однопараметрической системы $T+1$ линейных уравнений:

$$\left[\begin{array}{c|c} 2\Delta'W\Delta + 2\mu W & -e \\ \hline -e' & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Delta'W\Delta_0V^{cso} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

которая при нулевом значении параметра μ совпадает с системой (47). Ее решения $(\hat{n}(\mu), \hat{\lambda})$ при $\mu > 0$ представляют собой взвешенные ридж-оценки нерегулярной компоненты с экзогенно ограниченным размахом. Заметим, что при $\mu = 0$ несистематические колебания имеют максимальный размах, а при $\mu \rightarrow +\infty$ идентифицированная нерегулярная компонента ряда стремится к нулевому вектору.

Результаты экспериментальных расчетов свидетельствуют о том, что зависимость выборочной статистики Дарбина — Уотсона для нерегулярной компоненты, которая является решением системы (48), от параметра ее размаха выражается монотонно возрастающей функцией с убывающим наклоном к оси абсцисс. В случае, когда график этой функции пересекает горизонтальную прямую с ординатой 2, уравнение $d(n) = d(\mu) = 2$ разрешимо относительно параметра размаха и имеется операциональная возможность подбора единственной величины μ , которой соответствует неавтокоррелированная нерегулярная компонента исследуемого динамического ряда.

Алгоритм подбора параметра размаха можно реализовать в итерационном режиме на основе нелинейной аппроксимации зависимости $d(\mu)$ в интервале между двумя точками μ_0 и μ_1 , в которых

$d_0 = d(\mu_0) < 2$ и $d_1 = d(\mu_1) > 2$ соответственно. Рассмотрим вогнутую аппроксимирующую функцию, форма которой соответствует установленному характеру зависимости выборочной статистики d от параметра размаха нерегулярной компоненты: $D(\mu) = a + b\mu^{1/g}$, где a и b — подлежащие оцениванию числовые параметры, $g \geq 1$ — показатель степени. Значения a , b и внутренней точки интервала $\tilde{\mu}$ однозначно определяются из условия прохождения графика функции $D(\mu)$ через пару точек (μ_0, d_0) , (μ_1, d_1) и из уравнения $D(\mu) = 2$:

$$a = \frac{d_0\mu_1^{1/g} - d_1\mu_0^{1/g}}{\mu_1^{1/g} - \mu_0^{1/g}}, \quad b = \frac{d_1 - d_0}{\mu_1^{1/g} - \mu_0^{1/g}}$$

$$\text{и } \tilde{\mu} = \left(\frac{2-a}{b} \right)^g = \left(\frac{\mu_0^{1/g}(d_1-2) + \mu_1^{1/g}(2-d_0)}{d_1-d_0} \right)^g.$$

Итак, на начальной итерации алгоритма определения параметра размаха μ из условия $d = 2$ следует выбрать показатель степени g и пару точек μ_0 и μ_1 , в которых $d_0 = d(\mu_0) < 2$ и $d_1 = d(\mu_1) > 2$. Результаты экспериментальных расчетов свидетельствуют о том, что выбор $g = 4$, $\mu_0 = 0,05$ и $\mu_1 = 200$ оказывается вполне приемлемым во всех практических случаях.

Последующие итерации алгоритма связаны с пересчетом правой точки рассматриваемого интервала, обеспечивающий ее перемещение влево по направлению к корню уравнения $d(\mu) = 2$. Обозначим через $\mu_{(m)}$ текущую правую точку интервала, полученную на m -й итерации алгоритма и удовлетворяющую условию $d(\mu_{(m)}) > 2$. Пересчет этой точки на $(m+1)$ -й итерации алгоритма осуществляется по формуле

$$\mu_{(m+1)} = \left(\frac{\mu_0^{1/g} [d(\mu_{(m)}) - 2] + \mu_{(m)}^{1/g} (2 - d_0)}{d(\mu_{(m)}) - d_0} \right)^g. \quad (49)$$

