ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

А.А. Гончаров, В.В. Чистяков

АГРЕГИРОВАНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ БЕЗ УЧЕТА КОМПЕНСАЦИЙ И РЕЙТИНГОВАНИЕ

Препринт WP7/2010/04
Серия WP7
Математические методы
анализа решений в экономике,
бизнесе и политике

Москва
Государственный университет – Высшая школа экономики
2010

УДК 519.710.3+519.812.5
ББК 65.051
Г 65

Редакторы серии WP7
«Математические методы анализа решений в экономике,
бизнесе и политике»
Ф.Т. Алескеров, В.В. Подиновский, Б.Г. Миркин

Гончаров, А. А., Чистяков, В. В.
Г65 Агрегирование предпочтений без учета компенсаций и рейтингование : Препринт WP7/2010/04 [Текст] / А. А. Гончаров, В. В. Чистяков ; Гос. ун-т – Высшая школа экономики. – М.: Изд. дом Гос. ун-та – Высшей школы экономики, 2010. – 40 с. – 150 экз.

На основе теории порогового агрегирования предпочтений, развитой в 2007–2010 гг. в работах Ф.Т. Алескерова, В.А. Калягина, В.В. Чистякова, Д.А. Юзбашева и В.И. Якубы, определяются и изучаются два некомпенсаторных рейтинговых индекса. Приведено сравнение итоговых рейтингов студентов Нижегородского филиала Государственного университета – Высшей школы экономики (ГУ ВШЭ), базирующихся на среднем арифметическом, стандартной рейтинговой сумме ГУ ВШЭ с весами (кредитами) и упомянутых двух некомпенсаторных рейтинговых индексах. Показано, что при отсутствии компенсаций последние два рейтинговых индекса выражают не только количественные, но и качественные рейтинговые показатели, а также более чувствительно учитывают веса оценок.

УДК 519.710.3+519.812.5
ББК 65.051

Гончаров А.А. – Государственный университет – Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде (lexer.07@mail.ru)

Чистяков В.В. – Государственный университет – Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде (vchistyakov@hse.ru)

Chistyakov, V. V., Goncharov, A. A.
Aggregation of preferences under no compensations and ratings : Working paper WP7/2010/04 [Text] / V. V. Chistyakov, A. A. Goncharov ; The University – Higher School of Economics. – Moscow: Publishing House of the University – Higher School of Economics, 2010. – 40 p. – 150 copies.

Basing on the theory of the threshold aggregation of preferences, developed in 2007–2010 by F.T. Aleskerov, V.V.Chistyakov, V.A.Kalyagin, D.A.Yuzbashev and V.I.Yakuba, in this preprint we introduce and study two noncompensatory rating indices. We compare the resulting ratings of students of the Higher School of Economics (Nizhny Novgorod Branch) with respect to the arithmetic mean value, the standard Higher School of Economics rating sum with weights (credits) and the two abovementioned noncompensatory rating indices. We show that in the situation under no compensations the last two indices provide not only quantitative, but also qualitative exponents, and are more sensitive to the weight of the estimates involved.

Препринты Государственного университета – Высшей школы экономики размещаются по адресу: http://www.hse.ru/org/hse/wp

© Гончаров А. А., 2010
© Чистяков В. В., 2010
© Оформление. Издательский дом Государственного университета – Высшей школы экономики, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
1. Цели и задачи рейтинговой системы 6
2. Рейтингование и ранжирование 7
3. Рейтинговая система с оценками 8
4. Стандартное рейтингование ГУ-ВШЭ 10
4.1. Понятия и процедуры рейтинговой системы 10
4.2. Порядок расчета текущего рейтинга 11
4.3. Стандартная рейтинговая сумма 12
4.4. Средний балл 12
5. Рейтингование без учета компенсаций 13
6. Вычисление рейтинговых сумм и индексов 16
6.1. Рейтинговый индекс $\mathsf{N}n$ без учета весов дисциплин 16
6.2. Интерпретация рейтингового индекса $\mathsf{N}n$ 19
6.3. Рейтинговый индекс N60 с учетом весов дисциплин 20
7. Практическое рейтингование студентов НФ ГУ-ВШЭ 21
7.1. Группа 1 22
7.2. Расчет рейтинговых сумм A16 и S16 23
7.3. Расчет рейтингового индекса N16 23
7.4. Расчет рейтингового индекса N60 25
7.5. Группа 2 26
7.6. Группа 3 28
7.7. Группа 4 30
Заключение 33
Приложение 1. Значения порядковых номеров из (6.6) и (6.8) 34
Приложение 2. Графическое представление таблиц рейтингований . . . 36
Литература 38

Введение

Составление рейтингов или рейтингование применяется в настоящее время повсеместно. Обычно индивидуальные мнения членов какого-либо коллектива или экспертов относительно альтернатив выражаются при помощи различных шкал оценок; например, «плохо, средне, хорошо» (при дегустации или опросе общественного мнения), «1, 2, 3, 4, 5» (в школе или университете) и т. п. Как правило, задача состоит в том, чтобы на основе полученных наборов из индивидуальных оценок определить какие же альтернативы являются более предпочтительными с точки зрения всего коллектива (в другой терминологии агрегировать общественное мнение коллектива или рейтинговать множество альтернатив по предпочтению).

По традиции в качестве меры сравнения зачастую используется сумма или среднее арифметическое полученных наборов оценок. Следует отметить, что в этом случае низкие оценки одних экспертов компенсируются высокими оценками других экспертов и становятся не (очень) заметными. Такая ситуация не вполне адекватна, например, тому, что наблюдается в высшем образовании. Проиллюстрируем это. Предположим, что в результате сдачи сессии учащийся А получает по трем предметам оценки 5, 5 и 2, а учащийся Б — оценки 3, 3 и 3. Сумма оценок для А равна 12 и среднее арифметическое — 4, а для Б сумма оценок есть 9 и среднее арифметическое равно 3. Очевидное преимущество А контрастирует с общепринятым правилом — вузы предпочитают учащегося Б (не имеющего пересдач).

Целью настоящей работы является исследование и сравнение двух типов агрегирований индивидуальных предпочтений — с одной стороны, учитывающего компенсирования, как при усреднении, а с другой — без учета компенсаций, как в приведенном выше примере. В качестве иллюстрации некомпенсаторный метод применяется для рейтингования студентов факультета Бизнес-информатики и прикладной математики Нижегородского филиала ГУ-ВШЭ и сравнивается со стандартным рейтингованием, принятым в ГУ-ВШЭ. Если постулировать, что изучаемые студентами предметы “более или менее равноправны” (хотя бы с той точки зрения, что неудовлетворительная оценка по любому курсу приводит к отчислению), то новый рейтинг студентов несколько точнее отражает реальное положение: например, получающий стипендию студент всегда имеет выше рейтинг, чем неполучающий. Если же принять во внимание, что оценки проставляются “разумным образом” (т. е. за знания, а не берутся “с потолка”), то во многом результаты нового и стандартного рейтингований схожи (по крайней мере это касается последовательности расположения студентов в итоговом рейтинге).

Различные аспекты работы докладывались и обсуждались на 9-ой международной научной конференции «Модернизация экономики и глобализация» [12] (апрель, 2008), 9-ой международной конференции Общества коллективного выбора и нормативной экономики [17] (июнь, 2008), 9-ой международной Казанской летней научной школе-конференции [15] (июль, 2009), Российском экономическом конгрессе [8], [13] (декабрь, 2009) и XI-ой международной научной конференции по проблемам развития экономики и общества [9] (апрель, 2010).

Авторы выражают признательность Ф. Т. Алескерову и В. А. Калягину за поддержку, ценные советы и стимулирующие обсуждения.

Работа выполнена при поддержке внутреннего гранта Нижегородского филиала ГУ-ВШЭ (№ 09-04) и лаборатории ТАПРАДЕСС НН (проект 61.1–2010).

1. Цели и задачи рейтинговой системы

Полный перечень целей и задач рейтинговой системы ГУ-ВШЭ приведен в «Положении о рейтинговой системе оценки учебной работы студентов ГУ-ВШЭ» [24]. Здесь приводятся лишь некоторые выдержки из этого Положения (в скобках указаны ссылки на соответвствующие разделы).

«Рейтинговая система» направлена на «оценивание учебной работы студентов» (II.2). «В условиях рейтинговой системы каждый студент, в соответствии со своими учебными достижениями, характеризуется рейтингом — совокупностью накопительных условных единиц (баллов), полученных в течение аттестуемого периода» (II.3). «Рейтинговая система ориентирована на регулярную учебную работу в течение всего периода обучения в Университете» (II.6).

Целью рейтинговой системы является "абстрактное" стимулирование студентов к получению качественных знаний и реализации естественного желания быть в числе первых по знаниям. Одной из задач рейтинговой системы является «повышение мотивации обучаемых к ... освоению образовательных программ» и «осуществление более высокой дифференциации студентов в учебных группах и на учебном курсе» (III.2).

Рейтинговая система выполняет ряд функций, например, она «задает механизм регулярного контроля и оценивания качества обучения студентов в рамках основной образовательной программы по направлению подготовки (специальности)» и «позволяет производить оценку уровня обучения на различных факультетах и в филиалах, различными преподавателями, в различных учебных группах и учебных потоках» (III.3).

Кроме "абстрактного" стимулирования, рейтинговая система вполне эффективно может участвовать в принятии «решений о поощрении, наказании студентов, переводе с платного обучения на бесплатное, назначении стипендий, направлении на стажировки и другие мероприятия, связанные с проведением конкурсного отбора, с использованием результатов рейтингования» (III.4). «Результаты рейтингования рекомендуется использовать для: присуждения грантов для обучения или стажировок в зарубежных вузах; назначения именных (Президента РФ, Правительства РФ), государственных академических и повышенных стипендий; отбор студентов на факультативы и дисциплины по выбору с ограниченным количеством мест; предоставления рекомендации для устройства на работу; перевода с платной формы обучения на места, финансируемые из федерального бюджета; перевода на обучение по индивидуальному плану; поощрения и иных целей, установленных решением уполномоченных органов управления Университета, факультета и филиала» (III.5).

«По итогам рейтинга могут определяться: лучший студент учебной группы; лучший студент курса; лучший студент по направлению подготовки (специальности); лучший студент магистерской программы; лучший студент Университета; лучшая учебная группа на факультете; лучший учебный курс в Университете» (III.6).

2. Рейтингование и ранжирование

Пусть X есть конечное множество альтернатив с числом элементов не менее двух (в дальнейшем в приложениях это множество будет представлять собой студентов некоторой учебной группы). Под *рейтингованием элементов* множества X (или в другой терминологии *ранжированием* множества X) понимается бинарное отношение $P \subset X \times X$, обладающее для всех $x, y, z \in X$ свойствами: (P.1) из $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$ следует, что $(x, z) \in P$ (транзитивность P); (P.2) $(x, x) \notin P$ (антирефлексивность P); (P.3) из $(x, y) \notin P$ и $(y, z) \notin P$ вытекает, что $(x, z) \notin P$ (отрицательная транзитивность P). Строго говоря, бинарное отношение P со свойствами (а), (б) и (в) называется *слабым порядком* на X ([1, 11, 16, 19, 23]). Нам удобнее будет называть такое P *отношением строгого предпочтения* на X. Тогда запись xPy для $x, y \in X$, являющаяся сокращением записи $(x, y) \in P$, читается как "x строго предпочтительнее, чем y".

