ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

В.А. Калягин, В.В. Чистяков

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕКОМПЕНСАТОРНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ

Препринт WP7/2009/01
Серия WP7
Теория и практика
общественного выбора

Москва
ГУ ВШЭ
2009

УДК 519.710.3+519.812.5
ББК 22.18
К17

Редакторы серии WP7
«Теория и практика общественного выбора»
Ф.Т. Алескеров, Р.М. Нуреев

К 17 **Калягин В.А., Чистяков В.В. Аксиоматическая модель некомпенсаторного агрегирования:** Препринт WP7/2009/01. — М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2009. — 76 с.

На практике зачастую мнение коллектива из n индивидуумов выражается при помощи шкалы оценок от 1 до m, проставляемых каждым членом коллектива (например, 1 = плохо, 2 = чуть лучше, 3 = еще лучше, ..., m = отлично). Тем самым имеются наборы n-мерных векторов $(x_1, ..., x_n)$ с компонентами x_i от 1 до m, каждый из которых характеризует ту или иную альтернативу (возможность). Возникает задача об упорядочении этих наборов или, в другой терминологии, задача агрегирования индивидуальных предпочтений участников коллектива в коллективное мнение. При $m = 2$ эта задача сводится к задаче голосования, когда каждый из участников объявляет свою предпочтительную альтернативу. При $m = 3$ аксиоматический подход для описания свойств функций предпочтения применялся в серии работ Ф.Т. Алескерова, Д.А. Юзбашева и В.И. Якубы (2007), где обнаружено новое явление порогового предпочтения. В настоящей работе дается решение задачи агрегирования в общем виде (при любых n и m). При этом не только строится аксиоматика для функций предпочтения, но и выводятся явные формулы для этих функций предпочтения, ставящие в соответствие каждому вектору $(x_1, ..., x_n)$ его порядковый номер (чем больше этот номер, тем предпочтительнее альтернатива). Кроме того, эти явные функции предпочтения удовлетворяют предложенной аксиоматике и учитывают все пороговые предпочтения при любых m.

УДК 519.710.3+519.812.5
ББК 22.18

Калягин В.А. — Государственный университет — Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде (kalia@hse.nnov.ru).

Чистяков В.В. — Государственный университет — Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде (czeslaw@mail.ru).

Препринты ГУ ВШЭ размещаются на сайте:
http://new.hse.ru/C3/C18/preprintsID/default.aspx.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

На практике часто мнение коллектива индивидуумов или экспертов выражается при помощи различных шкал оценок, проставляемых каждым членом этого коллектива, например, «плохо, средне, хорошо» (при дегустации или опросе общественного мнения), «1, 2, 3, 4, 5» (в школе или университете), «4.9, 5.2, 5.3, 5.8, 5.9, 6.0» (в фигурном катании) и т. п. Задача состоит в том, чтобы корректно описать коллективное мнение на основе полученных наборов из индивидуальных оценок, т. е. в агрегировании общественного мнения коллектива. Усреднение полученных наборов оценок, которое по традиции наиболее часто используется, не всегда возможно и приводит к интуитивно неадекватному результату. Так, низкие оценки одного эксперта могут быть компенсированы и даже нивелированы средними или хорошими оценками других экспертов. Например, суммы оценок в наборах $(1, 3, 3, 3, 3)$ и $(2, 2, 2, 2, 2)$ равны соответственно 13 и 10, и эти наборы невозможно покомпонентно сравнить.

Теория локального агрегирования предпочтений, основанная на попарном сравнении альтернатив, построена в классической работе [15], а ее развитие изложено в книге [11]. Целью настоящей работы является построение новой нелокальной модели агрегирования, в которой существенно учитывается некомпенсаторный характер процедуры агрегирования, а низкие оценки экспертов играют определяющую роль. Основной упор в работе делается на аксиоматику функций предпочтения для *порогового отношения* сравнения альтернатив, впервые введенного в [4] для случая трехградационных ранжирований. Для случая, когда сравнение альтернатив проводится по трем и четырем оценкам, выводятся явные комбинаторные формулы для "экономных" функций предпочтения.

Результаты работы докладывались на семинаре ГУ ВШЭ «Математические методы анализа решений в экономике, бизнесе и политике», рук. Ф. Т. Алескеров, В. В. Подиновский (декабрь, 2007), проектном семинаре НФ ГУ-ВШЭ (февраль, 2008), на семинаре ЦЭМИ «Математическая экономика», рук. В. И. Данилов, В. М. Полтерович (февраль, 2008), на 9-ой международной научной конференции «Модернизация экономики и глобализация» [9] (апрель, 2008) и на 9-ой международной конференции Общества коллективного выбора и нормативной экономики [12] (июнь, 2008).

Авторы выражают глубокую благодарность Ф. Т. Алескерову за стимулирующие обсуждения проблем агрегирования и поддержку.

Работа выполнена при поддержке гранта Научного Фонда ГУ ВШЭ «Центр-Филиалы» № 06-06-0002.

1. Предварительные сведения и постановка задачи

1.1. Пусть X — конечное множество с не менее чем двумя элементами, которое в дальнейшем интерпретируется как множество *альтернатив*. При оценке достоинств (качеств, свойств) элементов X возникает задача об упорядочении X по предпочтению или, в другой терминологии, о ранжировании X. Обычно под *ранжированием* X понимается полное транзитивное бинарное отношение R на X, так что для любых альтернатив $x, y, z \in X$ выполняются два свойства: "xRy или yRx" (полнота R) и "из xRy и yRz вытекает, что xRz" (транзитивность R). Здесь запись xRy является сокращением $(x, y) \in R$ и интерпретируется как "альтернатива x *не хуже*, чем альтернатива y", а свойства полноты и транзитивности выражают так называемую *рациональность* ранжирования R.

Если ранжирование R множества X задано и $x, y \in X$, то запись xPy формально определяемая как "xRy и не yRx", означает, что x *строго предпочтительнее* y, а запись xIy, определяемая как "xRy и yRx", означает *безразличие* x по отношению к y (и наоборот). Тогда отношение P обладает свойствами: если $x, y, z \in X$, то "из xPy и yPz следует, что xPz" (транзитивность P), "не xPx" (антирефлексивность P) и "из не xPy и не yPz вытекает, что не xPz" (отрицательная транзитивность P).

Эквивалентный подход к ранжированию X состоит в том, что вначале на X задается бинарное отношение строгого предпочтения, т. е. отношение P, обладающее свойствами транзитивности, антирефлексивности и отрицательной транзитивности. Исходя из этого, определяется отношение безразличия I на X по правилу: xIy тогда и только тогда, когда "не xPy и не yPx". Если теперь обозначить высказывание "xPy или xIy" через xRy для $x, y \in X$, то R будет представлять ранжирование X. Ниже, как правило, нам удобнее будет иметь дело с ранжированиями X, порожденными отношениями строгого предпочтения.

Вообще говоря, отношения R и P могут представлять собой весьма сложные объекты. Однако работа с ними часто существенно упрощается, если их можно выразить посредством обращения к вещественным функциям. Более конкретно, отношение R (соответственно P) называется *представимым* при помощи функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ (коротко *φ-представимым*), если для $x, y \in X$ имеем:

$$xRy \Longleftrightarrow \varphi(x) \geqslant \varphi(y) \quad \text{(соответственно } xPy \Longleftrightarrow \varphi(x) > \varphi(y)).$$

Любая такая функция φ (определенная, вообще говоря, неоднозначно) называется *функцией предпочтения* или функцией полезности, представляющей отношение R (соответственно P).

1.2. Предположим, что вместе с множеством альтернатив X заданы множества

$$N = \{1, 2, \ldots, n\} \quad \text{и} \quad M = \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \text{где } n \geqslant 2 \text{ и } m \geqslant 2.$$

Множество N будет рассматриваться как множество *параметров* (качеств, свойств, агентов), а множество M — как шкала возможных *оценок* $1 < 2 < \cdots < m$. Предположим также, что задана некоторая *процедура оценивания* альтернатив из X вида $E : X \times N \to M$. Это означает, что любой альтернативе $x \in X$ и любому параметру $i \in N$ поставлена в соответствие некоторая (одна) оценка $x_i \overset{\text{def}}{=} E(x, i) \in M$. Тем самым в результате процедуры оценивания E каждая альтернатива $x \in X$ характеризуется набором из n оценок $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что можно выразить в виде

$$X \ni x \longmapsto \widehat{x} = E(x, \cdot) = (x_1, \ldots, x_n) \in M^n,$$

где $M^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in M \text{ для всех } i \in N\}$ — множество всех n-мерных векторов с компонентами из M. Например, набор оценок $\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ для альтернативы $x \in X$ может представлять собой экспертные оценки, анкетные данные, показания приборов (счетчиков), данные испытаний и т. п. Множество $\widehat{X} = \{\widehat{x} : x \in X\} \subset M^n$ называется *профилем* (*индивидуальных*) *оценок* множества X.

Требуется на основе знания профиля оценок $\widehat{X}$ ранжировать множество X, т. е. агрегировать "коллективный выбор" множества N (например, множества агентов). Эта задача сводится к ранжированию множества векторов M^n: действительно, если некоторое ранжирование $\widehat{R}$ (соответственно строгое предпочтение $\widehat{P}$) задано на M^n, то полагая

$$xRy \overset{\text{def}}{=} \widehat{x}\widehat{R}\widehat{y} \quad (\text{соответственно } xPy \overset{\text{def}}{=} \widehat{x}\widehat{P}\widehat{y}) \quad \text{для } x, y \in X,$$

найдем, что R — ранжирование X (соответственно P — отношение строгого предпочтения на X). Тем самым, принимая во внимание отображение $x \mapsto \widehat{x}$ из X в M^n, в дальнейшем без ограничения общности считаем, что множество альтернатив X *совпадает* с множеством M^n, $X = \widehat{X} = M^n$, и набор оценок $(x_1, \ldots, x_n)$ для альтернативы $x \in X$ обозначаем через x вместо $\widehat{x}$:

$$x \in X \iff x = \widehat{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in M^n, \qquad x_i \in M.$$

1.3. На множестве $X = M^n$ имеются естественные отношения *частичного порядка* $\succcurlyeq$ и $\succ$, индуцированные сравнением на множестве натуральных чисел, а именно, для $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ положим:

$$(x \succcurlyeq y) \overset{\text{def}}{=} (x_i \geqslant y_i \ \text{ для всех } \ i \in N),$$
$$(x \succ y) \overset{\text{def}}{=} (x \succcurlyeq y) \ \text{ и } \ (\exists\, i \in N \ \text{ такое, что } \ x_i > y_i).$$

Хотя эти отношения транзитивны, они не могут быть применены для решения задачи ранжирования X, поскольку не все пары векторов x, y из X сравнимы при помощи них.

1.4. Для того, чтобы описать метод сравнения альтернатив из X, который будет изучаться ниже, рассмотрим случаи, когда оценивание альтернатив осуществляется по двум ($m = 2$) и трем ($m = 3$) оценкам.

Если альтернативы из X оцениваются по двум оценкам, то естественно считать, что альтернатива x строго предпочтительнее альтернативы y, т. е. xPy, если “число единиц в x меньше, чем в y”, и альтернативы x и y безразличны по отношению друг к другу, т. е. xIy, если “число единиц в x такое же, как в y”. При этом для $x, y \in X$ выполняются импликации

$$(x \succ y) \Longrightarrow (xPy), \qquad (x = y) \Longrightarrow (xIy)$$

(но не наоборот), и отношение $R = (P$ или $I)$ представляет собой ранжирование множества $X = \{1, 2\}^n$. Хорошо видно, что наличие низких оценок в альтернативах играет существенную роль при их сравнении. Более подробно сравнение альтернатив по двум оценкам рассмотрено в § 3.

Пусть теперь $M = \{1, 2, 3\}$. При оценке *качества* или *совершенства* альтернатив на практике зачастую возникает эффект некомпенсируемости одних свойств этих альтернатив другими свойствами. Например, пусть альтернативы x и y характеризуются следующими векторами оценок: $x = (2, 2, 2, 2)$ и $y = (1, 3, 3, 3)$ (можно было бы положить $y = (3, 1, 3, 3)$, $(3, 3, 1, 3)$ или $(3, 3, 3, 1)$). Эти наборы оценок являются несравнимыми посредством отношений $\succcurlyeq$ и $\succ$ при любой перестановки их координат в отличие от предыдущего случая, когда $m = 2$.

Если для сравнения x и y применить правило суммирования их оценок, то для x получим: $2{+}2{+}2{+}2 = 8$, а для y найдем, что $1{+}3{+}3{+}3 = 10$. Поскольку $10 > 8$, то согласно этому правилу альтернатива y предпочтительнее, чем x. Аналогичный вывод можно сделать, исходя из позиционного правила сравнения (типа правила голосования Борда), согласно которому

$$|\{1 \leqslant i \leqslant 4 : x_i > y_i\}| = 1 < 3 = |\{1 \leqslant i \leqslant 4 : y_i > x_i\}|,$$

где $|Y|$ означает число элементов в множестве Y. В обоих случаях правила сравнения носят компенсаторный характер: низкие оценки заведомо компентсируются высокими оценками.

С другой стороны, интерпретируя оценки 1, 2, 3 в виде: 1 — совсем плохо, 2 — средне, 3 — очень хорошо, интуитивно становится ясно, что поскольку вариант x содержит меньшее число низких оценок, то он должен быть предпочтительнее y. Это говорит о том, что в определенных ситуациях низкие оценки в альтернативе не могут быть компенсированы никакими высокими оценками (увеличением громкости телевизора нельзя улучшить общее качество воспроизведения программы, если отсутствует или испортилось изображение[1]). Таким образом, в указанных ситуациях более естественным правилом (строгого) сравнения наборов оценок альтернатив x и y является *правило сравнения по числу низких оценок* (обобщающее аналогичное правило при $m = 2$):

$$(xPy) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{в } x \text{ меньше низких оценок, чем в } y).$$

Для того, чтобы определить отношение P более точно, нам потребуется общее обозначение (при любом m), используемое всюду в дальнейшем. Для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M^n$ и $j \in M$ обозначим через

$$v_j(x) = |\{i \in N : x_i = j\}| \quad \text{число оценок } j \text{ в векторе } x. \tag{1.1}$$

Ясно, что $0 \leqslant v_j(x) \leqslant n$ для всех $j \in M$ и

$$\sum_{j=1}^{m} v_j(x) = v_1(x) + v_2(x) + \cdots + v_m(x) = n \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{1.2}$$

В работах [4, 5] в рассматриваемом случае, когда $m = 3$, Алескеров и Якуба определили новое *пороговое отношение* P сравнения альтернатив $x, y \in X$: x строго предпочтительнее, чем y, т.е. xPy, если выполнено хотя бы одно из двух условий: 1) $v_1(x) < v_1(y)$, или 2) $v_1(x) = v_1(y)$ и $v_2(x) < v_2(y)$. В приведенном выше примере

$$v_1(x) = v_1(2, 2, 2, 2) = 0 < 1 = v_1(1, 3, 3, 3) = v_1(y),$$

поэтому xPy; при этом, как видно, низкие оценки (в y) не компенсируются никакими оставшимися самыми высокими оценками. В серии работ [3, 4, 5, 14] Алескеров, Юзбашев и Якуба построили аксиоматику функций предпочтения для порогового отношения сравнения P и связали ее с классами эквивалентности отношения P как слабого порядка. Эта теория затем применялась для анализа развитости гражданского общества в регионах России [6, 7].

[1] Пример Ф. Т. Алескерова.

Естественным образом возникает следующая

Задача. *Развить модель агрегирования предпочтений при некомпенсаторных условиях типа P (как при $m = 2$ и $m = 3$) на случай произвольного числа оценок $m > 3$.*

1.5. Настоящая работа посвящена решению этой задачи. А именно, при любом числе оценок $m > 3$ в работе

1) определяется пороговое отношение предпочтения P для сравнения альтернатив по числу низких оценок;

2) строится аксиоматика функций предпочтения для P, развивающая аксиоматику Алескерова-Якубы [3, 5, 14] и согласованная с классами эквивалентности слабого порядка P;

3) найден алгоритм упорядочения (монотонных представителей) альтернатив;

4) выведена явная формула для функции предпочтения, ставящей в соответствие каждому вектору $x = (x_1, \ldots, x_n)$ его порядковый номер таким образом, что чем больше этот номер, тем более P-предпочтительной является альтернатива $x \in X$.

Основные результаты настоящей работы в краткой форме отражены в [8], а полное изложение аксиоматической теории появится в [13].

2. Пороговое отношение предпочтения и его свойства

2.1. Пороговое отношение предпочтения. В контексте разделов 1.2 и 1.4 естественным обобщением правила сравнения двух альтернатив из рассматриваемого множества $X = M^n$ является *пороговое отношение P (строгого) предпочтения по числу низких оценок*, которое вводится следующим образом (см. [3]–[5] и [14] при $m = 3$ и [8] и [13] при произвольном $m \geqslant 3$): вначале альтернативы сравниваются по числу оценок 1, и более предпочтительной считается альтернатива с меньшим числом таких оценок, и если числа оценок 1 в альтернативах совпадают, то сравнение происходит по числу оценок 2, при этом более предпочтительна альтернатива с меньшим числом оценок 2, а если и числа оценок 2 в альтернативах совпадают, то сравниваются количества оценок 3 в альтернативах и так далее до *предпредпоследней* оценки $m - 2$, и, наконец, если в обеих альтернативах совпадают количества соответствующих оценок $1, 2, \ldots, m-2$, то более предпочтительна альтернатива с меньшим числом оценок $m - 1$ (ср. с соотношением (1.2)).

Используя обозначение (1.1) и учитывая соотношение (1.2), пороговое отношение предпочтения P при любом числе оценок $m \geqslant 2$ можно переписать в виде: если $x, y \in X$, то (“x строго предпочтительнее y”)

$$(xPy) \overset{\mathrm{def}}{=} \big(\text{существует } 1 \leqslant i \leqslant m-1 \text{ такое, что } v_j(x) = v_j(y) \text{ для всех номеров } 1 \leqslant j \leqslant i-1 \text{ и } v_i(x) < v_i(y)\big);$$

как обычно, здесь при $i = 1$ пустое условие “$v_j(x) = v_j(y)$ для всех номеров $1 \leqslant j \leqslant 0$” в записи отсутствует. Иными словами,

$$\begin{aligned} P = \Big\{ (x,y) \in X \times X \,:\, & [v_1(x) < v_1(y)] \text{ или} \\ & [v_1(x) = v_1(y) \text{ и } v_2(x) < v_2(y)] \text{ или} \\ & [v_1(x) = v_1(y) \text{ и } v_2(x) = v_2(y) \text{ и } v_3(x) < v_3(y)] \text{ или} \\ & \ldots \text{ или} \\ & [v_1(x) = v_1(y) \text{ и } v_2(x) = v_2(y) \text{ и } \ldots \text{ и } v_{m-2}(x) = v_{m-2}(y) \\ & \quad \text{и } v_{m-1}(x) < v_{m-1}(y)] \Big\}. \end{aligned}$$

На протяжении всей этой работы нас будет интересовать вопрос об аксиоматических свойствах функций предпочтения φ для отношения P (см. конец раздела 1.1), т.е. таких функций $\varphi : X \to \mathbb{R}$, для которых выполнено условие:

$$\forall\, x, y \in X: \quad xPy \iff \varphi(x) > \varphi(y). \tag{2.1}$$

Для этого нам потребуются свойства отношения P, которые, как будет показано, вытекают из свойств лексикографического порядка.

2.2. Связь с лексикографическим порядком. Для целого числа $k \geqslant 1$ и векторов $u = (u_1, \ldots, u_k)$, $v = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^k$ пишем

$$\begin{aligned} (u \angle v) \overset{\mathrm{def}}{=} & [u_1 < v_1] \text{ или } [u_1 = v_1 \text{ и } u_2 < v_2] \text{ или} \\ & [u_1 = v_1 \text{ и } u_2 = v_2 \text{ и } u_3 < v_3] \text{ или } \ldots \text{ или} \\ & [u_1 = v_1 \text{ и } u_2 = v_2 \text{ и } \ldots \text{ и } u_{k-1} = v_{k-1} \text{ и } u_k < v_k]. \end{aligned}$$

Бинарное отношение $\angle = \angle_k$ на $\mathbb{R}^k$, называемое *лексикографическим порядком*, обладает тремя основными свойствами (например, [10, с. 83–86]). Если $u, v, w \in \mathbb{R}^k$, то имеем:

(L.1) $u \angle v$ и $v \angle w \Longrightarrow u \angle w$ (транзитивность $\angle$);

(L.2) $\neg(u \angle v) \iff v \angle u$ или $v = u$ (отрицание $\angle$);

(L.3) либо $u = v$, либо $u \angle v$, либо $v \angle u$ (трихотомия $\angle$).

Используя обозначение (1.1), для $x \in X$ определим новый вектор

$$v(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (v_1(x), \ldots, v_{m-1}(x)) \in \{0, 1, \ldots, n\}^{m-1}. \tag{2.2}$$

Тогда пороговое отношение P, введенное в § 2.1, выражается через лексикографический порядок $\angle$ при $k = m - 1$ в виде:

$$\forall\, x, y \in X: \quad xPy \iff v(x) \angle v(y). \tag{2.3}$$

2.3. Свойства отношения P. Обозначая дополнение к отношению P через

$$P^c = (X \times X) \setminus P = \{(x, y) \in X \times X : (x, y) \notin P\},$$

на основе (2.2), (2.3) и (L.1)–(L.3) получаем *основные свойства* P, которые отражены в следующей лемме.

Лемма 2.1. *Для любых $x, y, z \in X$ имеем*:

(P.1) xPy *и* $yPz \Longrightarrow xPz$ (*транзитивность* P);
(P.2) $xP^cy \iff \neg(xPy) \iff yPx$ *или* $v(y) = v(x)$ (*отрицание* P);
(P.3) *либо* $v(x) = v(y)$, *либо* xPy, *либо* yPx (*обобщенная связность* P);
(P.4) xP^cx (*антирефлексивность* P);
(P.5) xP^cy *и* $yP^cz \Longrightarrow xP^cz$ (*отрицательная транзитивность* P);
(P.6) xP^cy *или* yP^cx (*полноста* P^c).

Для дальнейшего отметим, что из свойств (P.2) и (P.3) вытекает, что

$$(v(x) = v(y)) \iff (xP^cy) \text{ и } (yP^cx), \qquad x,\, y \in X. \tag{2.4}$$

Если бинарное отношение P обладает свойствами (P.1), (P.4) и (P.5), то говорят, что P есть *слабый порядок* на множестве X.

Поскольку, как указано ранее, нас интересует представление (2.1), изучим его подробнее. Соответствующие утверждения собраны в следующей ниже лемме.

Лемма 2.2. *Предположим, что задана некоторая функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Имеют место следующие утверждения*:

(a) *если* $\forall\, x, y \in X : xPy \Longrightarrow \varphi(x) > \varphi(y)$, *то* $\forall\, x, y \in X : \varphi(x) = \varphi(y) \Longrightarrow v(x) = v(y)$;

(b) *если* $\forall\, x, y \in X : \varphi(x) > \varphi(y) \Longrightarrow xPy$, *то* $\forall\, x, y \in X : v(x) = v(y) \Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$;

(c) *если* $\forall\, x, y \in X : xPy \iff \varphi(x) > \varphi(y)$, *то* $\forall\, x, y \in X : \varphi(x) = \varphi(y) \iff v(x) = v(y)$.

2.4. Первое необходимое условие φ-представимости отношения P. Если для вектора $x \in X$ известны значения $v_1(x), \dots, v_{m-1}(x)$, то в силу соотношения (1.2) значение $v_m(x)$ определено однозначно. С другой стороны, из леммы 2.2 (b), (c) вытекает, что если отношение P *представимо* при помощи некоторой функции φ, то *необходимо*, чтобы $\forall\, x, y \in X : v(x) = v(y) \implies \varphi(x) = \varphi(y)$. Вспоминая определение (2.2), найдем, что это условие можно записать в виде (ниже это условие будет фигурировать как *первая аксиома* для функций предпочтения φ для отношения P):

$$\forall\, x, y \in X : \ \big(v_1(x) = v_1(y) \wedge \dots \wedge v_{m-1}(x) = v_{m-1}(y)\big) \Longrightarrow (\varphi(x) = \varphi(y)). \tag{2.5}$$

Условие (2.5) означает, что функция предпочтения φ для P необходимо обладает тем свойством, что она принимает равные значения на векторах-альтернативах, координаты которых переставлены местами (что можно интерпретировать как *попарную компенсируемость критериев* или *анонимность агентов* N и т. п.).

2.5. Классы эквивалентности слабого порядка P. Поскольку отношение P является слабым порядком на X, то для его описания можно применить каноническую конструкцию *семейства классов эквивалентности* [1, 11], которая напоминается ниже и играет важную роль в дальнейшем.

Пусть P — любой слабый порядок на конечном множестве X. Положим

$$X'_1 = \{x \in X \mid \neg\exists\, y \in X : yPx\} = \{x \in X \mid yP^c x \quad \forall\, y \in X\}.$$

Множество X'_1 непусто в силу транзитивности и антирефлексивности отношения P и конечности множества X. Если $X \setminus X'_1 \neq \varnothing$, то определим непустое множество

$$X'_2 = \{x \in X \setminus X'_1 \mid yP^c x \quad \forall\, y \in X \setminus X'_1\}$$

и заметим, что $X'_2 \subset X \setminus X'_1$, поэтому $X'_2 \cap X'_1 = \varnothing$. Далее по индукции если $k \geqslant 3$, непересекающиеся непустые множества X'_1, X'_2, … , $X'_{k-1} \subset X$ уже определены и $X \setminus (X'_1 \cup \dots \cup X'_{k-1}) \neq \varnothing$, то положим

$$X'_k = \{x \in X \setminus (X'_1 \cup \dots \cup X'_{k-1}) \mid yP^c x \quad \forall\, y \in X \setminus (X'_1 \cup \dots \cup X'_{k-1})\}$$

и заметим, что $X'_k \subset X \setminus (X'_1 \cup \dots \cup X'_{k-1})$. Так как множество X конечно, то описанная процедура прервется на некотором шаге s, в результате чего получим s множеств $X'_1, \dots, X'_s$ таких, что $X'_s = X \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{s-1} X'_\ell)$, $X = \bigcup_{\ell=1}^{s} X'_\ell$, причем $X'_k \cap X'_\ell = \varnothing$ при $k \neq \ell$. (Значение s для изучаемого нами слабого порядка P из § 2.1 будет вычислено ниже в лемме 4.4(b)). Наконец, изменим порядок следования множеств X'_k, $k = 1, \ldots, s$, положив

$$X_\ell = X'_{s-\ell+1} \quad \text{для} \quad \ell = 1, \ldots, s.$$

Тогда $X_1 = X \setminus (\bigcup_{\ell=2}^{s} X_\ell)$, $X = \bigcup_{\ell=1}^{s} X_\ell$ и $X_\ell \cap X_k = \varnothing$ при $\ell \neq k$.

Известно ([1], [11]), что слабый порядок P однозначно характеризуется набором множеств $\{X_\ell\}_{\ell=1}^{s}$, называемым *семейством классов эквивалентности* слабого порядка P, а именно, альтернатива x предпочтительнее альтернативы y тогда и только тогда, когда x лежит в классе эквивалентности с бо́льшим номером, что задает каноническое ранжирование (строгое предпочтение на) X. Поэтому представимость (2.1) отношения P при помощи некоторой функции φ допускает следующую эквивалентную интерпретацию: функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *согласована с семейством* (или определяется посредством) *классов эквивалентности* $\{X_\ell\}_{\ell=1}^{s}$ слабого порядка P, если каковы бы ни были $x, y \in X$, выполняется условие:

$$(\varphi(x) > \varphi(y)) \Longleftrightarrow (\exists\, 1 \leqslant \ell < k \leqslant s \ \text{такие, что} \ x \in X_k \ \text{и} \ y \in X_\ell). \quad (2.6)$$

3. Агрегирование с двумя оценками

Наиболее простое решение рассматриваемая задача агрегирования имеет при $m = 2$, т. е. когда $M = \{1, 2\}$ и $X = \{1, 2\}^n$, так что $x = (x_1, \ldots, x_n)$ лежит в $X \Longleftrightarrow x_i = 1$ или $x_i = 2$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Для того, чтобы получить некоторую интуицию в общем случае, когда $m > 2$, в этом разделе приводится полное решение указанной задачи, которая естественным образом может быть интерпретирована как задача голосования (подробнее см. [2, Глава 4]), где оценки 1 и 2 могут означать, например, 1 — против и 2 — за, или 1 — отвергнуть и 2 — принять. Бинарное отношение предпочтения P из § 2.1 на множестве X имеет вид

$$P = \{(x, y) \in X \times X : v_1(x) < v_1(y)\} \quad (\text{причем } v_1(x) + v_2(x) = n), \quad (3.1)$$

т. е. сравнение векторов x и y осуществляется лишь по одному параметру — количеству единиц в этих векторах (или двоек, т. к. $v_2(x) = n - v_1(x)$).