Полученная точка является решением уравнения $D(\mu) = 2$ с параметрами a и b , определяемыми граничными точками текущего интервала. Покажем, что она располагается внутри текущего интервала, т.е. $\mu_0 < \mu_{(m+1)} < \mu_{(m)}$. Подставив в центральную часть приведенного двойного неравенства формулу (49), после несложных преобразований имеем

$$\mu_0^{1/g} [d(\mu_{(m)}) - d_0] < \mu_0^{1/g} [d(\mu_{(m)}) - 2] + \mu_{(m)}^{1/g} (2 - d_0) < \\ < \mu_{(m)}^{1/g} [d(\mu_{(m)}) - d_0].$$

Перегруппировав члены, получим пару неравенств

$$(2 - d_0)(\mu_{(m)}^{1/k} - \mu_0^{1/k}) > 0 \text{ и } [d(\mu_{(m)}) - 2](\mu_{(m)}^{1/k} - \mu_0^{1/k}) > 0,$$

которые, как нетрудно видеть, точно выполняются на m -й итерации алгоритма.

Реализация итерационного процесса по формуле (49) обеспечивает относительно быстрое «стягивание» правой точки текущего интервала к решению уравнения $d(\mu) = 2$ с любой заданной точностью. Итерации продолжаются до тех пор, пока для очередной пробной точки $\mu_{(m+1)}$ не будет выполнено терминальное условие

$$|d(\mu_{(m+1)}) - 2| \leq \varepsilon,$$

где ε — заданный параметр точности расчетов.

Вычислительные эксперименты показывают, что календарно и сезонно скорректированные ряды с устраненными статическими циклическими и неавтокоррелированными несистематическими эффектами при попытках повторного применения вычислительной схемы ридж-оценивания на основе системы (48) демонстрируют наличие лишь положительно автокоррелированных «вторичных» нерегулярных компонент с выборочными значениями статистики Дарбина — Уотсона $d(\hat{n}) < 2$. В связи с этим можно утверждать, что предложенная вычислительная схема ридж-оценивания неавтокоррелированной нерегулярной компоненты обладает свойством идемпотентности.

Для измерения степени снижения изменчивости ряда (45) в результате удаления несистематических эффектов можно использовать отношение взвешенных квадратичных Φ -вариаций полученного и календарно скорректированного рядов

$$G_w(S, O, N) = \\ = \sum_{t=1}^T w_t (V_t^c - S_t - O_t - N_t - V_{t-1}^c + S_{t-1} + O_{t-1} + N_{t-1})^2 / \\ \sum_{t=1}^T w_t (V_t^c - V_{t-1}^c)^2, \quad (50)$$

которое естественно назвать коэффициентом выравнивания ряда с элиминированными календарными эффектами в результате устранения сезонной, осциллирующей и нерегулярной компонент. Коэффициент (50) изменяется в пределах от нуля до единицы и показывает, какую часть квадратичной Ф-вариации временного ряда V_t^c , $t = 1 \div T$, не удастся объяснить совокупным влиянием динамической сезонной, статической осциллирующей и неавтокоррелированной нерегулярной компонент.

9. Реальный рост макроэкономических показателей и его оценки

Исходная теоретическая предпосылка анализа динамических рядов постулирует, что номинальный рост макроэкономического показателя потокового типа, выражаемый динамикой исходных статистических данных, имеет сложную структуру в виде некоей априори неизвестной и достаточно «гладкой» основной тенденции (тренда), на которую наложены календарные, сезонные, конъюнктурные и другие эффекты, в том числе несистематические и случайные. Если совокупное влияние этих эффектов велико, номинальный рост показателя в отдельные периоды времени весьма грубо и неточно воспроизводит не наблюдаемую непосредственно «реальную» динамику развития описываемой им экономической системы, демонстрируя подъемы на участках реальных спадов, и наоборот.

Основная цель любой процедуры декомпозиции макроэкономического временного ряда — обеспечение как можно более полной сопоставимости разновременных значений исследуемого показателя. Такая сопоставимость чрезвычайно важна, например, при мониторинге текущего развития той или иной экономической системы, когда требуется сделать достоверные выводы об увеличении или уменьшении значений выбранного круга показателей в последней точке периода наблюдений по сравнению с предыдущими точками. Сопоставимость разновременных значений показателя потокового типа в процессе аддитивного разложения его динамического ряда на компоненты достигается на основе перераспределения уровней ряда внутри интервала наблюдений в соответствии с априорными свойствами компонент (6), (11) и (9).

