

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

В.А. Лапшин, С.Н. Смирнов

**О ПОЛОСЕ РАЗРЕШИМОСТИ
ДЛЯ СРОЧНОЙ СТРУКТУРЫ
ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК**

Препринт WP16/2009/01
Серия WP16

Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука

Редакторы серии WP16
«Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука»
С.Н. Смирнов, А.Г. Шоломицкий

Л24 Лапшин В.А., Смирнов С.Н. О полосе разрешимости для срочной структуры процентных ставок: Препринт WP16/2009/01. — М.: Изд. дом Государственного университета — Высшей школы экономики, 2009. — 24 с.

Целью работы является описание построения так называемой полосы разрешимости — инструмента, позволяющего оценить качество данных и точность определения срочной структуры процентных ставок на различных сроках при решении задачи ценообразования инструментов с фиксированным доходом, а также производных инструментов на процентную ставку. Это позволяет проводить более детальное исследование принципиально доступной точности в случае рынка с низкой ликвидностью и для рынков с низкой информационной эффективностью (по Fama). Особое внимание уделено случаю невозможности построения полосы: приведено два приближенных алгоритма для построения полосы в этой ситуации.

УДК 336.78
ББК 65.262.2

Препринты Государственного университета — Высшей школы экономики размещаются по адресу: <http://new.hse.ru/C3/C18/preprintsID/default.aspx>

© Лапшин В.А., 2009
© Смирнов С.Н., 2009
© Оформление. Издательский дом
Государственного университета —
Высшей школы экономики, 2009

Введение

Целью работы является описание построения так называемой полосы разрешимости — инструмента, позволяющего оценить качество данных и точность определения срочной структуры процентных ставок при решении задачи ценообразования инструментов с фиксированным доходом, а также производных инструментов на процентную ставку. Это позволяет проводить более детальное исследование принципиально доступной точности в случае рынка с низкой ликвидностью и для рынков с низкой информационной эффективностью (по Fama). Особое внимание уделено случаю невозможности построения полосы: приведено два приближенных алгоритма для построения полосы в этой ситуации.

1.1. Основные понятия и определения

Под облигацией будет пониматься любое долговое обязательство, оформленное в виде рыночной ценной бумаги, платежи (платёж) по которому определены в номинальных (денежных единицах) или реальных (например, по отношению к индексу потребительских цен) величинах. Облигации можно разделить на несколько классов по типу купонных выплат:

- бескупонные облигации (zero-coupon): по этим бумагам нет промежуточных выплат, номинальная сумма возвращается при погашении;
- облигации с постоянным купоном: по этим бумагам есть промежуточные купонные выплаты, причём ставка купона (в годовом исчислении) постоянна и известна в момент выпуска облигации;
- облигации с фиксированным купоном: по этим облигациям есть промежуточные купонные выплаты, причём ставка купона (в годовом исчислении) для различных купонных периодов может отличаться, но также известна в момент выпуска облигации;

- облигации с переменным купоном (floating coupon): по этим бумагам есть промежуточные купонные выплаты, причем ставка купона (в годовом исчислении) для различных купонных периодов может отличаться. Ставка купона для некоторых купонных периодов может быть неизвестна в момент выпуска облигации и определяться в начале купонного периода.

В данной работе будут рассмотрены облигации без встроенных опционов с любым типом выплат основного долга и с любыми известными в момент выпуска облигации купонными выплатами. Предполагается, что любую купонную облигацию можно заменить набором бескупонных облигаций с соответствующими сроками погашения. Пусть зависимость цены P облигации от сроков $\tau_s, s = 0, \dots, n_s$ и объемов выплат $F_s, s = 0, \dots, n_s$ имеет вид

$$P = \sum_{s=0}^{n_s} d(\tau_s) F_s. \quad (1)$$

Функция $d(t)$ называется **функцией дисконтирования** или **кривой бескупонной доходности**.

Пусть рассматриваются n_k инструментов с ценами $P_k, k = 1, \dots, n_k$ и объемами выплат $F_{s,k}, s = 0, \dots, n_s, k = 1, \dots, n_k$ в моменты времени $\tau_s, s = 0, \dots, n_s$, причем моменты выплат τ_s являются общими для всех инструментов (если это не так, можно ввести фиктивные нулевые потоки платежей там, где это необходимо). Требуется найти такую функцию $d(t)$, чтобы соответствующие ей согласно (1) цены инструментов равнялись текущим рыночным ценам с достаточной точностью. Обычно дополнительно накладывается ограничение на гладкость искомой функции. Таким образом приходим к задаче нахождения функции дисконтирования $d(t), t \geq 0$, удовлетворяющей следующим условиям:

- $d(t)$ не возрастает на всей области определения;
- $d(t) > 0, d(0) = 1$;
- $\sum_{s=0}^{n_s} F_{s,k} d(\tau_s) \approx P_k$ для всех $k = 1, \dots, n_k$.