Аксиоматические свойства любой функции предпочтения φ для P можно (почти тавтологически) выразить следующим образом: отношение (3.1) *представимо* при помощи функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ (или, эквивалентно, согласно (2.6) функция φ согласована с семейством $\{X_\ell\}_{\ell=1}^{s}$ классов эквивалентности слабого порядка P) в том и только том случае, когда для любых

$x, y \in X$ она удовлетворяет двум условиям (см. § 1.3):

$$\text{если } \ v_1(x) = v_1(y), \ \text{ то } \ \varphi(x) = \varphi(y), \ \text{ и} \tag{3.2}$$

$$\text{если } \ x \succ y, \ \text{ то } \ \varphi(x) > \varphi(y). \tag{3.3}$$

Для того, чтобы увидеть это, для любого вектора $x \in X$ положим

$$x^* = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{v_1(x)}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{v_2(x)}),$$

т. е. расположим координаты вектора x в неубывающем порядке, а множество всех векторов из X с таким образом упорядоченными координатами обозначим через X^*. Замечая, что $v_1(x^*) = v_1(x)$ и $v_2(x^*) = v_2(x)$, найдем, что (3.2) эквивалентно условию

$$\varphi(x) = \varphi(x^*) \quad \text{для всех} \quad x \in X, \tag{3.4}$$

и в силу определения отношения $\succ$ из § 1.3 получим:

$$(x \succ y) \Longrightarrow (v_1(x) < v_1(y)) \Longleftrightarrow (x^* \succ y^*) \Longleftrightarrow (x^* P y^*) \Longleftrightarrow (xPy). \tag{3.5}$$

Таким образом, отношение P, суженное на множество X^* альтернатив с упорядоченными координатами, в точности совпадает с частичным порядком $\succ$ на этом множестве, который в действительности является *линейным порядком* на X^*.

То, что из (2.1) вытекают условия (3.2) и (3.3), сразу следует из (2.5) при $m = 2$ и (3.5) (и такая же простая ситуация с этой импликацией будет иметь место при произвольном m). Обратно, из (3.2) и (3.3) вытекает (2.1), поскольку в силу (3.5), (3.3) и (3.4)

$$(xPy) \Longleftrightarrow (x^* \succ y^*) \Longrightarrow (\varphi(x^*) > \varphi(y^*)) \Longrightarrow (\varphi(x) > \varphi(y)),$$

а также, благодаря (3.1), (3.2) и (3.3),

$$\neg(xPy) \Longleftrightarrow (v_1(y) < v_1(x)) \vee (v_1(y) = v_1(x)) \Longleftrightarrow (y^* \succcurlyeq x^*) \Longrightarrow (\varphi(y) \geqslant \varphi(x)),$$

откуда

$$(\varphi(x) > \varphi(y)) \Longleftrightarrow \neg(\varphi(y) \geqslant \varphi(x)) \Longrightarrow \neg(\neg(xPy)) \Longleftrightarrow (xPy),$$

что и требовалось установить.

Явное выражение для функции предпочтения Φ для отношения (3.1), пересчитывающей векторы в множестве X^* и присваивающей более предпочтительной альтернативе больший порядковый номер, можно увидеть из следующего примера, в котором нижний индекс у вектора означает его порядковый номер, равный значению Φ на этом векторе:

при $n = 2$: $(1,1)_1$, $(1,2)_2$, $(2,2)_3$;
при $n = 3$: $(1,1,1)_1$, $(1,1,2)_2$, $(1,2,2)_3$, $(2,2,2)_4$;
при $n = 4$: $(1,1,1,1)_1$, $(1,1,1,2)_2$, $(1,1,2,2)_3$, $(1,2,2,2)_4$, $(2,2,2,2)_5$;
при $n = 5$: $(1,1,1,1,1)_1$, $(1,1,1,1,2)_2$, $(1,1,1,2,2)_3$, $(1,1,2,2,2)_4$,
$(1,2,2,2,2)_5$, $(2,2,2,2,2)_6$.

Например, для $x \in X$ можно положить $\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^n x_i - v_1(x)\right] + 1$. Однако, замечая, что $\sum_{i=1}^n x_i = v_1(x) + 2v_2(x)$ и $v_1(x) + v_2(x) = n$, отсюда найдем, что

$$\Phi(x) = v_2(x) + 1 = n - v_1(x) + 1 = \sum_{i=1}^n x_i - n + 1. \tag{3.6}$$

Функция Φ удовлетворяет условию (3.2), а также условию (3.3):

$$(x \succ y) \Longrightarrow (x^* \succ y^*) \Longleftrightarrow (v_1(x) < v_1(y)) \Longleftrightarrow (\Phi(x) > \Phi(y)),$$

поэтому она является функцией предпочтения для отношения P из (3.1).

Построим классы эквивалентности $\{X_\ell\}_{\ell=1}^s$ для изучаемого отношения P. Поскольку $yP^cx \Longleftrightarrow v_1(x) \leqslant v_1(y)$ в силу (3.1), то имеем:

$$X_1' = \{x \in X : v_1(x) \leqslant v_1(y) \,\forall\, y \in X\} = \{x \in X : v_1(x) = 0\} = \{(\underbrace{2,\ldots,2}_{n})\},$$

$$X_2' = \{x \in X : 0 < v_1(x) \leqslant v_1(y) \;\forall\, y \in X \text{ таких, что } v_1(y) > 0\} =$$
$$= \{x \in X : v_1(x) = 1\} = \{x \in X : x^* = (1, \underbrace{2,\ldots,2}_{n-1})\},$$

и в общем случае для $k = 1, \ldots, n+1$ находим, что

$$X_k' = \{x \in X : v_1(x) = k-1\} = \{x \in X : x^* = (\underbrace{1,\ldots,1}_{k-1}, \underbrace{2,\ldots,2}_{n-k+1})\}.$$

Следовательно, для $\ell = 1, \ldots, s$, где $s = n + 1 = C_{n+1}^1 = C_{n+2-1}^{2-1}$, имеем:

$$X_\ell = X_{s-\ell+1}' = \{x \in X : v_1(x) = s - \ell = n + 1 - \ell\} = \tag{3.7}$$

$$= \{x \in X : x^* = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n+1-\ell}, \underbrace{2,\ldots,2}_{\ell-1})\}, \tag{3.8}$$

где в силу (3.6) равенство (3.7) можно переписать в виде $X_\ell = \{x \in X : \Phi(x) = \ell\}$. Кроме того, как видно из (3.8), *алгоритм* упорядочения множества X^* (использованный и в приведенном выше примере) состоит в последовательном выписывании векторов вида:

$$x^*(n_1) = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-n_1}, \underbrace{2,\ldots,2}_{n_1}) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant n_1 \leqslant n, \tag{3.9}$$

т. е. когда номер n_1 последовательно принимает значения $0, 1, \ldots, n$.

Заметим, что в силу (3.6) $\Phi(x^*(n_1)) = v_2(x^*(n_1)) + 1 = n_1 + 1$. Число $n_1 + 1$ называется ***порядковым номером*** вектора $x^* = x^*(n_1)$ при указанном алгоритмическом упорядочении X^* и обозначается через $\mathrm{alg}(x^*)$. Поскольку для любого $x \in X$ имеем $v_2(x) = \Phi(x) - 1$, то $x^* = x^*(n_1)$ при $n_1 = \Phi(x) - 1$, а потому, $\Phi(x) = \Phi(x^*) = \mathrm{alg}(x^*)$. Это показывает, что $\Phi : X^* \to \{1, \ldots, s\}$ есть биекция, сохраняющая алгоритмический порядок X^* (в том смысле, что $\mathrm{alg}(x^*) > \mathrm{alg}(y^*) \iff \Phi(x^*) > \Phi(y^*)$). Кроме того, из (2.1) для $\varphi = \Phi$ заключаем, что

$$\forall\, x, y \in X : \quad xPy \Longleftrightarrow \mathrm{alg}(x^*) > \mathrm{alg}(y^*).$$

4. Перестановки и монотонные представители

В этом разделе исходная задача о представимости отношения P посредством функции φ будет сведена к определению функции φ на некотором подмножестве $X^* \subset X$, на котором отношение P является *линейным порядком*, т. е. P на X^* в дополнение к условиям (P.1) и (P.4) леммы 2.1 удовлетворяет еще и условию

$$\forall\, x, y \in X^*, \ \ x \neq y : \quad (xPy) \vee (yPx). \tag{4.1}$$

4.1. Перестановки множества N и классы безразличия. Как отмечено в разделе 2.4, для того, чтобы функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ представляла отношение P, необходимо, чтобы выполнялось условие (2.5), т. е. чтобы значение $\varphi(x)$ не изменялось при перестановке местами координат вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Напомним, что *перестановкой множества* $N = \{1, \ldots, n\}$ называется любая биекция $\sigma : N \to N$. Функцию σ будем называть просто *перестановкой*, без ссылки на множество N (которое всюду ниже фиксировано).

Скажем, что альтернатива $y \in X = M^n$ *эквивалентна* альтернативе $x \in X$, что записывается в виде $y \sim x$, если существует перестановка σ такая, что $y = x \circ \sigma$, т. е. $y_i = x_{\sigma(i)}$ для всех $i \in N$. Поскольку композиция двух перестановок есть снова перестановка, то ясно, что $\sim$ есть отношение эквивалентности на множестве всех альтернатив X. Обозначим через

$$\widetilde{x} = \{y \in X : y \sim x\} = \{y \in X : \exists \text{ перестановка } \sigma \text{ такая, что } y = x \circ \sigma\}$$

класс эквивалентности вектора $x \in X$ и через $\widetilde{X} = X/\!\sim = \{\widetilde{x} : x \in X\}$ — фактор-множество множества X по отношению эквивалентности $\sim$. Как обычно, имеем: $(\widetilde{x} = \widetilde{y}) \Longleftrightarrow (x \sim y)$, $(\widetilde{x} \cap \widetilde{y} = \varnothing) \Longleftrightarrow (x \not\sim y)$, и $\bigcup_{x \in X} \widetilde{x} = X$.

Для дальнейшего отметим, что в силу соотношения (1.2) с учетом обозначения (2.2) справедливо равенство:

$$\widetilde{x} = \{y \in X : v(y) = v(x)\}, \qquad x \in X. \tag{4.2}$$

Отсюда и из (2.4) (где охарактеризовано отношение безразличия I, определенное в разделе 1.1) следует, что $x \sim y \Longleftrightarrow v(x) = v(y) \Longleftrightarrow xIy$ на X, т. е. отношение эквивалентности $\sim$ совпадает с отношением *безразличия* I, порожденным строгим предпочтением P. Ниже в зависимости от контекста используются оба символа $\sim$ и I для отношения безразличия и, кроме того, класс безразличия $\widetilde{x}$ элемента $x \in X$ иногда обозначается через $I[x]$.

В силу сказанного выше будем искать функцию предпочтения φ для P, удовлетворяющую условию (2.5) (ниже это условие всегда будет фигурировать в виде одной из аксиом для φ):

$$\text{если } \ x, y \in X \ \text{ и } \ x \overset{I}{\sim} y, \ \text{ то } \ \varphi(x) = \varphi(y). \tag{4.3}$$

Условие (4.3) можно проинтерпретировать следующим образом. Параметры (свойства, качества, агенты) группы N должны быть независимы (равноправны), поэтому их агрегированное значение (“коллективное мнение”) $\varphi(x)$ для альтернативы $x = (x_1, \ldots, x_n)$ не должно зависеть от порядка следования членов группы N, а, значит, и от порядка следования их оценок $x_1, \ldots, x_n$. Равенство в (4.3) можно также переписать в виде $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ для любой перестановки σ. Последнее выполнено тогда и только тогда, когда функция φ *симметрична* как функция n переменных — это свойство выражает так называемую “попарную компенсацию” свойств из N или “анонимность” агентов из N.

4.2. Факторизация отношения P. С другой стороны, предположение (4.3) означает, что функцию $\varphi : X \to \mathbb{R}$ можно корректно “распространить” на фактор-множество $\widetilde{X}$, положив

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}) = \varphi(x) \quad \text{ для } \quad \widetilde{x} \in \widetilde{X},$$

где x в правой части равенства порождает класс эквивалентности $\widetilde{x}$; впрочем, правая часть *не зависит* от представителя y класса $\widetilde{x}$: действительно, если $y \in \widetilde{x}$, то $y \sim x$, поэтому $\varphi(y) = \varphi(x)$ в силу (4.3). Обратно, если какая-либо функция $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ уже найдена, то положив $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{x})$ для всех

$x \in X$, придем к высказыванию (4.3). Следовательно, при решении исходной задачи агрегирования из раздела 2.1 можно ограничиться поиском функций $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$.

Определим бинарное отношение $\widetilde{P}$ на $\widetilde{X}$ тем же правилом, что и P в разделе § 2.1. Точнее, если $x, y \in X$ и $y \sim x$, то вектор y получен из вектора x перестановкой координат вектора x, а потому, $v_j(y) = v_j(x)$ для всех $j \in M$. Это позволяет корректно положить $\widetilde{v}_j(\widetilde{x}) = v_j(x)$, $j \in M$, и $\widetilde{v}(\widetilde{x}) = (\widetilde{v}_1(\widetilde{x}), \ldots, \widetilde{v}_{m-1}(\widetilde{x}))$ для всех $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, а также определить отношение $\widetilde{P} \subset \widetilde{X} \times \widetilde{X}$ по правилу (ср. с (2.3)):

$$\text{если} \;\; \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}, \;\; \text{то} \;\; (\widetilde{x}\widetilde{P}\widetilde{y}) \overset{\text{def}}{=} (\widetilde{v}(\widetilde{x}) \angle \widetilde{v}(\widetilde{y}) \;\; \text{в} \;\; \mathbb{R}^{m-1}).$$

Так определенное отношение $\widetilde{P}$ на $\widetilde{X}$ называется *факторизацией* отношения P по отношению безразличия $\sim$ и является *линейным порядком* на $\widetilde{X}$. Чтобы увидеть это, достаточно лишь проверить, что если $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$ и $\widetilde{x} \neq \widetilde{y}$, то $\widetilde{x}\widetilde{P}\widetilde{y}$ или $\widetilde{y}\widetilde{P}\widetilde{x}$. Пусть $x \in \widetilde{x}$ и $y \in \widetilde{y}$. Так как $\widetilde{x} \neq \widetilde{y}$, то $x \not\sim y$, откуда $v(x) \neq v(y)$, но $\widetilde{v}(\widetilde{x}) = v(x)$ и $\widetilde{v}(\widetilde{y}) = v(y)$, поэтому $\widetilde{v}(\widetilde{x}) \neq \widetilde{v}(\widetilde{y})$ в $\mathbb{R}^{m-1}$. Тогда из свойства (L.3) лексикографического порядка $\angle = \angle_{m-1}$ вытекает, что $\widetilde{v}(\widetilde{x}) \angle \widetilde{v}(\widetilde{y})$ или $\widetilde{v}(\widetilde{y}) \angle \widetilde{v}(\widetilde{x})$, т. е. $\widetilde{x}\widetilde{P}\widetilde{y}$ или $\widetilde{y}\widetilde{P}\widetilde{x}$.

Предыдущие рассуждения показывают, что справедлива

Лемма 4.1. *Исходное строгое предпочтение P представимо при помощи функции φ на X тогда и только тогда, когда его факторизация $\widetilde{P}$ представима при помощи функции $\widetilde{\varphi}$ на $\widetilde{X}$.*

4.3. Монотонные представители классов безразличия. Чтобы облегчить работу с классами безразличия, в каждом классе $\widetilde{x} = I[x] \in \widetilde{X}$ выделим некоторый "главный" представитель $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ при помощи следующего утверждения об упорядочении координат вектора $x \in X$.

Лемма 4.2. *Для любого $x \in X$ найдется единственный вектор $x^* \sim x$, называемый монотонным представителем класса $\widetilde{x}$ (или просто x), такой, что $x_i^* \leqslant x_{i+1}^*$ для всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Доказательство. Для вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ достаточно положить $x^* = x \circ \sigma$, где перестановка σ задается правилом:

$$\sigma(1) = \min\Big\{k \in N : x_k = \min_{i \in N} x_i\Big\},$$

и далее последовательно для $\ell = 2, \ldots, n$:

$$\sigma(\ell) = \min\Big\{k \in N \setminus \{\sigma(1), \ldots, \sigma(\ell-1)\} : x_k = \min_{i \in N \setminus \{\sigma(1), \ldots, \sigma(\ell-1)\}} x_i\Big\}.$$

Следует отметить, что перестановка σ, приводящая к x^*, определена, вообще говоря, неоднозначно, однако, сам вектор x^* единственен для каждого $x \in X$. Действительно, пусть $y^* \sim x$ и $y_i^* \leqslant y_{i+1}^*$ для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Поскольку $y^* \sim x$ и $x^* \sim x$, то $y^* \sim x^*$, поэтому, как отмечено выше, $v_j(y^*) = v_j(x^*)$ для всех $j \in M$. Осталось заметить, что т.к. координаты в обоих векторах x^* и y^* расположены в неубывающем порядке, то $y^* = x^*$. $\square$

Из леммы 4.2 видно, что монотонный представитель класса $\widetilde{x}$ имеет вид:

$$x^* = (\overbrace{\underbrace{1, \dots, 1}_{v_1(x)}, \underbrace{2, \dots, 2}_{v_2(x)}, \dots, \underbrace{m-1, \dots, m-1}_{v_{m-1}(x)}, \underbrace{m, \dots, m}_{v_m(x)}}^{n}), \tag{4.4}$$

где числа $v_j(x)$ под фигурными скобками означают длины соответствующих выделенных подвекторов.

В каждом классе безразличия $\widetilde{x}$ из $\widetilde{X}$ выделим монотонный представитель $x^* \in X$, так что $\widetilde{x} = \widetilde{x^*}$, и обозначим через

$$X^* = \{x^* : x \in X\} \subset X$$

множество всех монотонных представителей. Поскольку $x^* \sim x$, то $\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}) = \varphi(x) = \varphi(x^*)$ и $\widetilde{v}_j(\widetilde{x}) = v_j(x) = v_j(x^*)$ для всех $j \in M$, поэтому если обозначить сужение бинарного отношения P на множество $X^* \times X^* \subset X \times X$ снова через P и предположить, что P представимо на X при помощи функции φ, то

$$\forall\, x^*, y^* \in X^* : \quad x^* P y^* \Longleftrightarrow \varphi(x^*) > \varphi(y^*), \tag{4.5}$$

т.е. P представимо и на X^* посредством той же функции φ. С другой стороны, если имеет место (4.5) для некоторой функции $\varphi : X^* \to \mathbb{R}$, то, продолжив φ с множества X^* на все множество X при помощи равенства $\varphi(x) = \varphi(x^*)$ для всех $x \in X$, найдем, что выполнено соотношение (2.1). Таким образом, представляющую P функцию φ достаточно определить лишь на множестве монотонных представителей X^*.

В терминах монотонных представителей отношение безразличия I можно выразить в виде:

$$\text{если } \ x, y \in X, \ \text{ то } \ xIy \Longleftrightarrow x^* = y^*. \tag{4.6}$$

Из свойств (P.1), (P.4) и (P.3) леммы 2.1 и (4.6) следует, что (сужение) P является *линейным порядком* на X^* (см. начало § 4). Кроме того, отметим, что число элементов в множествах $\widetilde{X}$ и X^* совпадает (биекцию b между $\widetilde{X}$ и X^*, сохраняющую линейные порядки, можно определить, например, по правилу $b(\widetilde{x}) = x^*$) и равно

$$|\widetilde{X}| = |X^*| = |X^*_{n,m}| = C^{m-1}_{n+m-1} = C^{n}_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}, \tag{4.7}$$

где $X^*_{n,m}$ есть более точное обозначение множества X^*. Установим это по индукции относительно $n \geqslant 1$ для любого $m \geqslant 1$. При $n = 1$ элемент x^*_1 из $\{1, \ldots, m\}$ можно выбрать $m = C^{m-1}_m$ способами для любого номера m. Таким образом, $|X^*_{1,m}| = C^{m-1}_{1+m-1}$. Если $n = 2$ и $(x^*_1, x^*_2) \in X^*_{2,m}$, то элемент $x^*_1 = i \in \{1, \ldots, m\}$ можно выбрать m способами, и если такой элемент выбран, то в силу упорядочения $x^*_1 \leqslant x^*_2$ координату $x^*_2 \in \{i, i+1, \ldots, m\}$ можно выбрать $m - i + 1$ способами, т. е.

$$|X^*_{2,m}| = \sum_{i=1}^{m}(m-i+1) = m+(m-1)+\cdots+1 = \frac{m(m+1)}{2} = C^{m-1}_{m+1} = C^{m-1}_{2+m-1}$$

для любого номера m. Предположив, что для номера n формула (4.7) имеет место для всех номеров m, установим ее для номера $n+1$ и всех m. Рассмотрим произвольный элемент $(x^*_1, \ldots, x^*_{n+1})$ множества $X^*_{n+1,m}$. Первую координату $x^*_1 = i \in \{1, \ldots, m\}$ можно выбрать m способами, а оставшиеся n координат $(x^*_2, \ldots, x^*_{n+1}) \in \{i, i+1, \ldots, m\}^n$ такие, что $x^*_2 \leqslant x^*_3 \leqslant \ldots \leqslant x^*_{n+1}$, можно выбрать по предположению индукции $C^{(m-i+1)-1}_{n+(m-i+1)-1} = C^{m-i}_{n+m-i}$ способами. Применяя формулу суммирования по обоим индексам (см. [16, Глава 5, формула (5.9)]), найдем, что

$$|X^*_{n+1,m}| = \sum_{i=1}^{m} C^{m-i}_{n+m-i} = C^{m-1}_{n+m} = C^{m-1}_{(n+1)+m-1} = C^{n+1}_{(n+1)+m-1}$$

для любого m, что и требовалось показать.

4.4. Сохранение отношений $\succcurlyeq$ и $\succ$ при операции $x \mapsto x^*$.

В дальнейшем нам понадобится важный факт о том, что операция взятия монотонного представителя $x \mapsto x^*$ сохраняет естественные отношения частичного порядка $\succcurlyeq$ и $\succ$ из § 1.3.

Лемма 4.3. *Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$. Имеем:*

(a) *если $x \succcurlyeq y$, то $x^* \succcurlyeq y^*$;*

(b) *если $x \succ y$, то $x^* \succ y^*$;*

(c) *если $x \succcurlyeq y$ и $x^* = y^*$, то $x = y$.*

Обратные к (a) *и* (b) *утверждения не имеют места.*

Доказательство. (a) По условию $x_i \geqslant y_i$ для всех $i \in N$. Если $x^* = x \circ \sigma$ и $y^* = y \circ \theta$ — монотонные представители соответственно x и y (точнее классов $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$), где σ и θ — некоторые перестановки, то $x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \ldots \leqslant x_n^*$ и $y_1^* \leqslant y_2^* \leqslant \ldots \leqslant y_n^*$. Нужно показать, что $x_i^* \geqslant y_i^*$ для всех $i \in N$. От противного предположим, что $x_k^* < y_k^*$ для некоторого $k \in N$. Тогда $x_1^* \leqslant \ldots \leqslant x_k^* < y_k^* \leqslant \ldots \leqslant y_n^*$ или, что то же самое, $x_{\sigma(1)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(k)} < y_{\theta(k)} \leqslant \ldots \leqslant y_{\theta(n)}$. Следовательно,

$$x_i < y_\ell \;\text{ для всех }\; i \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\} \;\text{ и }\; \ell \in \{\theta(k), \ldots, \theta(n)\}. \tag{4.8}$$

Так как σ и θ — перестановки, то множество

$$\{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\} \cap \{\theta(k), \ldots, \theta(n)\} = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\} \setminus \{\theta(1), \ldots, \theta(k-1)\} \tag{4.9}$$

непусто, где положено $\{\theta(1), \ldots, \theta(k-1)\} = \varnothing$ при $k = 1$. Взяв элемент $i = \ell$ из пресечения множеств в левой части (4.9), в силу (4.8) получим, что $x_\ell < y_\ell$, а это противоречит условию $x_\ell \geqslant y_\ell$.

(b) Пусть $x \succ y$. Тогда $x_i \geqslant y_i$ для всех $i \in N$ и найдется такое $i_0 \in N$, что $x_{i_0} > y_{i_0}$. Определим вспомогательный вектор $z = (z_1, \ldots, z_n) \in X$ по правилу: если $i \in N$, то положим $z_i = x_i$ при $i \neq i_0$, и $z_{i_0} = y_{i_0}$. Поскольку $x \succcurlyeq y$, то $z \succcurlyeq y$, поэтому $z^* \succcurlyeq y^*$ в силу (a), и остается показать, что $x^* \succ z^*$. Пусть $x^* = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ — монотонный представитель x для некоторой перестановки σ и $i_0 = \sigma(k_0)$ при некотором $k_0 \in N$. Тогда

$$\{x_i : i \in N \text{ и } i \neq i_0\} = \{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\} \setminus \{x_{\sigma(k_0)}\} \tag{4.10}$$

и

$$z_{i_0} = y_{i_0} < x_{i_0} = x_{\sigma(k_0)} \leqslant x_{\sigma(k_0+1)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(n)}. \tag{4.11}$$

Если $k_0 = 1$, то $x_{\sigma(1)} = x_{i_0}$, и в силу (4.10) и (4.11) имеем:

$$x^* = (x_{i_0}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \succ (y_{i_0}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = z^*.$$

Пусть теперь $2 \leqslant k_0 \leqslant n$. Тогда существует такое $1 \leqslant \ell \leqslant k_0 - 1$, что $x_{\sigma(\ell)} \leqslant y_{i_0} < x_{\sigma(\ell+1)}$. Рассмотрим три случая: 1) $k_0 = 2$; 2) $k_0 \geqslant 3$ и $\ell = k_0 - 1$, и 3) $k_0 \geqslant 3$ и $1 \leqslant \ell \leqslant k_0 - 2$. Для случаев 1) и 2) имеем $x_{\sigma(k_0-1)} \leqslant y_{i_0} < x_{\sigma(k_0)} = x_{i_0}$, откуда в силу (4.10) и (4.11) получим:

$$\begin{aligned} x^* &= (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k_0-1)}, x_{i_0}, x_{\sigma(k_0+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \succ \\ &\succ (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k_0-1)}, y_{i_0}, x_{\sigma(k_0+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = z^*. \end{aligned}$$

В случае 3) найдем, что

$$x_{\sigma(\ell)} \leqslant y_{i_0} < x_{\sigma(\ell+1)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(k_0-1)} \leqslant x_{\sigma(k_0)} = x_{i_0},$$

откуда, принимая во внимание (4.10) и (4.11), получим:

$$x^* = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(\ell)}, \underline{x_{\sigma(\ell+1)}}, x_{\sigma(\ell+2)}, \ldots, \overbrace{x_{\sigma(k_0)}}^{x_{i_0}}, x_{\sigma(k_0+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \succ$$
$$\succ (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(\ell)}, \quad \underline{y_{i_0}} \quad, x_{\sigma(\ell+1)}, \ldots, x_{\sigma(k_0-1)}, x_{\sigma(k_0+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = z^*,$$

где подчеркнутая координата в x^* строго больше подчеркнутой координаты в z^*, а остальные координаты в x^* не меньше соответствующих координат в z^*. Итак, во всех случаях $x^* \succ z^*$, что и требовалось.

(c) Пусть $x \succcurlyeq y$ и $x^* = y^*$. Если $x \neq y$, то $x \succ y$, поэтому в силу (b) $x^* \succ y^*$, откуда $x^* \neq y^*$, что противоречит условию.

Мы показали, что из (b) вытекает (c). На самом деле (b) и (c) эквивалентны: если $x \succ y$, то $x \succcurlyeq y$, поэтому $x^* \succcurlyeq y^*$ в силу (a), а тогда предполагая от противного, что $\neg(x^* \succ y^*)$, получим $y^* \succcurlyeq x^*$, откуда $x^* = y^*$ и, значит, $x = y$ в силу (c), а последнее равенство противоречит тому, что $x \succ y$.