Оценкой реального роста макроэкономического показателя потокового типа, полученной в результате декомпозиции соответствующего динамического ряда, может служить его трендовая динамика. Это наиболее «сглаженная» характеристика реального роста, логически обоснованно очищенная от календарных, сезонных и других циклических эффектов и удовлетворяющая базовому «перераспределительному» условию (12).

Вместе с тем при построении тренда из исходного ряда исключается также нерегулярная компонента, отражающая совокупное влияние на динамику ряда различных несистематических (некалендарных, несезонных и нециклических) факторов, в том числе случайного характера. Однако среди таких несистематических факторов имеются и вполне детерминированные, которые характеризуют объективно обусловленные специфические или даже уникальные особенности развития макроэкономического агрегата на конкретных участках периода наблюдений. Ясно, что элиминирование подобных факторов в известной мере искажает истинную «картину» реального экономического роста. Поэтому другая оценка реального роста макроэкономического показателя потокового типа может быть представлена в виде суммы трендовой и нерегулярной компонент его динамического ряда, которая также удовлетворяет базовому условию (12).

Выбор одного из двух рассмотренных вариантов оценки реального роста макроэкономического показателя зависит от целей анализа динамического ряда и в конечном счете осуществляется исследователем. Таким образом, реальный рост макроэкономического показателя в рамках периода наблюдений определяется характером последовательного движения по тренду динамического ряда его значений с учетом или без учета нерегулярной компоненты ряда.

10. Структурная модель динамики промышленного производства

Проиллюстрируем рассмотренные выше этапы последовательной структурной декомпозиции динамического ряда значений макроэкономического показателя потокового типа в соответствии с аддитивной моделью (2) наглядным практическим примером, информационную базу которого составляют официальные статистические данные о

динамике (базисных темпах роста) отечественного промышленного производства за период с декабря 1994 г. ($t = 0$) по июнь 2004 г. ($T = 114$) в помесечном разрезе. Выбор указанного 9,5-летнего периода обусловлен намерением провести все расчеты в ситуации, когда период наблюдений содержит нецелое число сезонных циклов.

Идентификация календарной компоненты

Среднемесячное число эффективных рабочих дней, рассчитанное как среднее значение вспомогательного ряда (5) при данной статистической оценке доли непрерывного производства $\xi_r = \xi = 58,9\%$ для всех $t = 0 \div T$, составляет $\bar{D}^E = 26,493$, а среднее значение исходного ряда равно $\bar{V} = 101,2\%$. Расчетные значения параметров $\hat{\beta} = 0,0382$, $\hat{\gamma} = 0,0261$ и $\hat{\delta} = 0,0308$ оказываются весьма близкими друг к другу, поэтому календарные компоненты (29) и (31), графики которых приведены на рис. 1, практически совпадают (заметим, что $\hat{\beta} < 2\hat{\delta}$).

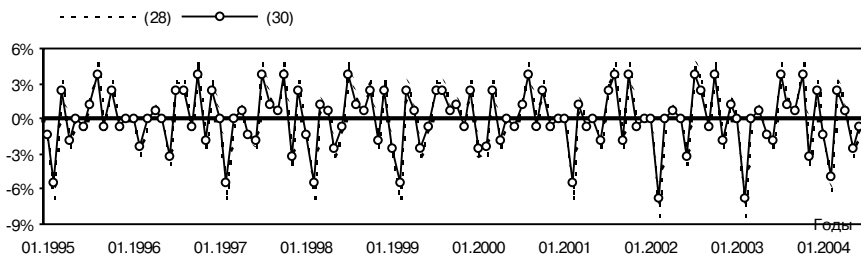


Рис. 1. Календарные компоненты ряда динамики промышленного производства

Вместе с тем коэффициенты выравнивания ряда в результате календарной корректировки (33) различаются вполне существенно:

$$G(C(\beta)) = G(\beta) = 53,70\% \text{ и } G(C(\gamma)) = G(\gamma) = 51,96\%,$$

тогда как $G(C(\delta)) = G(\delta) = 50,83\% < G(\gamma) < G(\beta)$. Углы между векторами \hat{C} и $V - \hat{C}$ составляют $90,5^\circ$, $90,0^\circ$ и $90,2^\circ$ соответственно. Таким образом, календарная компонента (31) с высокой степенью точности удовлетворяет квадратичному условию ортогональности (13) и объясняет почти половину (невзвешенной) вариации исходного ряда.