Если на X задано отношение строгого предпочтения P, то на X можно ввести *отношение безразличия* I при помощи равенства $I = \{(x, y) \in X : (x, y) \notin P$ и $(y, x) \notin P\}$. Тогда запись xIy, означающая, что $(x, y) \in I$, можно интерпретировать как "альтернативы x и y безразличны по отношению друг к другу" в том смысле, что x не хуже, чем y, и одновременно y не хуже, чем x. Отношение безразличия I является отношением эквивалентности на X, т. е. для всех $x, y, z \in X$ обладает свойствами: (I.1) $(x, x) \in I$ (рефлексивность I); (I.2) из xIy следует, что yIx (симметричность I); и (I.3) из xIy и yIz вытекает, что xIz (транзитивность I).

Полагая теперь $R = P \cup I$, найдем, что отношение R на X удовлетворяет для всех $x, y, z \in X$ условиям: (R.1) $(x, y) \in R$ или $(y, x) \in R$ (полнота R), и (R.2) из $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ вытекает, что $(x, z) \in R$ (транзитивность R). Отношение R представляет собой так называемое рациональное ранжирование множества X или, в отличие от P, отношение нестрогого предпочтения: xRy обычно интерпретируется как "x не хуже, чем y". В дальнейшем нам удобнее будет иметь дело с отношением строгого предпочтения P и порождаемым им отношением безразличия I.

3. Рейтинговая система с оценками

Предположим, что наряду с множеством альтернатив X заданы два целых числа $n \geqslant 2$ и $m \geqslant 2$. Множество $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ будет интерпретироваться как *множество оценок*, а число n — как количество этих оценок в следующем смысле. Пусть в результате какой-либо процедуры оценивания (например, серии из n экзаменов) каждая альтернатива $x \in X$ получает в соответствие n оценок $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где каждое $x_i \in M$. Требуется на основе знания оценок $x_1, \ldots, x_n$ для всех альтернатив $x \in X$ ранжировать множество X (или рейтинговать его элементы). Поскольку любая альтернатива полностью характеризуется своими оценками, без ограничения общности можно считать, что эта альтернатива "совпадает" со своими оценками и для $x \in X$ писать $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Тем самым получается вложение множества альтернатив X в множество M^n всевозможных оценок, которое представляет собой множество всех n-мерных векторов с компонентами из M. Таким образом, достаточно ранжировать множество всех оценок M^n при помощи некоторого отношения строгого предпочтения, что приведет к ранжированию и множества X как подмножества M^n. Для дальнейшего отметим, что число элементов в множестве M^n равно $|M^n| = m^n$, где $|A|$ означает число элементов в множестве A.

Для того, чтобы описать методы сравнения альтернатив, применяемые ниже, приведем несколько простых поясняющих примеров.

Пример 1. Предположим, что оценивание альтернатив осуществляется лишь по двум оценкам, т. е. $m = 2$. В этом случае оценка 1 может означать "плохо" и 2 — "хорошо", или 1 означает "против" и 2 — "за" (подробнее см. [2, 11, 14, 22]). Например, при $n = 5$ можно выписать все множество оценок (= альтернатив) $M^5 = \{1, 2\}^5$, а именно, оно состоит из векторов с упорядоченными по возрастанию координатами $(1, 1, 1, 1, 1)_1$, $(1, 1, 1, 1, 2)_2$, $(1, 1, 1, 2, 2)_3$, $(1, 1, 2, 2, 2)_4$, $(1, 2, 2, 2, 2)_5$ и $(2, 2, 2, 2, 2)_6$, а также всех векторов, получающихся из перечисленных при помощи перестановок их координат (нижний индекс справа от вектора означает его порядковый номер в перечислении). Ранжировать $X = M^n$ при $m = 2$ можно при помощи двух естественных отношений. Пусть $x, y \in X$.

Первое отношение. Скажем, что xQy (т. е. x строго предпочтительнее относительно Q, чем y), если $\sum_{i=1}^n x_i > \sum_{i=1}^n y_i$.

Второе отношение. Для $x \in X$ обозначим через $v_1(x)$ количество оценок 1 в векторе x и через $v_2(x)$ — количество оценок 2 в x. Скажем, что xPy, если $v_1(x) < v_1(y)$.

Нетрудно видеть, что $P = Q$: это сразу вытекает из равенств $\sum_{i=1}^n x_i = 1 \cdot v_1(x) + 2 \cdot v_2(x)$ и $v_1(x) + v_2(x) = n$, поскольку тогда $\sum_{i=1}^n x_i = 2n - v_1(x)$.

Отметим, что порядковый номер вектора $x \in X$ (из приведенного примера при $n = 5$ и в общем случае) при упорядочении относительно $P = Q$ вычисляется по формуле $N(x) = v_2(x) + 1$. Отсюда для $x, y \in X$ вытекает также, что $xPy \iff xQy \iff N(x) > N(y)$, т. е. функция $N : M^n \to \mathbb{N}$ является *функцией предпочтения* для отношения $P = Q$.

Однако, как будет видно из дальнейшего, при $m \geqslant 3$ отношения Q и (некоторое обобщение отношения) P более не совпадают и дают принципиально различные ранжирования множества M^n.

Пример 2. Пусть теперь $m = 3$. Рассмотрим два вектора $x = (2, 2, 2, 2)$ и $y = (1, 3, 3, 3)$ (в качестве y можно также взять вектора $(3, 1, 3, 3)$, $(3, 3, 1, 3)$ или $(3, 3, 3, 1)$). Поскольку $1 + 3 + 3 + 3 = 10 > 8 = 2 + 2 + 2 + 2$, то yQx. С другой стороны, xPy, где отношение P в обозначениях примера 1 означает, что (a) $v_1(x) < v_1(y)$, или (b) $v_1(x) = v_1(y)$ и $v_2(x) < v_2(y)$ (такое развитие отношения P из примера 1 на случай $m = 3$ впервые приведено в [4, 5] и изучено в [3, 21]). В нашем примере $v_1(x) = 0 < 1 = v_1(y)$.

Пример 3. Предположим, что результаты экзаменов по двум предметам ($n = 2$) оцениваются по пятибалльной системе ($m = 5$), и для простоты будем считать координаты оценок упорядоченными по возрастанию. Если суммировать оценки в векторах-альтернативах (что соответствует отношению Q), то получим следующий результат рейтингования (нижний индекс справа у вектора, как и выше, означает порядковый номер этого вектора в итоговом рейтинговании, и чем больше этот номер, тем лучше результат по совокупности этих двух экзаменов):

$$(1,1)_1, \quad (1,2)_2, \quad (1,3)_3, (2,2)_3, \quad (1,4)_4, (2,3)_4, \quad (1,5)_5, (2,4)_5, (3,3)_5,$$
$$(2,5)_6, (3,4)_6, \quad (3,5)_7, (4,4)_7, \quad (4,5)_8, \quad (5,5)_9.$$

Порядковый номер $N(x)$ (= нижний индекс) вектора x из этой таблицы вычисляется по формуле $N(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1$, поэтому векторы x и y безразличны (xIy) по определению, когда $(x, y) \notin Q$ и $(y, x) \notin Q$, т. е. когда $N(x) = N(y)$. В частности, отношение Q "не различает" в приведенном рейтинге положительные и отрицательные исходы двух экзаменов: значение $N(x)$ для $x = (3, 3)$ (сдано) и $x = (1, 5)$, $(2, 4)$ (не сдано) равно 5, а для $x = (3, 4)$ (сдано) и $x = (2, 5)$ (не сдано) — равно 6.

Для того, чтобы определить отношение P, обобщающее отношения из примеров 1 и 2, для $j = 1, 2, 3, 4, 5$ обозначим через $v_j(x)$ количество оценок j в векторе $x = (x_1, x_2)$ с компонентами $x_i \in M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Для таких векторов x и y скажем, что xPy, если выполнено одно из следующих четырех условий: (a) $v_1(x) < v_1(y)$; (b) $v_1(x) = v_1(y)$ и $v_2(x) < v_2(y)$; (c) $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) = v_2(y)$ и $v_3(x) < v_3(y)$; (d) $v_1(x) = v_1(y)$, $v_2(x) = v_2(y)$, $v_3(x) = v_3(y)$ и $v_4(x) < v_4(y)$ (подробнее см. [10, 11, 12]).

Если теперь для рейтингования в нашем контексте применить отношение P, то получим следующую последовательность оценок:

$$(1,1)_1,\ (1,2)_2,\ (1,3)_3,\ (1,4)_4,\ (1,5)_5,\ (2,2)_6,\ (2,3)_7,\ (2,4)_8,\ (2,5)_9,$$
$$(3,3)_{10},\ (3,4)_{11},\ (3,5)_{12},\ (4,4)_{13},\ (4,5)_{14},\ (5,5)_{15}.$$

Этот рейтинг, порожденный P, уже не обладает тем дефектом, который выше был отмечен для Q: начиная с номера 10 (т. е. с вектора $(3,3)$) все пары оценок дают положительный исход сдачи двух экзаменов.

Порядковый номер вектора x при $m = 5$ вычисляется не столь просто, как в случае отношения Q (см. [10, 15] и ниже § 5):

$$\begin{aligned} N(x) \;=\; & \frac{(n-v_1(x)+3)(n-v_1(x)+2)(n-v_1(x)+1)(n-v_1(x))}{24} + \\ & + \frac{(n-v_1(x)-v_2(x)+2)(n-v_1(x)-v_2(x)+1)(n-v_1(x)-v_2(x))}{6} + \\ & + \frac{(n-v_1(x)-v_2(x)-v_3(x)+1)(n-v_1(x)-v_2(x)-v_3(x))}{2} + \\ & + v_5(x) + 1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где в нашем случае $n = 2$ (причем $v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) + v_4(x) + v_5(x) = n$). Интересно отметить, что функция $N : M^n \to \mathbb{N}$ является *функцией предпочтения* для P (т. е. $xPy \iff N(x) > N(y)$ для $x, y \in M^n$), которая единственна в определенном смысле (подробнее см. [20]).

4. Стандартное рейтингование ГУ-ВШЭ

4.1. Понятия и процедуры рейтинговой системы. Обратимся к «Положению о рейтинговой системе оценки учебной работы студентов ГУ-ВШЭ» [24] (в скобках указаны ссылки на соответвствующие разделы).

«Рейтинг (от англ. *rating*) — числовой или порядковый показатель, отображающий важность или значимость определенного объекта, явления.

Академический кредит — единица трудоемкости учебного труда студента. Сам кредит представляет собой численное значение, соответствующее единицам дисциплины для характеристики нагрузки студента, необходимой для ее завершения» (I).

«При расчете студенческих рейтингов используются десятибалльные оценки по дисциплинам утвержденного рабочего учебного плана» (IV.1).

« ... система зачетных единиц (кредитов) каждого студента определяется путем умножения полученных баллов (по десятибалльной системе) на число ... зачетных единиц (кредитов) по соответствующим учебным дисциплинам» (IV.2).

Рейтинговая сумма — сумма баллов, которые студент получил по завершении и сдаче учебной дисциплины и которая вычисляется, исходя из полученных оценок. Один из способов вычисления рейтинговой суммы приведен в предыдущем абзаце. Ниже в § 5 будет предложен другой способ вычисления рейтинговой "суммы" (которая будет названа рейтинговым *индексом*, который основан на одном из видов функции перечисления, имеющей форму суммы).

«Максимальная годовая сумма баллов для рейтинга равна 600 ед. (60 кредитов за учебный год $\times$ 10 баллов — максимальный балл за учебную дисциплину)» (IV.3).

«Студенту, получившему наибольшую сумму кредитно-рейтинговых оценок, в текущем рейтинге присваивается рейтинг, равный единице, и т.д.» (IV.4).

4.2. Порядок расчета текущего рейтинга. «При расчете текущего рейтинга студентов используются:

– система зачетных единиц (кредитов), определяющая «веса» дисциплин основной части образовательной программы;
– система десятибалльных оценок по дисциплинам основной части образовательной программы» (V.3).

«Студент получает кредит по дисциплине, если результирующая итоговая оценка по данной дисциплине составляет не менее 4 баллов по десятибалльной шкале» (V.5).