Наконец, векторы $x = (1, 2, \ldots, n)$ и $y = (n, n-1, \ldots, 1)$ несравнимы посредством отношения $\succcurlyeq$, тогда как $x^* = x = y^*$, поэтому из $x^* \succcurlyeq y^*$ не вытекает, что $x \succcurlyeq y$. Кроме того (например, при $n = 2$), если $x = (3, 1)$ и $y = (1, 2)$, то $x^* \succ y^*$ и $\neg(x \succcurlyeq y)$. Лемма доказана. □

4.5. Второе необходимое условие φ-представимости отношения P. Для того, чтобы вывести это условие, вначале покажем, что

$$\text{если} \quad x, y \in X \quad \text{и} \quad x \succ y, \quad \text{то} \quad xPy. \tag{4.12}$$

Достаточно показать, что $\neg(xPy) \Longrightarrow \neg(x \succ y)$. Из леммы 2.1 (P.2) находим, что $\neg(xPy) \Longleftrightarrow (yPx) \vee (v(y) = v(x))$. Если yPx, то это эквивалентно тому, что y^*Px^*, поэтому по определению P найдется $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ такое, что $v_j(y^*) = v_j(x^*)$ для всех $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ (при $k = 1$ это условие опускается) и $v_k(y^*) < v_k(x^*)$. Тогда при $i = v_1(y^*) + \ldots + v_{k-1}(y^*) + v_k(y^*) + 1$ получим, что координата $y_i^* \geqslant k+1$ и $x_i^* = k$, откуда $\neg(x^* \succ y^*)$, а это в силу леммы 4.3 (b) означает, что $\neg(x \succ y)$. Если же $v(y) = v(x)$, то $y^* = x^*$, откуда $\neg(x^* \succ y^*)$, а потому, $\neg(x \succ y)$. (Отметим, что $xPy \not\Longrightarrow x \succ y$; например, $x = (2, 2, 2)$, $y = (1, 3, 3)$.)

Из (4.12) вытекает, что если P *представимо* при помощи функции φ (в смысле (2.1)), то *необходимо*, чтобы выполнялось условие (которое будет фигурировать как *вторая аксиома* для функций предпочтения φ для отношения P):

$$\text{если} \quad x, y \in X \quad \text{и} \quad x \succ y, \quad \text{то} \quad \varphi(x) > \varphi(y). \tag{4.13}$$

Импликация в (4.13) называется условием *Парето-доминирования.* Его можно проинтерпретировать следующим образом: если все оценки для одной альтернативы не меньше соответствующих оценок для второй альтернативы и по меньшей мере одна оценка для первой альтернативы строго больше соответствующей оценки для второй альтернативы, то с точки зрения агрегированных значений (или "коллективного мнения" группы N) первая альтернатива в ранжировании строго предпочтительнее второй.

4.6. Число классов эквивалентности слабого порядка P. В заключение этого раздела покажем, что семейство классов эквивалентности слабого порядка P (из раздела 2.5) совпадает с множеством $\widetilde{X}$ всех классов безразличия (определенном в начале этого раздела).

Лемма 4.4. (a) $\{X_\ell\}_{\ell=1}^s = \widetilde{X}$; (b) $s = C_{n+m-1}^{m-1}$.

Доказательство. (a) Проверим, что $\{X_\ell\}_{\ell=1}^s \subset \widetilde{X}$. Для $\ell \in \{1, \dots, s\}$ зафиксируем $x \in X_\ell$ и покажем, что $X_\ell = \widetilde{x}$. Действительно, для любого $y \in X_\ell = X'_{s-\ell+1}$ в силу определения последнего множества имеют место соотношения $x, y \in X \setminus (X'_1 \cup \dots \cup X'_{s-\ell})$, $zP^c x$ и $zP^c y$ для всех $z \in X \setminus (X'_1 \cup \dots \cup X'_{s-\ell})$, полагая в которых $z = y$ и $z = x$, найдем, что $yP^c x$ и $xP^c y$. Последнее в силу (2.4) эквивалентно условию $v(y) = v(x)$, а это, благодаря (4.2), означает, что $y \sim x$, т. е. $X_\ell \subset \widetilde{x}$. Если теперь $y \in \widetilde{x}$, то $y \in X$, а потому, $y \in X_k$ при некотором $k \in \{1, \dots, s\}$. Предполагая, что $k \neq \ell$, получим, что $(xPy) \vee (yPx)$, поэтому из леммы 2.1 (P.3) вытекает, что $v(y) \neq v(x)$, откуда $y \not\sim x$ в силу (4.2). Это противоречие с условием $y \in \widetilde{x}$ показывает, что $y \in X_\ell$, так что $\widetilde{x} \subset X_\ell$. Следовательно, $X_\ell = \widetilde{x} \in \widetilde{X}$. Обратное включение $\widetilde{X} \subset \{X_\ell\}_{\ell=1}^s$ вытекает из того, что если $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, то представитель x класса $\widetilde{x}$ лежит в X_ℓ при некотором $\ell \in \{1, \dots, s\}$, а это в силу приведенных выше рассуждений означает, что $\widetilde{x} = X_\ell$.

(b) Из утверждения (a) вытекает, что $s = |\widetilde{X}|$, и остается воспользоваться равенствами (4.7). $\square$

5. Пороговое агрегирование с тремя оценками

5.1. Аксиоматика функций предпочтения для P при $m = 3$. Всюду в этом и следующем разделах $m = 3$, так что множество оценок $M = \{1, 2, 3\}$. Соотношение (1.2) принимает вид

$$v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) = n \quad \text{для всех} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \tag{5.1}$$

и

$$P = \{(x, y) \in X \times X : [v_1(x) < v_1(y)] \vee [v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y)]\}. \tag{5.2}$$

Важный шаг в решении рассматриваемой задачи агрегирования сделан в серии работ [3, 4, 5, 14], где впервые построена аксиоматика функций предпочтения для отношения (5.2), которое в этих работах названо порожденным *пороговым правилом* (исходя из того, что P основано на сравнении альтернатив по числу *низких* оценок, в дальнейшем будем называть *P пороговым отношением снизу*). А именно (см. [3, 5]), «показано, что единственной процедурой, которая удовлетворяет введенной системе аксиом, является пороговое правило, на основе которого строится бинарное отношение (слабый порядок), определяющее предпочтения на множестве объектов».

В этом разделе в качестве базового шага будет изложена аксиоматика функций предпочтения из [3, 5, 14] в виде, допускающем дальнейшее обобщение на случай произвольного числа оценок $m \geqslant 4$ и дающем некоторую интуицию в этом направлении. Для этого нам потребуются две леммы (леммы 5.1 и 5.2).

Лемма 5.1. *При $m = 3$ отношение (5.2) на множестве альтернатив $X = \{1, 2, 3\}^n$ представимо функцией $\varphi : X \to \mathbb{R}$ (в смысле (2.1)) тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in X$ эта функция удовлетворяет следующим условиям:*

(a) *если $v_1(x) = v_1(y)$ и $v_2(x) = v_2(y)$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$;*
(b) *если $v_1(x) = v_1(y)$ и $v_2(x) < v_2(y)$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$;*
(c) *если $v_1(x) < v_1(y)$ и $v_1(x) + v_2(x) = n$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$.*

Доказательство. Если P представимо при помощи функции φ, то пункт (a) вытекает из леммы 2.2 (b), а пункты (b) и (c) — из определения (5.2).

Наоборот, докажем, что из условий (a)–(c) следует представление (2.1). Для этого покажем вначале, что при выполнении (a)–(c) имеем:

$$\text{если} \quad x, y \in X \quad \text{и} \quad v_1(x) < v_1(y), \quad \text{то} \quad \varphi(x) > \varphi(y). \tag{5.3}$$

Действительно, поскольку $v_1(x) < v_1(y)$ и $v_1(y) \leqslant n$, то $v_1(x) < n$. Рассмотрим вспомогательный вектор $z \in X$ такой, что

$$v_1(z) = v_1(x) \quad \text{и} \quad v_2(z) = n - v_1(x).$$

Из неравенства $v_1(x) + v_2(x) \leqslant n$ следует, что $v_2(x) \leqslant n - v_1(x) = v_2(z)$. Следовательно, $v_1(x) = v_1(z)$ и $v_2(x) \leqslant v_2(z)$. Если $v_2(x) = v_2(z)$, то в силу (a) $\varphi(x) = \varphi(z)$, а если $v_2(x) < v_2(z)$, то $\varphi(x) > \varphi(z)$ в силу (b). Таким образом, $\varphi(x) \geqslant \varphi(z)$. Замечая, что

$$v_1(z) = v_1(x) < v_1(y) \quad \text{и} \quad v_1(z) + v_2(z) = n$$

и используя (c), где x заменен на z, найдем, что $\varphi(z) > \varphi(y)$, что в сочетании с неравенством $\varphi(x) \geqslant \varphi(z)$ приводит к (5.3). (Отметим, кроме того, что из (5.3) и предположения (b) рассуждением от противного вытекает, что если $x, y \in X$ и $\varphi(x) = \varphi(y)$, то $v_1(x) = v_1(y)$ и $v_2(x) = v_2(y)$.)

Переходим к доказательству (2.1). Пусть $x, y \in X$. Импликация

$$(xPy) \Longrightarrow (\varphi(x) > \varphi(y)) \tag{5.4}$$

вытекает непосредственно из (5.2), (5.3) и (b). Для того, чтобы установить обратную импликацию, положим $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$ и заметим, что в силу леммы 2.1 (P.2), (5.4) и (a) имеем:

$$\begin{aligned}\neg(xPy) &\iff [(yPx) \vee (v(y) = v(x))] \Longrightarrow [(\varphi(y) > \varphi(x)) \vee (\varphi(y) = \varphi(x))] \\ &\iff (\varphi(y) \geqslant \varphi(x)),\end{aligned}$$

откуда окончательно найдем, что

$$(\varphi(x) > \varphi(y)) \Longleftrightarrow \neg(\varphi(y) \geqslant \varphi(x)) \Longrightarrow \neg(\neg(xPy)) \Longleftrightarrow (xPy).$$

Лемма полностью доказана. □

С логической точки зрения вывод утверждения (5.3) означает следующее. В условии (c) леммы 5.1 обозначим высказывание “$v_1(x) < v_1(y)$” через $\mathcal{A}$, “$v_1(x) + v_2(x) = n$” — через $\mathcal{B}$ и “$\varphi(x) > \varphi(y)$” — через $\mathcal{C}$. Тогда в условиях (a) и (b) леммы 5.1 из утверждения $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}$ вытекает, что $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{C}$. Поскольку из $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{C}$ всегда вытекает $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}$ (т. е. условие $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}$ автоматически слабее и менее общó, чем $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{C}$), то в (5.3) показано, что на самом деле $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{C})$. Это означает, что несмотря на предположение $\mathcal{B}$ в условии (c), агрегированное предпочтение $\varphi(x) > \varphi(y)$ по-прежнему основывается на количестве низких оценок 1 в векторах x и y как в (5.3). Подобная логика встречается и ниже в аналогичных рассмотренной ситуациях.

Лемма 5.2. *При $m = 3$ для любых $x, y \in X = \{1,2,3\}^n$ имеем:*

$$(x^* \succ y^*) \iff [v_1(x) < v_1(y) \wedge v_3(x) \geqslant v_3(y)] \vee \\ \vee [v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y)],$$

где x^* и y^* — монотонные представители соответственно (классов) x и y. (Напомним, что $v_j(x) = v_j(x^*)$ для всех $j = 1,2,3$ и $x \in X$.)

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Покажем вначале, что $v_1(x^*) \leqslant v_1(y^*)$ и $v_3(x^*) \geqslant v_3(y^*)$ (эти два условия эквивалентны одному условию $x^* \succcurlyeq y^*$). Если $v_1(x^*) > v_1(y^*)$, то при $i = v_1(x^*)$ в силу упорядочения координат в векторах x^* и y^* найдем, что $x_i^* = 1$ и $y_i^* \geqslant 2$, а если $v_3(x^*) < v_3(y^*)$, то при $i = n - v_3(y^*) + 1$ получим, что $y_i^* = 3$ и $x_i^* \leqslant 2$. В обоих случаях приходим к противоречию с условием $x^* \succcurlyeq y^*$. Кроме того, если $v_1(x^*) = v_1(y^*)$ и $x^* \succ y^*$, то неравенство $v_3(x^*) \geqslant v_3(y^*)$ эквивалентно неравенству $v_3(x^*) > v_3(y^*)$ (т.к. из равенства $v_3(x^*) = v_3(y^*)$ в силу (5.1) вытекает, что $x^* = y^*$), а последнее неравенство опять же в силу (5.1) эквивалентно неравенству $v_2(x^*) < v_2(y^*)$.

($\Longleftarrow$) Пусть вначале $v_1(x^*) = v_1(y^*)$ и $v_2(x^*) < v_2(y^*)$. Тогда $x_i^* = 1$ и $y_i^* = 1$ при $i \in \{1, \ldots, v_1(x^*)\}$ (это утверждение отсутствует при $v_1(x^*) = 0$), $x_i^* = 2$ и $y_i^* = 2$ при $i \in \{v_1(x^*)+1, \ldots, v_1(x^*)+v_2(x^*)\}$, $x_i^* = 3$ и $y_i^* = 2$ при $i = v_1(x^*) + v_2(x^*) + 1$ и $x_i^* = 3 \geqslant y_i^* \geqslant 2$ при остальных индексах $i \leqslant n$. Пусть теперь $v_1(x^*) < v_1(y^*)$ и $v_3(x^*) \geqslant v_3(y^*)$. Тогда $x_i^* = 1$ и $y_i^* = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant v_1(x^*)$ (при $v_1(x^*) = 0$ это утверждение опускается), $x_i^* \geqslant 2$ и $y_i^* = 1$ при $v_1(x^*)+1 \leqslant i \leqslant v_1(y^*)$, $x_i^* \geqslant 2$ и $y_i^* = 2$ при $v_1(y^*)+1 \leqslant i \leqslant n - v_3(x^*)$ и $x_i^* = 3 \geqslant y_i^*$ при $n - v_3(x^*) + 1 \leqslant i \leqslant n$ (последнее утверждение опускается при $v_3(x^*) = 0$). Итак, во всех случаях получаем, что $x^* \succ y^*$. $\square$

Основной результат работ [3, 5, 14] — следующая теорема, выражающая *аксиоматику Алескерова-Якубы* при $m = 3$ (ср. с условиями (3.2) и (3.3) при $m = 2$ из § 3, а также см. необходимые условия (2.5) = (4.3) и (4.13) и согласованность с классами эквивалентности слабого порядка (2.6) и их интерпретации):

Теорема 5.3. *Отношение P из (5.2) представимо на $X = \{1,2,3\}^n$ при помощи функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ или, эквивалентно, функция φ согласована с семейством классов эквивалентности слабого порядка P, если и только если эта функция удовлетворяет трем аксиомам:*

(A.1) *если $x, y \in X$, $v_1(x) = v_1(y)$ и $v_2(x) = v_2(y)$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$;*

(A.2) *если $x, y \in X$ и $x \succ y$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$;*

(A.3) *если $x, y \in X$, $v_1(x)+1 = v_1(y) \neq n$, $v_1(x)+v_2(x) = n$ и $v_1(y)+v_3(y) = n$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$.*

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже после некоторого обсуждения. В терминах монотонных представителей аксиому (A.1), отражающую *попарную компенсируемость критериев*, можно записать в виде: если $x, y \in X$ и $x^* = y^*$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$, или в виде: $\varphi(x) = \varphi(x^*)$ для всех $x \in X$. Ее интерпретация такова: агрегированные значения альтернатив одинаковы, если эти альтернативы имеют равное число оценок 1 и оценок 2 (а тогда и оценок 3 в силу (5.1); см. также (4.3) и последующее обсуждение). Аксиома (A.2) выражает *Парето-доминирование*: если все оценки первой альтернативы не меньше соответствующих оценок второй альтернативы и хотя бы одна оценка больше, то первая альтернатива предпочтительнее с точки зрения "коллективного мнения" группы (свойств, агентов) N. Аксиома (A.3) выражает *пороговую некомпенсируемость*: если $x, y \in X$ и при некотором $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ монотонные представители x и y имеют вид

$$x^* = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-k-1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{k+1}) \quad \text{и} \quad y^* = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-k}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{k}), \tag{5.5}$$

то x предпочтительнее y (здесь положено $k = v_3(y)$, а $v_1(x), v_2(x)$ и $v_1(y)$ выражены через k из соотношений в аксиоме (A.3)). Таким образом, x предпочтительнее y, если после пренебрежения одинаковым количеством низких оценок 1 оставшийся от x вектор x' состоит только из средних оценок 2 и оставшийся от y вектор y' содержит хотя бы одну низкую оценку 1 (несмотря на другие возможно самые высокие оценки в y' и их количество); короче говоря, вектор x' из всех "двоек" предпочтительнее вектора y' хотя бы с одной "единицей".

Доказательство теоремы 5.3. *Необходимость.* Пусть P — φ-представимо и $x, y \in X$. Тогда (A.1) вытекает из леммы 2.2 (b): если $v_1(x) = v_1(y)$ и $v_2(x) = v_2(y)$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$. Чтобы установить (A.2), предположим, что $x \succ y$. Тогда по лемме 4.3 (b) $x^* \succ y^*$, а потому, из леммы 5.2 следует, что $[v_1(x) < v_1(y)]$ или $[v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y)]$ и, значит, xPy. Отсюда и предположения (2.1) находим, что $\varphi(x) > \varphi(y)$, что и требуется для (A.2). Если же выполнены предположения из (A.3), то $v_1(x) < v_1(y)$, поэтому xPy, откуда $\varphi(x) > \varphi(y)$ в силу (2.1).

Достаточность. Следует лишь показать, что из (A.1)–(A.3) вытекают условия (a)–(c) леммы 5.1.

Ясно, что (A.1) эквивалентно (a).

Из (A.1) и (A.2) следует (b): если $x, y \in X$ такие, что $v_1(x) = v_1(y)$ и $v_2(x) < v_2(y)$, то в силу леммы 5.2 $x^* \succ y^*$, откуда, благодаря (A.2), $\varphi(x^*) > \varphi(y^*)$, и остается заметить, что $\varphi(x) = \varphi(x^*)$ и $\varphi(y) = \varphi(y^*)$ в силу (A.1). (Импликация (b) $\Longrightarrow$ (A.2) не имеет места, т. к., например, векторы $x = (1,3,3) \succ (1,1,2) = y$ при $n = 3$ просто не удовлетворяет предположению в (b).)

Покажем, что из (A.1)–(A.3) вытекает (c) (очевидно, что (c)$\Longrightarrow$(A.3)). Заметим, что условие (A.3) имеет место и без ограничения $v_1(y) \neq n$: если $v_1(y) = n$, то $y = (\underbrace{1,\dots,1}_{n})$, поэтому $x \succ y$ для любого $x \in X, x \neq y$, откуда в силу (A.2) $\varphi(x) > \varphi(y)$. Пусть $x, y \in X$ такие, что $v_1(x) < v_1(y)$ и $v_1(x) + v_2(x) = n$. Рассмотрим два вспомогательных вектора $x', y' \in X$ такие, что

$$v_1(y') = v_1(y) \quad \text{и} \quad v_3(y') = v_2(y) + v_3(y),$$

$$v_1(x') = n - v_3(y') - 1 = v_1(y') - 1 \quad \text{и} \quad v_2(x') = v_3(y') + 1.$$

Поскольку $v_1(x) < v_1(y)$, то $v_1(x) \leqslant v_1(y) - 1 = v_1(y') - 1 = v_1(x')$, а так как $v_1(x) + v_2(x) = n$ и $v_1(x') + v_2(x') = n$, то $x^* \succcurlyeq x'^*$. Отсюда если $x^* \succ x'^*$, то в силу (A.2) $\varphi(x^*) > \varphi(x'^*)$, а если $x^* = x'^*$, то $\varphi(x^*) = \varphi(x'^*)$, поэтому, учитывая, что в силу (A.1) $\varphi(x) = \varphi(x^*)$ и $\varphi(x') = \varphi(x'^*)$, найдем, что $\varphi(x) \geqslant \varphi(x')$. Из условий $v_1(x')+1 = v_1(y')$, $v_1(x')+v_2(x') = n$, $v_1(y') + v_3(y') = n$ и аксиомы (A.3) следует, что $\varphi(x') > \varphi(y')$. Наконец, из соотношений $v_1(y') = v_1(y)$ и $v_3(y') \geqslant v_3(y)$ вытекает, что $y'^* \succcurlyeq y^*$, откуда, как и выше, $\varphi(y') \geqslant \varphi(y)$. Следовательно, $\varphi(x) \geqslant \varphi(x') > \varphi(y') \geqslant \varphi(y)$, чем и устанавливается свойство (c). □

5.2. Алгоритмический порядок на X^*. Примеры упорядочения альтернатив из X^* в сторону большего предпочтения при помощи порогового снизу отношения P при $m = 3$ приведены ниже. Здесь нижний индекс у вектора обозначает его порядковый номер, и чем больше этот номер, тем более предпочтительным является вектор (альтернатива). Пороговые предпочтения выделены *переходом* на новую строку массива; при непороговых переходах первый вектор следующей строки *не прижат* к левому краю (и как бы продолжает предшествующую строку). Число элементов в множестве $X^* = X^*_{n,3}$, выражающееся формулой (4.7) при $m = 3$, равно $(n+2)(n+1)/2$, т. е. $6, 10, 15, 21, 28, 36$ соответственно при $n = 2,3,4,5,6,7$.

<u>$n = 2$:</u>
$(1,1)_1$, $(1,2)_2$, $(1,3)_3$,
$(2,2)_4$, $(2,3)_5$, $(3,3)_6$.

<u>$n = 3$:</u>
$(1,1,1)_1$, $(1,1,2)_2$, $(1,1,3)_3$,
$(1,2,2)_4$, $(1,2,3)_5$, $(1,3,3)_6$,
$(2,2,2)_7$, $(2,2,3)_8$, $(2,3,3)_9$, $(3,3,3)_{10}$.

$\underline{n=4}$:
$(1,1,1,1)_1,\ (1,1,1,2)_2,\ (1,1,1,3)_3,$
$(1,1,2,2)_4,\ (1,1,2,3)_5,\ (1,1,3,3)_6,$
$(1,2,2,2)_7,\ (1,2,2,3)_8,\ (1,2,3,3)_9,\ (1,3,3,3)_{10},$
$(2,2,2,2)_{11},\ (2,2,2,3)_{12},\ (2,2,3,3)_{13},\ (2,3,3,3)_{14},\ (3,3,3,3)_{15}.$

$\underline{n=5}$:
$(1,1,1,1,1)_1,\ (1,1,1,1,2)_2,\ (1,1,1,1,3)_3,$
$(1,1,1,2,2)_4,\ (1,1,1,2,3)_5,\ (1,1,1,3,3)_6,$
$(1,1,2,2,2)_7,\ (1,1,2,2,3)_8,\ (1,1,2,3,3)_9,\ (1,1,3,3,3)_{10},$
$(1,2,2,2,2)_{11},\ (1,2,2,2,3)_{12},\ (1,2,2,3,3)_{13},\ (1,2,3,3,3)_{14},\ (1,3,3,3,3)_{15},$
$(2,2,2,2,2)_{16},\ (2,2,2,2,3)_{17},\ (2,2,2,3,3)_{18},\ (2,2,3,3,3)_{19},\ (2,3,3,3,3)_{20},$
$(3,3,3,3,3)_{21}.$

$\underline{n=6}$:
$(1,1,1,1,1,1)_1,\ (1,1,1,1,1,2)_2,\ (1,1,1,1,1,3)_3,$
$(1,1,1,1,2,2)_4,\ (1,1,1,1,2,3)_5,\ (1,1,1,1,3,3)_6,$
$(1,1,1,2,2,2)_7,\ (1,1,1,2,2,3)_8,\ (1,1,1,2,3,3)_9,\ (1,1,1,3,3,3)_{10},$
$(1,1,2,2,2,2)_{11},\ (1,1,2,2,2,3)_{12},\ (1,1,2,2,3,3)_{13},\ (1,1,2,3,3,3)_{14},$
$(1,1,3,3,3,3)_{15},$
$(1,2,2,2,2,2)_{16},\ (1,2,2,2,2,3)_{17},\ (1,2,2,2,3,3)_{18},\ (1,2,2,3,3,3)_{19},$
$(1,2,3,3,3,3)_{20},\ (1,3,3,3,3,3)_{21},$
$(2,2,2,2,2,2)_{22},\ (2,2,2,2,2,3)_{23},\ (2,2,2,2,3,3)_{24},\ (2,2,2,3,3,3)_{25},$
$(2,2,3,3,3,3)_{26},\ (2,3,3,3,3,3)_{27},\ (3,3,3,3,3,3)_{28}.$

$\underline{n=7}$:
$(1,1,1,1,1,1,1)_1,\ (1,1,1,1,1,1,2)_2,\ (1,1,1,1,1,1,3)_3,$
$(1,1,1,1,1,2,2)_4,\ (1,1,1,1,1,2,3)_5,\ (1,1,1,1,1,3,3)_6,$
$(1,1,1,1,2,2,2)_7,\ (1,1,1,1,2,2,3)_8,\ (1,1,1,1,2,3,3)_9,\ (1,1,1,1,3,3,3)_{10},$
$(1,1,1,2,2,2,2)_{11},\ (1,1,1,2,2,2,3)_{12},\ (1,1,1,2,2,3,3)_{13},\ (1,1,1,2,3,3,3)_{14},$
$(1,1,1,3,3,3,3)_{15},$
$(1,1,2,2,2,2,2)_{16},\ (1,1,2,2,2,2,3)_{17},\ (1,1,2,2,2,3,3)_{18},\ (1,1,2,2,3,3,3)_{19},$
$(1,1,2,3,3,3,3)_{20},\ (1,1,3,3,3,3,3)_{21},$
$(1,2,2,2,2,2,2)_{22},\ (1,2,2,2,2,2,3)_{23},\ (1,2,2,2,2,3,3)_{24},\ (1,2,2,2,3,3,3)_{25},$
$(1,2,2,3,3,3,3)_{26},\ (1,2,3,3,3,3,3)_{27},\ (1,3,3,3,3,3,3)_{28},$
$(2,2,2,2,2,2,2)_{29},\ (2,2,2,2,2,2,3)_{30},\ (2,2,2,2,2,3,3)_{31},\ (2,2,2,2,3,3,3)_{32},$
$(2,2,2,3,3,3,3)_{33},\ (2,2,3,3,3,3,3)_{34},\ (2,3,3,3,3,3,3)_{35},$
$(3,3,3,3,3,3,3)_{36}.$

Эти массивы векторов получены посредством следующего *алгоритма*, основанного на аксиомах (A.2) и (A.3) теоремы 5.3. Применение аксиомы (A.2) будем называть *естественным упорядочением*, а применение (A.3) — *пороговым переходом*; векторы x^* из (5.5) (и все эквивалентные или безразличные им) играют роль “*порогов*”, число которых, как и число всех пороговых переходов от y^* к x^* в (5.5), равно $n-1$.

Шаг 1. Выписываем наименее предпочтительный вектор: $(1,1,\dots,1,1,1)$.
Шаг 2. Естественное упорядочение: $(1,1,\dots,1,1,2)$, $(1,1,\dots,1,1,3)$.
Шаг 3. Пороговый переход при $k=1$: $(1,1,\dots,1,2,2)$.
Шаг 4. Естественное упорядочение: $(1,1,\dots,1,2,3)$, $(1,1,\dots,1,3,3)$.
Шаг 5. Пороговый переход при $k=2$: $(1,1,\dots,2,2,2)$.
....
Шаг $2n-2$. Естественное упорядочение: $(1,2,\dots,2,2,3), (1,2,\dots,2,3,3)$, $\dots$, $(1,3,\dots,3,3,3)$.
Шаг $2n-1$. Пороговый переход при $k=n-1$: $(2,2,\dots,2,2,2)$.
Шаг $2n$. Естественное упорядочение: $(2,2,\dots,2,2,3)$, $(2,2,\dots,2,3,3)$, $\dots$, $(3,3,\dots,3,3,3)$.