Идентификация сезонной компоненты

Напомним, что статическая сезонная компонента динамики промышленного производства рассчитывается путем решения системы линейных уравнений (38) при $\sigma = 0$ и $\tau = 12$, а динамическая сезонная компонента последовательно определяется на основе реализации итерационного процесса с шагом по антиградиенту (или проекции антиградиента) целевой функции (37), определяемым формулой (40).

Рисунок 2 иллюстрирует монотонный эффект выравнивания сезонно скорректированного ряда, характеризуемый коэффициентом (41) при единичной матрице W , с увеличением порога ослабления строгого свойства сезонности (39) от нулевого начального уровня до $\sigma_{\max} = 1,3\%$. Скорость выравнивания оценивается первой разностной производной функции $G(S) = G_w(S)$ по аргументу σ_{\max} ; представленный на рис. 2 график ее значений с уменьшающим коэффициентом $1/100$ свидетельствует о существенной неравномерности выравнивающего эффекта на различных участках движения по антиградиенту целевой функции (37).

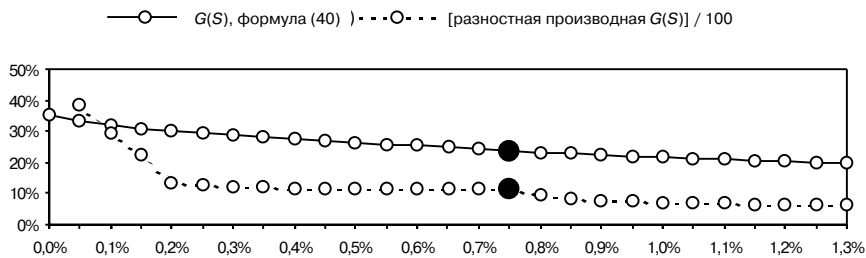


Рис. 2. Зависимость коэффициента выравнивания $G(S)$ от скалярного порога σ_{\max}

Зафиксируем порог ослабления строгого свойства сезонности в конце первого участка стабилизации скорости выравнивания ряда, т.е. на уровне $\sigma_{\max} = 0,75\%$ (соответствующие точки на графиках выделены укрупненными затемненными маркерами), и решим задачу условной минимизации целевой функции (37) при ограничениях (8), (11) и (39). График полученной динамической сезонной компоненты, представленный на рис. 3 и наложенный на график статического сезонного цикла, демонстрирует заметную эволюцию формы и амплитуды сезонных эффектов в течение периода наблюдений.



Рис. 3. Сезонные компоненты ряда динамики промышленного производства

Коэффициенты выравнивания ряда с элиминированными календарными эффектами в результате сезонной корректировки (41) равны $G(\hat{S}; 0\%) = 35,28\%$ в статическом случае и $G(\hat{S}; 0,75\%) = 23,64\% < G(\hat{S}; 0\%)$ в динамическом случае. Расчетная величина угла между векторами \hat{S} и $V - \hat{S}$ составляет $89,98^\circ$. Таким образом, полученная динамическая сезонная компонента с высокой степенью точности удовлетворяет квадратичному условию ортогональности (14) и объясняет более 70% квадратичной вариации календарно скорректированного ряда.

Идентификация осциллирующей компоненты

Статические циклы с различными периодами оцениваются на основе решения системы (38) с учетом априорных ограничений (36) и (11) при $\sigma = 0$. Для выбора периода того или иного цикла воспользуемся уточненной критериальной функцией (44) при единичной матрице W . На рис. 4 дан график зависимости расчетных значений функции (44) для календарно и сезонно скорректированного ряда от целочисленного параметра τ , из которого следует, что выбор периода первого статического цикла ограничен множеством значений $\tau = 11, 13, 22, 23, 26, 33, 34, 44, 45$. Абсолютный максимум критериальной функции достигается в точке $\tau_1 = 22$, выделенной укрупненным затемненным маркером. Проверка условий (15) показала, что уро-

вень ортогональности цикла с периодом 22 оцененным календарной и сезонной компонентам ряда оказывается вполне удовлетворительным: соответствующие отклонения от прямого угла не превышают 6° .