Кривая бескупонной доходности отражает зависимость доходности к погашению бескупонной (дисконтной облигации) от срока до погашения. Эта зависимость может быть также выражена в терминах

непрерывно начисляемой спот-ставки (continuously compounded zero-coupon rate) $r(t)$ или **мгновенной форвардной процентной ставки** (instantaneous forward rate) $f(t)$, которые связаны с функцией дисконтирования следующими соотношениями:

$$d(t) = e^{-r(t)t} = e^{-\int_0^t f(s)ds}$$

Говоря об определении **срочной структуры процентных ставок**, часто имеют в виду определение зависимости $d(t)$, $r(t)$ или $f(t)$.

2. О полосе разрешимости

Задача о нахождении полосы разрешимости возникает вследствие того, что на рынке отсутствует «цена облигации» как таковая. Есть цена покупателя и цена продавца, а истинная цена лежит где-то между ними. Таким образом, для определения $d(t)$ вместо уравнений будут приведены неравенства, позволяющие определять искомую функцию с некоторой точностью. Пусть $b_k, a_k, k = 1, \dots, n_k$ — соответственно цены покупателя и продавца для k -го инструмента. Тогда, в предположении, что реальные цены инструментов лежат между этими величинами, можно выписать следующие ограничения на функцию $d(t)$. Изложение в этом пункте следует [1].

- Исходя из принципа отсутствия арбитражных возможностей, получаем:

$$b_k \leq \sum_{s=0}^{n_s} F_{s,k} d(\tau_s) \leq a_k, \quad k = 1, \dots, n_k. \quad (2)$$

- Принцип предпочтения ликвидности дает: $d(t)$ не возрастает, $d(0) = 1, d(t) > 0$, т.е.

$$1 = d(\tau_0) > d(\tau_1) > \dots > d(\tau_{n_s}) > 0, \quad (3)$$

где $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n_s}, k = 1, \dots, n_k$.

Полученные неравенства определяют так называемую полосу разрешимости, которая не только содержит истинную функцию дис-

континирования, но и, что гораздо важнее для практического применения, даёт возможность оценить точность найденного приближения. Положим $d_s = d(\tau_s)$, $s = 0, \dots, n_s$. Для определения границ множества, в котором будут лежать решения d_1, \dots, d_{n_s} этой системы, решим $2n_s$ задач линейного программирования:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_i \rightarrow \min \\ b_k \leq \sum_{s=0}^{n_s} F_{s,k} d_s \leq a_k, k = 1, \dots, n_k, \\ d_0 = 1, \\ d_s > 0, \quad s = 1, \dots, n_s \\ d_{s-1} \geq d_s, \quad s = 1, \dots, n_s \end{array} \right. , \quad i = 1..n_s \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_i \rightarrow \max \\ b_k \leq \sum_{s=0}^{n_s} F_{s,k} d_s \leq a_k, k = 1, \dots, n_k, \\ d_0 = 1, \\ d_s > 0, \quad s = 1, \dots, n_s \\ d_{s-1} \geq d_s, \quad s = 1, \dots, n_s \end{array} \right. , \quad i = 1..n_s \quad (5)$$

Таким образом, для каждого момента времени τ_s , $s = 1, \dots, n_s$, найдутся границы $d_{\min}(\tau_s), d_{\max}(\tau_s)$ такие, что

$$d_{\min}(\tau_s) \leq d(\tau_s) \leq d_{\max}(\tau_s).$$

Эта оценка довольно груба и не означает, что кривая $d(t)$ может проходить где угодно внутри полученного коридора, хотя и эти ограничения могут оказаться слишком сильными.

Ниже будет более подробно рассмотрен случай несовместности системы неравенств (2), (3). В случае же существования решения кривая доходности, построенная с помощью метода синусоидально-экспоненциальных сплайнов с достаточно малым параметром регуляризации, будет находиться внутри полосы разрешимости.

Следует также отметить, что полоса разрешимости только частично отражает информацию, заключенную в (2), (3). Иногда бывает полезно воспользоваться дополнительным инструментом исследования, называемым двухмерной диаграммой. Зафиксируем два различных момента времени s_1 и s_2 (положим $s_1 < s_2$). Двухмерной диаграммой называется графическое представление на плоскости всех допустимых значений $d(s_1), d(s_2)$ функции дисконтирования для рассматриваемых моментов времени (или соответствующих значений процентных ставок $r(s_1), r(s_2)$) при ограничениях (2), (3).