«Студент, не сдавший дисциплину в утвержденные сроки или набравший менее 4 баллов, получает по данной дисциплине 0 кредитов» (V.7).

«Рейтинг каждого студента по дисциплине определяется умножением реального «веса» дисциплины в зачетных единицах (кредитах) на соответствующую оценку по данной дисциплине в десятибалльной системе» (V.8).

«Студенты, имеющие академические задолженности, участвуют в текущем рейтинге с нулевой оценкой по дисциплинам, по которым имеются академические задолженности. —

А если они все равно в числе первых?» (V.10). (4.1)

Это выделение текста присутствует в самом «Положении ... » [24]!

«Максимальный годовой текущий рейтинг студента может быть равен 600 (60 — количество кредитов умножить на максимальный балл — 10)» (V.12).

4.3. Стандартная рейтинговая сумма. Резюмируя сказанное в разд. 4.1 и 4.2, находим, что рейтингование студентов, утвержденное в ГУ-ВШЭ, опирается на 60 кредитов, распределенных между всеми изучаемыми студентами предметами, и основывается на рабочем плане студенческой группы за календарный год. В этом рабочем плане выделяются два вида учебных дисциплин — аккредитованные и неаккредитованные. Последние не учитываются при подсчете рейтинга студентов; к ним обычно относятся физическая культура, БЖД и факультативы (и иногда иностранный язык). Аккредитованные дисциплины имеют в рейтинге ненулевые зачетные единицы, называемые кредитами, сумма которых равна 60. Количество кредитов у каждой дисциплины зависит от доли времени этой дисциплины в общей нагрузке студентов за год (в среднем в 1,5 раза больше числа модулей, отведенных на дисциплину). Поскольку в ГУ-ВШЭ принята десятибалльная система оценок, то максимальная рейтинговая сумма, которая может быть присвоена студенту, равна $600 = 60 \cdot 10$. В случае неуспешной сдачи студентом экзамена по какой-либо дисциплине, т.е. получения одной из оценок $1, 2, 3$, в рейтинг студента проставляется оценка 0 по этой дисциплине независимо от оценки за пересдачу.

Стандартная рейтинговая сумма таким образом записывается в виде:

$$S(x) = w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \quad \text{для} \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{4.2}$$

где n — число дисциплин в утвержденной годовой нагрузке, x_i — итоговая оценка студента за экзамен по i-ой дисциплине и w_i — зачетные единицы (кредиты, «веса») i-ой дисциплины, $i = 1, \ldots, n$, причем

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 60.$$

Отметим, что $S(x) \leqslant 600$, а x_i может принимать значения $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (поскольку оценки 1, 2 и 3 не относятся к “положительным”).

4.4. Средний балл. В большинстве вузов (и часто по традиции) для целей рейтингования используется обычный средний балл. В этом случае зачетные единицы w_i всех дисциплин одинаковы и равны $1/n$ (а их общая сумма равна 1):

$$A(x) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

(A от англ. *arithmetic mean value*). Следует отметить, что рейтингование с помощью рейтинговой суммы (4.2) имеет определенные преимущества по сравнению со средним баллом: оно более адекватно учитывает успеваемость студентов по дисциплинам своей специальности и нагрузку студента по каждому отдельному предмету в зависимости от количества часов, отведенных на дисциплину.

Следует отметить также, что процедура рейтингования, основанная на рейтинговой сумме (4.2), носит компенсаторный характер — это обсуждалось в § 3. В этом смысле низкие оценки по отдельным предметам могут быть "заретушированы" высокими оценками по другим, и вопрос (4.1) о том, *могут ли студенты с задолженностями быть в числе лидеров по рейтингу?* — вполне может иметь ответ "да". В предлагаемом ниже способе рейтингования ответ на этот вопрос — всегда "нет".

5. Рейтингование без учета компенсаций

Здесь будет изложен метод рейтингования без учета компенсаций, основанный на некомпенсаторной модели агрегирования предпочтений и подробно развитый в работах [10, 11, 15, 18, 19, 20]. Впервые в контексте трехградационных ранжировок (т. е. когда "плохо"= 1, "средне"= 2 и "хорошо"= 3) некомпенсаторная модель была применена для анализа развитости гражданского общества в некоторых регионах России в работах [6, 7]. Ниже дается еще одно применение этой модели в рамках многоградационных ранжировок для цели рейтингования студентов университетов по их успеваемости.

Пусть, как и в § 3, $X = M^n$ — множество всех альтернатив, где $n \geqslant 2$ и $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество оценок при $m \geqslant 3$. Для альтернативы $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ и оценки $j \in M$ обозначим через $v_j(x)$ количество оценок j в векторе x, т. е. $v_j(x) = |\{1 \leqslant i \leqslant n : x_i = j\}|$. Отметим сразу, что $0 \leqslant v_j(x) \leqslant n$ для всех $j \in M$ и $x \in X$ и

$$v_1(x) + v_2(x) + \cdots + v_m(x) = n \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{5.1}$$

Альтернатива $x \in X$ считается (строго) *более предпочтительной*, чем альтернатива $y \in X$ (кратко: xPy), если найдется номер $1 \leqslant k \leqslant m-1$, такой, что $v_j(x) = v_j(y)$ для всех номеров $1 \leqslant j \leqslant k-1$ и $v_k(x) < v_k(y)$ (при $k = 1$ пустое условие "$v_j(x) = v_j(y)$ для всех номеров $1 \leqslant j \leqslant 0$" опускается).

В цитированных выше работах показано, что отношение P, названное в этих работах *пороговым отношением*, является отношением строгого

предпочтения на X в смысле § 2. Кроме того, альтернативы $x, y \in X$ безразличны друг к другу, т. е. $(x, y) \notin P$ и $(y, x) \notin P$, тогда и только тогда, когда $v_j(x) = v_j(y)$ для всех $j \in M$; иными словами, xIy лишь в случае, когда векторы x и y получаются друг из друга при помощи некоторых перестановок их координат (т. е. состоят из одних и тех же оценок, поставленных возможно на различные места в этих векторах). Последнее обстоятельство позволяет не рассматривать все вектора из $X = M^n$, а ограничиться лишь "главными" векторами, координаты которых упорядочены по возрастанию:

$$X^* = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M^n : x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n\}, \tag{5.2}$$

и ранжировать при помощи отношения P лишь множество X^*. Число элементов в множестве X^* может быть выражено при помощи биномиальных коэффициентов по следующей формуле ([10, 11, 19]):

$$|X^*| = C_{n+m-1}^{m-1} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}. \tag{5.3}$$

Так, например, при $m = 5$ это значение равно $(n{+}4)(n{+}3)(n{+}2)(n{+}1)/(24)$, т. е. это есть $15, 35, 70, 126$ соответственно при $n = 2, 3, 4, 5$.

Приведем пример рейтингования элементов множества X^* при $n = 4$ и $m = 5$ (заметим, что в силу (5.3) $|X^*| = 70$):

$(1,1,1,1)_1$, $(1,1,1,2)_2$, $(1,1,1,3)_3$, $(1,1,1,4)_4$, $(1,1,1,5)_5$,
$(1,1,2,2)_6$, $(1,1,2,3)_7$, $(1,1,2,4)_8$, $(1,1,2,5)_9$,
$(1,1,3,3)_{10}$, $(1,1,3,4)_{11}$, $(1,1,3,5)_{12}$,
$(1,1,4,4)_{13}$, $(1,1,4,5)_{14}$, $(1,1,5,5)_{15}$,
$(1,2,2,2)_{16}$, $(1,2,2,3)_{17}$, $(1,2,2,4)_{18}$, $(1,2,2,5)_{19}$,
$(1,2,3,3)_{20}$, $(1,2,3,4)_{21}$, $(1,2,3,5)_{22}$,
$(1,2,4,4)_{23}$, $(1,2,4,5)_{24}$, $(1,2,5,5)_{25}$,
$(1,3,3,3)_{26}$, $(1,3,3,4)_{27}$, $(1,3,3,5)_{28}$,
$(1,3,4,4)_{29}$, $(1,3,4,5)_{30}$, $(1,3,5,5)_{31}$,
$(1,4,4,4)_{32}$, $(1,4,4,5)_{33}$, $(1,4,5,5)_{34}$, $(1,5,5,5)_{35}$,
$(2,2,2,2)_{36}$, $(2,2,2,3)_{37}$, $(2,2,2,4)_{38}$, $(2,2,2,5)_{39}$,
$(2,2,3,3)_{40}$, $(2,2,3,4)_{41}$, $(2,2,3,5)_{42}$,
$(2,2,4,4)_{43}$, $(2,2,4,5)_{44}$, $(2,2,5,5)_{45}$,
$(2,3,3,3)_{46}$, $(2,3,3,4)_{47}$, $(2,3,3,5)_{48}$,
$(2,3,4,4)_{49}$, $(2,3,4,5)_{50}$, $(2,3,5,5)_{51}$,
$(2,4,4,4)_{52}$, $(2,4,4,5)_{53}$, $(2,4,5,5)_{54}$, $(2,5,5,5)_{55}$,
$(3,3,3,3)_{56}$, $(3,3,3,4)_{57}$, $(3,3,3,5)_{58}$,
$(3,3,4,4)_{59}$, $(3,3,4,5)_{60}$, $(3,3,5,5)_{61}$,
$(3,4,4,4)_{62}$, $(3,4,4,5)_{63}$, $(3,4,5,5)_{64}$, $(3,5,5,5)_{65}$,
$(4,4,4,4)_{66}$, $(4,4,4,5)_{67}$, $(4,4,5,5)_{68}$, $(4,5,5,5)_{69}$, $(5,5,5,5)_{70}$.

Как и выше, нижний индекс справа у вектора означает порядковый номер этого вектора в итоговом рейтинговании X^* относительно P, и чем больше этот номер, тем более предпочтительной является альтернатива. В этом примере порядковые номера векторов в рейтинговании вычисляются по формуле (3.1), которая справедлива при любом $n \geqslant 2$. Отметим, что функция N из (3.1) является функцией предпочтения для P на X (т. е. $P = \{(x, y) \in X \times X : N(x) > N(y)\}$), обладающей дополнительным свойством: множество $\{N(x) : x \in X\}$ ее значений совпадает с отрезком натуральных чисел $[1, |X^*|] = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leqslant k \leqslant |X^*|\}$.

Функции предпочтения с этим дополнительным свойством называются *функциями перечисления* ([15]). Последние являются наиболее "экономными" из всех функций предпочтения для P, поскольку позволяют не только качественно рейтинговать множество X^* (а, следовательно, и все X), но и присваивать бóльшие номера в естественном порядке более предпочтительным альтернативам.