После элиминирования первого статического цикла с периодом $\tau_1 = 22$ вновь рассчитаем критериальную функцию (44) для остаточного ряда (см. рис. 5). Выбор периода второго статического цикла реализуется на множестве значений $\tau = 13, 26, 27, 40, 41$. Абсолютный максимум критериальной функции достигается в точке $\tau = 41$. Углы, образуемые вектором этого цикла с векторами оцененных ранее календарной, сезонной и первой осциллирующей компонент ряда, отклоняются от прямого менее чем на 5° .

На рис. 6 приведен график расчетных значений функции (44) для календарно и сезонно скорректированного ряда с элиминированными статическими осцилляциями при $\tau_1 = 22$ и $\tau_2 = 41$. Выбор периода третьего статического цикла ограничен множеством значений $\tau = 13, 17, 26, 39, 46$. Нетрудно видеть, что три из указанных величин кратны 13 и абсолютный максимум критериальной функции, выделенный укрупненным светлым маркером, также достигается в точке $\tau = 13$. Выберем максимальный период, кратный 13, и завершим процесс оценки осцилляций элиминированием статического цикла с периодом $\tau_3 = 39$.

Сводные результаты идентификации осциллирующей компоненты — суммы трех статических циклов с периодами $\tau_1 = 22$, $\tau_2 = 41$ и $\tau_3 = 39$ — представлены на рис. 7. Следует подчеркнуть, что полученная осциллирующая компонента достигает своего абсолютного минимума в точке, соответствующей августу 1998 г., и тем самым обеспечивает компенсацию известного кризисного «провала» в динамике промышленного производства. Проверка условий (15) показала, что осциллирующая компонента демонстрирует достаточно высокий уровень ортогональности с оцененными ранее календарной и сезонной компонентами: соответствующие отклонения от прямого угла не превышают 5° .

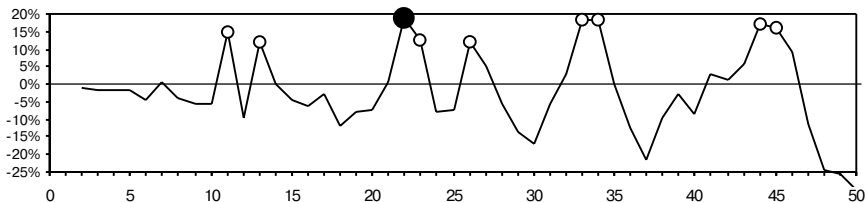


Рис. 4. График функции $\bar{R}(S; O^1, \tau_1)$ для выбора периода первого статического цикла

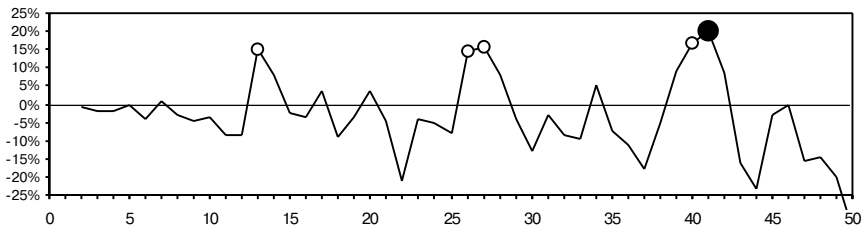


Рис. 5. График функции $\bar{R}(S; O^2, \tau_2)$ для выбора периода второго статического цикла

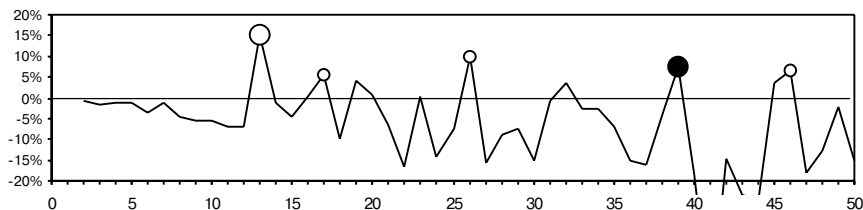


Рис. 6. График функции $\bar{R}(S; O^3, \tau_3)$ для выбора периода третьего статического цикла

Коэффициент выравнивания ряда с элиминированными календарными эффектами в результате сезонной корректировки и устранения осциллирующей компоненты (42) равен $G(\hat{S}, \hat{O}) = 5,18\% < G(\hat{S}; 0,75\%) = 23,64\%$. Угол между векторами \hat{O} и $V - \hat{O}$ составляет $89,14^\circ$. Таким образом, полученная осциллирующая компонента с высокой степенью точности удовлетворяет квадратичному условию ортогональности (15) и вместе с динамической сезонной составляющей объясняет более 94% квадратичной вариации календарно скорректированного ряда.