Гибкость подхода, основанного на ликвидности, обеспечивает не только выбор гладкой кривой доходности, но также использование ее совместно с полосой разрешимости и, если необходимо, двухмерными диаграммами. Данные инструменты позволяют понять, являются ли входные данные противоречивыми, и получить представление о точности, которой можно достичь при построении кривой доходности. Так как в основе построений лежит принцип отсутствия арбитражных возможностей, то указанная точность может быть использована для мгновенной оценки кривой доходности при условии достаточного качества входных данных, т.е. при условии, что цены покупателя и продавца действительно являются характеристиками рынка. Таким образом, рассматриваемый метод может быть полезным при торговле облигациями.

Затруднения возникают при желании описать некое усредненное поведение рынка за определенный период времени (один час, день и т.д.). Данная задача возникает в практике инвестиционного менеджмента. В таких случаях необходимо использовать модели в форме стохастических процессов, описывающих динамику спрэдов и цен. Очевидно, что существует взаимосвязь между усредненными котировками и изменениями усредненной цены за рассматриваемый период. Кроме того, можно не пользоваться котировками купли-продажи в случае отсутствия необходимой информации и производить схожие вычисления с использованием усредненной волатильности (с точностью до мультипликативной константы) в качестве показателя, характеризующего спред. Однако главной задачей будет описание вышеупомянутых стохастических процессов, так как именно от него главным образом зависит корректная оценка усредненной волатильности.

2.1. Возможность построения полосы разрешимости

Интерес представляет случай, часто встречающийся на практике, а именно случай несовместности системы (2), (3). В таком случае говорят, что полоса разрешимости пуста. Это не представляет трудности ни для одной из описанных выше моделей кривой доходности (с их помощью можно получить осмысленные результаты и в этом случае), но говорит о невозможности получить достаточно разумное приближение текущих цен, что ставит под сомнение качество получаемого результата.

Пустота полосы разрешимости может быть вызвана различными обстоятельствами. Например, неоднородностью выборки: если среди рассматриваемых облигаций присутствуют облигации с различной ликвидностью или выпущенные эмитентами с различными кредитными рейтингами, то полоса разрешимости, скорее всего, будет пустой, так как принятая нами модель ценообразования не учитывает премии за риск и премии за ликвидность. Также к несовместности системы, определяющей полосу разрешимости, может привести неверная оценка рынком одной или нескольких облигаций. Кроме того, полоса разрешимости сама по себе — удобный инструмент для исследования, и лишаться его не хочется. Задача, таким образом, состоит в следующем: найти способ использовать полосу разрешимости для исследования данных и определить те бумаги, из-за которых полоса разрешимости оказывается пустой, чтобы подвергнуть их более пристальному исследованию, например, на предмет наличия арбитражных возможностей.

2.2. NP-эквивалентность задачи о выделении максимального совместного набора инструментов

Логично формализовать эти две задачи следующим образом: среди множества инструментов найти максимальное подмножество, дающее разрешимую систему (2), (3). На первом этапе мы покажем, что задача NP-эквивалентна. На втором этапе предложим два приближённых алгоритма её решения.

Перепишем систему (2), (3), сделав замену $d_s = d(\tau_s)$:

$$\begin{cases} b_k \leq \sum_{s=0}^{n_s} F_{s,k} d_s \leq a_k \\ d_0 = 1 \\ d_{s-1} \geq d_s, \quad s = 1, \dots, n_s \\ d_{n_s} \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Теперь сделаем замену $x_s = d_{s-1} - d_s$ и учтём явно, что $d_0 = 1$.

$$\begin{cases} b'_k \leq \sum_{s=1}^{n_s} F'_{s,k} x_s \leq a'_k \\ \sum_{s=1}^{n_s} x_s \leq 1 \\ x_s \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Учитывая специфику системы (7), сформулируем задачу так: дана система неравенств и пар неравенств

$$\begin{cases} x_s \geq 0 \\ \sum_{s=1}^{n_s} x_s \leq 1 \\ \begin{cases} \langle a_1, x \rangle \leq c_1 \\ \langle b_1, x \rangle \leq d_1 \\ \dots \\ \langle a_{n_k}, x \rangle \leq c_{n_k} \\ \langle b_{n_k}, x \rangle \leq d_{n_k} \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

Неравенства первой части $\sum x_s \leq 1, x_s \geq 0$ остаются в системе всегда: они отвечают за убывание функции дисконтирования. Требуется исключить из второй части этой системы минимальное коли-

чество пар неравенств (каждая пара соответствует одной бумаге), чтобы она стала совместной.