Иными словами, для последовательных значений $k=0,1,\dots,n$ при каждом k последовательно выписываем векторы вида

$$(\underbrace{1,\dots,1}_{p},\underbrace{2,\dots,2}_{q},\underbrace{3,\dots,3}_{n-p-q}),$$

соответствующие парам $(p,q)=(n-k,i)$ для $i=k,k-1,\dots,1,0$. Переобозначая здесь k через n_1 и $k-i=n_1-i$ — через n_2 для $i=n_1,n_1-1,\dots,1,0$, найдем, что $p=n-n_1$, $q=n_1-n_2$ и $n-p-q=n_2$, где $0\leqslant n_1\leqslant n$ и $0\leqslant n_2\leqslant n_1$, поэтому описанный выше алгоритм упорядочения X^* можно кратко выразить в форме (ср. с алгоритмом (3.9) при $m=2$):

$$x^*(n_1,n_2)=(\underbrace{1,\dots,1}_{n-n_1},\underbrace{2,\dots,2}_{n_1-n_2},\underbrace{3,\dots,3}_{n_2}),\ \ 0\leqslant n_1\leqslant n,\ 0\leqslant n_2\leqslant n_1. \tag{5.6}$$

Таким образом, ***алгоритмический порядок*** множества X^* (в сторону большего P-предпочтения) состоит в последовательном выписывании векторов вида $x^*(n_1,n_2)$ из (5.6), где n_1 последовательно принимает значения $0,1,\dots,n$, и если n_1 фиксировано, то n_2 последовательно принимает значения $0,1,\dots,n_1$. При этом для $1\leqslant k\leqslant n-1$ "пороговые" векторы x^* из (5.5) есть в точности векторы вида $x^*(k+1,0)$, а пороговый переход соответствует переходу от вектора $y^*=x^*(k,k)$ к вектору $x^*=x^*(k+1,0)$.

Для $x^*\in X^*$ обозначим через $\mathrm{alg}(x^*)$ ***порядковый номер*** (единственным образом определенный!) вектора x^* в только что описанном алгоритмическом упорядочении (5.6). Значение $\mathrm{alg}(x^*)$ будет найдено в следующем разделе (в § 6.6).

6. Явное представление для функции перечисления при $m=3$

6.1. Понятие функции перечисления. В предыдущем разделе не затрагивался вопрос о существовании функции предпочтения для P из

(5.2). Цель этого раздела — вывести явную формулу для *одной* из таких функций (вообще говоря, функции предпочтения определены неоднозначно), представляющую пороговое снизу отношение и играющую ту же роль, что и функция (3.6) при $m = 2$. Из теоремы 5.3 следует, что любая функция предпочтения φ для P согласована с семейством классов эквивалентности $\{X_\ell\}_{\ell=1}^{s}$ слабого порядка P. По лемме 4.4 (b) число s таких классов равно числу элементов в X^*:

$$s = |X^*| \overset{m=3}{=} C_{n+3-1}^{n} = C_{n+2}^{2} = \frac{(n+2)!}{2!\,n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \tag{6.1}$$

т. е.

$$s = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \overset{n=0}{1}\,,\ \overset{n=1}{3}\,,\ \overset{n=2}{6}\,,\ \overset{n=3}{10}\,,\ \overset{n=4}{15}\,,\ \overset{n=5}{21}\,,\ \overset{n=6}{28}\,,\ \overset{n=7}{36}\,,\ldots.$$

Естественно искать для P наиболее "экономную" функцию предпочтения $\Phi : X \to \mathbb{N}$ (как обычно, $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел), т. е. такую, что *если* $x \in X_\ell$ *при некотором* $\ell \in \{1, \ldots, s\}$, *то* $\Phi(x) = \ell$, и при этом достаточно определить ее только на множестве X^* альтернатив из X с неубывающими координатами (см. (4.5) и последующий текст). Эту "экономную" функцию предпочтения для P будем называть *функцией перечисления*.

Формулу для Φ можно записывать по-разному, и мы приведем несколько вариантов таких записей, что позволит лучше "почувствовать" саму функцию Φ, алгоритм (5.6) из § 5 и массивы векторов из § 5.2. Начнем с простых, скорее "эвристических", соображений, основанных на порядковых номерах этих векторов, которые приписаны в виде нижнего индекса справа.

6.2. Интуитивный вывод формулы для Φ. Итак, занумеруем элементы множества $X^* = X_{n,3}^*$ в соответствии с (5.2), т. е. построим функцию Φ на X^* так, чтобы ее значения последовательно изменялись от 1 до $s = (n+1)(n+2)/2$. Проделаем это в терминах суммы координат $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i$ вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{1, 2, 3\}^n$. Из § 5.2 видно, что если $v_1(x) = 0$ (т. е. начиная с n-мерного вектора $(2, \ldots, 2)$ и далее до $(3, \ldots, 3)$), то

$$\Phi(x) = \|x\| + c_n, \qquad \text{где} \ \ x \in X^* \ \ \text{и} \ \ v_1(x) = 0.$$

Для того, чтобы найти величину c_n, заметим, что в силу аксиомы (A.3) теоремы 5.3 в предпочтении P вектор $x^0 = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{n})$ следует сразу за вектором $y^0 = (1\,, \underbrace{3, \ldots, 3}_{n-1})$, поэтому

$$2n + c_n = \Phi(x^0) = \Phi(y^0) + 1,$$

где слагаемое справа $\Phi(y^0)$ принимает значения (при различных n)

$$\Phi(y^0) = \overset{n=2}{3}\,, \overset{n=3}{6}\,, \overset{n=4}{10}\,, \overset{n=5}{15}\,, \ldots = \frac{n(n+1)}{2},$$

откуда

$$c_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - 2n = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Таким образом,

$$\Phi(x) = \Bigl(\sum_{i=1}^{n} x_i\Bigr) + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \qquad \text{для} \quad x \in X^*, \quad v_1(x) = 0.$$

Заметим, что максимальное значение Φ на X^* равно

$$\Phi(\underbrace{3, \ldots, 3}_{n}) = 3n + \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = s.$$

Пусть теперь $0 < v_1(x) \neq n$ (если $v_1(x) = n$, то $x = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$, а потому, $\Phi(x) = 1$). Анализ массивов из § 5.2 показывает, что

при $n = 2$ и $v_1(x) = 1$:	$\Phi(x) = \|x\| - v_1(x)$;
при $n = 3$ и $v_1(x) = 2$ или 1:	$\Phi(x) = \|x\| - v_1(x)$;
при $n = 4$ и $v_1(x) = 3$ или 2:	$\Phi(x) = \|x\| - v_1(x)$;
при $n = 4$ и $v_1(x) = 1$:	$\Phi(x) = \|x\| - v_1(x) + 1$;
при $n = 5$ и $v_1(x) = 4$ или 3:	$\Phi(x) = \|x\| - v_1(x)$;
при $n = 5$ и $v_1(x) = 2$:	$\Phi(x) = \|x\| - v_1(x) + 1$;
при $n = 5$ и $v_1(x) = 1$:	$\Phi(x) = \|x\| - v_1(x) + 3$;
при $n = 6$ и $v_1(x) = 5$ или 4:	$\Phi(x) = \|x\| - v_1(x)$;
при $n = 6$ и $v_1(x) = 3$:	$\Phi(x) = \|x\| - v_1(x) + 1$;
при $n = 6$ и $v_1(x) = 2$:	$\Phi(x) = \|x\| - v_1(x) + 3$;
при $n = 6$ и $v_1(x) = 1$:	$\Phi(x) = \|x\| - v_1(x) + 6$.

Постоянные $0, 1, 3, 6, \ldots$, появляющиеся в правых частях равенств для $\Phi(x)$ — это снова элементы последовательности $(n+1)(n+2)/2$, но слегка смещенной, а именно, $(n - v_1(x) - 2)(n - v_1(x) - 1)/2$. Поскольку формула для $\Phi(x)$ должна быть согласованной для значений $v_1(x)=0$ и $v_1(x)>0$, получаем:

$$\Phi(x)=\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)-v_1(x)+\frac{(n-v_1(x)-2)(n-v_1(x)-1)}{2} \quad \forall\, x\in X^*. \tag{6.2}$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{(k-2)(k-1)}{2}=\frac{(k-1)k}{2}-(k-1) \quad \text{при} \quad k=n-v_1(x),$$

отсюда найдем, что

$$\Phi(x)=\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)+\frac{(n-v_1(x)-1)(n-v_1(x))}{2}-(n-1), \quad x\in X^*. \tag{6.3}$$

Оба выражения для $\Phi(x)$ дают элементы массивов из § 5.2 в правильной последовательности, однако работать с этими выражениями не вполне удобно, поэтому ниже будет выведено еще несколько (более удобных) вариантов записи для функции Φ.

Принимая во внимание равенства $\sum_{i=1}^{n} x_i = v_1(x)+2v_2(x)+3v_3(x)$ и (5.1), из (6.2) получим:

$$\Phi(x) = 2v_2(x)+3v_3(x)+\frac{(v_2(x)+v_3(x)-2)(v_2(x)+v_3(x)-1)}{2}=$$

$$=\frac{(v_2(x)+v_3(x)+1)(v_2(x)+v_3(x)+2)}{2}-v_2(x)= \tag{6.4}$$

$$=\frac{(n+1-v_1(x))(n+2-v_1(x))}{2}-v_2(x), \quad x\in X^*. \tag{6.5}$$

При помощи последних двух выражений легко видеть, что функция Φ удовлетворяет условиям (a)–(c) леммы 5.1. Условия (a) и (b) сразу вытекают из (5.1) и (6.5). Проверим (c). Так как $v_1(x)<v_1(y)$ и $v_1(x)+v_2(x)=n$, то в силу соотношения (5.1) для y имеем $n-v_2(x)=v_1(x)<v_1(y)=n-v_2(y)-v_3(y)$ или $v_2(x)\geqslant v_2(y)+v_3(y)+1$, поэтому используя равенство

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}-k=\frac{k(k+1)}{2}+1 \quad \text{при} \quad k=v_2(x) \tag{6.6}$$

и замечая, что $v_3(x)=0$, из (6.4) найдем, что

$$\Phi(x)=\frac{(v_2(x)+1)(v_2(x)+2)}{2}-v_2(x)=\frac{v_2(x)(v_2(x)+1)}{2}>$$

$$>\frac{(v_2(y)+v_3(y)+1)(v_2(y)+v_3(y)+2)}{2}-v_2(y)=\Phi(y).$$

Таким образом, для функции Φ из (6.2)–(6.5) имеет место свойство (5.3), и тем самым условие $v_1(x) + v_2(x) = n$ из леммы 5.1 (c) *облегчает* проверку этого свойства. Кроме того, значения функции Φ совпадают во всех размерностях n при вычеркивании из вектора “единицы”; так, векторы $(1,1,1)$ и $(1,1,1,1,1)$ имеют порядковый номер 1, а векторы $(3,3)$, $(1,3,3)$, $(1,1,3,3)$ и $(1,1,1,3,3)$ имеют порядковый номер 6. И вообще, в размерности n векторы $(\underbrace{1,\ldots,1}_{n}),\ldots,(1,\underbrace{3,\ldots,3}_{n-1})$ имеют те же порядковые номера от 1 до $n(n+1)/2$, что и векторы $(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}),\ldots,(\underbrace{3,\ldots,3}_{n-1})$ в размерности $n-1$, поскольку последние получаются из первых вычеркиванием первой единицы.

6.3. Дальнейшее преобразование формулы для Φ при $m = 3$. Получим еще один вариант записи формулы для функции Φ. В силу (6.5), (6.6) при $k = n - v_1(x)$ и соотношения (5.1) найдем, что

$$\Phi(x) = \frac{(n - v_1(x))(n - v_1(x) + 1)}{2} + (n - v_1(x) - v_2(x)) + 1 = \tag{6.7}$$

$$= C^2_{n-v_1(x)+1} + v_3(x) + 1 = \tag{6.8}$$

$$= C^2_{n-v_1(x)+1} + C^1_{n-v_1(x)-v_2(x)} + C^0_{n-v_1(x)-v_2(x)-v_3(x)-1}, \tag{6.9}$$

где $C^2_1 = C^1_0 = 0$ и последнее слагаемое в (6.9) в силу (5.1) равно $C^0_{-1} = 1$. Именно последние две формулы можно обобщить для любого числа оценок $m \geqslant 2$ (в связи с этим отметим, что формулу (3.6) из § 3 можно переписать в виде

$$\Phi(x) \overset{(3.6)}{=} C^1_{n-v_1(x)} + 1 = C^1_{n-v_1(x)} + C^0_{n-v_1(x)-v_2(x)-1}, \quad m = 2\ ). \tag{6.10}$$

Исходя из (6.7)–(6.9), нетрудно проверить выполнение аксиом (A.1)–(A.3) из теоремы 5.3. Действительно, если $v_1(x) = v_1(y)$ и $v_2(x) = v_2(y)$, то в силу (6.7) (или (6.9)) $\Phi(x) = \Phi(y)$, откуда вытекает (A.1). Для проверки (A.2) предположим, что $x \succ y$; тогда по лемме 4.3 (b) найдем, что $x^* \succ y^*$, откуда в силу леммы 5.2 и (6.9) следует, что $\Phi(x) > \Phi(y)$. Наконец, предположим, что выполнены условия (A.3) и положим $k = v_3(y) \neq 0$. Тогда $v_2(y) = 0$, $v_1(y) = n - k$, $v_3(x) = 0$, $v_2(x) = k + 1$, $v_1(x) = n - k - 1$, $n - v_1(y) + 1 = k + 1$ и $n - v_1(x) + 1 = k + 2$, потому, в силу (6.8)–(6.9):

$$\Phi(x) = C^2_{k+2} + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1 >$$

$$> \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = C^2_{k+1} + k + 1 = \Phi(y).$$

6.4. Строгий вывод формулы для функции перечисления. Прежде всего заметим, что, как показано в § 3, при $m = 2$ число классов эквивалентности слабого порядка P равно $C^1_{n+1} = n+1$ (см. также фомулу (4.7)) и функция перечисления Φ в этом случае имеет вид (3.6), т. е. $\Phi(x) = 1 + v_2(x)$ для $x \in X = \{1, 2\}^n$.

Пусть теперь $m = 3$. Тогда множество альтернатив имеет вид $X = \{1, 2, 3\}^n$ и число классов эквивалентности слабого порядка P из (5.2) равно значению (6.1). Будем писать $x \in X^*$ вместо $x^* \in X^*$ и положим $\overline{2} = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{n})$ и $\overline{3} = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{n})$. Рассмотрим массив векторов

$$X_0^* = \{x \in X^* : v_1(x) = 0\} = \{(\underbrace{2, \ldots, 2}_{n}), (\underbrace{2, \ldots, 2}_{n-1}, 3), \ldots, (\underbrace{3, \ldots, 3}_{n})\} =$$

$$= \{x \in X^* : \overline{2} \preccurlyeq x \preccurlyeq \overline{3}\}$$

и заметим, что $|X_0^*| = C^1_{n+1} = n + 1$. Пусть Φ — функция перечисления на X, а тогда и на X_0^*. Пусть $x, y \in X_0^*$, так что $v_1(x) = v_1(y) = 0$. Тогда из аксиом (A.1) и (A.2) теоремы 5.3 находим, что

$$\text{если } v_2(x) = v_2(y), \text{ то } \Phi(x) = \Phi(y), \text{ и} \tag{6.11}$$

$$\text{если } x \succ y, \text{ то } \Phi(x) > \Phi(y) \tag{6.12}$$

(для указанных x и y предположения аксиомы (A.3) не выполняются). Это означает, что если трактовать оценки “2” как “1”, а оценки “3” — как “2”, то для Φ на X_0^* выполнены условия (3.2) и (3.3) (как в случае $m = 2$), и тем самым упорядочение X_0^* является *естественным* в смысле § 5.2 (т. е. без пороговых переходов), а потому, может быть описано при помощи (слегка модифицированной) формулы (3.6):

$$\Phi(x) = c + v_3(x) \quad \text{для} \quad x \in X_0^*, \quad \text{где} \quad c = \Phi(\overline{2}).$$

Поскольку $\Phi(\overline{2}) = \Phi(\overline{3}) - |X_0^*| + 1$ и $\Phi(\overline{3}) = \max\limits_{x \in X^*} \Phi(x) = s = C^2_{n+2}$, то

$$c = \Phi(\overline{2}) = C^2_{n+2} - C^1_{n+1} + 1 = C^2_{n+1} + 1.$$

Следовательно,

$$\Phi(x) = C^2_{n+1} + v_3(x) + 1 \quad \text{для} \quad x \in X^*, \;\; v_1(x) = 0,$$

и тем самым функция пречисления Φ на X_0^* построена.

(Будем теперь двигаться снизу вверх по массиву векторов из 5.2 размерности n, повторяя только что описанную процедуру.) Рассмотрим последовательность векторов $x \in X^*$ при $v_1(x) = k$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$X_k^* = \{x \in X^* : v_1(x) = k\} = \{(\underbrace{1,\ldots,1}_{k}, \underbrace{2,\ldots,2}_{n-k}), (\underbrace{1,\ldots,1}_{k}, \underbrace{2,\ldots,2}_{n-k-1}, 3), \ldots,$$
$$\ldots, (\underbrace{1,\ldots,1}_{k}, \underbrace{3,\ldots,3}_{n-k})\} =$$
$$= \{x \in X^* : \overline{2}_k \preccurlyeq x \preccurlyeq \overline{3}_k\}, \tag{6.13}$$

где $\overline{2}_k = (\underbrace{1,\ldots,1}_{k}, \underbrace{2,\ldots,2}_{n-k})$ и $\overline{3}_k = (\underbrace{1,\ldots,1}_{k}, \underbrace{3,\ldots,3}_{n-k})$, и заметим, что эта последовательность содержит $|X_k^*| = C_{n-k+1}^1 = n-k+1$ элементов. Эти массивы векторов расположены в сторону большего P-предпочтения слева направо в виде $X_n^*, X_{n-1}^*, \ldots, X_1^*, X_0^*$. Функция перечисления Φ на X_k^* также удовлетворяет условиям (6.11) и (6.12), поэтому упорядочение массива X_k^* — естественное, и, значит, описывается (модифицированной) формулой (3.6):

$$\Phi(x) = c_k + v_3(x) \quad \text{для} \quad x \in X_k^*, \quad \text{где} \quad c_k = \Phi(\overline{2}_k). \tag{6.14}$$

Поскольку $\Phi(\overline{2}_k) = \Phi(\overline{3}) - (|X_0^*| + |X_1^*| + \cdots + |X_k^*|) + 1$, то

$$c_k = C_{n+2}^2 - \sum_{i=0}^{k} |X_i^*| + 1 = C_{n+2}^2 - \sum_{i=0}^{k} (n-i+1) + 1 =$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(2n+2-k)(k+1)}{2} + 1 =$$
$$= \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + 1 = C_{n-k+1}^2 + 1.$$

Таким образом, замечая, что $k = v_1(x)$, в силу (6.14) найдем, что

$$\Phi(x) = C_{n-v_1(x)+1}^2 + v_3(x) + 1 \quad \text{для всех} \quad x \in X^*,$$

а это и есть формула (6.8) (а потому, (6.7), (6.9) и (6.2)–(6.5)). Отметим, в частности, что из нее вытекает, что

$$\Phi(\overline{3}) = C_{n+1}^2 + n + 1 = C_{n+1}^2 + C_{n+1}^1 = C_{n+2}^2 = s = \max_{x \in X^*} \Phi(x)$$

и $\Phi(\underbrace{1,\ldots,1}_{n}) = C_1^2 + 0 + 1 = 1$.

Формулу (6.8) можно было бы вывести альтернативным (и эквивалентным) образом, начиная не "с конца", т. е. самого P-предпочтительного массива X_0^* и "начального" условия $\Phi(\overline{3}) = C_{n+2}^2$, а "с начала", т. е. с наименее предпочтительного массива $X_n^* = \{\overline{1}\}$, где $\overline{1} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$, и начального условия $\Phi(\overline{1}) = 1$.

6.5. Сравнение с компенсаторными моделями агрегирования. Пороговое снизу отношение (5.2) имеет существенно некомпенсаторную природу (низкие оценки нельзя компенсировать никаким количеством высоких оценок) и отличается от известных в литературе компенсаторных правил (например, [2, § 4.2]) таких, как

правило простого большинства (simple majority rule или SMR),
правило относительного большинства (plurality rule или PR),
правило голосования Бордá (Borda voting rule или BR).

Продемонстрируем это на примере задачи из теории голосования (более подробную информацию о задачах голосования можно почерпнуть из книги [2, Глава 4]). Пусть $X = \{x, y, z\}$ — множество из трех различных альтернатив, N — множество, состоящее из $n = 13$ избирателей (voters), и число оценок равно $m = 3$. Рассмотрим следующие предпочтения избирателей из N:

	3 voters	4 voters	6 voters	ранг
	x	x	y	3
	y	z	z	2
	z	y	x	1
т. е.	$(x \succ y \succ z)$	$(x \succ z \succ y)$	$(y \succ z \succ x)$	(оценка)

Это означает, что для трех избирателей вариант x предпочтительнее (или лучше), чем вариант y, и y предпочтительнее z (а тогда и x предпочтительнее z), или в краткой записи $x \succ y \succ z$ (знак $\succ$ используется в указанном смысле, отличном от § 1.3, только в этом разделе 6.5), и аналогичный смысл имеют предпочтения оставшихся избирателей. Задача состоит в построении бинарного отношения, обозначаемого ниже через $\gg$, выражающего коллективное мнение избирателей N относительно альтернатив X.

1) Согласно *правилу простого большинства*, пара альтернатив x, y из X входит в коллективное отношение $\gg$ или, кратко, $x \gg y$, если предпочтение вида $x \succ y$ встречается у простого большинства избирателей из N. Для указанного выше примера имеем: отношение $x \succ y$ встречается

у $3+4=7$ избирателей (т. е. у простого большинства из 13 избирателей), поэтому $x \gg y$. Далее, отношение $y \succ z$ встречается $3+6=9$ раз, а $x \succ z$ — $3+4=7$ раз, откуда $y \gg z$ и $x \gg z$. Среди оставшихся возможных вариантов $y \succ x$ (6 раз), $z \succ y$ (4 раза) и $z \succ x$ (6 раз) простого большинства не наблюдается. Таким образом, $x \gg y$, $y \gg z$ и $x \gg z$, поэтому результирующее (коллективное) предпочтение имеет вид $x \gg y \gg z$, а потому, наиболее предпочтительным вариантом с коллективной точки зрения (т. н. победителем) является альтернатива x.

2) В реальных голосованиях часто используется *правило относительного большинства*, согласно которому учитываются только самые предпочтительные альтернативы, а коллективным решением считается та альтернатива, которая набирает наибольшее число голосов избирателей из N. В применении к нашему примеру имеем: одна из наиболее предпочтительных альтернатив x набирает $3+4=7$ голосов, y набирает 6 голосов и z — ни одного голоса, поэтому победителем снова является альтернатива x.

Отметим, что аксиоматика для SMR и PR построена в [15], [17].

3) Прежде чем описать *правило голосования Борда*, проделаем следующее. Поставим каждой альтернативе $x \in X$ в соответствие некоторое число $r_i(x)$, называемое ее *рангом* в индивидуальном предпочтении избирателя $i \in N$, таким образом, что чем более предпочтительной для избирателя i является альтернатива, тем больше ее ранг. Так (см. пример выше), если предпочтения первого избирателя имеют вид $x \succ y \succ z$, то $r_1(x) = 3$, $r_1(y) = 2$ и $r_1(z) = 1$, т. е. наиболее предпочтительной альтернативе x присвается ранг 3, следующей по предпочтительности альтернативе y — ранг 2 и, наконец, наименее предпочтительной альтернативе z — ранг 1. Затем для каждой альтернативы $x \in X$ ее ранги суммируются по всем избирателям: $r(x) = \sum_{i \in N} r_i(x)$. Согласно правилу Борда, альтернатива x объявляется более предпочтительной, чем альтернатива y (кратко $x \gg y$), если $r(x) > r(y)$.

Для приведенного выше примера находим, что $r(x) = (3+4)\cdot 3+6\cdot 1 = 27$, $r(y) = 3\cdot 2+4\cdot 1+6\cdot 3 = 28$, $r(z) = 3\cdot 1+(4+6)\cdot 2 = 23$. Поскольку $r(y) > r(x) > r(z)$, то, согласно правилу Борда, $y \gg x \gg z$, а потому, победителем (наиболее предпочтительным с коллективной точки зрения вариантом) является альтернатива y.

Аксиоматика для правила Борда изложена в [18].

4) Используя ранги альтернатив из нашего примера и трактуя их как оценки (при $m = 3$), для альтернатив $x, y, z \in X$ получаем следующие

наборы векторных оценок:

$$x^* = (\underbrace{1,1,1,1,1,1}_{6},\ \underbrace{3,3,3,3,3,3,3}_{3+4}) \text{ или } v_1(x)=6,\ v_2(x)=0,\ v_3(x)=7,$$

$$y^* = (\underbrace{1,1,1,1}_{4},\ \underbrace{2,2,2}_{3},\ \underbrace{3,3,3,3,3,3}_{6}) \text{ или } v_1(y)=4,\ v_2(y)=3,\ v_3(y)=6,$$

$$z^* = (\underbrace{1,1,1}_{3},\ \underbrace{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2}_{4+6}) \text{ или } v_1(z)=3,\ v_2(z)=10,\ v_3(z)=0.$$

Поскольку $v_1(z)=3<v_1(y)=4<v_1(x)=6$, то $v(z)\angle_2 v(y)\angle_2 v(x)$, поэтому, согласно (5.2), $zPyPx$, т.е. победителем (с точки зрения совершенства и качества!) является альтернатива z.

Такой же вывод можно сделать, если воспользоваться функцией перечисления Φ из (6.4), которая в приведенном контексте играет роль *функции социального предпочтения*. Итак,

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \frac{(0+7+1)(0+7+2)}{2} - 0 = \frac{8\cdot 9}{2} = 36,\\
\Phi(y) &= \frac{(3+6+1)(3+6+2)}{2} - 3 = \frac{10\cdot 11}{2} - 3 = 52,\\
\Phi(z) &= \frac{(10+0+1)(10+0+2)}{2} - 10 = \frac{11\cdot 12}{2} - 10 = 56,
\end{aligned}$$

откуда $\Phi(z)>\Phi(y)>\Phi(x)$, а потому, $zPyPx$.

6.6. Вычисление порядкового номера $\mathrm{alg}(x^*)$ для $x^*\in X^*$. Напомним, что число $\mathrm{alg}(x^*)$ для монотонного представителя $x^*\in X^*$ было определено в конце § 5.2. В этом разделе будет показано, что

$$\mathrm{alg}(x^*) = \Phi(x) \quad \text{для всех} \quad x\in X, \tag{6.15}$$

где Φ есть функция перечисления при $m=3$ (например, (6.4)).

Если $x\in X$, то $x^*\in X^*$, а потому, $x^*=x^*(n_1,n_2)$, где по формуле (5.6)

$$x^*(n_1,n_2) = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-n_1},\ \underbrace{2,\ldots,2}_{n_1-n_2},\ \underbrace{3,\ldots,3}_{n_2})$$

для некоторых $0\leqslant n_1\leqslant n$ и $0\leqslant n_2\leqslant n_1$. Таким образом, следует вычислить значение $\mathrm{alg}(x^*(n_1,n_2))$ в зависимости от указанных номеров n_1 и n_2.

При фиксированном $0 \leqslant n_1 \leqslant n$ в силу (6.13) находим, что

$$X^*_{n-n_1} = \Big\{ (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-n_1}, \underbrace{2,\ldots,2}_{n_1-n_2}, \underbrace{3,\ldots,3}_{n_2}) : 0 \leqslant n_2 \leqslant n_1 \Big\},$$

причем $|X^*_{n-n_1}| = n - (n-n_1) + 1 = n_1 + 1$. Замечая, что $\mathrm{alg}(x^*(0,0)) = \mathrm{alg}(\overline{1}) = 1$ и что первый элемент массива $X^*_{n-n_1}$ есть вектор $x^*(n_1, 0)$, а также модифицируя формулу $\mathrm{alg}(x^*(n_1)) = \mathrm{alg}(x^*(0)) + n_1 = 1 + n_1$ при $m = 2$ из конца § 3 (трактуя "2" как "1", а "3" — как "2"), получим:

$$\mathrm{alg}(x^*(n_1, n_2)) = \mathrm{alg}(x^*(n_1, 0)) + n_2.$$

Для того, чтобы найти значение $\mathrm{alg}(x^*(n_1, 0))$, воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} \mathrm{alg}(x^*(n_1,0)) &= \mathrm{alg}(x^*(n_1-1,0)) + |X^*_{n-(n_1-1)}| = \\ &= \mathrm{alg}(x^*(n_1-1,0)) + n_1 \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant n_1 \leqslant n, \end{aligned}$$

которое означает, что порядковый номер первого вектора $x^*(n_1, 0)$ массива $X^*_{n-n_1}$ есть порядковый номер первого вектора $x^*(n_1-1, 0)$ "предыдущего" в алгоритмическом упорядочении массива $X^*_{n-(n_1-1)}$ плюс длина последнего $|X^*_{n-(n_1-1)}|$ (напомним, что порядок следования массивов $X^*_n = \{\overline{1}\}, X^*_{n-1}, \ldots, X^*_1, X^*_0$ соответствует расположению в сторону большего P-предпочтения, см. § 6.4). Следовательно,

$$\mathrm{alg}(x^*(n_1,0)) = \mathrm{alg}(x^*(0,0)) + 1 + 2 + \cdots + n_1 = 1 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 1 + C^2_{n_1+1},$$

откуда окончательно находим, что

$$\mathrm{alg}(x^*(n_1,n_2)) = C^2_{n_1+1} + n_2 + 1, \quad 0 \leqslant n_1 \leqslant n, \ \ 0 \leqslant n_2 \leqslant n_1. \tag{6.16}$$

С другой стороны, замечая, что для $x^* = x^*(n_1, n_2)$

$$v_1(x) = v_1(x^*) = n - n_1, \ \ v_2(x) = v_2(x^*) = n_1 - n_2 \ \text{ и } \ v_3(x) = v_3(x^*) = n_2,$$

подставляя эти значения в выражение (6.4) и используя равенство (6.6) при $k = n_1$, получим:

$$\Phi(x) = \frac{(n_1+1)(n_1+2)}{2} - (n_1 - n_2) = \frac{n_1(n_1+1)}{2} + 1 + n_2 = C^2_{n_1+1} + n_2 + 1.$$

Сравнивая последнее выражение с (6.16), приходим к равенству (6.15).