В общем случае невозможно выписать все таблицы рейтингований элементов множества X^* при произвольных $n \geqslant 2$ и $m \geqslant 3$, поэтому принципиально важное значение имеет функция перечисления N для P, которая альтернативе $x \in X$ присваивает порядковый номер $N(x) \in [1, |X^*|]$ этой альтернативы в ранжировании X относительно P. Формула для этой функции была анонсирована в [10, 15] и обоснована в [20]:

$$N(x) = \sum_{j=1}^{m-2} C_{n-V_j(x)+m-j-1}^{m-j} + v_m(x) + 1, \tag{5.4}$$

где $V_j(x) = v_1(x) + \cdots + v_j(x)$ и через $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ обозначены обычные биномиальные коэффициенты при $0 \leqslant k \leqslant n$ и $C_{k-1}^k = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant n$. В частности, при $m = 5$ формула (5.4) приобретает частный вид (3.1). Для дальнейшего применения преобразуем формулу (5.4). Поскольку

$$\begin{aligned} C_{n-V_j(x)+m-j-1}^{m-j} &= \frac{(n - V_j(x) + m - j - 1)!}{(m-j)!(n - V_j(x) - 1)!} = \\ &= \frac{1}{(m-j)!} \prod_{k=0}^{m-j-1} \big(k + n - V_j(x)\big) \end{aligned}$$

и в силу равенства (5.1) $n - V_j(x) = v_{j+1}(x) + \cdots + v_m(x)$, то для (5.4) получим более развернутое выражение:

$$N(x) = \sum_{j=1}^{m-2} \frac{1}{(m-j)!} \prod_{k=0}^{m-j-1} \left(k + \sum_{i=j+1}^{m} v_i(x)\right) + v_m(x) + 1. \tag{5.5}$$

6. Вычисление рейтинговых сумм и индексов

В этом разделе приведено описание четырех видов рейтинговых "сумм", двух компенсаторных и двух некомпенсаторных, на основе которых в следующем разделе будет проведено рейтингование студентов НФ ГУ-ВШЭ и сравнение их итоговых рейтингов. Поскольку, как это принято в «Положении ... » [24] и отмечено в разделах 4.1 и 4.2, максимальная годовая сумма баллов для рейтинга равна $600 = 60 \cdot 10$, в дальнейшем для цели сравнения итоговых рейтингов будем "нормировать" все четыре вида рейтинговых "сумм" на 600 единиц.

Предположим, что в результате серии из n экзаменов получен вектор оценок $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где каждая оценка $1 \leqslant x_i \leqslant 10$ — целое число (напомним, что в ГУ-ВШЭ принята десятибалльная система оценок).

Первая рейтинговая сумма $\mathsf{A}n$, основанная на среднем балле (§ 4.4), вычисляется без учета весов дисциплин по формуле:

$$\mathsf{A}n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \cdot 60 = A(x) \cdot 60; \tag{6.1}$$

здесь предполагается также, что все оценки в векторе x — "положительные", т. е. все $x_i \geqslant 4$ (нет студентов с задолженностями).

Вторая рейтинговая сумма $\mathsf{S}n$ опирается на формулу (4.2), учитывает веса дисциплин w_i и имеет вид:

$$\mathsf{S}n = \overline{w}_1 x_1 + \cdots + \overline{w}_n x_n, \tag{6.2}$$

где для $i \in \{1, \ldots, n\}$ положено: $\overline{w}_i = 0$ при $x_i = 1$, 2 или 3, и $\overline{w}_i = w_i$ при $x_i = 4, 5, \ldots, 10$, и $w_1 + \cdots + w_n = 60$.

Обе рейтинговые суммы $\mathsf{A}n$ и $\mathsf{S}n$ носят компенсаторный характер.

6.1. Рейтинговый индекс $\mathsf{N}n$ без учета весов дисциплин. Для вычисления третьей (уже некомпенсаторной) рейтинговой "суммы", называемой *некомпенсаторным рейтинговым индексом*, обозначаемым через $\mathsf{N}n$, где, как правило, $n \ll 60$, и основанным на формуле (5.4), потребуются *переобозначения в* (так называемые) *действующие оценки*, которое осуществляется следующим образом: оценки 1, 2 и 3 в x, не считающиеся "положительными", обозначаются через 1 (это — первая действующая оценка и, к тому же, самая низкая в модели, описанной в § 5), а остальные оценки

$$j \text{ обозначаются через } j-2 \text{ для } j = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. \tag{6.3}$$

Иными словами, если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор из "положительных" оценок с $4 \leqslant x_i \leqslant 10$, то действующими оценками являются компоненты вектора $x - (2^n) = (x_1 - 2, \ldots, x_n - 2)$; здесь через (2^n) обозначен n-мерный вектор $(2, \ldots, 2)$. Тем самым вектора с действующими оценками входят в восьмибалльную систему ($m = 8$) и к ним применимо сказанное в § 5. Переобозначение (6.3) требуется в первую очередь для применения формулы (5.4). Но поскольку в этой формуле мы имеем дело с количеством $v_j(x)$ оценок j в векторе x, а не с самими оценками j, то при вычислении значения (5.4) на векторе $x - (2^n)$ будут учитываться именно количества исходных оценок из вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$: действительно, для $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ находим, что

$$v_k(x-(2^n)) = |\{1 \leqslant i \leqslant n : x_i - 2 = k\}| = |\{1 \leqslant i \leqslant n : x_i = k+2\}| = v_{k+2}(x),$$

где $k + 2$ принимает соответственно значения $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Всюду ниже в этом параграфе считаем, что $M = \{1, \ldots, 8\}$, т. е. во всех векторах $x \in X = M^n$ все оценки действующие.

В соответствии с обозначениями из § 3 и § 5 для векторов-альтернатив $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ будем писать

$$x \preccurlyeq y \quad (\text{или} \quad y \succcurlyeq x), \quad \text{если} \quad x_i \leqslant y_i \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad i \in M.$$

Как было отмечено в § 5, при помощи порогового отношения (слабого порядка) P достаточно упорядочить лишь множество X^* из (5.2). Поскольку сужение отношения P на X^* является линейным порядком на X^* (напомним, что вектор $x \in X^*$ имеет порядковый номер $N(x)$, выражаемый формулой (5.4) и обладающий свойством Парето-доминирования, т. е. из $x \preccurlyeq y$ вытекает, что $N(x) \leqslant N(y)$, см. [10, 11, 19]), то само множество X^* удобно разбить на *блоки* (подмножеств) следующих ниже видов. Для этого для удобства записи примем следующее соглашение: если оценка j в векторе x повторяется k раз, то она будет обозначаться через (j^k). Например, $(1^n) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$, $(1^3, 2, 8^{n-2}) = (1, 1, 1, 2, \underbrace{8, \ldots, 8}_{n-2})$ и т. д.

Разобьем диапазон (рейтинговых "сумм") от 1 до 600 на следующие 6 равных натуральных отрезков: 1) от 1 до 100; 2) от 101 до 200; 3) от 201 до 300; 4) от 301 до 400; 5) от 401 до 500; и 6) от 501 до 600. В соответствии с этим произведем разбиение X^* на *блоки оценок*.

Для $k = 1, 2, 3, 4, 5$ обозначим через $\boxed{k}$ множество, называемое *k-м блоком оценок*, которое составляют векторы $x \in X^*$, удовлетворяющие неравенствам $(k^n) \preccurlyeq x \preccurlyeq (k, 8^{n-1})$. Чем больше номер блока, тем более предпочтительным этот блок является с точки зрения порогового отношения P. Студенты с оценками из первого блока $\boxed{1}$ имеют пересдачи ввиду

наличия единиц в их оценках. При $2 \leqslant k \leqslant 5$ студенты с оценками из блока $\boxed{k}$ имеют согласно (6.3) минимальную оценку $k+2$ по десятибалльной системе. Таким образом, если $x \in \boxed{k}$, то $N(k^n) \leqslant N(x) \leqslant N(k, 8^{n-1})$, где значения слева и справа вычисляются по формуле (5.4) при $m = 8$ следующим образом. При $k = 1$ имеем $N(1^n) = 1$, а при $2 \leqslant k \leqslant 5$ для $x = (k^n)$ находим, что $V_1(x) = \cdots = V_{k-1}(x) = 0$, $V_k(x) = \cdots = V_6(x) = n$ и $v_8(x) = 0$, откуда

$$N(k^n) = \sum_{j=1}^{k-1} C_{n+7-j}^{8-j} + 1. \tag{6.4}$$

Далее при $2 \leqslant k \leqslant 5$ для $x = (k, 8^{n-1})$ имеем $V_1(x) = \cdots = V_{k-1}(x) = 0$, $V_k(x) = \cdots = V_6(x) = 1$ и $v_8(x) = n - 1$, откуда снова в силу (5.4)

$$N(k, 8^{n-1}) = \sum_{j=1}^{k-1} C_{n+7-j}^{8-j} + \sum_{j=k}^{6} C_{n+6-j}^{8-j} + n. \tag{6.5}$$

Отметим, что последнее равенство верно и при $k = 1$, если принять соглашение в первой сумме о том, что $\sum_{j=1}^{0} = 0$. Численные значения номеров (6.4) и (6.5) при $n = 11, 15, 16$ и 60 приведены в Приложении 1.

Произведем "нормировку" диапазона целых чисел от $N(k^n)$ до $N(k, 8^{n-1})$ так, чтобы рейтинговая сумма $\mathsf{N}n$ попала в натуральный интервал от $(k-1) \cdot 100 + 1$ до $k \cdot 100$ для вектора $x \in \boxed{k}$, $1 \leqslant k \leqslant 5$:

$$\mathsf{N}n \equiv \mathsf{N}n(x) = \left[\frac{N(x) - N(k^n)}{N(k, 8^{n-1}) - N(k^n)} \cdot 100 \right] + (k-1) \cdot 100 + 1, \tag{6.6}$$

если $x \neq (k, 8^{n-1})$, и $\mathsf{N}n(k, 8^{n-1}) = k \cdot 100$. Здесь значение $N(x)$ вычисляется по формуле (5.4) при $m = 8$ и через $[z]$ обозначена целая часть числа z, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее z. Следует отметить, что округление, имеющее место в (6.6), конечно, дает некоторую погрешность, которая, впрочем, несущественна для целей рейтингования.

Описанным выше способом задействован диапазон чисел от 1 до 500. Теперь для того, чтобы задействовать диапазон чисел от 501 до 600, отнесем к последнему шестому блоку $\boxed{6}$ те векторы $x \in X^*$, для которых $(6^n) \preccurlyeq x \preccurlyeq (8^n)$. Студенты с оценками из этого блока представляют собой (обычно) самую малочисленную группу отличников с наименьшей оценкой $8 = 6 + 2$ по десятибалльной системе. Если $x \in \boxed{6}$, то $N(6^n) \leqslant N(x) \leqslant N(8^n)$, где в силу (5.4)

$$N(6^n) = \sum_{j=1}^{5} C_{n+7-j}^{8-j} + 1 \quad \text{и} \quad N(8^n) = |X^*| = C_{n+7}^{7}. \tag{6.7}$$

“Нормируя” диапазон от $N(6^n)$ до $N(8^n)$ таким образом, чтобы рейтинговая сумма $\mathsf{N}n$ принимала значения от 501 до 600 для вектора $x \in \boxed{6}$, найдем, что

$$\mathsf{N}n \equiv \mathsf{N}n(x) = \left[\frac{N(x) - N(6^n)}{N(8^n) - N(6^n)} \cdot 100\right] + 501, \qquad x \neq (8^n), \tag{6.8}$$

и $\mathsf{N}n(8^n) = 600$.

6.2. Интерпретация рейтингового индекса $\mathsf{N}n$. Рейтинговые “суммы” $\mathsf{A}n$ и $\mathsf{N}n$, не учитывающие веса дисциплин в нагрузке, имеют разный смысл. Чтобы прояснить смысл некомпенсаторного индекса $\mathsf{N}n$, рассмотрим два примера векторов низкой размерности $n = 3$ (для облегчения счета), где, по-прежнему, $m = 8$.

Пример 1. Пусть $x = (1, 7, 7)$, $y = (1, 4, 5)$ и $z = (1, 1, 8)$. Эти векторы лежат в блоке $\boxed{1}$, поэтому студенты с этими оценками имеют пересдачи. Если не учитывать первую оценку в векторах, то по двум оставшимся оценкам видно, что x предпочтительнее y, а y предпочтительнее z. С другой стороны, по этим же двум оценкам можно, например, предположить, что единица “вкралась” в x возможно случайно, что гораздо труднее сказать про y, а в z случайной оценкой скорее всего является 8.