Данная задача похожа на задачу о выделении максимальной совместной подсистемы, которая весьма широко исследована.

В работах [2], [3] показано, что эта задача NP-трудна. В [4] показано, что она сохраняет это свойство только систем однородных неравенств (как строгих, так и нестрогих). В [4], [5], исследована возможность построения приближённых алгоритмов, в [6] предложен эвристический алгоритм для её решения. В [7] описано точное решение родственной задачи через набор вспомогательных задач целочисленного программирования, которое легко [8] трансформируется в приближённый алгоритм применением таковых для решения задач целочисленного программирования. В [9] построен качественный приближённый алгоритм для решения задачи выделения максимальной совместной подсистемы, основанный на концепции эластичных ограничений (см., например, книгу [10], в которой, помимо подробного обзора современного состояния этой области, можно найти неплохой исторический очерк).

Отечественная библиография на эту тему включает, например, работы [11], [12], [13].

К сожалению, наша задача отличается деталями постановки, поэтому разработанные методы и доказательства прямо не применимы. В связи с этим мы проведём доказательство NP-полноты задачи в нашей постановке, а также несколько приближённых алгоритмов.

Для доказательства NP-полноты немного изменим формулировку: для заданного k существует ли в системе (8) совместная подсистема, содержащая k пар неравенств второй части?

Теорема 1 *Задача проверки указанного свойства NP-полна.*

Доказательство. Принадлежность этой задачи к классу NP очевидна, так как проверка решения заключается в проверке выполнения всех оставшихся неравенств (сертификатом будет являться набор этих неравенств, а также вектор решения). Здесь мы предполагаем, что числа, фигурирующие в постановке задачи, а следовательно, и в решении, рациональные. Это не умаляет общности, но даёт возможность провести рассуждения более формально. Теперь сведём к этой задаче задачу 0,1-целочисленного программирования: существует ли вектор $x \in \{0,1\}^n$, удовлетворяющий системе неравенств

$Bx \leq c$, где $B \in \{-1,0,1\}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{Z}^m$? Рассмотрим такую вспомогательную задачу: существует ли в системе

$$\left\{ \begin{array}{l} Bx \leq c \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 1 \end{array} \right. \\ \dots \\ \left\{ \begin{array}{l} x_n \leq 0 \\ x_n \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_n \leq 1 \\ x_n \geq 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (9)$$

совместная подсистема, содержащая все m неравенств первой части и n пар неравенств второй части? Очевидно, что в этой системе не может быть большей совместной подсистемы, так как из $2n$ пар неравенств одновременно выполняться могут не более, чем n . Если такая совместная подсистема существует, это означает существование вектора x из нулей и единиц (мы так подбирали пары неравенств), удовлетворяющего условию $Bx \leq c$. С другой стороны, если такой вектор существует, то совместная подсистема выбирается соответственно значению этого вектора. Эта задача, как мы только что показали, эквивалентна задаче 0,1-ЦЛП. Теперь приведём её к виду (8). Выберем $m = n_s, n = n_k$ и для краткости все пары неравенств в (9) будем обозначать $a \leq Tx \leq b$, где $T \in \mathbb{R}^{4n_k \times n_k}$, $a, b \in \mathbb{R}^{4n_k}$. Новую задачу мы будем ставить в терминах переменных $y = c - Bx$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y \geq 0 \\ \mu \leq Ay \leq \zeta \end{array} \right. \quad (10)$$

Очевидно, неравенства $y \geq 0$ эквивалентны $Bx \leq c$. Теперь выберем A, μ, ν так, чтобы неравенства $\mu \leq Ay \leq \zeta$ были эквивалентны $a \leq Tx \leq b$. Подставим $y = c - Bx$:

$$\mu \leq -ABx + Ac \leq \zeta$$

$$Ac - \zeta \leq ABx \leq Ac - \mu$$

Получаем, что для эквивалентности достаточно, чтобы $Ac - \zeta = a$, $Ac - \mu = b$, $AB = T$. Первое и второе требования легко удовлетворяются: $\zeta = Ac - a$, $\mu = Ac - b$. Легко проверить, что ранг матрицы T равен n_k . Чтобы уравнение $B'A' = T'$ имело решение (A'), по теореме Кронекера – Капелли необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы B' совпадал с рангом матрицы $[B'T']$. Так как один из размеров матриц $B', [B'T']$ равен n_k , для этого достаточно, чтобы матрица B имела ранг n_k . В общем случае это не так. Но мы всегда можем дополнить исходную задачу 0,1-ЦЛП достаточным количеством линейно независимых неравенств, заведомо выполняющихся для любых $x \in \{0,1\}^{n_k}$, путём подбора достаточно больших c , получив при этом задачу, эквивалентную исходной. В задаче (8) присутствует ограничение $\sum x_s \leq 1$, которого нет в задаче (10). Но его можно туда включить, обеспечив безусловное выполнение этого условия. Для этого сделаем в (10) ещё одну замену: $y_1 = \frac{y}{n_k}, \mu_1 = \frac{\mu}{n_k}, \zeta_1 = \frac{\zeta}{n_k}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 \geq 0 \\ \mu_1 \leq Ay_1 \leq \zeta_1 \\ \sum_{k=1}^{n_k} y_1^k \leq 1 \end{array} \right. \quad (11)$$