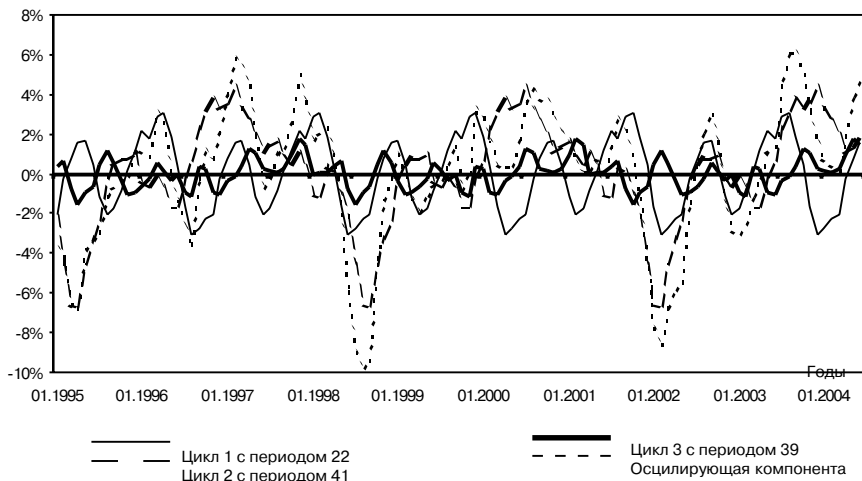


Рис. 7. Статические циклы ряда динамики промышленного производства

Идентификация нерегулярной компоненты

Оценивание неавтокоррелированной нерегулярной компоненты осуществлялось на основе решения однопараметрической системы линейных уравнений (48) с учетом априорного ограничения (9) при единичной матрице весовых коэффициентов W путем подбора такого значения параметра размаха, которое обеспечивает выполнение нелинейного условия неавтокоррелированности $d(\mu)=2$.

Расчетный график зависимости выборочной статистики Дарбина — Уотсона от параметра размаха нерегулярной компоненты μ приведен на рис. 8. Как отмечалось выше, эта зависимость выражается монотонно возрастающей функцией с убывающим наклоном к оси абсцисс, график которой пересекает горизонтальную прямую $d=2$ в некоторой точке.

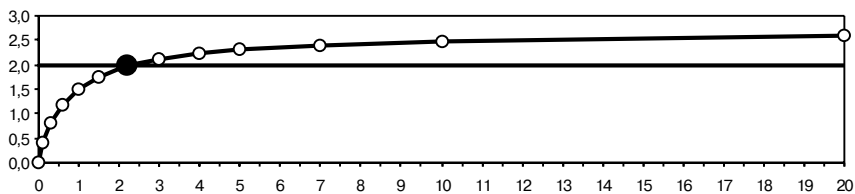


Рис. 8. Зависимость статистики $d(\mu)$ от параметра размаха нерегулярной компоненты

Неавтокоррелированная нерегулярная компонента соответствует значению $\mu = 2,364$; ее график представлен на рис. 9. При $\mu < 2,364$ нерегулярная компонента обнаруживает положительную автокорреляцию, а при возрастании параметра размаха становится отрицательно автокоррелированной.

Коэффициент выравнивания динамического ряда с элиминированными календарными эффектами в результате устранения сезонной, осциллирующей и нерегулярной компонент (50) равен $G(\hat{S}, \hat{O}, \hat{N}) = 3,80\% < G(\hat{S}, \hat{O}) = 5,18\%$. Расчетная величина угла между векторами \hat{N} и $V - \hat{N}$ составляет $89,41^\circ$. Таким образом, полученная неавтокоррелированная нерегулярная компонента с высокой степенью точности удовлетворяет квадратичному условию ортогональности (16) и вместе с динамической сезонной и осциллирующей составляющими объясняет более 96% квадратичной вариации календарно скорректированного ряда.