Рассчитаем значение рейтингового индекса $\mathsf{N}3$ для этих векторов. Согласно сказанному в разд. 6.1 для $k = 1$, имеем: $N(1^3) = 1$, $N(1, 8^2) = 36$, $N(x) = 34$, $N(y) = 23$ и $N(z) = 8$, а потому, в силу (6.6) находим, что $\mathsf{N}3(x) = 95$, $\mathsf{N}3(y) = 63$ и $\mathsf{N}3(z) = 21$ (из возможных 600 баллов). Эти рейтинговые индексы могут показаться весьма малыми, но они учитывают два обстоятельства. Во-первых, то, что они не выходят за рамки сотни (по построению), уже означает, что в векторах имеются самые низкие оценки. Во-вторых, близость числа $\mathsf{N}3(x) = 95$ к 100 означает, что в x имеются весьма высокие оценки, тогда как близость $\mathsf{N}3(z) = 21$ к 1 показывает, что в z имеется еще достаточно много низких оценок. В этом смысле $\mathsf{N}3(y) = 63$ есть что-то “среднее” между 100 и 1, поэтому в y достаточно много средних оценок.

Для сравнения вычислим рейтинговую сумму $\mathsf{A}3$ для этих векторов. Учитывая (6.3), вначале действующие оценки переведем в реальные: $\overline{x} = (3, 9, 9)$, $\overline{y} = (3, 6, 7)$ и $\overline{z} = (3, 3, 10)$. Тогда в силу (6.1) найдем, что $\mathsf{A}3(\overline{x}) = 420$, $\mathsf{A}3(\overline{y}) = 320$ и $\mathsf{A}3(\overline{z}) = 320$ (с округлением). На основе этих оценок даже качественно нельзя сказать были ли пересдачи у кого-либо и насколько много высоких или низких оценок в этих векторах.

Следующий пример подтверждает основные доводы предыдущего примера, поэтому приводится без комментариев.

Пример 2. Пусть $u = (4, 7, 7)$, $v = (4, 5, 7)$ и $w = (4, 4, 8)$. Эти векторы лежат в блоке $\boxed{4}$, поэтому студенты с этим оценками — хорошисты, у которых минимальная оценка 6 по десятибалльной системе. Согласно разделу 6.1 при $k = 4$, имеем: $N(4^3) = 86$, $N(4, 8^2) = 100$, $N(u) = 98$, $N(v) = 93$ и $N(w) = 90$, а потому, в силу (6.6) находим, что $\mathsf{N3}(u) = 381$, $\mathsf{N3}(v) = 347$ и $\mathsf{N3}(w) = 327$ (из возможных 600 баллов). Для сравнения выпишем и сумму $\mathsf{A3}$. Поскольку $\overline{u} = (6, 9, 9)$, $\overline{v} = (6, 7, 9)$ и $\overline{w} = (6, 6, 10)$, то $\mathsf{A3}(\overline{u}) = 480$, $\mathsf{A3}(\overline{v}) = 440$ и $\mathsf{A3}(\overline{w}) = 440$ (с округлением). Отметим, что последние две суммы для хорошистов весьма близки сумме $\mathsf{A3}(\overline{x}) = 420$ для неуспевающего студента из предыдущего примера.

Таким образом, приведенные примеры иллюстрируют следующие выводы, которые можно сделать на основе знания для $x \in X^*$ рейтинговых индексов вида $\mathsf{N}n = \mathsf{N}n(x)$.

А) Можно классифицировать студентов по успеваемости: если сумма $\mathsf{N}n$ не превосходит 100, то студент — неуспевающий; если эта сумма находится в пределах от 101 до 300, то студент учится удовлетворительно; если $\mathsf{N}n$ располагается в пределах от 301 до 500, то студент — хорошист и, наконец, отличники имеют рейтинговый индекс в пределах от 501 до 600. В частности, значение $\mathsf{N}n$ позволяет автоматически отслеживать возможность назначения стипендии или применять другие поощрения. Кроме того, студент с задолженностями никогда не будет иметь рейтинговое значение (индекс) выше, чем студент без академических задолженностей.

Б) Можно квалифицированно рейтинговать студентов, присваивая номер один студенту, имеющему наибольший рейтинговый индекс $\mathsf{N}n$, номер два — студенту, имеющему следующий по величине рейтинговый индекс $\mathsf{N}n$, и т.д.

В) Кроме количественных характеристик в А) и Б), рейтинговый индекс $\mathsf{N}n$ позволяет выявлять и некоторые качественные характеристики. А именно, чем ближе рейтинговая сумма $\mathsf{N}n(x)$ к следующей сотне (в примере 1 — к 100, а в примере 2 — к 400), тем в векторе оценок x больше самых высоких оценок, так что, хотя низкие оценки и учтены весьма существенным образом, возможно они не являются определяющими (носят случайный характер, получены по неопытности и т. п.). В то же самое время, чем ближе значение $\mathsf{N}n(x)$ к предыдущей сотне (в примере 1 — к 1, а в примере 2 — к 300), тем в векторе x имеется большое количество “не особенно высоких” оценок. Наконец, “среднее” между крайними сотнями значение $\mathsf{N}n$ (в примере 1 — между 1 и 100, в примере 2 — между 300 и 400) может свидетельствовать об “определенной стабильности” знаний или незнаний студента в зависимости от значения рейтингового индекса.

6.3. Рейтинговый индекс N60 с учетом весов дисциплин. Прежде чем описать вычисление рейтингового индекса N60, отметим, что функция $S(x)$ из (4.2), вообще говоря, не является симметричной (если хотя бы для одного $i \in \{1, \ldots, n\}$ вес $w_i \neq 60/n$), т. е. при перестановке местами координат вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ значение $S(x)$ изменяется. Такое положение объясняется наличием весов w_i в формуле (4.2), учитывающих кредиты учебных дисциплин. В то же самое время функция $N(x)$ из (5.4) является симметричной: значение $N(x)$ не зависит от перестановки местами координат вектора x.

Для того чтобы учесть кредиты дисциплин в рейтинговании без компенсаций, проделаем следующее. Запишем стандартную рейтинговую сумму (4.2) в виде:

$$S(x) = \underbrace{x_1 + \cdots + x_1}_{w_1 \text{ раз}} + \underbrace{x_2 + \cdots + x_2}_{w_2 \text{ раз}} + \cdots + \underbrace{x_n + \cdots + x_n}_{w_n \text{ раз}}.$$

Поскольку $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 60$, то значение $S(x)$ совпадает со значением симметричной функции от 60 независимых переменных $W(y) = \sum_{i=1}^{60} y_i$, вычисленной на 60-мерном векторе $y = (y_1, \ldots, y_{60}) = (x_1^{w_1}, x_2^{w_2}, \ldots, x_n^{w_n})$. При этом вес w_i учитывается в том смысле, что за i-ю дисциплину одна и та же оценка x_i проставляется w_i раз (это не единственный способ учета весов дисциплин, но лишь он будет рассматриваться в этой работе как наиболее естественный). Переводя оценки указанного вектора y в действующие по правилу (6.3), получим новый 60-мерный вектор с компонентами, принимающими значения от 1 до 8. Для последнего вектора определяем рейтинговые индексы (6.6) и (6.8) при $n = 60$, которые и обозначаются через N60 (возможно с указанием аргумента, если требуется). Полученная таким образом четвертая некомпенсаторная рейтинговая "сумма" N60 обладает свойствами А), Б) и В) из разд. 6.2.

7. Практическое рейтингование студентов НФ ГУ-ВШЭ

В этом параграфе приведено сравнение определенных в предыдущем параграфе четырех видов рейтинговых "сумм" применительно к студентам 1-го, 2-го и 3-го курсов дневной формы обучения факультета Бизнес-информатики и прикладной математики НФ ГУ-ВШЭ. Все оценки взяты из реальных экзаменационных ведомостей за 2008–2009 гг.[1] Рейтинговые суммы, индексы и рейтинги вычисляются на основе n экзаменационных оценок, где $n = 11$, 15, 16 (без учета кредитов) и 60 (с учетом весов дисциплин) в зависимости от плановой учебной нагрузки за год.

[1] Отметим, что оценки носят иллюстративный характер, поскольку приводятся без учета индивидуальных планов студентов.

Предметы	Правовед.	Психолог.	Иссл. оп.(з)	Иссл. оп.(Э)	ЧММ(з)	ЧММ(Э)	Базы д.(з)	Базы д.(Э)	Эконометр.	Логистика	Мат. ан.-3	Физика	Нечет. лог.	Курсовая	Практика	Англ. яз.
Кредиты	3	3	4	5	2	5	2	5	5	3	3	3	3	5	6	3
A	7	5	9	9	6	8	4	4	6	9	10	8	7	9	10	6
B	7	5	8	9	9	8	6	6	7	7	8	6	8	0	10	10
C	7	6	7	8	5	8	4	5	7	6	7	6	5	0	10	7
D	6	5	5	0	4	8	7	5	6	6	5	4	5	9	10	7
E	9	8	8	6	4	0	6	5	7	10	6	4	6	0	10	7
F	5	7	5	0	5	5	4	4	4	6	7	4	7	0	10	4

Таблица 1: Учебная нагрузка и оценки студентов группы 1

7.1. Группа 1. Учебная нагрузка и оценки студентов группы 1 приведены в табл. 1. Изучаемые предметы указаны в первой строке таблицы, соответствующие им кредиты — во второй строке, и в оставшихся строках — оценки студентов A, B, C, D, E и F по соответствующим ($n = 16$) предметам. Встречающаяся в таблице оценка 0 означает неуспешную сдачу экзамена (зачета, курсовой и т. п.) по дисциплине и используется для расчета рейтинговых сумм A16 и S16. Для расчета рейтинговых индексов N16 и N60 оценка 0 заменяется на оценку 1. В первой строке таблицы использованы следующие сокращения названий: Предметы — дисциплины утвержденного рабочего плана, Кредиты — академические кредиты, Правовед. — правоведение, Психолог. — психология, Иссл. оп. — исследование операций, (з) — зачет, (Э) — экзамен, ЧММ — численные методы моделирования, Базы д. — базы данных, Эконометр. — эконометрика, Мат. ан. — математический анализ, Нечет. лог. — нечеткая логика и нейронные сети, Курсовая — курсовая работа, Практика — производственная практика, Англ. яз. — английский язык.

Рейтинги и рейтинговые суммы и индексы студентов A, B, C, D, E и F приведены в табл. 2 на с. 23. В первом столбце показан рейтинг студента, т.е. его порядковый номер в рейтинговании в зависимости от величины рейтинговой суммы или индекса, в столбцах Ст. перечислены студенты, соответствующие этим порядковым номерам, а в остальных столбцах при-

№	Ст.	A16	Ст.	S16	Ст.	N16	Ст.	N60
1	A	439	A	452	A	163	A	153
2	B	428	B	425	B	97	B	63
3	C	368	C	378	C	87	C	62
4	E	360	D	356	D	80	D	60
5	D	345	E	352	E	55	E	32
6	F	289	F	283	F	48	F	31

Таблица 2: Рейтинги студентов группы 1

водятся соответствующие студентам рейтинговые суммы A16 и S16 и индексы N16 и N60. Графическое представление значений рейтинговых сумм и индексов из табл. 2 приведено на рис. 1 в Приложении 2.

Покажем на примере студента A расчет рейтинговых сумм A16 и S16 и индексов N16 и N60.

7.2. Расчет рейтинговых сумм A16 и S16. Согласно (6.1) и (6.2), для A16 и S16 соответственно имеем (см. данные в табл. 1):

$$\mathsf{A16} = \frac{7+5+9+9+6+8+4+4+6+9+10+8+7+9+10+6}{16} \cdot 60 = 438,75,$$

что после округления, например, к ближайшему целому числу, равно 439,

$$\mathsf{S16} = 7\cdot 3+5\cdot 3+9\cdot 4+9\cdot 5+6\cdot 2+8\cdot 5+4\cdot 2+4\cdot 5+6\cdot 5+9\cdot 3+10\cdot 3+$$
$$+8\cdot 3+7\cdot 3+9\cdot 5+10\cdot 6+6\cdot 3 = 452.$$

Рейтинговые суммы A16 и S16 для остальных студентов вычисляются аналогично. Приведенные в табл. 2 числа в столбцах A16 и S16 получены при помощи программы Microsoft Office Excel.