Последнее условие выполняется всегда ввиду того, что по построению любое решение задачи (8) будет принадлежать $\{0,1\}^{n_k}$. Следовательно, любой вектор y_1 , удовлетворяющий первым двум системам неравенств задачи (11), автоматически удовлетворяет и третьему неравенству.

Итак, дополнив исходную задачу 0,1-ЦЛП фиктивными неравенствами, выбрав A из уравнения $AB = T$, мы получим задачу, эквивалентную исходной задаче 0,1-ЦЛП, но являющуюся задачей вида (8).

Таким образом, мы показали NP-эквивалентность задачи поиска максимального совместного набора инструментов (в оптимизационной постановке), что даёт нам основания искать для её решения приближённые алгоритмы. Ниже будут предложены два приближённых алгоритма для решения этой задачи.

2.3. Приближённые алгоритмы

Оба рассматриваемых алгоритма являются «жадными». Это значит, что на каждой итерации делается локально лучший выбор. Существует класс задач, в которых жадные алгоритмы дают точное решение (см., например, [14]). К сожалению, наша задача, будучи NP-полной, этим свойством не обладает.

Первый алгоритм

На каждом шаге мы будем строить решение вспомогательной задачи квадратичного программирования

$$\left\{ \begin{array}{l} \|Fd - P\|^2 \rightarrow \min_d \\ d_0 = 1 \\ d_s \geq d_{s+1} > 0, \end{array} \right.$$

Так как система (2), (3) несовместна, не все равенства в системе $Fd = P$ будут выполнены. Найдём среди них то, которое выполняется с наибольшей по отношению к $a_k - b_k$ ошибкой и удалим из набора соответствующий инструмент. Этот алгоритм требует решения на каждом шаге задачи квадратичного программирования, что занимает достаточно большое по масштабам поставленной задачи время.

Замечание 2 *Вместо того чтобы искать равенство, выполненное с наибольшей ошибкой, можно искать бумагу, в отношении которой максимально лёгок арбитраж (вычисленная цена которой максимально меньше цены покупателя или больше цены продавца). При этом возможно*

учитывать существующие ограничения на короткие продажи и/или на использование заёмных средств.

Второй алгоритм

Для исправления этого недостатка, а также для лучшего использования структуры системы неравенств (2), (3) предлагается другой алгоритм, основанный на [9]. Рассмотрим вспомогательную задачу: насколько нужно ослабить пары неравенств, чтобы система стала совместной? Это формализуется путём введения эластичной переменной v :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v \rightarrow & \min \\ \langle F_k, d \rangle \leq & a_k + v, \quad k = 1, \dots, N \\ \langle F_k, d \rangle \geq & b_k - v, \quad k = 1, \dots, N \\ d_0 = & 1 \\ d_s \geq & d_{s+1} > 0, \quad s = 1, \dots, n_s \end{array} \right. \quad (12)$$

Рассмотрим те неравенства этой системы, которые выполняются в оптимальной точке как равенства. Очевидно, среди них будут неравенства, относящиеся к ценам. Среди всех этих неравенств выберем ту пару, от выбрасывания которой оптимальное значение функционала уменьшится наиболее сильно. Если решение нескольких таких задач линейного программирования на каждом шаге затруднительно, можно предложить выбирать то неравенство, при котором множитель Лагранжа максимален. Это соответствует тому ограничению, к которому оптимальное значение v в задаче (12) локально наиболее чувствительно.

Можно рассмотреть компромиссный вариант, сначала снизив значение v до допустимого уровня, а потом расширив границы $[b_k, a_k]$ $[b_k, a_k]$, взяв вместо них $[b_k - v, a_k + v]$. Таким образом, мы подменяем систему (2), (3), всё ещё не имеющую решения, на неравенства задачи (12), имеющие решение по построению. Итерациями нашего алгоритма мы можем добиться любого (в том числе и нулевого) значения ошибки v , которую мы допускаем в выполнении неравенств. Это можно рассматривать как альтернативную постановку задачи. Причём в такой постановке задача позволяет нам контролировать

соотношение качества результата и времени его получения путём выбора количества итераций.