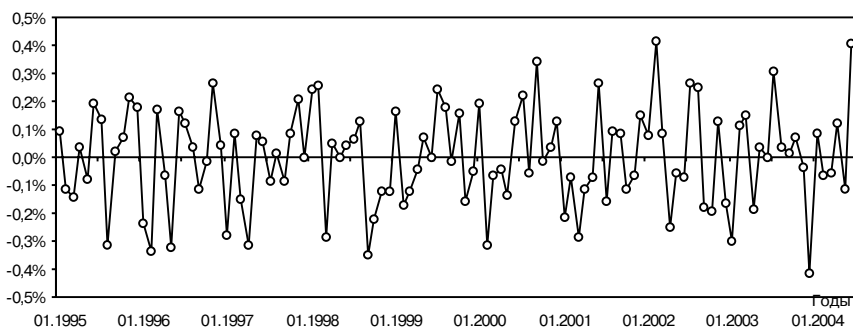


Рис. 9. Нерегулярная компонента ряда динамики промышленного производства

Построение тренда

В соответствии с аддитивной структурной моделью (2) тренд определяется как разность между исходным рядом и всеми его компонентами — календарной, сезонной, осциллирующей и нерегулярной. График полученного тренда, приведенный на рис. 10 и наложенный на график исходного ряда динамики промышленного производства, демонстрирует существенно меньшую изменчивость и большую «гладкость» тренда по сравнению с исходным рядом в течение всего пери-

ода наблюдений. Действительно, расчетное отношение квадратичных вариаций тренда и исходного ряда составляет лишь 1,93%.

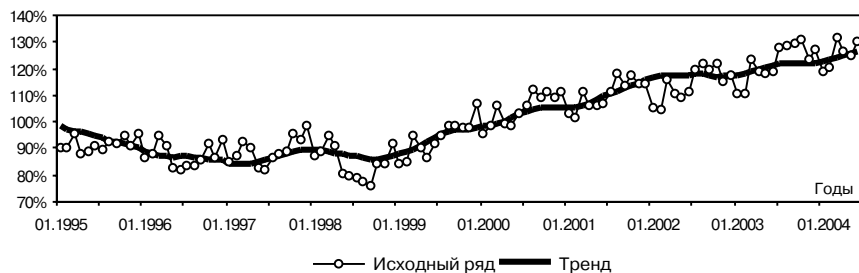


Рис. 10. Исходный ряд динамики промышленного производства и его тренд

Следует особо подчеркнуть, что компоненты построенной структурной модели динамики промышленного производства удовлетворяют условиям нормировки (6), (11) и (9), а суммы значений тренда и исходного ряда по всему периоду наблюдений равны между собой. Результаты проверки выполнения условий ортогональности компонент (13) — (16) представлены в табл. 1.

Таблица 1

Величины углов между компонентами ряда динамики промышленного производства

Угол, °	Календарная компонента	Сезонная компонента	Осциллирующая компонента	Нерегулярная компонента	Трендовая компонента
Календарная компонента		94,31	85,99	98,23	90,23
Сезонная компонента	94,31		85,37	93,94	90,02
Осциллирующая компонента	85,99	85,37		87,12	89,34
Нерегулярная компонента	98,23	93,94	87,12		89,34
Трендовая компонента	90,23	90,02	89,34	89,22	

По результатам апостериорной проверки можно заключить, что построенное разложение исходного динамического ряда является «по-

чти» ортогональным, т. е. его компоненты слабо коррелированы между собой. Самый высокий уровень взаимной корреляции наблюдается у календарной и нерегулярной компонент, угол между которыми отклоняется от прямого примерно на 8° . Таким образом, качество декомпозиции исходного ряда динамики промышленного производства следует признать вполне удовлетворительным.

Заключение

Разработанные алгоритмы последовательной декомпозиции временных рядов получили практическое применение в составе математического обеспечения диалоговой системы структурного анализа динамических рядов значений макроэкономических и отраслевых показателей. Система реализована в среде обработки электронных таблиц Microsoft Excel и ориентирована на проведение прогнозно-аналитических расчетов темпов реального роста и трендов макроэкономических и отраслевых показателей в рамках мониторинга социально-экономического развития страны, осуществляемого Департаментом макроэкономического прогнозирования Минэкономразвития России. Работоспособность алгоритмов многократно проверена на массивах официальных статистических данных и рабочих информационных материалах департамента.