7.3. Расчет рейтингового индекса N16. Вычисление рейтинговых индексов N16 и N60 вручную является трудоемкой задачей, поэтому для их вычисления использовалась написанная авторами специальная компьютерная программа на языке C++. Для более быстрой работы этой программы в некоторых случаях формула (5.5) более адекватна. Ниже показано как вычислять рейтинговые индексы Nn при $n = 16$ вручную (из чего видна и идея алгоритма).

Оценки студента А можно записать в виде 16-мерного вектора

$$(7, 5, 9, 9, 6, 8, 4, 4, 6, 9, 10, 8, 7, 9, 10, 6),$$

который после упорядочения (по возрастанию) принимает вид:

$$(4^2, 5^1, 6^3, 7^2, 8^2, 9^4, 10^2),$$

где степень у числа как всегда показывает его кратность, так что сумма всех этих степеней равна $2 + 1 + 3 + 2 + 2 + 4 + 2 = 16$. В соответствии с нашим переобозначением в действующие оценки (6.3) (вычитанием из каждой координаты двойки) находим, что альтернатива А характеризуется (упорядоченным) 16-мерным вектором при $m = 8$:

$$x = (2^2, 3^1, 4^3, 5^2, 6^2, 7^4, 8^2). \tag{7.1}$$

Этот вектор принадлежит блоку $\boxed{2}$, поэтому значение (6.6) вычисляется при $k = 2$. В формулу (6.6) входят величины $N(x)$, $N(2^{16})$ и $N(2, 8^{15})$. Вычислим значение $N(x)$ по формуле (5.4) при $n = 16$ и $m = 8$. Поскольку $v_1(x) = 0$, $v_2(x) = 2$, $v_3(x) = 1$, $v_4(x) = 3$, $v_5(x) = 2$, $v_6(x) = 2$, $v_7(x) = 4$ и $v_8(x) = 2$ (а потому, выполнено равенство (5.1)), то $V_1(x) = 0$, $V_2(x) = 2$, $V_3(x) = 3$, $V_4(x) = 6$, $V_5(x) = 8$, $V_6(x) = 10$, откуда в силу (5.4) получим:

$$\begin{aligned}
N(x) &= \sum_{j=1}^{6} C_{23-V_j(x)-j}^{8-j} + v_8(x) + 1 = \\
&= C_{22}^7 + C_{19}^6 + C_{17}^5 + C_{13}^4 + C_{10}^3 + C_7^2 + 2 + 1 = \\
&= \frac{16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20\cdot21\cdot22}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{14\cdot15\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \\
&\quad + \frac{10\cdot11\cdot12\cdot13}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3} + \frac{6\cdot7}{1\cdot2} + 2 + 1 = \\
&= 170\,544 + 27\,132 + 6\,188 + 715 + 120 + 21 + 2 + 1 = 204\,723.
\end{aligned}$$

Значение $N(2^{16})$ вычисляется по формуле (6.4) при $k = 2$ и $n = 16$:

$$N(2^{16}) = C_{22}^7 + 1 = 170\,545.$$

Значение $N(2, 8^{15})$ вычисляется по формуле (6.5) при $k = 2$ и $n = 16$:

$$N(2, 8^{15}) = C_{22}^7 + \sum_{j=2}^{6} C_{22-j}^{8-j} + 16 = 224\,808.$$

(Оба последних значения приведены в Приложении 1 при $n = 16$.) Таким образом, в силу (6.6) находим, что

$$\mathsf{N}16(x) = \left[\frac{N(x) - N(2^{16})}{N(2, 8^{15}) - N(2^{16})} \cdot 100\right] + 101 = \left[\frac{34178}{54263} \cdot 100\right] + 101 = 62 + 101 = 163.$$

Согласно положениям А) и В) из разд. 6.2 можно сказать, что студент А имеет незначительное число удовлетворительных оценок (т. е. оценок 4 и 5), поэтому стипендию не получает, но в то же время у него подавляющее большинство скорее средних оценок, чем самых высоких (т. к. значение 163 лежит между 100 и 200).

Следующий по рейтингу студент — В, имеющий рейтинговую сумму $\mathsf{N}16 = 97$. Интересно отметить, что если перевести его официальные оценки $(0, 5, 6^3, 7^3, 8^4, 9^2, 10^2)$ в действующие $x = (1, 3, 4^3, 5^3, 6^4, 7^2, 8^2)$, то видно, что они схожи с оценками студента А из (7.1) и даже по некоторым позициям выше. Тем не менее, рейтинг В ниже рейтинга А, поскольку самые низкие оценки в обоих вектора (а у В их больше, чем у А) существенно учтены при рейтинговании.

7.4. Расчет рейтингового индекса $\mathsf{N}60$. Для вычисления рейтингового индекса $\mathsf{N}60$ для студента А запишем два 16-мерных вектора:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
(3, & 3, & 4, & 5, & 2, & 5, & 2, & 5, & 5, & 3, & 3, & 3, & 3, & 5, & 6, & 3), \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
(7, & 5, & 9, & 9, & 6, & 8, & 4, & 4, & 6, & 9, & 10, & 8, & 7, & 9, & 10, & 6).
\end{array}$$

Первый из этих векторов представляет собой вектор кредитов $(w_1, \ldots, w_n)$ (см. табл. 1), сумма всех координат которого равна 60, а второй — вектор оценок. Исходя из сказанного в разд. 6.3, первую оценку 7 следует повторить 3 раза (т. е. w_1 раз, где $w_1 = 3$), вторую оценку 5 — 3 раза, третью оценку 9 — 4 раза и т.д. В результате 60-мерный вектор оценок с учетом весов имеет вид:

$$(7^3,\ 5^3,\ 9^4,\ 9^5,\ 6^2,\ 8^5,\ 4^2,\ 4^5,\ 6^5,\ 9^3,\ 10^3,\ 8^3,\ 7^3,\ 9^5,\ 10^6,\ 6^3).$$

Упорядочивая его координаты по возрастанию, получим:

$$(4^7,\ 5^3,\ 6^{10},\ 7^6,\ 8^8,\ 9^{17},\ 10^9).$$

Переводя этот вектор в вектор с действующими оценками согласно (6.3), найдем, что альтернатива А характеризуется 60-мерным вектором с оценками от 1 до 8:

$$x = (2^7,\ 3^3,\ 4^{10},\ 5^6,\ 6^8,\ 7^{17},\ 8^9).$$

Поскольку x лежит во втором блоке $\boxed{2}$, то $\mathsf{N}60(x)$ вычисляется по формуле (6.6) при $k = 2$ и $n = 60$. Для вычисления значения $N(x)$ подставим в (5.4) $n = 60$ и $m = 8$ и заметим, что $V_1(x) = 0$, $V_2(x) = 7$, $V_3(x) = 10$, $V_4(x) = 20$, $V_5(x) = 26$, $V_6(x) = 34$ и $v_8(x) = 9$. Тогда

$$\begin{aligned} N(x) &= \sum_{j=1}^{6} C_{67-V_j(x)-j}^{8-j} + v_8(x) + 1 = \\ &= C_{66}^{7} + C_{58}^{6} + C_{54}^{5} + C_{43}^{4} + C_{36}^{3} + C_{27}^{2} + 9 + 1 = \\ &= 778\,789\,440 + 40\,475\,358 + 3\,162\,510 + 123\,410 + \\ &\qquad + 7\,140 + 351 + 9 + 1 = 822\,558\,219. \end{aligned}$$

Значения $N(2, 8^{59})$ и $N(2^{60})$, которые вычисляются соответственно по формулам (6.5) и (6.4) при $k = 2$ и $n = 60$, и их разности возьмем из Приложения 1(IV):

$$N(2^{60}) = 778\,789\,441 \quad \text{и} \quad N(2, 8^{59}) - N(2^{60}) = 82\,598\,879.$$

Тогда значение (6.6) равно

$$\begin{aligned} \mathsf{N}60(x) &= \left[\frac{N(x) - N(2^{60})}{N(2, 8^{59}) - N(2^{60})} \cdot 100\right] + 101 = \left[\frac{43\,768\,778}{82\,598\,879} \cdot 100\right] + 101 = \\ &= 52 + 101 = 153. \end{aligned}$$

Рейтингования, основанные на рейтинговых индексах $\mathsf{N}16$ и $\mathsf{N}60$, имеют то преимущество, что могут отслеживать и классифицировать группы студентов (посредством принадлежности их оценок к 6 блокам), которые являются неуспевающими, имеющих удовлетворительные оценки, хорошистов, отличников, претендентов на получение стипендии.

7.5. Группа 2. Учебная нагрузка и оценки студентов группы 2 приведены в табл. 3 на с. 27. Эта таблица устроена точно также, как и табл. 1. Всего студентов в группе (А–М) — 13 человек, которые оцениваются по результатам $n = 16$ экзаменов. В первой строке таблицы использованы следующие дополнительные сокращения названий: Менеджм. — менеджмент, Фин. менед. — финансовый менеджмент.

Рейтинги, рейтинговые суммы и индексы студентов А–М приведены в табл. 4 на с. 28. Как и выше, в первом столбце показан рейтинг студента — его порядковый номер в рейтинговании в зависимости от величины рейтинговой суммы, в столбцах Ст. перечислены студенты, соответствующие

Предметы	Правовед.	Психолог.	Иссл. оп.(з)	Иссл. оп.(Э)	ЧММ(з)	ЧММ(Э)	Базы д.(з)	Базы д.(Э)	Эконометр.	Логистика	Менеджм.	Фин. менед.	Нечет. лог.	Курсовая	Практика	Англ. яз.
Кредиты	3	3	4	5	2	5	2	5	5	3	3	3	3	5	6	3
A	6	6	8	6	7	9	10	7	6	10	8	7	7	8	10	6
B	8	8	10	9	10	10	9	9	9	10	8	10	9	0	10	10
C	8	9	10	9	9	9	9	9	7	10	9	10	9	0	10	10
D	8	7	10	10	8	9	8	6	7	9	8	9	8	0	10	8
E	7	7	8	8	6	0	10	9	7	6	7	8	8	7	10	8
F	8	7	8	7	6	8	6	6	7	9	8	9	8	0	10	8
G	8	10	8	5	6	9	8	6	7	10	9	9	9	0	10	10
H	4	4	4	5	5	8	4	4	4	10	7	7	5	0	10	6
I	8	6	7	5	7	0	4	6	4	6	6	6	7	0	10	7
J	6	5	6	0	5	6	6	5	4	7	6	4	4	0	10	4
K	7	5	4	0	4	0	4	4	4	7	7	7	5	7	10	4
L	7	4	4	6	4	0	4	4	4	7	6	7	5	0	10	5
M	6	4	4	0	4	7	4	4	4	9	6	6	4	0	10	5

Таблица 3: Учебная нагрузка и оценки студентов группы 2

этим порядковым номерам, а в остальных столбцах приводятся соответствующие студентам рейтинговые суммы A16 и S16 и индексы N16 и N60.