3. Тестирование приближённых алгоритмов

3.1. Описание эксперимента

В ходе тестирования использовались данные по достаточно активно торгующимся на бирже ММВБ облигациям на 30 декабря 2008 г. В расчете участвовало 10 облигаций:

1. SU46021RMFS0

Номинальная стоимость	100
Цена покупки	88,913
Цена продажи	89,513
Дата первой выплаты	18 февраля 2009 г.
Частота выплат	182 дня
Расписание платежей	
1–2 выплаты	7,5% годовых
3–6 выплаты	7% годовых
7–10 выплаты	6% годовых
11–14 выплаты	5,5% годовых
15–17 выплаты	5% годовых
18 выплата	5% годовых + 50% номинала
19 выплата	2,5% годовых
20 выплата	2,5% годовых + 50% номинала

2. SU25060RMFS3

Номинальная стоимость	100
Цена покупки	100,515
Цена продажи	100,585
Дата первой выплаты	28 января 2009 г.
Частота выплат	91 день
Расписание платежей	
1 выплата	5,8% годовых
2 выплата	5,8% годовых + номинал

3. SU46018RMFS6

Номинальная стоимость	100
Цена покупки	93,266
Цена продажи	93,566
Дата первой выплаты	11 марта 2009 г.
Частота выплат	91 день
Расписание платежей	
1–8 выплаты	8,5% годовых
9–16 выплаты	8% годовых
17–24 выплаты	7% годовых
25–43 выплаты	6,5% годовых
44 выплата	6,5% годовых + 30% номинала
45–47 выплаты	4,5 % годовых
48 выплата	4,5% годовых + 30% номинала
49–51 выплаты	2,5% годовых
52 выплата	2,5% годовых + 40% номинала

4. SU46014RMFS5

Номинальная стоимость	100
Цена покупки	95,537
Цена продажи	95,7369
Дата первой выплаты	11 марта 2009 г.
Частота выплат	182 дня
Расписание платежей	
1–2 выплаты	9% годовых
3–4 выплаты	9% годовых + 25% номинала
5–18 выплаты	3,5% годовых
19–20 выплаты	3,5% годовых + 25% номинала

5. SU46020RMFS2

Номинальная стоимость	100
Цена покупки	84,228
Цена продажи	84,487
Дата первой выплаты	11 февраля 2009 г.
Частота выплат	182 дня
Расписание платежей	
1–51 выплаты	7% годовых
52–55 выплаты	7% годовых + 25 % номинала

6. SU426199RMFS8

Номинальная стоимость	100
Цена покупки	87,27
Цена продажи	87,765
Дата первой выплаты	14 января 2009 г.
Частота выплат	91 день
Расписание платежей	
1–14 выплаты	6% годовых
15 выплата	6% годовых + номинал

7. SU25059RMFS5

Номинальная стоимость	100
Цена покупки	91,763
Цена продажи	91,803
Дата первой выплаты	21 января 2009 г.
Частота выплат	91 день
Расписание платежей	
1–8 выплаты	6% годовых
9 выплата	6% годовых + номинал

8. SU25057RMFS9

Номинальная стоимость	100
Цена покупки	99,349
Цена продажи	99,379
Дата первой выплаты	21 января 2009 г.
Частота выплат	91 день
Расписание платежей	
1–4 выплаты	7,4% годовых
5 выплата	7,4% годовых + номинал

9. SU25061RMFS51

Номинальная стоимость	100
Цена покупки	96,084
Цена продажи	96,124
Дата первой выплаты	4 февраля 2009 г.
Частота выплат	91 день
Расписание платежей	
1–5 выплаты	5,8% годовых
6 выплата	5,8% годовых + номинал

10. SU46017RMFS8

Номинальная стоимость	100
Цена покупки	91,552
Цена продажи	91,802
Дата первой выплаты	11 февраля 2009 г.
Частота выплат	91 день
Расписание платежей	
1–4 выплаты	8% годовых
5–8 выплаты	7,5% годовых
9–15 выплаты	7% годовых
16–24 выплаты	6,5% годовых
25–26 выплаты	6% годовых
27 выплата	6% годовых + 50% номинала
28–30 выплаты	3% годовых
31 выплата	3% годовых + 50% номинала

На основе на исходных данных была построена полоса разрешимости. После этого были отобраны две облигации SU46021RMFS0 и SU25060RMFS3 (№ 1 и № 2 в вышеприведенном списке) и изменены входные данные для этих бумаг. В первом случае была изменена цена покупки в соответствии с правилом

$$\text{цена покупки} = 1,0001 \times \text{цена продажи}$$

Тем самым была симитирована ситуация, характерная для случая наличия арбитражных возможностей. Для второй бумаги цены покупки и продажи были увеличены на 3. Этого достаточно для имитации бумаги, отличающейся по кредитному качеству от остальных.