В силу равенства (6.15) приходим к важному выводу (см. (6.17) и (6.18) ниже). Для того, чтобы его сформулировать, заметим, что любой вектор $x^* \in X^*$ ***однозначно*** (ср. с леммой 4.2) записывается в виде (5.6), т. е. $x^* = x^*(n_1, n_2)$ для некоторых номеров $n_1 = n_1(x^*)$ и $n_2 = n_2(x^*)$, зависящих от x^* и таких, что $0 \leqslant n_1(x^*) \leqslant n$ и $0 \leqslant n_2(x^*) \leqslant n_1(x^*)$. Положим $\overline{n}(x^*) = (n_1(x^*), n_2(x^*))$. Поскольку $v_1(x^*) = n - n_1(x^*)$ и $v_2(x^*) = n_1(x^*) - n_2(x^*)$, то в силу (5.2) и определения лексикографического порядка

$$xPy \Longleftrightarrow x^*Py^* \Longleftrightarrow \overline{n}(y^*) \angle \overline{n}(x^*) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2 \tag{6.17}$$

и одновременно, благодаря теореме 5.3 и (6.15),

$$xPy \Longleftrightarrow \Phi(x) > \Phi(y) \Longleftrightarrow \mathrm{alg}(x^*) > \mathrm{alg}(y^*). \tag{6.18}$$

Такая же ситуация будет иметь место при любом числе оценок $m \geqslant 2$.

В конце § 5.2 отмечено, что в алгоритмическом упорядочении X^* пороговый переход — это переход от вектора $y^* = x^*(k, k)$ к вектору $x^* = x^*(k+1, 0)$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$, где x^* есть пороговый вектор. В силу (6.15) порядковые номера пороговых векторов вычисляются для $1 \leqslant k \leqslant n-1$ следующим образом:

$$\mathrm{alg}(x^*(k+1,0)) = \Phi(x^*(k+1,0)) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1 =$$
$$= \overset{k=1}{4}\,,\ \overset{k=2}{7}\,,\ \overset{k=3}{11}\,,\ \overset{k=4}{16}\,,\ \overset{k=5}{22}\,,\ \overset{k=6}{29}\,,\ \overset{k=7}{37}\,, \ldots.$$

Отметим, что вектор $y^* = x^*(k, k)$ непосредственно предшествует вектору $x^* = x^*(k+1, 0)$, т. к.

$$\mathrm{alg}(x^*(k,k)) = \Phi(x^*(k,k)) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2},\ \ 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

7. Пороговое агрегирование с четырьмя оценками

7.1. Аксиоматика функций предпочтения для P при $m = 4$. Прежде чем переходить к рассмотрению общего случая агрегирования с $m > 3$ оценками, разберем подробно случай $m = 4$. Это связано с тем, что в общем случае, начиная именно с $m = 4$, в аксиоматике функций предпочтения для порогового отношения P из § 2.1 и доказательствах соответствующих теорем появляются новые эффекты, которые не присутствуют при $m = 2$ и $m = 3$. Кроме того, разбор случая $m = 4$ еще раз покажет общность применяемого метода.

Как видно из § 3 (аксиома (3.3) Парето-доминирования), при $m = 2$ упорядочение множества X^*, где $X = \{1, 2\}^n$, происходит *естественным* образом, без пороговых переходов. В то же время в § 5.2 показано, что при $m = 3$ возникает новый эффект: упорядочение множества монотонных представителей X^* с $X = \{1, 2, 3\}^n$ происходит при помощи чередования естественного упорядочения, благодаря аксиоме Парето-доминирования (A.2) из теоремы 5.3, и пороговых переходов согласно аксиоме (A.3) из этой теоремы. Тем самым можно вполне резонно предположить (позже это будет установлено строго), что и при $m = 4$ сохраняется эта фундаментальная закономерность, т. е. упорядочение X^* при $X = \{1, 2, 3, 4\}^n$ происходит чередованием естественного упорядочения и *некоторых* пороговых переходов. На основе этого предположения попытаемся уже сейчас выявить пороговые векторы и пороговые переходы при $m = 4$.

Всюду в этом разделе, кроме леммы 7.5, число оценок есть $m = 4$, так что $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Соотношение (1.2) в этом случае принимает вид

$$v_1(x)+v_2(x)+v_3(x)+v_4(x) = n \quad \text{для всех} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in X, \tag{7.1}$$

а пороговое снизу отношение P из § 2.1 есть

$$P = \big\{(x, y) \in X \times X : [v_1(x) < v_1(y)] \vee [v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y)] \vee \\ \vee [v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) = v_2(y) \wedge v_3(x) < v_3(y)]\big\}. \tag{7.2}$$

Итак, упорядочивая X^* в соответствии с указанной закономерностью, получаем следующие таблицы векторов. Заметим, что при $m = 4$ число элементов в $X^*_{n,4}$ равно $(n + 3)(n + 2)(n + 1)/6$, т. е. $10, 20, 35, 56, 84$ соответственно при $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

<u>$n = 2$:</u>
$(1,1)_1$, $(1,2)_2$, $(1,3)_3$, $(1,4)_4$,
$(2,2)_5$, $(2,3)_6$, $(2,4)_7$,
$(3,3)_8$, $(3,4)_9$, $(4,4)_{10}$.

<u>$n = 3$:</u>
$(1,1,1)_1$, $(1,1,2)_2$, $(1,1,3)_3$, $(1,1,4)_4$,
$(1,2,2)_5$, $(1,2,3)_6$, $(1,2,4)_7$,
$(1,3,3)_8$, $(1,3,4)_9$, $(1,4,4)_{10}$,
$(2,2,2)_{11}$, $(2,2,3)_{12}$, $(2,2,4)_{13}$,
$(2,3,3)_{14}$, $(2,3,4)_{15}$, $(2,4,4)_{16}$,
$(3,3,3)_{17}$, $(3,3,4)_{18}$, $(3,4,4)_{19}$, $(4,4,4)_{20}$.

<u>$n = 4$:</u>
$(1,1,1,1)_1$, $(1,1,1,2)_2$, $(1,1,1,3)_3$, $(1,1,1,4)_4$,
$(1,1,2,2)_5$, $(1,1,2,3)_6$, $(1,1,2,4)_7$,

$(1,1,3,3)_8$, $(1,1,3,4)_9$, $(1,1,4,4)_{10}$,
$(1,2,2,2)_{11}$, $(1,2,2,3)_{12}$, $(1,2,2,4)_{13}$,
$(1,2,3,3)_{14}$, $(1,2,3,4)_{15}$, $(1,2,4,4)_{16}$,
$(1,3,3,3)_{17}$, $(1,3,3,4)_{18}$, $(1,3,4,4)_{19}$, $(1,4,4,4)_{20}$,
$(2,2,2,2)_{21}$, $(2,2,2,3)_{22}$, $(2,2,2,4)_{23}$,
$(2,2,3,3)_{24}$, $(2,2,3,4)_{25}$, $(2,2,4,4)_{26}$,
$(2,3,3,3)_{27}$, $(2,3,3,4)_{28}$, $(2,3,4,4)_{29}$, $(2,4,4,4)_{30}$,
$(3,3,3,3)_{31}$, $(3,3,3,4)_{32}$, $(3,3,4,4)_{33}$, $(3,4,4,4)_{34}$, $(4,4,4,4)_{35}$.

$\underline{n=5:}$
$(1,1,1,1,1)_1$, $(1,1,1,1,2)_2$, $(1,1,1,1,3)_3$, $(1,1,1,1,4)_4$,
$(1,1,1,2,2)_5$, $(1,1,1,2,3)_6$, $(1,1,1,2,4)_7$,
$(1,1,1,3,3)_8$, $(1,1,1,3,4)_9$, $(1,1,1,4,4)_{10}$,
$(1,1,2,2,2)_{11}$, $(1,1,2,2,3)_{12}$, $(1,1,2,2,4)_{13}$,
$(1,1,2,3,3)_{14}$, $(1,1,2,3,4)_{15}$, $(1,1,2,4,4)_{16}$,
$(1,1,3,3,3)_{17}$, $(1,1,3,3,4)_{18}$, $(1,1,3,4,4)_{19}$, $(1,1,4,4,4)_{20}$,
$(1,2,2,2,2)_{21}$, $(1,2,2,2,3)_{22}$, $(1,2,2,2,4)_{23}$,
$(1,2,2,3,3)_{24}$, $(1,2,2,3,4)_{25}$, $(1,2,2,4,4)_{26}$,
$(1,2,3,3,3)_{27}$, $(1,2,3,3,4)_{28}$, $(1,2,3,4,4)_{29}$, $(1,2,4,4,4)_{30}$,
$(1,3,3,3,3)_{31}$, $(1,3,3,3,4)_{32}$, $(1,3,3,4,4)_{33}$, $(1,3,4,4,4)_{34}$, $(1,4,4,4,4)_{35}$,
$(2,2,2,2,2)_{36}$, $(2,2,2,2,3)_{37}$, $(2,2,2,2,4)_{38}$,
$(2,2,2,3,3)_{39}$, $(2,2,2,3,4)_{40}$, $(2,2,2,4,4)_{41}$,
$(2,2,3,3,3)_{42}$, $(2,2,3,3,4)_{43}$, $(2,2,3,4,4)_{44}$, $(2,2,4,4,4)_{45}$,
$(2,3,3,3,3)_{46}$, $(2,3,3,3,4)_{47}$, $(2,3,3,4,4)_{48}$, $(2,3,4,4,4)_{49}$, $(2,4,4,4,4)_{50}$,
$(3,3,3,3,3)_{51}$, $(3,3,3,3,4)_{52}$, $(3,3,3,4,4)_{53}$, $(3,3,4,4,4)_{54}$, $(3,4,4,4,4)_{55}$,
$(4,4,4,4,4)_{56}$.

$\underline{n=6:}$
$(1,1,1,1,1,1)_1$, $(1,1,1,1,1,2)_2$, $(1,1,1,1,1,3)_3$, $(1,1,1,1,1,4)_4$,
$(1,1,1,1,2,2)_5$, $(1,1,1,1,2,3)_6$, $(1,1,1,1,2,4)_7$,
$(1,1,1,1,3,3)_8$, $(1,1,1,1,3,4)_9$, $(1,1,1,1,4,4)_{10}$,
$(1,1,1,2,2,2)_{11}$, $(1,1,1,2,2,3)_{12}$, $(1,1,1,2,2,4)_{13}$,
$(1,1,1,2,3,3)_{14}$, $(1,1,1,2,3,4)_{15}$, $(1,1,1,2,4,4)_{16}$,
$(1,1,1,3,3,3)_{17}$, $(1,1,1,3,3,4)_{18}$, $(1,1,1,3,4,4)_{19}$, $(1,1,1,4,4,4)_{20}$,
$(1,1,2,2,2,2)_{21}$, $(1,1,2,2,2,3)_{22}$, $(1,1,2,2,2,4)_{23}$,
$(1,1,2,2,3,3)_{24}$, $(1,1,2,2,3,4)_{25}$, $(1,1,2,2,4,4)_{26}$,
$(1,1,2,3,3,3)_{27}$, $(1,1,2,3,3,4)_{28}$, $(1,1,2,3,4,4)_{29}$, $(1,1,2,4,4,4)_{30}$,
$(1,1,3,3,3,3)_{31}$, $(1,1,3,3,3,4)_{32}$, $(1,1,3,3,4,4)_{33}$, $(1,1,3,4,4,4)_{34}$,
$(1,1,4,4,4,4)_{35}$,
$(1,2,2,2,2,2)_{36}$, $(1,2,2,2,2,3)_{37}$, $(1,2,2,2,2,4)_{38}$,
$(1,2,2,2,3,3)_{39}$, $(1,2,2,2,3,4)_{40}$, $(1,2,2,2,4,4)_{41}$,
$(1,2,2,3,3,3)_{42}$, $(1,2,2,3,3,4)_{43}$, $(1,2,2,3,4,4)_{44}$, $(1,2,2,4,4,4)_{45}$,
$(1,2,3,3,3,3)_{46}$, $(1,2,3,3,3,4)_{47}$, $(1,2,3,3,4,4)_{48}$, $(1,2,3,4,4,4)_{49}$,
$(1,2,4,4,4,4)_{50}$,

$(1,3,3,3,3,3)_{51}$, $(1,3,3,3,3,4)_{52}$, $(1,3,3,3,4,4)_{53}$, $(1,3,3,4,4,4)_{54}$,
$(1,3,4,4,4,4)_{55}$, $(1,4,4,4,4,4)_{56}$,
$(2,2,2,2,2,2)_{57}$, $(2,2,2,2,2,3)_{58}$, $(2,2,2,2,2,4)_{59}$,
$(2,2,2,2,3,3)_{60}$, $(2,2,2,2,3,4)_{61}$, $(2,2,2,2,4,4)_{62}$,
$(2,2,2,3,3,3)_{63}$, $(2,2,2,3,3,4)_{64}$, $(2,2,2,3,4,4)_{65}$, $(2,2,2,4,4,4)_{66}$,
$(2,2,3,3,3,3)_{67}$, $(2,2,3,3,3,4)_{68}$, $(2,2,3,3,4,4)_{69}$, $(2,2,3,4,4,4)_{70}$,
$(2,2,4,4,4,4)_{71}$,
$(2,3,3,3,3,3)_{72}$, $(2,3,3,3,3,4)_{73}$, $(2,3,3,3,4,4)_{74}$, $(2,3,3,4,4,4)_{75}$,
$(2,3,4,4,4,4)_{76}$, $(2,4,4,4,4,4)_{77}$,
$(3,3,3,3,3,3)_{78}$, $(3,3,3,3,3,4)_{79}$, $(3,3,3,3,4,4)_{80}$, $(3,3,3,4,4,4)_{81}$,
$(3,3,4,4,4,4)_{82}$, $(3,4,4,4,4,4)_{83}$, $(4,4,4,4,4,4)_{84}$.

Анализ этих массивов показывает, что появляются *два* вида “пороговых” векторов x^*, соответствующих переходу с одной строки на следующую: таким образом, $x^* P y^*$, а точнее, y^* предшествует x^* в предпочтении P, если

$$x^* = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-(k+1)}, \underbrace{2,\ldots,2}_{k+1}) \quad \text{и} \quad y^* = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-k}, \underbrace{4,\ldots,4}_{k}) \tag{7.3}$$

для всех $k = 1, \ldots, n-1$, или

$$x^* = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-(k_1+1)}, \underbrace{2,\ldots,2}_{k_1-k_2}, \underbrace{3,\ldots,3}_{k_2+1}) \quad \text{и} \tag{7.4}$$

$$y^* = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-(k_1+1)}, \underbrace{2,\ldots,2}_{k_1+1-k_2}, \underbrace{4,\ldots,4}_{k_2}) \tag{7.5}$$

для всех $1 \leqslant k_1 \leqslant n-1$ и $1 \leqslant k_2 \leqslant k_1$ (на точные значения пределов изменения индексов k_1 и k_2 можно пока не обращать внимания — они потребуются и будут обоснованы позже). Здесь важно заметить, что в (7.3) x^* предпочтительнее y^*, если после удаления одинакового количества “единиц” в x^* и y^* оставшийся от x^* вектор x' состоит только из одних “двоек” и в оставшемся от y^* векторе y' встречается хотя бы одна “единица” (коротко, урезанный вектор x' из *всех* “*двоек*” предпочтительнее урезанного вектора y' *хотя бы с одной* “*единицей*”). Аналогично, x^* предпочтительнее y^* в (7.4)–(7.5), если после удаления одинакового количества “единиц” и “двоек” из x^* и y^* оставшийся от x^* вектор x'' состоит из одних “троек” и в оставшемся от y^* векторе y'' встречается хотя бы одна “двойка” (коротко, вектор x'' из *всех* “*троек*” предпочтительнее вектора y'' *хотя бы одной* “*двойкой*”).

Для того, чтобы приводимые ниже в теореме 7.1 аксиомы (A.3) и (A.4) воспринимались более естественно, заметим, что для любой функции предпочтения φ для P значение $\varphi(x) > \varphi(y)$ для $x \in I[x^*]$ и $y \in I[y^*]$, если в случае векторов x^* и y^* из (7.3) выполнены соотношения:

$$v_1(x) < v_1(y), \quad v_1(x) + \underline{v_2(x)} = n \quad \text{и} \quad v_1(y) + \underline{v_4(y)} = n,$$

или в случае векторов x^* и y^* из (7.4)–(7.5) — соотношения:

$$v_1(x) = v_1(y), \quad v_2(x) < v_2(y), \quad v_1(x) + v_2(x) + \underline{v_3(x)} = n$$
$$\text{и} \quad v_1(y) + v_2(y) + \underline{v_4(x)} = n.$$

Основной результат этого раздела — следующий аналог теоремы 5.3.

Теорема 7.1. *Отношение P из* (7.2) *представимо на $X = \{1, 2, 3, 4\}^n$ при помощи функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ или, эквивалентно, функция φ согласована с семейством классов эквивалентности слабого порядка P тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in X$ функция φ удовлетворяет следующим четырем аксиомам*:

(A.1) *если $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) = v_2(y)$ и $v_3(x) = v_3(y)$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$;*

(A.2) *если $x \succ y$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$;*

(A.3) *если $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) + 1 = v_2(y) \neq n - v_1(y)$, $v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) = n$ и $v_1(y) + v_2(y) + v_4(y) = n$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$;*

(A.4) *если $v_1(x) + 1 = v_1(y) \neq n$, $v_1(x) + v_2(x) = n$ и $v_1(y) + v_4(y) = n$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется три леммы: лемма 7.2 (аналог леммы 5.1), лемма 7.3 (аналог утверждения (5.3)) и лемма 7.4 (обобщение леммы 5.2 на случай $m = 4$).

Лемма 7.2. *При $m = 4$ отношение* (7.2) *на множестве альтернатив $X = \{1, 2, 3, 4\}^n$ представимо при помощи функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ (в смысле* (2.1)) *тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in X$ функция φ удовлетворяет следующим условиям*:

(a) *если $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) = v_2(y)$ и $v_3(x) = v_3(y)$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$;*

(b) *если $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) = v_2(y)$ и $v_3(x) < v_3(y)$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$;*

(c) *если $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) < v_2(y)$ и $v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) = n$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$;*

(d) *если $v_1(x) < v_1(y)$ и $v_1(x) + v_2(x) = n$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$.*

В свою очередь для доказательства леммы 7.2 нам понадобится

Лемма 7.3. *Если функция* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* (a)–(d) *леммы* 7.2, *то для всех* $x, y \in X$ *она также удовлетворяет условиям*:

(α) *если* $v_1(x) = v_1(y)$ *и* $v_2(x) < v_2(y)$, *то* $\varphi(x) > \varphi(y)$;

(β) *если* $v_1(x) < v_1(y)$, *то* $\varphi(x) > \varphi(y)$;

(γ) *если* $\varphi(x) = \varphi(y)$, *то* $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) = v_2(y)$ *и* $v_3(x) = v_3(y)$.

Доказательство леммы 7.3. (α) Так как $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) < v_2(y)$ и

$$v_1(y) + v_2(y) \leqslant v_1(y) + v_2(y) + v_3(y) + v_4(y) = n,$$

то $v_1(x) + v_2(x) < v_1(y) + v_2(y) \leqslant n$, т. е. $v_1(x) + v_2(x) < n$. Рассмотрим вектор $z \in X$ со свойствами:

$$v_1(z) = v_1(x) = v_1(y), \quad v_2(z) = v_2(x) \quad \text{и} \quad v_3(z) = n - v_1(x) - v_2(x).$$

Вначале сравним $\varphi(x)$ и $\varphi(z)$. Из неравенства $v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) \leqslant n$ следует, что $v_3(x) \leqslant n - v_1(x) - v_2(x) = v_3(z)$, т. е.

$$v_1(x) = v_1(z), \quad v_2(x) = v_2(z) \quad \text{и} \quad v_3(x) \leqslant v_3(z).$$

Если $v_3(x) = v_3(z)$, то в силу (a) (условия (a), (b), (c) и (d) берутся из леммы 7.2) находим, что $\varphi(x) = \varphi(z)$. Если же $v_3(x) < v_3(z)$, то из (b) следует, что $\varphi(x) > \varphi(z)$. Итак, в любом случае $\varphi(x) \geqslant \varphi(z)$. Теперь сравним $\varphi(z)$ и $\varphi(y)$. Поскольку

$$v_1(z) = v_1(y), \quad v_2(z) = v_2(x) < v_2(y) \quad \text{и} \quad v_1(z) + v_2(z) + v_3(z) = n,$$

то применяя условие (c), в котором x заменен на z, найдем, что $\varphi(z) > \varphi(y)$. Следовательно, $\varphi(x) \geqslant \varphi(z) > \varphi(y)$, что и требовалось.

(β) Здесь доказательство похоже на доказательство утверждения (5.3) (с. 24), однако *не вполне* с ним совпадает: отличие состоит в том, что существенно используется предыдущий пункт (α), поэтому, чтобы увидеть это, доказательство воспроизводится полностью.

Поскольку $v_1(x) < v_1(y)$ и $v_1(y) \leqslant n$, то $v_1(x) < n$. Рассмотрим вектор $z \in X$ такой, что

$$v_1(z) = v_1(x) \quad \text{и} \quad v_2(z) = n - v_1(x).$$

Из неравенства $v_1(x) + v_2(x) \leqslant n$ вытекает, что $v_2(x) \leqslant n - v_1(x) = v_2(z)$. Таким образом, $v_1(x) = v_1(z)$ и $v_2(x) \leqslant v_2(z)$. Если $v_2(x) = v_2(z)$, то $v_1(x) + v_2(x) = v_1(z) + v_2(z) = n$, откуда $v_3(x) = v_3(z) = 0$ и, значит, в силу (a) $\varphi(x) = \varphi(z)$. Если же $v_2(x) < v_2(z)$, то *в силу пункта* (α) будет $\varphi(x) > \varphi(z)$. Итак, в обоих случаях $\varphi(x) \geqslant \varphi(z)$. Наконец, замечая, что

$$v_1(z) = v_1(x) < v_1(y) \quad \text{и} \quad v_1(z) + v_2(z) = n,$$

и привлекая условие (d), в котором x заменено на z, найдем, что $\varphi(z) > \varphi(y)$. Таким образом, $\varphi(x) \geqslant \varphi(z) > \varphi(y)$, и (b) следует.

(γ) Равенство $v_1(x) = v_1(y)$ вытекает от противного из пункта (β), $v_2(x) = v_2(y)$ — от противного из пункта (α), и $v_3(x) = v_3(y)$ — от противного из пункта (b) леммы 7.2. □

Доказательство леммы 7.2. *Необходимость.* Если P представимо при помощи функции φ, т. е. имеет место соотношение (2.1), то пункт (a) вытекает из леммы 2.2 (b), где

$$v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x)), \qquad x \in X, \tag{7.6}$$

а пункты (b), (c) и (d) — из определения P в (7.2).

Достаточность. Покажем, что если φ удовлетворяет условиям (a)–(d), то имеет место соотношение (2.1). Пусть $x, y \in X$. Импликация

$$(xPy) \Longrightarrow (\varphi(x) > \varphi(y)) \tag{7.7}$$

вытекает непосредственно из (7.2), леммы 7.3 (β), (α) и предположения (b) леммы 7.2. Для того, чтобы установить обратную импликацию, воспользуемся леммой 2.1 (P.2), (7.6), (7.7) и предположением (a) леммы 7.2:

$$\begin{aligned}\neg(xPy) \iff & (yPx) \vee (v(y) = v(x)) \Longrightarrow (\varphi(y) > \varphi(x)) \vee (\varphi(y) = \varphi(x)) \iff \\ \iff & (\varphi(y) \geqslant \varphi(x)),\end{aligned}$$

откуда найдем, что

$$(\varphi(x) > \varphi(y)) \iff \neg(\varphi(y) \geqslant \varphi(x)) \Longrightarrow \neg(\neg(xPy)) \iff (xPy).$$

Лемма 7.2 полностью доказана. □

Логическая интерпретация лемм 7.2 и 7.3 в точности такая же, как и леммы 5.1 и утверждения (5.3) (см. с. 25).

Лемма 7.4. *При* $m = 4$ *для любых* $x, y \in X = \{1, 2, 3, 4\}^n$ *имеем*:

$$\begin{aligned}(x^* \succ y^*) \iff & \big[v_1(x) < v_1(y) \wedge v_1(x) + v_2(x) \leqslant v_1(y) + v_2(y) \wedge \\ & \quad \wedge v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) \leqslant v_1(y) + v_2(y) + v_3(y)\big] \vee \\ & \vee \big[v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y) \wedge \\ & \quad \wedge v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) \leqslant v_1(y) + v_2(y) + v_3(y)\big] \vee \\ & \vee \big[v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) = v_2(y) \wedge v_3(x) < v_3(y)\big],\end{aligned}$$

где x^* и y^* — монотонные представители соответственно x и y.

Эта лемма будет доказана в самом общем случае (при любом $m \geqslant 2$) как лемма 7.5 после приводимого ниже доказательства теоремы 7.1.

Доказательство теоремы 7.1. *Необходимость.* Пусть отношение P является φ-представимым и $x, y \in X$. Тогда аксиома (A.1) вытекает из леммы 2.2 (b): если в обозначении (7.6) $v(x) = v(y)$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$. Для того, чтобы получить аксиому (A.2), предположим, что $x \succ y$. Тогда $x^* \succ y^*$ по лемме 4.3 (b), откуда в силу леммы 7.4 следует, что $v_1(x) < v_1(y)$ или $v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y)$ или $v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) = v_2(y) \wedge v_3(x) < v_3(y)$, т. е. xPy в силу (7.2). Это вместе с предположением (2.1) дает неравенство $\varphi(x) > \varphi(y)$ и тем самым устанавливает (A.2). Если выполнены предположения аксиомы (A.3), то $v_1(x) = v_1(y) \wedge v_2(x) < v_2(y)$, а если выполнены предположения аксиомы (A.4), то $v_1(x) < v_1(y)$, так что xPy в обоих случаях. Снова применяя (2.1), получим неравенство $\varphi(x) > \varphi(y)$, чем и установим (A.3) и (A.4).

Достаточность. Если будет проверено, что из аксиом (A.1)–(A.4) вытекают условия (a)–(d) леммы 7.2, то из леммы 7.2 будет следовать искомая φ-представимость отношения P.

Ясно, что условия (A.1) и (a) совпадают.

Покажем, что из (A.1) и (A.2) вытекает (b). Для этого предположим, что $x, y \in X$ такие, что $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) = v_2(y)$ и $v_3(x) < v_3(y)$. Тогда по лемме 7.4 $x^* \succ y^*$, что вместе с (A.2) дает неравенство $\varphi(x^*) > \varphi(y^*)$. Поскольку $v_j(x) = v_j(x^*)$ и $v_j(y) = v_j(y^*)$ для $j = 1, 2, 3$, то, благодаря (A.1), $\varphi(x) = \varphi(x^*)$ и $\varphi(y) = \varphi(y^*)$, и, следовательно, $\varphi(x) > \varphi(y)$.

Проверим, что из (A.1), (A.2) и (A.3) следует (c).(Доказательство этого в идейном плане повторяет проверку свойства (A.1)$\wedge$(A.2)$\wedge$(A.3)$\Longrightarrow$(c) из доказательства теоремы 5.3 и является его модификацией и обобщением.)