Из табл. 4 видно, что студент A имеет рейтинговую сумму S16, равную 456, и занимает четвертую позицию в этом рейтинге (подобное имеет место и относительно A16). В то же время его рейтинговый индекс N16 равен 329, его действующие оценки лежат в блоке $\boxed{4}$, он занимает первую позицию в этом рейтинге и является единственным в этой группе студентом, который имеет только хорошие и отличные оценки и получает стипендию. Остальные студенты B–M группы 2 имеют пересдачи, их действующие оценки лежат в блоке $\boxed{1}$ и их рейтинговый индекс N16 не превосходит 100. При этом студенты B, C и D имеют одинаковое значение N16, равное 100. Это значение (близкое к следующей сотне, т. е. правому концу натурального отрезка от 1 до 100) говорит о том, что студенты B, C и D могли бы считаться хорошими студентами и иметь рейтинговый индекс N16 даже больший, чем у студента A (как это происходит с рейтинговыми сумма-

№	Ст.	A16	Ст.	S16	Ст.	N16	Ст.	N60
1	B	521	B	512	A	329	A	324
2	C	514	C	501	B	100	B	64
3	D	469	D	463	C	100	C	64
4	G	465	A	456	D	100	D	64
5	A	454	G	450	E	99	E	64
6	E	435	E	432	F	99	F	64
7	F	431	F	427	G	97	G	63
8	I	334	H	328	H	71	H	57
9	H	326	I	323	I	55	I	32
10	K	296	K	293	J	49	J	31
11	J	293	J	289	K	47	K	30
12	M	289	M	287	L	47	L	30
13	L	289	L	285	M	47	M	30

Таблица 4: Рейтинги студентов группы 2

ми A16 и S16), если бы не была учтена их пересдача. При округлении, которое происходит в формуле (6.6), рейтинговые индексы N16 для B, C и D оказываются одинаковыми (действительно, их действующие оценки соответственно $(1, 6^3, 7^5, 8^7)$, $(1, 5, 6, 7^8, 8^5)$ и $(1, 4, 5^2, 6^6, 7^3, 8^3)$ схожи), поэтому для того, чтобы более точно расположить этих студентов в рейтинге приходится обращаться к точному значению $N(x)$ из (5.4), вычисленному на их указанных выше действующих оценках x и равному 170 494 для B, 170 385 для C и 169 437 для D. Такое же положение имеет место и для студентов E и F, а также для K, L и M. Рейтинговые индексы N60 для группы 2 дают более низкие значения благодаря учету весов (кредитов) дисциплин, но располагают студентов в том же порядке, что и индекс N16.

Графическое представление значений рейтинговых сумм и индексов из табл. 4 приведено на рис. 2 в Приложении 2.

7.6. Группа 3. Учебная нагрузка и оценки студентов группы 3 приведены в табл. 5 на с. 29. Таблица устроена также, как и табл. 1. Количество студентов в этой группе (A–N) равно 14. При расчете рейтингов принимаются во внимание $n = 15$ экзаменационных оценок. В первой строке таблицы использованы следующие сокращения названий: Управ. учет — управленческий учет, Макроэк. — макроэкономика, Инф. сис. — разработ-

Предметы	Управ. учет	Макроэк.	Социология	Инф. сис.(з)	Философия	Теор. вер.	Мат. ан.-2	Мет. ТиК	Сети и ОС	Функ. прогр.	Мат. стат.	Дел. комм.	Инф. сис.(Э)	Фин. анализ	Курсовая
Кредиты	3	5	3	4	4	6	3	4	6	4	4	1	5	3	5
A	8	6	9	8	9	10	7	6	6	10	10	10	8	7	8
B	7	6	8	8	8	9	7	6	6	10	10	10	8	8	8
C	6	10	8	8	9	10	10	6	4	9	10	10	8	9	9
D	5	6	8	6	6	6	5	5	4	10	7	10	6	7	7
E	6	6	7	6	8	7	6	5	4	8	8	10	5	5	5
F	5	5	9	5	7	8	4	5	6	10	9	10	4	5	7
G	6	5	8	6	6	7	5	4	4	7	6	10	6	5	5
H	6	4	8	5	7	4	0	4	4	6	6	10	7	4	9
I	4	4	8	4	4	7	0	5	4	4	5	10	5	5	7
J	4	7	8	6	6	6	6	5	4	6	5	10	6	7	0
K	4	9	7	4	7	6	4	5	4	7	9	10	6	5	0
L	5	4	8	4	5	5	4	4	4	4	4	10	5	6	0
M	4	5	8	4	4	4	0	4	4	6	0	10	5	6	6
N	4	4	8	4	4	6	0	4	4	5	5	10	5	4	0

Таблица 5: Учебная нагрузка и оценки студентов группы 3

ка информационных систем и технологий, Теор. вер. — теория вероятностей, Мет. ТиК — методы трансляции и компиляции, Сети и ОС — сети и операционные системы, Функ. прогр. — функциональное программирование и интеллектуальные системы, Мат. стат. — математическая статистика, Дел. комм. — деловые коммуникации, Фин. анализ — финансовый анализ.

В рейтинговой табл. 6 на с. 30 студент C занимает первую позицию согласно A15 и S15, тогда как на основе N15 и N60 он — лишь третий, причем (хотя и является успевающим) не получает стипендию, поскольку имеет удовлетворительную оценку (ср. с вопросом (4.1)). Студенты же A и B в соответствии с A15 и S15 занимают вторую и третью позиции, а согласно N15 и N60 — первые две позиции, и стипендию получают. Из этой таблицы также видно, что A и B — хорошисты (с оценками из бло-

№	Ст.	A15	Ст.	S15	Ст.	N15	Ст.	N60
1	C	504	C	496	A	353	A	335
2	A	488	A	481	B	353	B	335
3	B	476	B	468	C	197	C	161
4	F	396	F	387	D	179	D	157
5	D	392	D	376	E	176	E	156
6	E	384	E	368	G	152	F	145
7	G	360	G	344	F	151	G	136
8	K	348	K	333	J	80	H	72
9	J	344	H	324	K	72	I	72
10	H	336	J	322	H	71	J	59
11	I	304	I	295	I	69	K	57
12	L	288	M	264	L	68	L	57
13	M	280	L	262	M	45	M	44
14	N	268	N	251	N	44	N	39

Таблица 6: Рейтинги студентов группы 3

ка $\boxed{4}$), C, D, E, F и G имеют не менее, чем удовлетворительные оценки (из блока $\boxed{2}$) без пересдач, а студенты H, I, J, K, L, M и N — неуспевающие студенты (с оценками из блока $\boxed{1}$), имеющие пересдачи. Кроме того, рейтинги на основе A15 и S15 практически идентичны, тогда как рейтинг N60 значительно более чувствителен по отношению к кредитам (весам), чем N15, что хорошо видно из средней части табл. 6 (позиции 6–11) и в графическом представлении на рис. 3 в Приложении 2.

7.7. Группа 4. Учебная нагрузка и оценки студентов группы 4 приведены в табл. 7 на с. 31. Эта таблица устроена также, как и все предыдущие подобные таблицы 1, 3 и 5. Количество студентов в группе 4 (A–R) — 18 человек. При расчете рейтингов учитываются $n = 11$ экзаменационных оценок за учебный год. В первой строке таблицы использованы следующие сокращения названий: Мет. прогр. — методы программирования, Культурол. — культурология, Лин. алг. — линейная алгебра, Дискр. мат. — дискретная математика, Мат. ан. — математический анализ, Микроэк. — микроэкономика, Форм. яз. — формальные языки и алгоритмы, Архит. ЭВМ — архитектура ЭВМ.

Из рейтинговой табл. 8 на с. 32 видно, что студент A (с оценками из

блока $\boxed{5}$) и студенты B, D, C и E (с оценками из блока $\boxed{4}$) имеют только хорошие и отличные оценки и получают стипендию, а студенты F (с оценками из блока $\boxed{3}$), H, I, G, K, J, L, M, N, O, Q и P (с оценками из блока $\boxed{2}$) учатся удовлетворительно. Студент R (с оценками из блока $\boxed{1}$) является неуспевающим. Также, как это было отмечено ранее, рейтинги A11 и S11 идентичны, в то время как рейтинговый индекс N60 проявляет чувствительность к весам дисциплин (в позициях 7–11 и 16, 17).

Предметы	Мет. прогр.(з)	Культурол.	Лин. алг.	Дискр. мат.	Мат. ан.-1(Э)	Мат. ан.(з)	Микроэк.	Форм. яз.	Архит. ЭВМ	Логика	Мет. прогр.(Э)
Кредиты	5	4	7	7	6	6	7	4	3	4	7
A	9	7	9	8	10	9	7	8	9	9	9
B	9	9	8	8	8	6	8	8	8	10	9
C	9	8	10	8	6	6	6	9	8	10	9
D	9	6	8	6	7	8	8	8	8	9	8
E	7	8	6	8	6	6	7	8	8	9	9
F	8	9	6	9	5	6	7	6	8	8	8
G	7	8	6	9	4	6	8	6	8	8	9
H	8	8	6	6	5	5	6	4	6	8	8
I	5	7	5	6	7	5	6	4	8	8	7
J	7	8	4	6	4	5	5	4	7	7	8
K	5	6	6	6	4	5	7	4	7	6	4
L	5	6	4	7	4	4	6	5	7	6	5
M	5	6	4	6	4	4	6	4	7	6	5
N	4	7	4	4	4	5	5	4	6	7	6
O	4	6	4	4	4	4	5	4	6	7	6
P	5	6	4	4	4	4	4	4	5	7	5
Q	4	5	4	5	4	4	4	4	6	6	5
R	5	5	4	5	0	4	4	4	5	6	5

Таблица 7: Учебная нагрузка и оценки студентов группы 4

№	Ст.	A11	Ст.	S11	Ст.	N11	Ст.	N60
1	A	513	A	513	A	469	A	458
2	B	496	B	492	B	395	B	372
3	C	485	C	480	D	362	D	348
4	D	464	D	461	C	347	C	325
5	E	447	E	441	E	339	E	324
6	F	436	F	432	F	276	F	262
7	G	431	G	431	G	191	H	170
8	H	382	H	380	H	174	I	169
9	I	371	I	365	I	170	G	161
10	J	355	J	347	J	126	K	116
11	K	327	K	325	K	125	J	116
12	L	322	L	316	L	124	L	112
13	M	311	M	305	M	114	M	107
14	N	305	N	297	N	107	N	103
15	O	295	O	287	O	104	O	101
16	P	284	P	275	P	103	Q	101
17	Q	278	Q	272	Q	103	P	101
18	R	256	R	250	R	62	R	50

Таблица 8: Рейтинги студентов группы 4

Графическое представление значений рейтинговых сумм и индексов из табл. 8 приведено на рис. 4 в Приложении 2.

Заключение

В работе для целей рейтингования определяются два новых некомпенсаторных рейтинговых индекса $\mathsf{N}n$ при $n \ll 60$ и $\mathsf{N}60$. Показано, что индекс $\mathsf{N}60$ является чувствительным к весам (дисциплин). Проведено сравнение индексов $\mathsf{N}n$ и $\mathsf{N}60$ со стандартными рейтинговыми суммами $\mathsf{A}n$ (без учета весов) и $\mathsf{S}n$ (с учетом весов). Выяснено, что рейтинги на основе $\mathsf{A}n$ и $\mathsf{S}n$ являются практически "параллельными". В то же время рейтинговые индексы $\mathsf{N}n$ и $\mathsf{N}60$ дают более адекватную картину успеваемости студентов по сравнению с $\mathsf{A}n$ и $\mathsf{S}n$. Используя $\mathsf{N}n$ и $\mathsf{N}60$ можно: 1) классифицировать студентов по успеваемости (при этом неуспевающий студент никогда не будет иметь больший рейтинг, чем успевающий); 2) квалифицированно присваивать порядковое рейтинговое значение каждому студенту; 3) иметь *качественную* картину успеваемости всех студентов.