Непосредственная проверка показывает, что полоса разрешимости для полученных данных пуста. После применения обоих приближенных алгоритмов получаем, что из набора необходимо исключить обе «подмененные» бумаги (что следовало ожидать при нормальной работе алгоритмов). При этом полагалось, что цены могут

$$\text{отклоняться от bid-ask спреда не более, чем на } \nu = \frac{|bid - ask|}{2}.$$

3.2. Результаты эксперимента

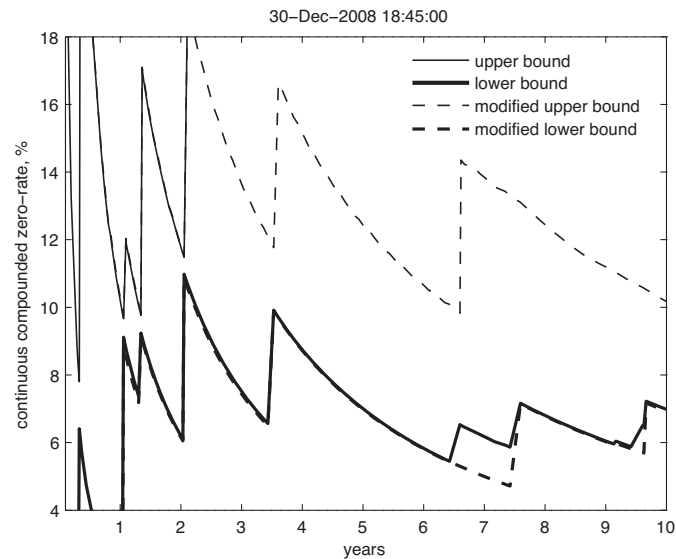


Рис. 1. На иллюстрации представлены верхняя и нижняя границы, построенные по изначальным данным (сплошная линия), а также верхняя и нижняя границы, построенные после изменения данных и фильтрации с применением алгоритмов (прерывистая линия)

Дополнительные вычисления были проведены для случая аналогичного изменения данных по двум краткосрочным облигациям SU25057RMFS9 и SU46017RMFS8 соответственно (с последующим их исключением из расчета) и для одной долгосрочной бумаги SU46018RMFS6. Как и следовало ожидать, в первом случае наблюдается значительное изменение на коротком конце, а во втором – на дальнем конце границ. Это объясняется потерей информации для соответствующего периода времени, что влечет за собой ухудшение качества входных данных и огрубление получаемых с помощью полосы оценок.

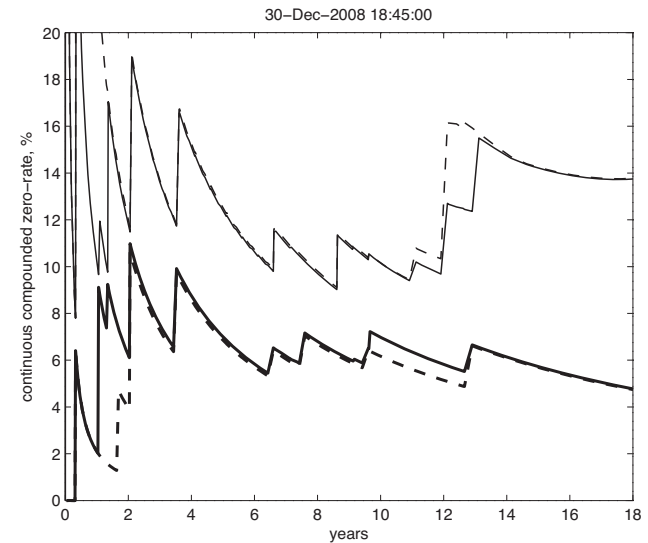


Рис. 2. Результат вычисления границы для случая потери данных по двум краткосрочным облигациям