Во-первых, заметим, что аксиома (A.3) справедлива и без ограничения $v_2(y) \neq n - v_1(y)$. Действительно, если $v_2(y) = n - v_1(y)$, то

$$y^* = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{v_1(y)}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n - v_1(y)}) \quad \text{и} \quad x^* = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{v_1(y)}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n - v_1(y) - 1}, \underbrace{3}_{1}),$$

поэтому $x^* \succ y^*$, откуда, как и выше, $\varphi(x^*) > \varphi(y^*)$ в силу аксиомы (A.2) и $\varphi(x) = \varphi(x^*) > \varphi(y^*) = \varphi(y)$ в силу аксиомы (A.1). Поскольку последние рассуждения повторяются (уже дважды в этом доказательстве), в дальнейшем будем называть их *стандартными.*

Предположим, что $x, y \in X$ такие, что $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) < v_2(y)$ и $v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) = n$. Требуется показать, что $\varphi(x) > \varphi(y)$. Рассмотрим два вспомогательных вектора $x', y' \in X$ такие, что

$$v_1(y') = v_1(y), \quad v_2(y') = v_2(y) \quad \text{и} \quad v_4(y') = v_3(y) + v_4(y),$$

$$v_1(x') = v_1(y'), \quad v_2(x') = v_2(y') - 1 = n - v_1(y') - v_4(y') - 1$$
$$\text{и} \quad v_3(x') = v_4(y') + 1.$$

Так как $v_1(x) = v_1(y) = v_1(x')$ и $v_2(x) \leqslant v_2(y) - 1 = v_2(y') - 1 = v_2(x')$, а из равенств $v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) = n$ и $v_1(x') + v_2(x') + v_3(x') = n$ следует, что $v_3(x) \geqslant v_3(x')$ и $v_4(x) = v_4(x') = 0$, то для монотонных представителей x и x' имеем $x^* \succcurlyeq x'^*$. Отсюда при помощи *стандартных* рассуждений и аксиом (A.1) и (A.2) получаем, что $\varphi(x) = \varphi(x^*) \geqslant \varphi(x'^*) = \varphi(x')$. Замечая далее, что $v_1(x') = v_1(y')$, $v_2(x') + 1 = v_2(y')$, $v_1(x') + v_2(x') + v_3(x') = n$ и $v_1(y') + v_2(y') + v_4(y') = n$, в силу аксиомы (A.3) найдем, что $\varphi(x') > \varphi(y')$. Наконец, поскольку $v_1(y') = v_1(y)$, $v_2(y') = v_2(y)$ и $v_4(y') \geqslant v_4(y)$, то $y'^* \succcurlyeq y^*$, из чего *стандартным* образом следует, что $\varphi(y') \geqslant \varphi(y)$. Таким образом, $\varphi(x) \geqslant \varphi(x') > \varphi(y') \geqslant \varphi(y)$, и свойство (c) леммы 7.2 следует.

Остается показать, что если выполнены аксиомы (A.1), (A.2) и (A.4), то имеет место и (d). Вначале заметим, что аксиома (A.4) справедлива и без ограничения $v_1(y) \neq n$, поскольку в противном случае $y = \overline{1} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$, а потому, $x \succ y$, и, значит, $\varphi(x) > \varphi(y)$ в силу аксиомы (A.2). Пусть $x, y \in X$ такие, что $v_1(x) < v_1(y)$ и $v_1(x) + v_2(x) = n$. Требуется установить неравенство $\varphi(x) > \varphi(y)$.

Рассмотрим два вспомогательных вектора $x', y' \in X$ со свойствами:

$$v_1(y') = v_1(y) \quad \text{и} \quad v_4(y') = v_2(y) + v_3(y) + v_4(y),$$

$$v_1(x') = v_1(y') - 1 = n - v_4(y') - 1 \quad \text{и} \quad v_2(x') = v_4(y') + 1.$$

Так как $v_1(x) \leqslant v_1(y) - 1 = v_1(y') - 1 = v_1(x')$, то из равенств $v_1(x) + v_2(x) = n$ и $v_1(x') + v_2(x') = n$ вытекает, что $x^* \succcurlyeq x'^*$, откуда *стандартным* способом получаем, что $\varphi(x) \geqslant \varphi(x')$. Далее, имеем: $v_1(x') + 1 = v_1(y')$, $v_1(x') + v_2(x') = n$ и $v_1(y') + v_4(y') = n$, поэтому $\varphi(x') > \varphi(y')$ в силу (A.4), а т. к. $v_1(y') = v_1(y)$ и $v_1(y') + v_4(y') = n$, то $y'^* \succcurlyeq y^*$, откуда *стандартным* образом заключаем, что $\varphi(y') \geqslant \varphi(y)$. Итак, $\varphi(x) \geqslant \varphi(x') > \varphi(y') \geqslant \varphi(y)$, что и требовалось.

Теорема 7.1 полностью доказана. □

Приведем теперь общее описание частичных порядков

$$(x \succcurlyeq y) \Longleftrightarrow \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \geqslant y_i \right) \quad \text{и} \quad (x \succ y) \Longleftrightarrow \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \geqslant y_i \right) \wedge \left(\bigvee_{k=1}^{n} x_k > y_k \right)$$

для монотонных представителей x^* и y^* в терминах $v_j(x)$, $j = 1, \ldots, m-1$.

Лемма 7.5. *При любом $m \geqslant 2$ для всех $x, y \in X = \{1, 2, \ldots, m\}^n$ имеем:*

(a) $x^* \succcurlyeq y^*$ *тогда и только тогда, когда* $\sum_{j=1}^{k} v_j(x) \leqslant \sum_{j=1}^{k} v_j(y)$ *для всех* $1 \leqslant k \leqslant m-1$ *(где заметим, что* $\sum_{j=1}^{m-1} v_j(x) \leqslant \sum_{j=1}^{m-1} v_j(y) \iff v_m(x) \geqslant v_m(y)$ *в силу* (1.2));

(b) $x^* \succ y^*$ *тогда и только тогда, когда найдется* $1 \leqslant k \leqslant m-1$ *такое, что* $v_j(x) = v_j(y)$ *для всех* $1 \leqslant j \leqslant k-1$ *(это условие отсутствует при* $k = 1$*),* $v_k(x) < v_k(y)$ *и* $\sum_{j=1}^{p} v_j(x) \leqslant \sum_{j=1}^{p} v_j(y)$ *для всех* $k+1 \leqslant p \leqslant m-1$ *(где последнее условие отсутствует при* $k = m-1$*).*

Отметим, что лемма 5.2 вытекает из леммы 7.5 (b) при $m = 3$ и замечания в лемме 7.5 (a), а лемма 7.4 — из леммы 7.5 (b) при $m = 4$.

Доказательство леммы 7.5. (a) Вначале сделаем несколько замечаний относительно монотонных представителей x^* векторов $x \in X$. Напомним, что $v_j(x^*) = v_j(x)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m$. Далее, из вида вектора x^* в (4.4) и свойства $x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \ldots \leqslant x_n^*$ находим, что

$$
\begin{aligned}
x_i^* = 1 &\iff 1 \leqslant i \leqslant v_1(x), \\
x_i^* = 2 &\iff v_1(x) + 1 \leqslant i \leqslant v_1(x) + v_2(x), \\
x_i^* = 3 &\iff v_1(x) + v_2(x) + 1 \leqslant i \leqslant v_1(x) + v_2(x) + v_3(x),
\end{aligned}
$$

и в общем случае для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant k \leqslant m$ имеем:

$$
x_i^* = k \iff \sum_{j=1}^{k-1} v_j(x) + 1 \leqslant i \leqslant \sum_{j=1}^{k} v_j(x), \tag{7.8}
$$

или, более точно,

$$
x_i^* \geqslant k \iff i \geqslant \sum_{j=1}^{k-1} v_j(x) + 1, \quad \text{и} \tag{7.9}
$$

$$
x_i^* \leqslant k \iff i \leqslant \sum_{j=1}^{k} v_j(x), \tag{7.10}
$$

где, как обычно, пустая сумма $\sum_{j=1}^{0}(\ldots)$ по определению равна нулю.

Необходимость. Проведем рассуждения от противного. Если сумма $\sum_{j=1}^{k} v_j(x)$ больше суммы $\sum_{j=1}^{k} v_j(y)$ при некотором $1 \leqslant k \leqslant m-2$, то полагая $i = \sum_{j=1}^{k} v_j(x)$, в силу (7.8) получим, что $x_i^* = k$, а из неравенства $i \geqslant \sum_{j=1}^{k} v_j(y) + 1$ и (7.9) найдем, что $y_i^* \geqslant k+1$, откуда $x_i^* < y_i^*$. Если же $\sum_{j=1}^{m-1} v_j(x) > \sum_{j=1}^{m-1} v_j(y)$, то полагая $i = \sum_{j=1}^{m-1} v_j(y) + 1$, в силу (7.8) найдем, что $y_i^* = m$, а из неравенства $\sum_{j=1}^{m-1} v_j(x) \geqslant i$ и (7.10) получим, что $x_i^* \leqslant m-1$, т.е. $x_i^* < y_i^*$. В обоих случаях получаем противоречие с условием $x^* \succcurlyeq y^*$.

Достаточность. Зафиксируем произвольный номер $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда при некотором вполне *однозначно* определенном номере $1 \leqslant k \leqslant m$ выполняются неравенства $\sum_{j=1}^{k-1} v_j(x) + 1 \leqslant i \leqslant \sum_{j=1}^{k} v_j(x)$, а потому, в силу (7.8) $x_i^* = k$. Если $k = m$, то $x_i^* = m \geqslant y_i^*$. Если же $1 \leqslant k \leqslant m-1$, то по условию $\sum_{j=1}^{k} v_j(x) \leqslant \sum_{j=1}^{k} v_j(y)$, откуда $i \leqslant \sum_{j=1}^{k} v_j(y)$, а потому, в силу (7.10) $y_i^* \leqslant k = x_i^*$. Следовательно, $x_i^* \geqslant y_i^*$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, т.е. $x^* \succcurlyeq y^*$.

(b) *Достаточность.* Из предположений вытекает,что $\sum_{j=1}^{p} v_j(x) = \sum_{j=1}^{p} v_j(y)$ для всех $1 \leqslant p \leqslant k-1$, $\sum_{j=1}^{k} v_j(x) < \sum_{j=1}^{k} v_j(y)$ и $\sum_{j=1}^{p} v_j(x) \leqslant \sum_{j=1}^{p} v_j(y)$ для всех $k+1 \leqslant p \leqslant m-1$. Отсюда по лемме 7.5 (a) $x^* \succcurlyeq y^*$. Если бы $x^* = y^*$, то $v_j(x) = v_j(y)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m$, что противоречит условию $v_k(x) < v_k(y)$. Следовательно $x^* \succ y^*$.

Необходимость. Предположим, что $x^* \succ y^*$. Тогда $x^* \succcurlyeq y^*$, а потому, по лемме 7.5 (a) имеем:

$$\sum_{j=1}^{p} v_j(x) \leqslant \sum_{j=1}^{p} v_j(y) \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant p \leqslant m-1. \tag{7.11}$$

Далее, т.к. $x^* \succ y^*$, то $x^* \neq y^*$, откуда в обозначении (2.2) найдем, что $v(x) \neq v(y)$, и, следовательно, корректно определен номер

$$k = \min\{1 \leqslant j \leqslant m-1 : v_j(x) \neq v_j(y)\}.$$

Если $k = 1$, то $v_1(x) \neq v_1(y)$, а из (7.11) при $p = 1$ вытекает, что $v_1(x) \leqslant v_1(y)$. Таким образом, $v_1(x) < v_1(y)$ и неравенства (7.11) справедливы для всех $k+1 = 2 \leqslant p \leqslant m-1$, что и утверждается в этом случае. Если $2 \leqslant k \leqslant m-2$, то из определения номера k находим, что $v_j(x) = v_j(y)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant k-1$ и $v_k(x) \neq v_k(y)$. В силу (7.11) при $p = k$

$$\sum_{j=1}^{k-1} v_j(x) + v_k(x) \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} v_j(y) + v_k(y),$$

откуда $v_k(x) \leqslant v_k(y)$. Следовательно, $v_k(x) < v_k(y)$ и неравенства (7.11) сохраняются для всех $k+1 \leqslant p \leqslant m-1$, что и требовалось показать. Наконец, если $k = m-1$, то в силу определения числа k имеем $v_j(x) = v_j(y)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m-2 = k-1$ и $v_{m-1}(x) \neq v_{m-1}(y)$. Из (7.11) при $p = m-1$ тогда вытекает, что $v_{m-1}(x) \leqslant v_{m-1}(y)$, а, значит, $v_{m-1}(x) < v_{m-1}(y)$. Последнее рассуждение завершает доказательство леммы 7.5. $\square$

Из лемм 4.3 (b) и 7.5 (b) можно снова получить утверждение (4.12): если $x, y \in X$, то $(x \succ y) \Longrightarrow (x^* \succ y^*) \Longrightarrow (xPy)$.

7.2. Алгоритмическое упорядочение X^* при $m = 4$.

7.2.1. Вначале покажем, что пороговые векторы x^* в рассматриваемом случае имеют вид, представленный в (7.3) и (7.4).

В аксиоме (A.4) теоремы 7.1 положим $k = v_4(y)$. Т.к. $n \neq v_1(y) \geqslant 1$ и $v_1(y) + v_4(y) = n$, то $1 \leqslant k \leqslant n-1$, а из равенств в (A.4) находим, что $v_1(y) = n - k$, $v_2(y) = v_3(y) = 0$, $v_4(y) = k$, $v_1(x) = v_1(y) - 1 = n - (k+1)$, $v_2(x) = n - v_1(x) = k+1$ и $v_3(x) = v_4(x) = 0$, откуда вытекают представления x^* и y^* в (7.3).

Теперь в аксиоме (A.3) теоремы 7.1 положим

$$k_1 = (n-1) - v_1(x) = (n-1) - v_1(y) \quad \text{и} \quad k_2 = v_4(y). \tag{7.12}$$

Так как $v_1(x) \geqslant 0$, то $k_1 \neq n$, а т. к.

$$1 \leqslant v_2(y) \neq n - v_1(y) = n - [(n-1) - k_1] = k_1 + 1$$

и $v_2(y) + v_4(y) = n - v_1(y) = k_1 + 1$, то, $k_1 \neq 0$. Следовательно, $1 \leqslant k_1 \leqslant n-1$. Если теперь k_1 зафиксировано, то $v_1(y) = (n-1) - k_1$ первых мест (возможно ни одного) в векторе y^* уже занято "единицами", поэтому $0 \leqslant k_2 = v_4(y) \leqslant n - [(n-1) - k_1] = k_1 + 1$. Если $k_2 = 0$, то

$$n = v_1(y) + v_2(y) + k_2 = (n-1) - k_1 + v_2(y),$$

откуда $v_2(y) = k_1 + 1$, что, как показано выше, невозможно. Значит, $k_2 \neq 0$. Если $k_2 = k_1 + 1$, то

$$n = v_1(y) + v_2(y) + k_2 = (n-1) - k_1 + v_2(y) + k_1 + 1 = n + v_2(y),$$

откуда $v_2(y) = 0$, что противоречит неравенству $v_2(y) \geqslant 1$. Следовательно, $k_2 \neq k_1 + 1$, а потому, окончательно, $1 \leqslant k_2 \leqslant k_1$. Воспользовавшись равенствами в (7.12) и аксиоме (A.3) теоремы 7.1, найдем, что $v_1(x) = v_1(y) = n - k_1 - 1$, $v_2(y) = k_1 + 1 - k_2$, $v_3(y) = 0$, $v_4(y) = k_2$, $v_2(x) = k_1 - k_2$, $v_3(x) = k_2 + 1$ и $v_4(x) = 0$, что и утверждается в (7.4) и (7.5).

7.2.2. Вычислим общее число пороговых векторов x^* (а, следовательно, и пороговых переходов) при $m = 4$. Число пороговых векторов x^* вида (7.3) равно $n - 1 = C_{n-1}^1$ (т. е. числу целых чисел k, удовлетворяющих неравенству $1 \leqslant k \leqslant n-1$), а число пороговых векторов вида (7.4) равно количеству пар вида (k_1, k_2), где $1 \leqslant k_1 \leqslant n-1$ и $1 \leqslant k_2 \leqslant k_1$, т. е.

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} = C_n^2.$$

Итак, общее число пороговых векторов x^* вида (7.3) и (7.4) равно

$$C_{n-1}^1 + C_n^2 = (n-1) + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}. \tag{7.13}$$

7.2.3. Для того, чтобы вывести алгоритм упорядочения альтернатив X^*, соответствующий P (и подобный (5.6) при $m = 3$), рассмотрим массив векторов, аналогичный (6.13):

$$X_\ell^* = \{x \in X^* : v_1(x) = \ell\} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant \ell \leqslant n$$

и заметим, что $X_n^* = \{\overline{1}\}$, где $\overline{1} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$, что у каждого вектора из этого массива первые ℓ мест заняты “единицами” (возможно, что в векторах “единиц” нет, т. е. $\ell = 0$) и что в силу (6.1) (или (4.7) при $m = 3$)

$$|X_\ell^*| = C_{(n-\ell)+2}^2 \quad \text{для всех} \quad 0 \leqslant \ell \leqslant n. \tag{7.14}$$

Последовательность $X_n^*, X_{n-1}^*, \ldots, X_1^*, X_0^*$ (в направлении слева направо) соответствует возрастанию P-предпочтения (т. е. любой вектор массива $X_{\ell-1}^*$, как имеющий меньшее число “единиц”, является более P-предпочтительным, чем любой вектор массива X_ℓ^*, $1 \leqslant \ell \leqslant n$).

Зафиксируем $0 \leqslant \ell \leqslant n$. Тогда для $x, y \in X_\ell^*$ согласно теореме 7.1 для сужения отношения P на $X_\ell^* \times X_\ell^*$ и любой функции предпочтения φ для P имеем:

a) если $v_2(x) = v_2(y)$ и $v_3(x) = v_3(y)$, то xIy ($x \sim y$ или $\varphi(x) = \varphi(y)$);

b) если $x \succ y$, то xPy (или $\varphi(x) > \varphi(y)$);

c) если $v_2(x)+1 = v_2(y) \neq n-\ell$, $v_2(x)+v_3(x) = n-\ell$ и $v_2(y)+v_4(y) = n-\ell$, то xPy (или $\varphi(x) > \varphi(y)$).

По теореме 5.3 (если трактовать “2” как “1”, “3” — как “2” и “4” — как “3”) это означает, что массив X_ℓ^* упорядочен в соответствии с P при помощи алгоритма (5.6) в размерности $n - \ell$ (вместо n):

$$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{\ell}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{(n-\ell)-n_1'}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{n_1'-n_2'}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{n_2'}), \quad 0 \leqslant n_1' \leqslant n-\ell, \quad 0 \leqslant n_2' \leqslant n_1'.$$

Полагая здесь $n_1 = n - \ell$, $n_2 = n_1'$ и $n_3 = n_2'$ и учитывая, что принятие n_1 последовательных значений $0, 1, \ldots, n$ соответствует прохождению массивов в порядке $X_n^*, X_{n-1}^*, \ldots, X_1^*, X_0^*$, найдем, что

$$x^*(n_1, n_2, n_3) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-n_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_1-n_2}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{n_2-n_3}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{n_3}), \tag{7.15}$$
$$\text{где} \;\; 0 \leqslant n_1 \leqslant n, \;\; 0 \leqslant n_2 \leqslant n_1 \;\; \text{и} \;\; 0 \leqslant n_3 \leqslant n_2.$$

Таким образом, *алгоритмический порядок* X^* в сторону большего P-предпочтения состоит в последовательном выписывании векторов вида (7.15), где n_1 последовательно принимает значения $0, 1, \ldots, n$, и если n_1 фиксировано, то n_2 последовательно принимает значения $0, 1, \ldots, n_1$, а если и n_2 фиксировано в указанных выше пределах, то n_3 последовательно принимает значения $0, 1, \ldots, n_2$.

7.2.4. В § 7.1 массивы векторов из $X^* = X^*_{n,4}$ выписаны вместе с порядковыми номерами согласно алгоритму (7.15) следующим образом (здесь символ $\prec$ означает естественное Парето-упорядочение в сторону большего P-предпочтения):

Наименее предпочтительный вектор: $(1, 1, \ldots, 1, 1, 1, 1)$
$\prec (1, 1, \ldots, 1, 1, 1, 2) \prec (1, 1, \ldots, 1, 1, 1, 3) \prec (1, 1, \ldots, 1, 1, 1, 4)$.
(I) Пороговый переход (7.3) при $k = 1$: $(1, 1, \ldots, 1, 1, 2, 2)$
$\prec (1, 1, \ldots, 1, 1, 2, 3) \prec (1, 1, \ldots, 1, 1, 2, 4)$.
(II) Пороговый переход (7.5)–(7.4) при $k_1 = 1$ и $k_2 = 1$: $(1, 1, \ldots, 1, 1, 3, 3)$
$\prec (1, 1, \ldots, 1, 1, 3, 4) \prec (1, 1, \ldots, 1, 1, 4, 4)$.
(I) Пороговый переход (7.3) при $k = 2$: $(1, 1, \ldots, 1, 2, 2, 2)$
$\prec (1, 1, \ldots, 1, 2, 2, 3) \prec (1, 1, \ldots, 1, 2, 2, 4)$.
(II) Пороговый переход (7.5)–(7.4) при $k_1 = 2$ и $k_2 = 1$: $(1, 1, \ldots, 1, 2, 3, 3)$
$\prec (1, 1, \ldots, 1, 2, 3, 4) \prec (1, 1, \ldots, 1, 2, 4, 4)$.
(II) Пороговый переход (7.5)–(7.4) при $k_1 = 2$ и $k_2 = 2$: $(1, 1, \ldots, 1, 3, 3, 3)$
$\prec (1, 1, \ldots, 1, 3, 3, 4) \prec (1, 1, \ldots, 1, 3, 4, 4) \prec (1, 1, \ldots, 1, 4, 4, 4)$.
(I) Пороговый переход (7.3) при $k = 3$: $(1, 1, \ldots, 1, 2, 2, 2, 2)$
$\prec (1, 1, \ldots, 1, 2, 2, 2, 3) \prec (1, 1, \ldots, 1, 2, 2, 2, 4)$.
(II) Пороговый переход (7.5)–(7.4) при $k_1 = 3$ и $k_2 = 1$: $(1, 1, \ldots, 1, 2, 2, 3, 3)$
$\prec (1, 1, \ldots, 1, 2, 2, 3, 4) \prec (1, 1, \ldots, 1, 2, 2, 4, 4)$.
(II) Пороговый переход (7.5)–(7.4) при $k_1 = 3$ и $k_2 = 2$: $(1, 1, \ldots, 1, 2, 3, 3, 3)$
$\prec (1, 1, \ldots, 1, 2, 3, 3, 4) \prec (1, 1, \ldots, 1, 2, 3, 4, 4) \prec (1, 1, \ldots, 1, 2, 4, 4, 4)$.
(II) Пороговый переход (7.5)–(7.4) при $k_1 = 3$ и $k_2 = 3$: $(1, 1, \ldots, 1, 3, 3, 3, 3)$
$\prec (1, 1, \ldots, 1, 3, 3, 3, 4) \prec (1, 1, \ldots, 1, 3, 3, 4, 4,) \prec (1, 1, \ldots, 1, 3, 4, 4, 4)$
$\prec (1, 1, \ldots, 1, 4, 4, 4, 4)$.
(I) Пороговый переход (7.3) при $k = 4$: $(1, 1, \ldots, 1, 2, 2, 2, 2, 2)$.

Далее, естественные упорядочения $\prec$ чередуются с пороговыми переходами (7.5)–(7.4) при $(k_1, k_2) = (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)$, и т. д., $\ldots$, вплоть до:

(II) Пороговый переход (7.5)–(7.4) при $k_1 = n - 2$ и $k_2 = n - 2$: $(1, \underbrace{3, \ldots, 3}_{n-1})$

$$\prec (1, 3, \ldots, 3, 4) \prec (1, 3, \ldots, 3, 4, 4) \prec \cdots \prec (1, \underbrace{4, \ldots, 4}_{n-1}).$$

(I) Пороговый переход (7.3) при $k = n-1$: $(\underbrace{2,\ldots,2}_{n})$.

После этого упорядочение массива $\overline{2} = (\underbrace{2,\ldots,2}_{n}) \preccurlyeq x^* \preccurlyeq (\underbrace{4,\ldots,4}_{n}) = \overline{4}$ происходит как в случае $m = 3$ (с обычными заменами $2 \to 1$, $3 \to 2$ и $4 \to 3$).

7.2.5. Для $x^* \in X^*$ обозначим через $\mathrm{alg}(x^*)$ определенный единственным образом порядковый номер вектора x^* в алгоритмическом упорядочении (7.15) и вычислим его. Для этого воспользуемся (7.15) и заметим, что при фиксированном $0 \leqslant n_1 \leqslant n$ имеем:

$$X^*_{n-n_1} = \Big\{(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-n_1}, \underbrace{2,\ldots,2}_{n_1-n_2}, \underbrace{3,\ldots,3}_{n_2-n_3}, \underbrace{4,\ldots,4}_{n_3}) : 0 \leqslant n_2 \leqslant n_1 \text{ и } 0 \leqslant n_3 \leqslant n_2\Big\},$$

причем в силу (7.14) $|X^*_{n-n_1}| = C^2_{n_1+2}$. Далее, т. к. $\mathrm{alg}(x^*(0,0,0)) = \mathrm{alg}(\overline{1}) = 1$ и первый (т. е. наименее предпочтительный) вектор массива $X^*_{n-n_1}$ есть $x^*(n_1,0,0)$, то по формуле (6.16) (с естественными заменами n на n_1, n_1 — на n_2 и n_2 — на n_3):

$$\mathrm{alg}(x^*(n_1,n_2,n_3)) = \mathrm{alg}(x^*(n_1,0,0) + C^2_{n_2+1} + n_3$$

для всех $0 \leqslant n_2 \leqslant n_1$ и $0 \leqslant n_3 \leqslant n_2$. Для того, чтобы найти первое слагаемое справа, используем равенство:

$$\begin{aligned}\mathrm{alg}(x^*(n_1,0,0)) &= \mathrm{alg}(x^*(n_1-1,0,0)) + |X^*_{n-(n_1-1)}| = \\ &= \mathrm{alg}(x^*(n_1-1,0,0)) + C^2_{n_1+1}, \quad 1 \leqslant n_1 \leqslant n,\end{aligned}$$

откуда

$$\mathrm{alg}(x^*(n_1,0,0)) = \mathrm{alg}(x^*(0,0,0)) + \sum_{j=1}^{n_1} C^2_{j+1} = 1 + C^3_{n_1+2}.$$

Окончательно находим, что

$$\begin{aligned}\mathrm{alg}(x^*(n_1,n_2,n_3)) &= 1 + C^3_{n_1+2} + C^2_{n_2+1} + n_3 = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{m-1} C^{m-i}_{n_i+m-i-1} \quad \text{при} \quad m = 4 \qquad (7.16)\end{aligned}$$

для всех $0 \leqslant n_1 \leqslant n$, $0 \leqslant n_2 \leqslant n_1$ и $0 \leqslant n_3 \leqslant n_2$.

7.2.6. Выясним каковы же порядковые номера $\mathrm{alg}(x^*)$ пороговых векторов x^* из (7.3) и (7.4) и установим последовательность, в которой они следуют — на практике это дает важную информацию об альтернативах.