Ввиду ограниченного объема настоящей работы в ней не получили должного освещения вычислительные аспекты решения сформулированных оптимизационных задач с ограничениями и важные в практическом отношении проблемы прогнозирования трендовой и номинальной динамики макроэкономических показателей. Разработка прогнозов структурных компонент динамических рядов в рамках рассматриваемого методического подхода является весьма сложной задачей из-за невозможности прямого использования обширного аппарата экстраполяции временных рядов при четком соблюдении условий (6), (11) и (9) для расширенного горизонта анализа, включающего периоды основания и упреждения прогноза. Тем не менее полученные автором теоретические результаты дают основание полагать, что задачи прогнозирования календарной, сезонной и осциллирующей компонент временного ряда могут быть эффективно решены при полном сохранении всех априорных свойств составляющих его динамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: Справочное изд. М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.
2. Бессонов В.А. Введение в анализ российской макроэкономической динамики переходного периода / Ин-т экономики переходного периода. М., 2003. 151 с.
3. Кендэл М. Временные ряды: Пер.с англ. и предисл. Ю.П. Лукашина. М.: Финансы и статистика, 1981. 199 с.
4. Джонстон Дж. Эконометрические методы: Пер. с англ. и предисл. А.А. Рывкина. М.: Статистика, 1980. 444 с.
5. Fischer В. Decomposition of Time Series: Comparing Different Methods in Theory and Practice / Eurostat working group document. 1995. 73 p. (<http://europa.eu.int/en/comm/eurostat/research/noris4/documents/decomp.pdf>).
6. Моторин В.И. Критериальный подход к идентификации структурных компонент макроэкономических временных рядов // Семнадцатые Международные Плехановские чтения, 5—8 апреля 2004 г.: Тез. докл. проф.-препод. состава. М.: Изд-во Российской экономической академии, 2004. С. 272, 273.
7. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
8. Математическая энциклопедия: В 5 т. Т. 1. М.: Советская энциклопедия, 1977. 1151 с.
9. Моторин В.И. Интервальная регрессия: Принципы и методы построения // Регулирование в экономических системах: Сб. науч. тр. / ЦЭНИИ, НИИ АСУ при Госкомэкономике РСФСР. М., 1992. С.107—138.
10. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2 кн.: Пер. с англ. В.Я. Алтаева, Б.Т. Вавилова, В.И. Моторина. М.: Мир, 1985. Кн. 2. 496 с.
11. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2 кн.: Пер. с англ. В.Я. Алтаева, В.И. Моторина. М.: Мир, 1986. Кн. 2. 320 с.
12. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. Структурные модели динамики макроэкономических показателей	4
2. Априорные свойства компонент макроэкономических временных рядов	9
Свойства календарной компоненты	9
Свойства циклических компонент	11
Свойства нерегулярной компоненты	13
Дополнительное свойство циклических компонент	14
Идемпотентность операторов оценивания нетрендовых компонент	14
Свойства тренда	15
Условия ортогональности компонент	15
3. Критерии последовательной структурной декомпозиции динамических рядов	16
4. Методы оценивания календарных эффектов	23
5. Анализ обобщенной задачи идентификации циклических компонент	30
6. Алгоритмы построения динамической сезонной компоненты	32
7. Критериальный выбор периода колебаний статической осцилляции	36
8. Методы идентификации неавтокоррелированной нерегулярной компоненты	39
9. Реальный рост макроэкономических показателей и его оценки	44

10. Структурная модель динамики промышленного производства	45
Идентификация календарной компоненты	46
Идентификация сезонной компоненты	47
Идентификация осциллирующей компоненты	48
Идентификация нерегулярной компоненты	51
Построение тренда	52
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	54
ЛИТЕРАТУРА	55

Препринт WP2/2005/02
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Моторин Владимир Ильич

**Критерии и методы декомпозиции динамики
макроэкономических показателей**

Публикуется в авторской редакции

Выпускающий редактор *Е.А. Рязанцева*
Корректор *Е.Е. Андреева*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 2,87. Усл. печ. л. 3,48. Заказ
Изд. № 471

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3

Для заметок

Для заметок