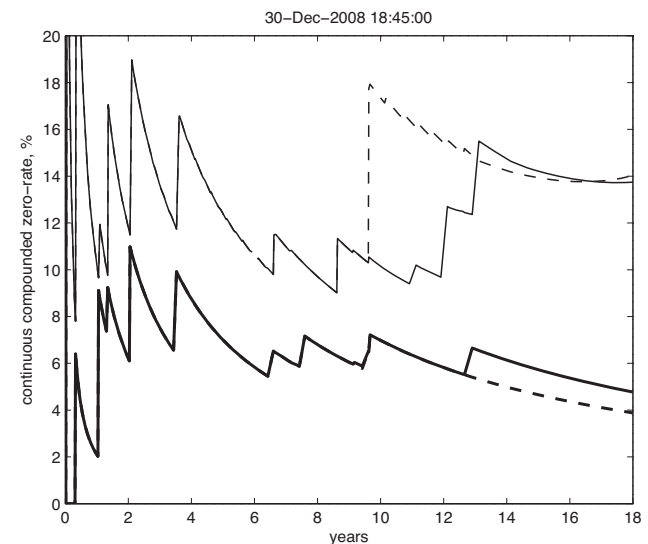


Рис. 3. Результат вычисления границы для случая потери данных по одной долгосрочной облигации

4. Заключение

Мы рассмотрели понятие полосы разрешимости – удобного инструмента для исследования рынка инструментов с фиксированным доходом. Степень узости полосы характеризует точность, с которой рыночные котировки спроса и предложения задают срочную структуру процентных ставок, что делает полосу незаменимой при оценке точности оценки кривой доходности, построенной по рыночным данным. При некачественных (зашумлённых или ошибочных) рыночных данных возможна ситуация, когда полоса разрешимости не существует, т.е. система неравенств, определяющих её, несовместна. В таком случае интерес представляет задача определения того, какие именно бумаги стали причиной этого, т.е. исключение каких бумаг сделает систему неравенств совместной. Очевидно, исключённые бумаги заслуживают более пристального внимания: либо данные по ним недостоверны или некачественны, либо по этим бумагам возможен арбитраж. В любом случае интерес представляет задача отыскания этих инструментов. В работе показано, что эта задача является NP-эквивалентной, и предложены приближённые алгоритмы её решения.

Авторы благодарят стажёра-исследователя лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту. Андреева за проведённые расчёты.

Литература

[1] *Smirnov S., Zakharov A.* A Liquidity-Based Robust Spline Fitting of Spot Yield Curve Providing Positive Forward Rates: Tech. rep.: European Bond Commission Working Paper, 2003.

[2] *Sankaran J.* A note on resolving infeasibility in linear programs by constraint relaxation // *Operations research letters*. 1993. Vol. 13. No. 1. P. 19–20.

[3] *Chakravarti N.* Some results concerning post-infeasibility analysis // *European journal of operational research*. 1994. Vol. 73. No. 1. P. 139–143.

[4] *Amaldi E., Kann V.* The complexity and approximability of finding maximum feasible subsystems of linear relations // *Theoretical Computer Science*. 1995. Vol. 147. No. 1–2. P. 181–210.

[5] *Amaldi E., Pfetsch M., Trotter Jr L.* On the maximum feasible subsystem problem, IISs and IIS-hypergraphs // *Mathematical Programming*. 2003. Vol. 95. No. 3. P. 533–554.

[6] *Amaldi E., Bruglieri M., Casale G.* A two-phase relaxation-based heuristic for the maximum feasible subsystem problem // *Computers and Operations Research*. 2008. Vol. 35. No. 5. P. 1465–1482.

[7] *Parker M., Ryan J.* Finding the minimum weight IIS cover of an infeasible system of linear inequalities // *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*. 1996. Vol. 17. No. 1. P. 107–126.

[8] *Chinneck J.* Fast heuristics for the maximum feasible subsystem problem // *INFORMS Journal on Computing*. 2001. Vol. 13. No. 3. P. 210–223.

[9] *Chinneck J.* An effective polynomial-time heuristic for the minimum-cardinality IIS set-covering problem // *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*. 1996. Vol. 17. No. 1. P. 127–144.

[10] *Chinneck J.* Feasibility and infeasibility in optimization: algorithms and computational methods. Springer Verlag, 2007.

[11] *Черников С.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.

[12] *Катериночкина Н.* Поиск максимального верхнего нуля монотонной функции алгебры логики // *Доклады АН СССР*. 1975.

[13] *Катериночкина Н.* Методы выделения максимальной совместной подсистемы системы линейных неравенств. М.: Вычислительный центр РАН, 1997.

[14] *Introduction to algorithms / T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein.* MIT press, 2001.

Препринт WP16/2009/01
Серия WP16
Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука

Лапшин В.А., Смирнов С.Н.

**О полосе разрешимости для срочной структуры
процентных ставок**

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г.
Отпечатано в типографии Государственного университета –
Вышей школы экономики с представленного оригинал-макета.
Формат 60×84 ¹/₁₆, Бумага офсетная. Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 1,2
Усл. печ. л. 1,3. Заказ № . Изд. № 1138.

Государственный университет – Высшая школа экономики
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Государственного университета – Высшей школы экономики
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел.: (495) 772-95-71; 772-95-73