Используя (7.15), пороговые векторы x^* из (7.3) можно записать для всех $1 \leqslant k \leqslant n$ в виде $x^* = x^*(k+1,0,0)$, поэтому пороговый переход из аксиомы (A.4) теоремы 7.1 соответствует переходу (7.3) от вектора вида $y^* = x^*(k,k,k)$ к вектору вида $x^* = x^*(k+1,0,0)$. При этом согласно формуле (7.16) имеем:

$$\mathrm{alg}(x^*(k+1,0,0)) = 1 + C^3_{k+3} \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Аналогично, в аксиоме (A.3) теоремы 7.1 выражен пороговый переход от вектора вида $y^* = x^*(k_1+1,k_2,k_2)$ из (7.5) к пороговому вектору из (7.4), имеющему вид $x^* = x^*(k_1+1,k_2+1,0)$, причем в соответствии с (7.16) имеем:

$$\mathrm{alg}(x^*(k_1+1,k_2+1,0)) = 1 + C^3_{k_1+3} + C^2_{k_2+2}, \quad 1 \leqslant k_1 \leqslant n-1, \ \ 1 \leqslant k_2 \leqslant k_1.$$

Чтобы увидеть закономерность следования номеров пороговых векторов, обратимся к примеру (алгоритму) из раздела 7.2.4. Обозначая условно пороговый переход (7.3) через I и пороговый переход (7.5)–(7.4) — через II, найдем, что имеет место следующая закономерность:

I: $y^* = x^*(1,1,1) \longrightarrow x^* = x^*(2,0,0)$ (при $k=1$);
II: $y^* = x^*(2,1,1) \longrightarrow x^* = x^*(2,2,0)$ (при $k_1 = 1$ и $k_2 = 1$);

I: $y^* = x^*(2,2,2) \longrightarrow x^* = x^*(3,0,0)$ (при $k=2$);
II: $y^* = x^*(3,1,1) \longrightarrow x^* = x^*(3,2,0)$ (при $k_1 = 2$ и $k_2 = 1$);
II: $y^* = x^*(3,2,2) \longrightarrow x^* = x^*(3,3,0)$ (при $k_1 = 2$ и $k_2 = 2$);

I: $y^* = x^*(3,3,3) \longrightarrow x^* = x^*(4,0,0)$ (при $k=3$);
II: $y^* = x^*(4,1,1) \longrightarrow x^* = x^*(4,2,0)$ (при $k_1 = 3$ и $k_2 = 1$);
II: $y^* = x^*(4,2,2) \longrightarrow x^* = x^*(4,3,0)$ (при $k_1 = 3$ и $k_2 = 2$);
II: $y^* = x^*(4,3,3) \longrightarrow x^* = x^*(4,4,0)$ (при $k_1 = 3$ и $k_2 = 3$).

Таким образом, пороговые векторы при $m = 4$ имеют вид:

$$x^* = x^*(n_1,n_2,0), \quad 2 \leqslant n_1 \leqslant n, \ \ 0 \leqslant n_2 \leqslant n_1, \ \ n_2 \neq 1, \tag{7.17}$$

причем в силу (7.16) порядок следования их номеров может быть вычислен по формуле:

$$\mathrm{alg}(x^*(n_1,n_2,0)) = 1 + C^3_{n_1+2} + C^2_{n_2+1} = 1 + \frac{n_1(n_1+1)(n_1+2)}{6} + \frac{n_2(n_2+1)}{2}, \tag{7.18}$$

где n_1 и n_2 изменяются также, как в (7.17). Выпишем несколько первых членов последовательности (7.18) (подчеркнутые номера соответствуют пороговым векторам вида I=(7.3)):

$$\overset{n_1=2}{\underline{5}}\,, 8\,, \overset{n_1=3}{\underline{11}}\,, 14\,, 17\,, \overset{n_1=4}{\underline{21}}\,, 24\,, 27\,, 31\,, \overset{n_1=5}{\underline{36}}\,, 39\,, 42\,, 46\,, 51\,, \overset{n_1=6}{\underline{57}}\,, 60\,,$$

$$63\,, 67\,, 72\,, 78\,, \overset{n_1=7}{\underline{85}}\,, \ldots . \tag{7.19}$$

7.3. Функция перечисления Φ при $m = 4$.

7.3.1. Единственной целью этого раздела является интуитивный вывод альтернативной записи формулы для функции перечисления Φ при $m = 4$; строгий вывод приведен в разделе 7.3.2.

В силу теоремы 7.1 любая функция предпочтения φ для отношения P из (7.2) на $X = \{1, 2, 3, 4\}^n$ согласована с семейством $\{X_\ell\}_{\ell=1}^s$ классов эквивалентности слабого порядка P, где согласно (4.7)

$$s = |X^*| = C_{n+4-1}^{4-1} = C_{n+3}^3 = \frac{(n+3)!}{3!\,n!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6},$$

т. е.

$$s = \overset{n=0}{1}\,,\ \overset{n=1}{4}\,,\ \overset{n=2}{10}\,,\ \overset{n=3}{20}\,,\ \overset{n=4}{35}\,,\ \overset{n=5}{56}\,,\ \overset{n=6}{84}\,, \ldots .$$

Функцию предпочтения $\Phi : X \to \mathbb{N}$ для P назовем *функцией перечисления*, если она обладает следующим свойством:

$$\text{если } x \in X \text{ и } x \in X_\ell \text{ при некотором } 1 \leqslant \ell \leqslant s, \text{ то } \Phi(x) = \ell. \tag{7.20}$$

Из равенства $\Phi(x) = \Phi(x^*)$, $x \in X$, которое вытекает из аксиомы (A.1) теоремы 7.1 следует, что функцию Φ достаточно определить на множестве X^* монотонных представителей элементов из X.

Из вида массивов векторов в § 7.1 можно заметить, что если $v_1(x) = 0$, т. е. начиная с вектора $\overline{2} = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{n})$ и т. д. до вектора $\overline{4} = (\underbrace{4, \ldots, 4}_{n})$, агрегирование (в данном случае порядок следования векторов из X^*) ведет себя также, как в случае $m = 3$, где вместо оценок $1, 2, 3$ используются соответственно оценки $2, 3, 4$. Тогда из формулы (6.4) (где заменяем $v_2(x)$ на $v_3(x)$ и $v_3(x)$ — на $v_4(x)$) для $x \in X^*$ такого, что $v_1(x) = 0$, получим следующее выражение для $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = c_n + \frac{(v_3(x)+v_4(x)+1)(v_3(x)+v_4(x)+2)}{2} - v_3(x), \quad \overline{2} \preccurlyeq x \preccurlyeq \overline{4}, \tag{7.21}$$

где $c_n = \Phi(y^0)$ есть порядковый номер вектора $y^0 = (1, \underbrace{4, \ldots, 4}_{n-1})$. Поскольку $v_3(\overline{2}) = v_4(\overline{2}) = 0$, то в силу (7.21)

$$\Phi(\overline{2}) = c_n + 1 = \Phi(y^0) + 1,$$

где при различных n величина $\Phi(y^0)$ принимает значения:

$$c_n = \Phi(y^0) = \overset{n=2}{4}, \overset{n=3}{10}, \overset{n=4}{20}, \overset{n=5}{35}, \dots = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Таким образом, формула (7.21) при $v_1(x) = 0$ принимает вид:

$$\Phi(x) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(v_3(x)+v_4(x)+1)(v_3(x)+v_4(x)+2)}{2} - v_3(x).$$

Аналогичные рассуждения при любом значении $0 \leqslant v_1(x) \leqslant n$ (и анализ порядка следования векторов в массивах из § 7.1) приводят к следующему окончательному выражению для Φ:

$$\Phi(x) = \frac{(n - v_1(x))(n + 1 - v_1(x))(n + 2 - v_1(x))}{6} + \\ + \frac{(v_3(x)+v_4(x)+1)(v_3(x)+v_4(x)+2)}{2} - v_3(x), \quad x \in X. \tag{7.22}$$

Отметим, что максимальное значение функции Φ на X^* равно

$$\Phi(\overline{4}) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = C_{n+2}^{n-1} + C_{n+2}^{n} = \\ = C_{n+3}^{n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} = s. \tag{7.23}$$

Проверим, что функция Φ обладает свойствами (a)–(d) леммы 7.2, т. е. является функцией предпочтения для отношения P. Пусть $x, y \in X$.

(a) Если $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) = v_2(y)$ и $v_3(x) = v_3(y)$, то из (7.1) вытекает, что $v_4(x) = v_4(y)$, откуда в силу (7.22) получаем равенство $\Phi(x) = \Phi(y)$.

(b) Если $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) = v_2(y)$ и $v_3(x) < v_3(y)$, то $v_3(x) + v_4(x) = v_3(y) + v_4(y)$ в силу (7.1), а тогда первые два слагаемых в (7.22) для $\Phi(x)$ равны первым двум слагаемым в (7.22) для $\Phi(y)$. Замечая, что $-v_3(x) > -v_3(y)$, из (7.22) получим, что $\Phi(x) > \Phi(y)$.

(c) Пусть $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) < v_2(y)$ и $v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) = n$. Из (7.1) для y и неравенства $v_2(x) < v_2(y)$ находим, что

$$n - v_1(x) - v_3(x) = v_2(x) < v_2(y) = n - v_1(y) - v_3(y) - v_4(y),$$

откуда

$$v_3(x) > v_3(y) + v_4(y) \quad \text{или} \quad v_3(x) \geqslant v_3(y) + v_4(y) + 1. \tag{7.24}$$

Учитывая, что в силу (7.1) для x имеем $v_4(x) = 0$, для второго и третьего слагаемых в (7.22), благодаря (6.6) при $k = v_3(x)$ и (7.24), получим, что (отметим, что первые слагаемые в (7.22) для $\Phi(x)$ и $\Phi(y)$ равны в силу того, что $v_1(x) = v_1(y)$)

$$\frac{(v_3(x)+v_4(x)+1)(v_3(x)+v_4(x)+2)}{2} - v_3(x) = \frac{(v_3(x)+1)(v_3(x)+2)}{2} - v_3(x) =$$
$$= \frac{v_3(x)(v_3(x)+1)}{2} + 1 > \frac{(v_3(y)+v_4(y)+1)(v_3(y)+v_4(y)+2)}{2} - v_3(y),$$

и, следовательно, в силу (7.22) $\Phi(x) > \Phi(y)$.

(d) Предположим, что $v_1(x) < v_1(y)$ и $v_1(x) + v_2(x) = n$. Из (7.1) вытекает, что

$$n - v_2(x) = v_1(x) < v_1(y) = n - v_2(y) - v_3(y) - v_4(y),$$

так что

$$v_2(x) \geqslant v_2(y) + v_3(y) + v_4(y) + 1. \tag{7.25}$$

Т. к. $v_3(x) = v_4(x) = 0$, то в силу (7.22), равенства $n - v_1(x) = v_2(x)$, (7.25) и (7.23), где n заменено на $n - v_1(y) = v_2(y) + v_3(y) + v_4(y)$, найдем, что

$$\Phi(x) = \frac{(n - v_1(x))(n+1-v_1(x))(n+2-v_1(x))}{6} + 1 =$$
$$= \frac{v_2(x)(v_2(x)+1)(v_2(x)+2)}{6} + 1 > \frac{v_2(x)(v_2(x)+1)(v_2(x)+2)}{6} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{[v_2(y)+v_3(y)+v_4(y)+1][v_2(y)+v_3(y)+v_4(y)+2][v_2(y)+v_3(y)+v_4(y)+3]}{6} =$$
$$= \frac{(n-v_1(y))(n-v_1(y)+1)(n-v_1(y)+2)}{6} +$$
$$+ \frac{(v_2(y)+v_3(y)+v_4(y)+1)(v_2(y)+v_3(y)+v_4(y)+2)}{2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(n-v_1(y))(n+1-v_1(y))(n+2-v_1(y))}{6} +$$
$$+ \frac{(v_3(y)+v_4(y)+1)(v_3(y)+v_4(y)+2)}{2} - v_3(y) = \Phi(y).$$

Тем самым все условия леммы 7.2 для функции Φ проверены.

7.3.2. В этом разделе приводится строгий (но сокращенный) вывод формулы для Φ при $m = 4$. Зафиксируем $0 \leqslant k \leqslant n$ и рассмотрим массив векторов

$$X_k^* = \{x \in X^* : v_1(x) = k\} = \Big\{(\underbrace{1,\dots,1}_{k}, \underbrace{2,\dots,2}_{n-k}), (\underbrace{1,\dots,1}_{k}, \underbrace{2,\dots,2}_{n-k-1}, \underbrace{3}_{1}),$$
$$= \dots\dots, (\underbrace{1,\dots,1}_{k}, \underbrace{4,\dots,4}_{n-k})\Big\} =$$
$$= \{x \in X^* : \overline{2}_k \preccurlyeq x \preccurlyeq \overline{4}_k\},$$

где $\overline{2}_k = (\underbrace{1,\dots,1}_{k}, \underbrace{2,\dots,2}_{n-k})$ и $\overline{4}_k = (\underbrace{1,\dots,1}_{k}, \underbrace{4,\dots,4}_{n-k})$, и заметим, что в силу (6.1) число элементов (у которых первые k координат уже заняты "единицами") в множестве X_k^* равно

$$|X_k^*| = C^2_{(n-k)+2}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n. \tag{7.26}$$

Если Φ — функция перечисления для P на X, то она является функцией предпочтения для P на X, а потому, и на X_k^*. Пусть $x, y \in X_k^*$, так что $v_1(x) = k = v_1(y)$. Тогда из аксиом (A.1), (A.2) и (A.3) теоремы 7.1 найдем, что

если $v_2(x) = v_2(y)$ и $v_3(x) = v_3(y)$, то $\Phi(x) = \Phi(y)$;
если $x \succ y$, то $\Phi(x) > \Phi(y)$, и
если $v_2(x)+1 = v_2(y) \neq n-k$, $v_2(x)+v_3(x) = n-k$ и $v_2(y)+v_4(y) = n-k$, то $\Phi(x) > \Phi(y)$.

Это означает, что сужение $\Phi|_{X_k^*}$ функции Φ на множество X_k^* является функцией предпочтения для (сужения на $X_k^* \times X_k^*$) отношения P, где роль 1 играет 2, роль 2 играет 3 и роль 3 играет 4. Поэтому можно воспользоваться формулой (6.8), в силу которой получим, что

$$\Phi(x) = c_k + C^2_{(n-k)-v_2(x)+1} + v_4(x), \qquad x \in X_k^*, \tag{7.27}$$

где $c_k \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\overline{2}_k)$. Замечая, что $\Phi(\overline{4}) = \Phi(\underbrace{4,\dots,4}_{n}) = s = C^3_{n+3}$ и что (напомним, что слева направо массивы $X_n^*, X_{n-1}^*, \dots, X_1^*, X_0^*$ следуют в сторону возрастания P-предпочтения)

$$\Phi(\overline{2}_k) = \Phi(\overline{4}) - \big(|X_0^*| + |X_1^*| + \dots + |X_k^*|\big) + 1,$$

воспользовавшись (7.26) и следующим равенством

$$C_{n+3}^3 = C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 = C_{n+2}^2 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 = C_{n+2}^2 + C_{n+1}^2 + C_n^2 + C_n^3 =$$
$$= \dots = \left(\sum_{i=0}^{k} C_{n-i+2}^2\right) + C_{n-k+2}^3,$$

найдем, что

$$c_k = \Phi(\overline{2}_k) = C_{n+3}^3 - \sum_{i=0}^{k} |X_i^*| + 1 = C_{n+3}^3 - \sum_{i=0}^{k} C_{n-i+2}^2 + 1 =$$
$$= C_{n-k+2}^3 + 1.$$

Подставляя это выражение в (7.27), где $k = v_1(x)$, получим:

$$\Phi(x) = C_{n-v_1(x)+2}^3 + C_{n-v_1(x)-v_2(x)+1}^2 + v_4(x) + 1 = \tag{7.28}$$
$$= C_{n-v_1(x)+2}^3 + C_{n-v_1(x)-v_2(x)+1}^2 + C_{n-v_1(x)-v_2(x)-v_3(x)}^1 +$$
$$+ C_{n-v_1(x)-v_2(x)-v_3(x)-v_4(x)-1}^0 = \tag{7.29}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} C_{n-(v_1(x)+\dots+v_i(x))+m-i-1}^{m-i} \quad \text{при} \quad m = 4, \tag{7.30}$$

где, как обычно, $C_2^3 = C_1^2 = C_0^1 = 0$, а последнее слагаемое в (7.29) в силу (7.1) равно $C_{-1}^0 = 1$.

Заметим, что формула (7.30) содержит в себе в качестве частных случаев формулы (6.9) при $m = 3$ и (6.10) при $m = 2$. Кроме того, поскольку (6.4) совпадает с (6.7)–(6.9), то и (7.22) совпадет с (7.28)–(7.30).

Исходя из (7.28) и (7.29), для функции Φ нетрудно проверить выполнение аксиом (A.1)–(A.4) теоремы 7.1. Аксиома (A.1) сразу вытекает из (7.29). Пусть теперь $x, y \in X$. Если $x \succ y$, то по лемме 4.3 (b) $x^* \succ y^*$, а тогда из леммы 7.4 и равенства (7.29) следует, что $\Phi(x) > \Phi(y)$, т. е. для Φ выполняется аксиома (A.2). Если выполнены предположения в аксиоме (A.3), то x^* и y^* имеют соответственно вид (7.4) и (7.5) для некоторых $1 \leqslant k_1 \leqslant n-1$ и $1 \leqslant k_2 \leqslant k_1$. Тогда, подставляя значения $v_j(x)$ и $v_j(y)$, $j = 1, 2, 3, 4$, из (7.28) с учетом (6.6) найдем, что

$$\Phi(x) = C_{k_1+3}^3 + C_{k_2+2}^2 + 1 \quad \text{и}$$
$$\Phi(y) = C_{k_1+3}^3 + C_{k_2+1}^2 + k_2 + 1 = C_{k_1+3}^3 + C_{k_2+2}^2,$$

т. е. $\Phi(x) = \Phi(y) + 1 > \Phi(y)$ и, тем самым, аксиома (A.3) проверена. Пусть теперь выполнены предположения в аксиоме (A.4). Тогда x^* и y^* имеют вид, приведенный в (7.3) для некоторого $1 \leqslant k \leqslant n-1$, поэтому в силу (7.28)

$$\Phi(x) = C_{k+3}^3 + 1 = C_{k+2}^3 + C_{k+2}^2 + 1 = C_{k+2}^3 + C_{k+1}^2 + C_{k+1}^1 + 1 \quad \text{и}$$
$$\Phi(y) = C_{k+2}^3 + C_{k+1}^2 + k + 1,$$

откуда снова $\Phi(x) = \Phi(y) + 1$, чем заканчивается проверка аксиомы (A.4).

В заключение этого раздела установим равенство (6.15) для $m = 4$:

$$\Phi(x) = \mathrm{alg}(x^*) \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{7.31}$$

Действительно, если $x \in X$, то $x^* \in X^*$, поэтому x^* однозначно представимо в виде (7.15), т.е. $x^* = x^*(n_1, n_2, n_3)$ для некоторых $0 \leqslant n_1 \leqslant n$, $0 \leqslant n_2 \leqslant n_1$ и $0 \leqslant n_3 \leqslant n_2$. Поскольку $v_1(x) = n - n_1$, $v_2(x) = n_1 - n_2$, $v_3(x) = n_2 - n_3$ и $v_4(x) = n_3$, то подставляя эти выражения в (7.28), найдем, что

$$\Phi(x) = \Phi(x^*) = C_{n_1+2}^3 + C_{n_2+1}^2 + n_3 + 1.$$

Сравнивая это выражение со средним выражением в (7.16), придем к равенству (7.31).

8. Аксиоматика порогового агрегирования с m оценками

В этом разделе приводится аксиоматика функций предпочтения (или функций коллективного решения, или функций общественного мнения) φ для порогового снизу отношения сравнения альтернатив P из § 2.1 на множестве $X = M^n$ при $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ в случае, когда число используемых для сравнения оценок $m \geqslant 3$ произвольно. Сначала опишем вкратце (без доказательств) эту аксиоматику для пяти оценок ($m = 5$) (ср. с (3.2) и (3.3) при $m = 2$, теоремой 5.3 при $m = 3$ и теоремой 7.1 при $m = 4$).

8.1. Аксиоматика при $m = 5$. Приведем таблицы упорядоченных векторов из X^*, где $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}^n$. Заметим, что число элементов в множестве $X_{n,5}^*$ равно $(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)/(24)$, т.е. $15, 35, 70, 126$ соответственно при $n = 2, 3, 4, 5$.

<u>$n = 2$:</u>

$(1,1)_1$, $(1,2)_2$, $(1,3)_3$, $(1,4)_4$, $(1,5)_5$,
$(2,2)_6$, $(2,3)_7$, $(2,4)_8$, $(2,5)_9$,
$(3,3)_{10}$, $(3,4)_{11}$, $(3,5)_{12}$,
$(4,4)_{13}$, $(4,5)_{14}$, $(5,5)_{15}$.

$\underline{n=3:}$

$(1,1,1)_1$, $(1,1,2)_2$, $(1,1,3)_3$, $(1,1,4)_4$, $(1,1,5)_5$,
$(1,2,2)_6$, $(1,2,3)_7$, $(1,2,4)_8$, $(1,2,5)_9$,
$(1,3,3)_{10}$, $(1,3,4)_{11}$, $(1,3,5)_{12}$,
$(1,4,4)_{13}$, $(1,4,5)_{14}$, $(1,5,5)_{15}$,
$(2,2,2)_{16}$, $(2,2,3)_{17}$, $(2,2,4)_{18}$, $(2,2,5)_{19}$,
$(2,3,3)_{20}$, $(2,3,4)_{21}$, $(2,3,5)_{22}$,
$(2,4,4)_{23}$, $(2,4,5)_{24}$, $(2,5,5)_{25}$,
$(3,3,3)_{26}$, $(3,3,4)_{27}$, $(3,3,5)_{28}$,
$(3,4,4)_{29}$, $(3,4,5)_{30}$, $(3,5,5)_{31}$,
$(4,4,4)_{32}$, $(4,4,5)_{33}$, $(4,5,5)_{34}$, $(5,5,5)_{35}$.

$\underline{n=4:}$

$(1,1,1,1)_1$, $(1,1,1,2)_2$, $(1,1,1,3)_3$, $(1,1,1,4)_4$, $(1,1,1,5)_5$,
$(1,1,2,2)_6$, $(1,1,2,3)_7$, $(1,1,2,4)_8$, $(1,1,2,5)_9$,
$(1,1,3,3)_{10}$, $(1,1,3,4)_{11}$, $(1,1,3,5)_{12}$,
$(1,1,4,4)_{13}$, $(1,1,4,5)_{14}$, $(1,1,5,5)_{15}$,
$(1,2,2,2)_{16}$, $(1,2,2,3)_{17}$, $(1,2,2,4)_{18}$, $(1,2,2,5)_{19}$,
$(1,2,3,3)_{20}$, $(1,2,3,4)_{21}$, $(1,2,3,5)_{22}$,
$(1,2,4,4)_{23}$, $(1,2,4,5)_{24}$, $(1,2,5,5)_{25}$,
$(1,3,3,3)_{26}$, $(1,3,3,4)_{27}$, $(1,3,3,5)_{28}$,
$(1,3,4,4)_{29}$, $(1,3,4,5)_{30}$, $(1,3,5,5)_{31}$,
$(1,4,4,4)_{32}$, $(1,4,4,5)_{33}$, $(1,4,5,5)_{34}$, $(1,5,5,5)_{35}$,
$(2,2,2,2)_{36}$, $(2,2,2,3)_{37}$, $(2,2,2,4)_{38}$, $(2,2,2,5)_{39}$,
$(2,2,3,3)_{40}$, $(2,2,3,4)_{41}$, $(2,2,3,5)_{42}$,
$(2,2,4,4)_{43}$, $(2,2,4,5)_{44}$, $(2,2,5,5)_{45}$,
$(2,3,3,3)_{46}$, $(2,3,3,4)_{47}$, $(2,3,3,5)_{48}$,
$(2,3,4,4)_{49}$, $(2,3,4,5)_{50}$, $(2,3,5,5)_{51}$,
$(2,4,4,4)_{52}$, $(2,4,4,5)_{53}$, $(2,4,5,5)_{54}$, $(2,5,5,5)_{55}$,
$(3,3,3,3)_{56}$, $(3,3,3,4)_{57}$, $(3,3,3,5)_{58}$,
$(3,3,4,4)_{59}$, $(3,3,4,5)_{60}$, $(3,3,5,5)_{61}$,
$(3,4,4,4)_{62}$, $(3,4,4,5)_{63}$, $(3,4,5,5)_{64}$, $(3,5,5,5)_{65}$,
$(4,4,4,4)_{66}$, $(4,4,4,5)_{67}$, $(4,4,5,5)_{68}$, $(4,5,5,5)_{69}$, $(5,5,5,5)_{70}$.

$\underline{n=5:}$

$(1,1,1,1,1)_1$, $(1,1,1,1,2)_2$, $(1,1,1,1,3)_3$, $(1,1,1,1,4)_4$, $(1,1,1,1,5)_5$,
$(1,1,1,2,2)_6$, $(1,1,1,2,3)_7$, $(1,1,1,2,4)_8$, $(1,1,1,2,5)_9$,
$(1,1,1,3,3)_{10}$, $(1,1,1,3,4)_{11}$, $(1,1,1,3,5)_{12}$,
$(1,1,1,4,4)_{13}$, $(1,1,1,4,5)_{14}$, $(1,1,1,5,5)_{15}$,
$(1,1,2,2,2)_{16}$, $(1,1,2,2,3)_{17}$, $(1,1,2,2,4)_{18}$, $(1,1,2,2,5)_{19}$,
$(1,1,2,3,3)_{20}$, $(1,1,2,3,4)_{21}$, $(1,1,2,3,5)_{22}$,
$(1,1,2,4,4)_{23}$, $(1,1,2,4,5)_{24}$, $(1,1,2,5,5)_{25}$,
$(1,1,3,3,3)_{26}$, $(1,1,3,3,4)_{27}$, $(1,1,3,3,5)_{28}$,
$(1,1,3,4,4)_{29}$, $(1,1,3,4,5)_{30}$, $(1,1,3,5,5)_{31}$,
$(1,1,4,4,4)_{32}$, $(1,1,4,4,5)_{33}$, $(1,1,4,5,5)_{34}$, $(1,1,5,5,5)_{35}$,

$(1,2,2,2,2)_{36}$, $(1,2,2,2,3)_{37}$, $(1,2,2,2,4)_{38}$, $(1,2,2,2,5)_{39}$,
$(1,2,2,3,3)_{40}$, $(1,2,2,3,4)_{41}$, $(1,2,2,3,5)_{42}$,
$(1,2,2,4,4)_{43}$, $(1,2,2,4,5)_{44}$, $(1,2,2,5,5)_{45}$,
$(1,2,3,3,3)_{46}$, $(1,2,3,3,4)_{47}$, $(1,2,3,3,5)_{48}$,
$(1,2,3,4,4)_{49}$, $(1,2,3,4,5)_{50}$, $(1,2,3,5,5)_{51}$,
$(1,2,4,4,4)_{52}$, $(1,2,4,4,5)_{53}$, $(1,2,4,5,5)_{54}$, $(1,2,5,5,5)_{55}$,
$(1,3,3,3,3)_{56}$, $(1,3,3,3,4)_{57}$, $(1,3,3,3,5)_{58}$,
$(1,3,3,4,4)_{59}$, $(1,3,3,4,5)_{60}$, $(1,3,3,5,5)_{61}$,
$(1,3,4,4,4)_{62}$, $(1,3,4,4,5)_{63}$, $(1,3,4,5,5)_{64}$, $(1,3,5,5,5)_{65}$,
$(1,4,4,4,4)_{66}$, $(1,4,4,4,5)_{67}$, $(1,4,4,5,5)_{68}$, $(1,4,5,5,5)_{69}$, $(1,5,5,5,5)_{70}$,
$(2,2,2,2,2)_{71}$, $(2,2,2,2,3)_{72}$, $(2,2,2,2,4)_{73}$, $(2,2,2,2,5)_{74}$,
$(2,2,2,3,3)_{75}$, $(2,2,2,3,4)_{76}$, $(2,2,2,3,5)_{77}$,
$(2,2,2,4,4)_{78}$, $(2,2,2,4,5)_{79}$, $(2,2,2,5,5)_{80}$,
$(2,2,3,3,3)_{81}$, $(2,2,3,3,4)_{82}$, $(2,2,3,3,5)_{83}$,
$(2,2,3,4,4)_{84}$, $(2,2,3,4,5)_{85}$, $(2,2,3,5,5)_{86}$,
$(2,2,4,4,4)_{87}$, $(2,2,4,4,5)_{88}$, $(2,2,4,5,5)_{89}$, $(2,2,5,5,5)_{90}$,
$(2,3,3,3,3)_{91}$, $(2,3,3,3,4)_{92}$, $(2,3,3,3,5)_{93}$,
$(2,3,3,4,4)_{94}$, $(2,3,3,4,5)_{95}$, $(2,3,3,5,5)_{96}$,
$(2,3,4,4,4)_{97}$, $(2,3,4,4,5)_{98}$, $(2,3,4,5,5)_{99}$, $(2,3,5,5,5)_{100}$,
$(2,4,4,4,4)_{101}$, $(2,4,4,4,5)_{102}$, $(2,4,4,5,5)_{103}$, $(2,4,5,5,5)_{104}$, $(2,5,5,5,5)_{105}$,
$(3,3,3,3,3)_{106}$, $(3,3,3,3,4)_{107}$, $(3,3,3,3,5)_{108}$,
$(3,3,3,4,4)_{109}$, $(3,3,3,4,5)_{110}$, $(3,3,3,5,5)_{111}$,
$(3,3,4,4,4)_{112}$, $(3,3,4,4,5)_{113}$, $(3,3,4,5,5)_{114}$, $(3,3,5,5,5)_{115}$,
$(3,4,4,4,4)_{116}$, $(3,4,4,4,5)_{117}$, $(3,4,4,5,5)_{118}$, $(3,4,5,5,5)_{119}$, $(3,5,5,5,5)_{120}$,
$(4,4,4,4,4)_{121}$, $(4,4,4,4,5)_{122}$, $(4,4,4,5,5)_{123}$, $(4,4,5,5,5)_{124}$, $(4,5,5,5,5)_{125}$,
$(5,5,5,5,5)_{126}$.

Отсюда можно увидеть *три* разновидности пороговых векторов x^*: первые *два* типа пороговых векторов нам фактически знакомы (ср. с (7.3) и (7.4) и аксиомами (A.5) и (A.4) из нижеследующей теоремы 8.1):

$$x^* = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-(k+1)}, \underbrace{2,\ldots,2}_{k+1}) \quad \text{и} \quad y^* = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-k}, \underbrace{5,\ldots,5}_{k}), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$x^* = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-(k_1+1)}, \underbrace{2,\ldots,2}_{k_1-k_2}, \underbrace{3,\ldots,3}_{k_2+1}) \quad \text{и} \quad y^* = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-(k_1+1)}, \underbrace{2,\ldots,2}_{k_1+1-k_2}, \underbrace{5,\ldots,5}_{k_2}),$$

$$\text{где} \;\; 1 \leqslant k_1 \leqslant n-1 \;\; \text{и} \;\; 1 \leqslant k_2 \leqslant k_1,$$

а вот *третий* вид пороговых векторов x^* является новым:

$$x^* = (\underbrace{1,\dots,1}_{n-(k_1+1)}, \underbrace{2,\dots,2}_{k_1-k_2}, \underbrace{3,\dots,3}_{k_2-k_3}, \underbrace{4,\dots,4}_{k_3+1}) \quad \text{и}$$

$$y^* = (\underbrace{1,\dots,1}_{n-(k_1+1)}, \underbrace{2,\dots,2}_{k_1-k_2}, \underbrace{3,\dots,3}_{k_2+1-k_3}, \underbrace{5,\dots,5}_{k_3}),$$

$$\text{где} \quad 1 \leqslant k_1 \leqslant n-1,\ 1 \leqslant k_2 \leqslant k_1 \text{ и } 1 \leqslant k_3 \leqslant k_2$$

(аккуратно этот случай можно посчитать из приводимой ниже в теореме 8.1 аксиоматики, зафиксировав в аксиоме (A.3) значения $v_1(x) = v_1(y)$ и, тем самым, сведя "все" к случаю аксиомы (A.3) теоремы 7.1, а затем воспользовавшись вытекающими из нее выражениями (7.4) и (7.5); детали предоставляются заинтересованному читателю). Общее число пороговых векторов при $m = 5$ равно

$$C_{n-1}^1 + C_n^2 + |\{(k_1, k_2, k_3) : 1 \leqslant k_1 \leqslant n-1,\ 1 \leqslant k_2 \leqslant k_1 \text{ и } 1 \leqslant k_3 \leqslant k_2\}| =$$
$$= C_{n-1}^1 + C_n^2 + (C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_n^2) = C_{n-1}^1 + C_n^2 + C_{n+1}^3.$$

В силу приведенного вида всех пороговых векторов x^* и им предшествующих y^* при $m = 5$ следующая аксиоматика (в теореме 8.1) представляется вполне естественной.

Теорема 8.1. *При $m = 5$ пороговое отношение P из § 2.1 представимо на $X = M^n$ при помощи функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in X$ функция φ удовлетворяет следующим пяти аксиомам:*

(A.1) *если $v_j(x) = v_j(y)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant 4$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$;*

(A.2) *если $x \succ y$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$;*

(A.3) *если $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) = v_2(y)$, $v_3(x)+1 = v_3(y) \neq n - v_1(y) - v_2(y)$, $v_1(x)+v_2(x)+v_3(x)+\underline{v_4(x)} = n$ и $v_1(y)+v_2(y)+v_3(y)+\underline{v_5(y)} = n$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$;*

(A.4) *если $v_1(x)=v_1(y)$, $v_2(x)+1=v_2(y) \neq n-v_1(y)$, $v_1(x)+v_2(x)+\underline{v_3(x)}=n$ и $v_1(y)+v_2(y)+\underline{v_5(y)}=n$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$;*

(A.5) *если $v_1(x)+1 = v_1(y) \neq n$, $v_1(x)+\underline{v_2(x)} = n$ и $v_1(y)+\underline{v_5(y)} = n$, то $\varphi(x) > \varphi(y)$.*

Для доказательства этой теоремы используется приводимая ниже лемма 8.2, которая аналогична лемме 7.2, и лемма 7.5 при $m = 5$.

Лемма 8.2. *При $m = 5$ отношение P является φ-представимым на $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}^n$ тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in X$ функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:*

(a_1) *если* $v_j(x) = v_j(y)$ *для* $1 \leqslant j \leqslant 4$, *то* $\varphi(x) = \varphi(y)$;

(a_2) *если* $v_j(x) = v_j(y)$ *для* $1 \leqslant j \leqslant 3$ *и* $v_4(x) < v_4(y)$, *то* $\varphi(x) > \varphi(y)$;

(a_3) *если* $v_j(x) = v_j(y)$ *для* $1 \leqslant j \leqslant 2$, $v_3(x) < v_3(y)$ *и* $v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) + v_4(x) = n$, *то* $\varphi(x) > \varphi(y)$;

(a_4) *если* $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) < v_2(y)$ *и* $v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) = n$, *то* $\varphi(x) > \varphi(y)$;

(a_5) *если* $v_1(x) < v_1(y)$ *и* $v_1(x) + v_2(x) = n$, *то* $\varphi(x) > \varphi(y)$.

8.2. Аксиоматика в общем случае. В этом разделе фиксируем произвольное целое число $m \geqslant 3$. Тогда пороговое снизу отношение P имеет общий вид из § 2.1, а для альтернатив $x \in X = M^n$, где $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, справедливо соотношение (1.2).

Основной результат этого раздела и центральный результат всей работы — следующая теорема, обобщающая теорему 5.3 при $m = 3$, теорему 7.1 при $m = 4$ и теорему 8.1 при $m = 5$.

Теорема 8.3 (аксиоматика функций предпочтения для P). *Пороговое отношение P представимо на X при помощи функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ или, эквивалентно, функция φ согласована с семейством классов эквивалентности слабого порядка P в том и только том случае, когда для всех $x, y \in X$ функция φ удовлетворяет следующим m аксиомам*:

(A.1) *если* $v_j(x) = v_j(y)$ *для всех* $1 \leqslant j \leqslant m - 1$, *то* $\varphi(x) = \varphi(y)$;

(A.2) *если* $x \succ y$, *то* $\varphi(x) > \varphi(y)$,

и аксиомам (A.k) *для всех* $3 \leqslant k \leqslant m$, *где*

(A.k) *если* $v_j(x) = v_j(y)$ *для всех* $1 \leqslant j \leqslant m - k$ (*это условие отсутствует при* $k = m$), $v_{m-k+1}(x) + 1 = v_{m-k+1}(y) \neq n - \sum_{j=1}^{m-k} v_j(y)$, $\sum_{j=1}^{m-k+1} v_j(x) + v_{m-k+2}(x) = n$ *и* $\sum_{j=1}^{m-k+1} v_j(y) + v_m(y) = n$, *то* $\varphi(x) > \varphi(y)$, *где по определению пустая сумма* $\sum_{j=1}^{0}(\ldots) = 0$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуются три леммы: леммы 8.4 и 8.5, приводимые ниже, и уже доказанная ранее лемма 7.5 (a), (b).

Лемма 8.4. *Отношение P на X представимо функцией $\varphi : X \to \mathbb{R}$ (в смысле* (2.1)) *тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in X$ функция φ удовлетворяет следующим m условиям*:

(a_1) *если* $v_j(x) = v_j(y)$ *для всех* $1 \leqslant j \leqslant m - 1$, *то* $\varphi(x) = \varphi(y)$;

(a_2) *если* $v_j(x) = v_j(y)$ *для всех* $1 \leqslant j \leqslant m - 2$ *и* $v_{m-1}(x) < v_{m-1}(y)$, *то* $\varphi(x) > \varphi(y)$, *и условиям* (a_k) *для всех целых* $3 \leqslant k \leqslant m$*, где*

(a_k) *если* $v_j(x) = v_j(y)$ *для всех* $1 \leqslant j \leqslant m-k$ *(при* $k = m$ *это условие отсутствует),* $v_{m-k+1}(x) < v_{m-k+1}(y)$ *и* $\sum_{j=1}^{m-k+2} v_j(x) = n$*, то* $\varphi(x) > \varphi(y)$*.*

В свою очередь лемма 8.4 опирается на следующую лемму.

Лемма 8.5. *Если функция* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* (a_1)–(a_m) *леммы* 8.4*, то для всех* $x, y \in X$ *и* $3 \leqslant k \leqslant m$ *она удовлетворяет также условиям*:

(b_k) *если* $v_j(x) = v_j(y)$ *для всех* $1 \leqslant j \leqslant m-k$ *(это условие отсутствует при* $k = m$*) и* $v_{m-k+1}(x) < v_{m-k+1}(y)$*, то* $\varphi(x) > \varphi(y)$*,*

а также следующему условию:

(c) *если* $\varphi(x) = \varphi(y)$*, то* $v_j(x) = v_j(y)$ *для всех* $1 \leqslant j \leqslant m-1$*.*

Доказательство леммы 8.5. 1. Вначале проверим выполнение условия (b_3), для чего предположим, что $v_j(x) = v_j(y)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m-3$ (это условие отсутствует при $m = 3$) и $v_{m-2}(x) < v_{m-2}(y)$. В силу (1.2) для y отсюда вытекает, что

$$v_1(x) + \cdots + v_{m-3}(x) + v_{m-2}(x) < v_1(y) + \cdots + v_{m-3}(y) + v_{m-2}(y) \leqslant n.$$

Рассмотрим вспомогательный вектор $z \in X$ такой, что

$$v_j(z) = v_j(x) = v_j(y) \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant m-3 \text{ (условие отсутствует при } m = 3),$$
$$v_{m-2}(z) = v_{m-2}(x) \quad \text{и} \quad v_{m-1}(z) = n - \sum_{j=1}^{m-2} v_j(x).$$

Сравним значения $\varphi(x)$ и $\varphi(z)$. В силу (1.2) имеем $v_1(x) + \ldots + v_{m-1}(x) \leqslant n$, откуда $v_{m-1}(x) \leqslant n - \sum_{j=1}^{m-2} v_j(x) = v_{m-1}(z)$, и, следовательно,

$$v_j(x) = v_j(z) \ \text{ для всех } \ 1 \leqslant j \leqslant m-2 \ \text{ и } \ v_{m-1}(x) \leqslant v_{m-1}(z).$$

Если $v_{m-1}(x) = v_{m-1}(z)$, то в силу предположения (a_1) леммы 8.4 найдем, что $\varphi(x) = \varphi(z)$. Если же $v_{m-1}(x) < v_{m-1}(z)$, то из (a_2) вытекает, что $\varphi(x) > \varphi(z)$. Итак, установлено, что $\varphi(x) \geqslant \varphi(z)$. Теперь сравним $\varphi(z)$ и $\varphi(y)$. Так как

$$v_j(z) = v_j(y) \ \text{ при } \ 1 \leqslant j \leqslant m-3 \text{ (условие отсутствует при } m = 3),$$
$$v_{m-2}(z) = v_{m-2}(x) < v_{m-2}(y) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{m-1} v_j(z) = n,$$

то применяя предположение (a_3) из леммы 8.4, в котором x заменено на z, придем к неравенству $\varphi(z) > \varphi(y)$. Таким образом, $\varphi(x) \geqslant \varphi(z) > \varphi(y)$, что и утверждалось в ($b_3$).

2. Теперь предположим, что утверждение (b_k) уже установлено для какого-либо $3 \leqslant k \leqslant m-1$, и покажем, что имеет место утверждение (b_{k+1}). Для этого относительно $x, y \in X$ предположим, что $v_j(x) = v_j(y)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m-k-1$ (нет условия при $m = k+1$) и $v_{m-k}(x) < v_{m-k}(y)$. Отсюда и (1.2) вытекает, что $\sum_{j=1}^{m-k} v_j(x) < \sum_{j=1}^{m-k} v_j(y) \leqslant n$. Рассмотрим вспомогательный вектор $z \in X$ со свойствам:

$$v_j(z)=v_j(x)=v_j(y) \text{ для всех } 1\leqslant j\leqslant m-k-1 \text{ (нет условия при } m=k+1),$$

$$v_{m-k}(z) = v_{m-k}(x) \quad \text{и} \quad v_{m-k+1}(z) = n - \sum_{j=1}^{m-k} v_j(x).$$

Вначале сравним значения $\varphi(x)$ и $\varphi(z)$. Из неравенства $\sum_{j=1}^{m-k+1} v_j(x) \leqslant n$ следует, что $v_{m-k+1}(x) \leqslant n - \sum_{j=1}^{m-k} v_j(x) = v_{m-k+1}(z)$, откуда находим, что

$$v_j(x) = v_j(z) \text{ для всех } 1 \leqslant j \leqslant m-k \text{ и } v_{m-k+1}(x) \leqslant v_{m-k+1}(z).$$

Если $v_{m-k+1}(x) = v_{m-k+1}(z)$, то $\sum_{j=1}^{m-k+1} v_j(x) = \sum_{j=1}^{m-k+1} v_j(z) = n$, поэтому $v_j(x) = v_j(z) = 0$ для всех $m-k+2 \leqslant j \leqslant m$, и, значит, $\varphi(x) = \varphi(z)$ в силу (a_1). Если же $v_{m-k+1}(x) < v_{m-k+1}(z)$, то используя (*уже установленное*) утверждение (b_k), в котором y заменен на z, найдем, что $\varphi(x) > \varphi(z)$. Итак, $\varphi(x) \geqslant \varphi(z)$. Теперь сравним значения $\varphi(z)$ и $\varphi(y)$. Поскольку

$$v_j(z)=v_j(y) \text{ для всех } 1\leqslant j\leqslant m-k-1 \text{ (условия нет при } m=k+1),$$

$$v_{m-k}(z) = v_{m-k}(x) < v_{m-k}(y) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{m-k+1} v_j(z) = n,$$

то применяя предположение (a_{k+1}) леммы 8.4, в котором x заменен на z, получим, что $\varphi(z) > \varphi(y)$. Следовательно, $\varphi(x) \geqslant \varphi(z) > \varphi(y)$, что и требовалось для утверждения (b_{k+1}).

Полагая последовательно $k = 3$, $k = 4$, ..., $k = m-1$ и применяя приведенные рассуждения, установим все утверждения (b_3)–(b_m).

3. Утверждение (c) доказывается от противного, исходя из свойств, представленных в леммах 8.4 (a_2) и 8.5 (b_3)–(b_m). □

Доказательство леммы 8.4 фактически повторяет рассуждения доказательства леммы 7.2 (и заключительной части леммы 5.1).

Доказательство леммы 8.4. *Необходимость.* Если пороговое отношение P представимо при помощи функции φ, то имеет место соотношение (2.1), а тогда пункт (a_1) вытекает из леммы 2.2 (b), (c), где вектор $v(x)$ определен в (2.2), а оставшиеся пункты (a_2)–(a_m) следуют из определения P в § 2.1.

Достаточность. Покажем, что если функция φ удовлетворяет условиям (a_1)–(a_m), то справедливо соотношение (2.1). Пусть $x, y \in X$. Импликация

$$(xPy) \Longrightarrow (\varphi(x) > \varphi(y)) \tag{8.1}$$

сразу следует из определения P, пунктов (b_m), (b_{m-1}), … , (b_3) леммы 8.5 и предположения (a_2) леммы 8.4. Для того, чтобы установить обратную к (8.1) импликацию, воспользуемся леммой 2.1 (P.2), определением (2.2), импликацией (8.1) и предположением (a_1) настоящей леммы:

$$\begin{aligned}\neg(xPy) &\iff (yPx) \vee (v(y){=}v(x)) \Longrightarrow (\varphi(y){>}\varphi(x)) \vee (\varphi(y){=}\varphi(x)) \\ &\iff (\varphi(y) \geqslant \varphi(x)),\end{aligned}$$

откуда окончательно найдем, что

$$(\varphi(x) > \varphi(y)) \iff \neg(\varphi(y) \geqslant \varphi(x)) \Longrightarrow \neg(\neg(xPy)) \iff (xPy),$$

что и требовалось. □

Доказательство теоремы 8.3. *Необходимость.* Пусть отношение P является φ-представимым на X и $x, y \in X$. Тогда аксиома (A.1) вытекает из леммы 2.2 (b), в которой учитывается обозначение (2.2). Для проверки аксиомы (A.2) предположим, что $x \succ y$. Тогда по лемме 4.3 (b) $x^* \succ y^*$, откуда, применяя лемму 7.5 (b), найдем, что существует такое $1 \leqslant k \leqslant m-1$, что $v_j(x) = v_j(y)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant k-1$ (это условие отсутствует при $k = 1$) и $v_k(x) < v_k(y)$, т. е. xPy в силу определения P из § 2.1. Последнее обстоятельство вместе с предположением (2.1) приводит к неравенству $\varphi(x) > \varphi(y)$, чем и устанавливается (A.2). Если $3 \leqslant k \leqslant m$ и выполнены предположения аксиомы (A.k), то $v_j(x) = v_j(y)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m-k$ (при $k = m$ это условие отсутствует) и $v_{m-k+1}(x) < v_{m-k+1}(y)$, так что снова xPy. Отсюда и (2.1) вытекает неравенство $\varphi(x) > \varphi(y)$, т. е. заключение аксиомы (A.k).

Достаточность. Проверим, что из аксиом (A.1)–(A.m) следуют условия (a_1)–(a_m) леммы 8.4. Из леммы 8.4 тогда будет вытекать искомая

φ-представимость порогового отношения P, а потому, и согласованность функции φ с классами эквивалентности $\{X_\ell\}_{\ell=1}^s$ слабого порядка P.

Ясно, что аксиома (A.1) и условие (a_1) леммы 8.4 совпадают.

Покажем, что из (A.1) и (A.2) вытекает (a_2). Для этого предположим, что $x, y \in X$ такие, что $v_j(x) = v_j(y)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m-2$ и $v_{m-1}(x) < v_{m-1}(y)$. В силу леммы 7.5 (b) (при $k = m-1$) это означает, что $x^* \succ y^*$. Тогда из аксиомы (A.2) следует, что $\varphi(x^*) > \varphi(y^*)$. Остается заметить, что $v_j(x) = v_j(x^*)$ и $v_j(y) = v_j(y^*)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m-1$, поэтому, благодаря аксиоме (A.1), $\varphi(x) = \varphi(x^*)$ и $\varphi(y) = \varphi(y^*)$. Следовательно, $\varphi(x) > \varphi(y)$.

Покажем теперь, что для любого $3 \leqslant k \leqslant m$ из аксиом (A.1), (A.2) и (A.k) вытекает свойство (a_k) леммы 8.4. Вначале заметим, что заключение в аксиоме (A.k) справедливо и в случае, когда $v_{m-k+1}(y) = n - \sum_{j=1}^{m-k} v_j(y)$: действительно, если выполнено последнее равенство, то

$$x^* = (\underbrace{1,\ldots,1}_{v_1(x)},\ldots,\underbrace{m{-}k,\ldots,m{-}k}_{v_{m-k(x)}},\underbrace{m{-}k{+}1,\ldots,m{-}k{+}1}_{v_{m-k+1}(x)},\underbrace{m{-}k{+}2}_{1})\succ$$
$$\succ(\underbrace{1,\ldots,1}_{v_1(x)},\ldots,\underbrace{m{-}k,\ldots,m{-}k}_{v_{m-k(x)}},\underbrace{m-k+1,\ldots,m-k+1}_{v_{m-k+1}(x)+1}) = y^*,$$

поэтому, как и выше, из аксиом (A.1) и (A.2) выводим, что $\varphi(x) = \varphi(x^*) > \varphi(y^*) = \varphi(y)$.

Пусть выполнены предпосылки в (a_k), т. е. $x, y \in X$ — такие, что $v_j(x) = v_j(y)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m-k$ (при $k = m$ этого условия нет), $v_{m-k+1}(x) < v_{m-k+1}(y)$ и $\sum_{j=1}^{m-k+2} v_j(x) = n$. Требуется показать, что $\varphi(x) > \varphi(y)$. Рассмотрим вспомогательные векторы $x', y' \in X$ такие, что

$$v_j(y') = v_j(y) = v_j(x) \quad \text{при} \quad 1 \leqslant j \leqslant m-k \ (\text{нет условия при } k = m),$$
$$v_{m-k+1}(y') = v_{m-k+1}(y) \quad \text{и} \quad v_m(y') = \sum_{j=m-k+2}^{m} v_j(y),$$
$$v_j(x') = v_j(y') \quad \text{при} \quad 1 \leqslant j \leqslant m-k \ (\text{опять нет условия при } k = m),$$
$$v_{m-k+1}(x') = v_{m-k+1}(y') - 1 = n - \sum_{j=1}^{m-k} v_j(y') - v_m(y') - 1$$
$$\text{и} \quad v_{m-k+2}(x') = v_m(y') + 1.$$

Во-первых, в силу леммы 7.5 (a) имеем $x^* \succcurlyeq x'^*$: действительно, неравенства $\sum_{j=1}^{p} v_j(x) \leqslant \sum_{j=1}^{p} v_j(x')$ для всех $1 \leqslant p \leqslant m-1$ вытекают из того, что $v_j(x) = v_j(y) = v_j(x')$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m-k$ (последнее условие отсутствует при $k = m$),

$$v_{m-k+1}(x) \leqslant v_{m-k+1}(y) - 1 = v_{m-k+1}(y') - 1 = v_{m-k+1}(x'),$$

$\sum_{j=1}^{m-k+2} v_j(x) = n$ и $\sum_{j=1}^{m-k+2} v_j(x') = n$, а потому, $v_l(x) = v_l(x') = 0$ для всех $m - k + 3 \leqslant l \leqslant m$. Из соотношения $x^* \succcurlyeq x'^*$ и аксиом (A.1) и (A.2) *стандартными* рассуждениями получаем (не)равенства $\varphi(x) = \varphi(x^*) \geqslant \varphi(x'^*) = \varphi(x')$.

Во-вторых, $v_j(x') = v_j(y')$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m - k$ (это условие отсутствует при $k = m$), $v_{m-k+1}(x') + 1 = v_{m-k+1}(y')$,

$$\sum_{j=1}^{m-k+1} v_j(x') + v_{m-k+2}(x') = n \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{m-k+1} v_j(y') + v_m(y') = n,$$

поэтому для x' и y' выполнены предположения аксиомы (A.k), в силу которой $\varphi(x') > \varphi(y')$.

В-третьих $y'^* \succcurlyeq y^*$, поскольку (ср. с леммой 7.5 (a)) $v_j(y') = v_j(y)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m - k + 1$, $v_j(y') = 0$ для всех $m - k + 2 \leqslant j \leqslant m - 1$ и $v_m(y') \geqslant v_m(y)$. Из неравенства $y'^* \succcurlyeq y^*$ и аксиом (A.1) и (A.2) *стандартным* образом вытекает, что $\varphi(y') = \varphi(y'^*) \geqslant \varphi(y^*) = \varphi(y)$.

Следовательно, $\varphi(x) \geqslant \varphi(x') > \varphi(y') \geqslant \varphi(y)$, чем и завершается проверка условия (a$_k$) леммы 8.4. Теорема 8.3 полностью доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. *Выбор вариантов (основы теории)*. М.: Наука, 1990. Дополненный английский перевод: Aizerman M., Aleskerov F. *Theory of Choice*. North-Holland, Amsterdam, 1995.

[2] Алескеров Ф. Т., Хабина Э. Л., Шварц Д. А. *Бинарные отношения, графы и коллективные решения*. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006.

[3] Алескеров Ф. Т., Юзбашев Д. А., Якуба В. И. *Пороговое агрегирование трехградационных ранжировок*. Автоматика и телемеханика, № 1 (2007), 147–152.

[4] Алескеров Ф. Т., Якуба В. И. *Об одном методе агрегирования ранжировок специального вида*. II-я Междунар. конфер. по проблемам управления. Тез. докл. М.: ИПУ РАН, 2003, с. 116.

[5] Алескеров Ф. Т., Якуба В. И. *Метод порогового агрегирования трехградационных ранжировок*. Докл. РАН, **413**, № 2 (2007), 181–183.

[6] Алескеров Ф. Т., Беляева Н. Ю., Бычкова Е. Б., Закамская Е. В., Юзбашев Д. А. *Сравнительный анализ развитости гражданского общества в трех регионах России*. В кн.: Человеческий фактор в управлении (под ред. Н. А. Абрамовой, К. С. Гинсберга, Д. А. Новикова). М: КомКнига, 2005, 83–109.

[7] Алескеров Ф. Т., Беляева Н. Ю. *Количественный анализ развитости гражданского общества в регионах России: параметры, методика, пилотные исследования*. Полития, № 1 (2008), 160–168.

[8] Калягин В. А., Чистяков В. В. *Модель некомпенсаторного агрегирования с произвольным набором оценок*. Докл. РАН, **421**, № 5 (2008), 607–610.

[9] Калягин В. А., Чистяков В. В. *Об определении функции предпочтений в задаче рейтингования при отсутствии компенсаций*. Материалы 9-ой международной научной конференции «Модернизация экономики и глобализация» (Высшая школа экономики, Москва, Россия, 1–3 апреля, 2008).

[10] Фишберн П. *Теория полезности для принятия решений*. М.: Физматлит, 1978.

[11] Aleskerov F. *Arrovian Aggregation Models*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[12] Aleskerov F., Chistyakov V. V. *Aggregating m-graded preferences: axiomatics and algorithms*. 9th International Meeting of the Society for Social Choice and Welfare (Concordia University, Montreal, Canada, June 19–22, 2008).

[13] Aleskerov F. T., Chistyakov V. V., Kalyagin V. A. *Axiomatics of the threshold aggregation*. Soc. Choice Welf. (2009), to appear.

[14] Aleskerov F., Yakuba V., Yuzbashev D. *A 'threshold aggregation' of three-graded rankings*. Math. Social Sci., **53**, № 1 (2007), 106–110.

[15] Arrow K. J. *Social Choice and Individual Values*. Yale University Press, 2nd ed., 1963. Перевод: Эрроу К. Дж. *Коллективный выбор и индивидуальные ценности*. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2004.

[16] Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, 1994. Перевод: Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики*. – М.: Мир, 1998.

[17] May K. O. *A set of independent, necessary and sufficient conditions for simple majority decision*. Econometrica, **20**, № 4 (1952), 680–684.

[18] Moulin H. *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

Chistyakov V.V., Kalyagin V.A. An axiomatic model of non-compensatory aggregation: Working paper WP7/2009/01. — Moscow: State University — Higher School of Economics, 2009. — 76 p.

In practice the opinion of a society of n individuals is often expressed by means of the scale of grades from 1 to m with each member of the society involved (for instance, 1 means bad, 2 means somewhat better, 3 means even more better, ..., m means perfect). In this way we have collections of n-dimesional vectors $(x_1, ..., x_n)$ with components x_i from 1 to m, each of which characterizing this or that alternative (possibility). The problem is to order these collections or, in another terminology, to aggregate individual preferences of members of the society into the social decision. If $m = 2$, the problem reduces to the problem of voting, when each individual expresses his/her most preferable alternative. If $m = 3$, an axiomatic approach to the description of properties of preference functions was applied in a series of papers by F.T. Aleskerov, D.A. Yuzbashev and V.I. Yakuba (2007), where a new phenomenon of the threshold preference was discovered. In this paper we present the solution of the aggregation problem in the general case (for any n and m). We develop the axiomatics of preference functions and, moreover, deduce explicit formulas for the preference functions, which assign to each vector-alternative $(x_1, ..., x_n)$ its ordinal number (the more the number the more preferable the alternative). In addition, we show that the explicit preference functions satisfy the introduced axioms and take into account all the threshold preferences for all m.

Препринт WP7/2009/01
Серия WP7
Теория и практика общественного выбора

В.А. Калягин, В.В. Чистяков

Аксиоматическая модель некомпенсаторного агрегирования

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г.
Отпечатано в типографии ГУ ВШЭ с представленного оригинал-макета.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 4,5.
Усл. печ. 4,42. Заказ № . Изд. № 895

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел.: (495) 772-95-71; 772-95-73

Для заметок