Поскольку рейтингование в работе проводилось для целей (высшего) образования, то использовалась модель некомпенсаторного (порогового) агрегирования, существенным образом учитывающая количество самых низких оценок в векторах-альтернативах. В работах [19, 20] развита также *двойственная* модель порогового агрегирования, в которой наибольшее внимание уделяется наличию самых высоких оценок в векторах-альтернативах. Эта модель, также включающая явные формулы для (двойственных) рейтинговых индексов, может быть применена в ситуациях, когда хотя бы одно хорошее качество альтернатив имеет определяющую роль.

Подытоживая, можно утверждать, что рейтингования, основанные на некомпенсаторных индексах, подобных $\mathsf{N}n$ и $\mathsf{N}60$ (или двойственным им), могут представлять широкий интерес во многих реальных ситуациях, когда компенсирование "плохого" посредством "хорошего" не представляется возможным.

Приложение 1. Значения порядковых номеров из (6.6) **и** (6.8)

I. Если $n = 11$, то порядковые номера из (6.4) и (6.5) и разности из (6.6) и (6.8) имеют следующие численные значения:

$N(1^{11}) = 1$, $N(1, 8^{10}) = 19448$ и $N(1, 8^{10}) - N(1^{11}) = 19447$;
$N(2^{11}) = 19449$, $N(2, 8^{10}) = 27456$ и $N(2, 8^{10}) - N(2^{11}) = 8007$;
$N(3^{11}) = 27457$, $N(3, 8^{10}) = 30459$ и $N(3, 8^{10}) - N(3^{11}) = 3002$;
$N(4^{11}) = 30460$, $N(4, 8^{10}) = 31460$ и $N(4, 8^{10}) - N(4^{11}) = 1000$;
$N(5^{11}) = 31461$, $N(5, 8^{10}) = 31746$ и $N(5, 8^{10}) - N(5^{11}) = 285$;
$N(6^{11}) = 31747$, $N(6, 8^{10}) = 31812$ и $N(6, 8^{10}) - N(6^{11}) = 65$;
$N(7^{11}) = 31813$, $N(8^{11}) = |X^*| = 31824$ и $N(8^{11}) - N(7^{11}) = 11$;
и $N(8^{11}) - N(6^{11}) = 77$.

II. Если $n = 15$, то порядковые номера из (6.4) и (6.5) и разности из (6.6) и (6.8) имеют следующие численные значения:

$N(1^{15}) = 1$, $N(1, 8^{14}) = 116280$ и $N(1, 8^{14}) - N(1^{15}) = 116279$;
$N(2^{15}) = 116281$, $N(2, 8^{14}) = 155040$ и $N(2, 8^{14}) - N(2^{15}) = 38759$;
$N(3^{15}) = 155041$, $N(3, 8^{14}) = 166668$ и $N(3, 8^{14}) - N(3^{15}) = 11627$;
$N(4^{15}) = 166669$, $N(4, 8^{14}) = 169728$ и $N(4, 8^{14}) - N(4^{15}) = 3059$;
$N(5^{15}) = 169729$, $N(5, 8^{14}) = 170408$ и $N(5, 8^{14}) - N(5^{15}) = 679$;
$N(6^{15}) = 170409$, $N(6, 8^{14}) = 170528$ и $N(6, 8^{14}) - N(6^{15}) = 119$;
$N(7^{15}) = 170529$, $N(8^{15}) = |X^*| = 170544$ и $N(8^{15}) - N(7^{15}) = 15$;
и $N(8^{15}) - N(6^{15}) = 135$.

III. Если $n = 16$, то порядковые номера из (6.4) и (6.5) и разности из (6.6) и (6.8) имеют следующие численные значения:

$N(1^{16}) = 1$, $N(1, 8^{15}) = 170544$ и $N(1, 8^{15}) - N(1^{16}) = 170543$;
$N(2^{16}) = 170545$, $N(2, 8^{15}) = 224808$ и $N(2, 8^{15}) - N(2^{16}) = 54263$;
$N(3^{16}) = 224809$, $N(3, 8^{15}) = 240312$ и $N(3, 8^{15}) - N(3^{16}) = 15503$;
$N(4^{16}) = 240313$, $N(4, 8^{15}) = 244188$ и $N(4, 8^{15}) - N(4^{16}) = 3875$;
$N(5^{16}) = 244189$, $N(5, 8^{15}) = 245004$ и $N(5, 8^{15}) - N(5^{16}) = 815$;
$N(6^{16}) = 245005$, $N(6, 8^{15}) = 245140$ и $N(6, 8^{15}) - N(6^{16}) = 135$;
$N(7^{16}) = 245141$, $N(8^{16}) = |X^*| = 245157$ и $N(8^{16}) - N(7^{16}) = 16$;
и $N(8^{16}) - N(6^{16}) = 152$.

IV. Если $n = 60$, то порядковые номера из (6.4) и (6.5) и разности из (6.6) и (6.8) имеют следующие численные значения:

$N(1^{60}) = 1$, $N(1, 8^{59}) = 778789440$ и $N(1, 8^{59}) - N(1^{60}) = 778789439$;
$N(2^{60}) = 778789441$, $N(2, 8^{59}) = 861388320$ и $N(2, 8^{59}) - N(2^{60}) = 82598879$;
$N(3^{60}) = 861388321$, $N(3, 8^{59}) = 869012832$ и $N(3, 8^{59}) - N(3^{60}) = 7624511$;
$N(4^{60}) = 869012833$, $N(4, 8^{59}) = 869608497$ и $N(4, 8^{59}) - N(4^{60}) = 595664$;
$N(5^{60}) = 869608498$, $N(5, 8^{59}) = 869646317$ и $N(5, 8^{59}) - N(5^{60}) = 37819$;
$N(6^{60}) = 869646318$, $N(6, 8^{59}) = 869648147$ и $N(6, 8^{59}) - N(6^{60}) = 1829$;
$N(7^{60}) = 869648148$, $N(8^{16}) = |X^*| = 869648208$ и $N(8^{60}) - N(7^{60}) = 60$;
и $N(8^{60}) - N(6^{60}) = 1890$.

Приложение 2. Графическое представление таблиц рейтингований

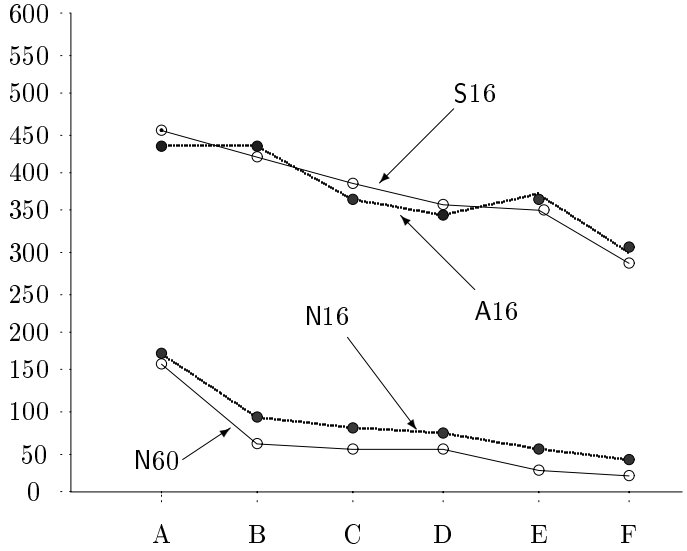

Рисунок 1: Значения рейтинговых сумм и индексов для группы 1

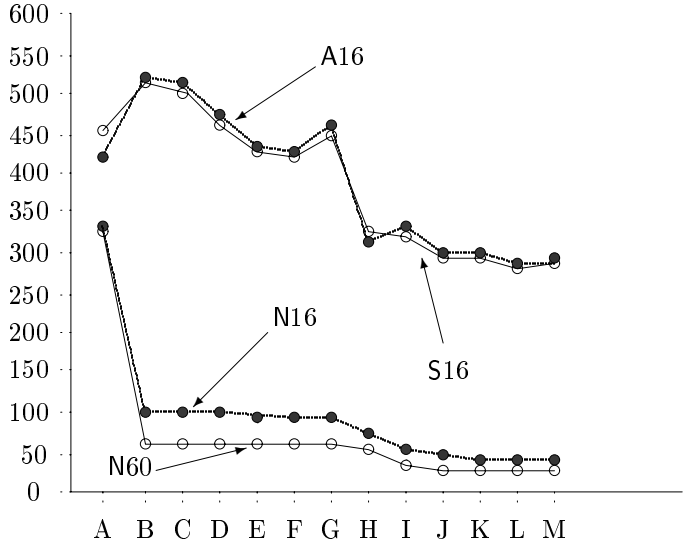

Рисунок 2: Значения рейтинговых сумм и индексов для группы 2

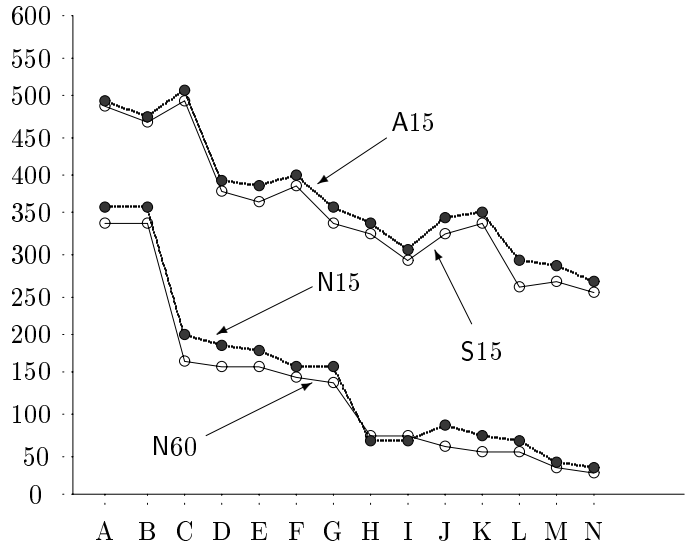

Рисунок 3: Значения рейтинговых сумм и индексов для группы 3

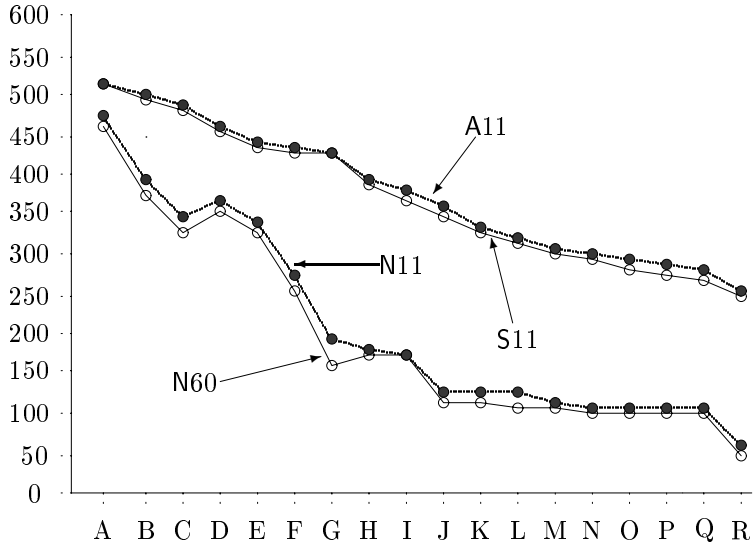

Рисунок 4: Значения рейтинговых сумм и индексов для группы 4

ЛИТЕРАТУРА

[1] Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. *Выбор вариантов* (*основы теории*). М.: Наука, 1990. Дополненный английский перевод: Aizerman M., Aleskerov F. *Theory of Choice*. North-Holland, Amsterdam, 1995.

[2] Алескеров Ф. Т., Хабина Э. Л., Шварц Д. А. *Бинарные отношения, графы и коллективные решения*. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006.

[3] Алескеров Ф. Т., Юзбашев Д. А., Якуба В. И. *Пороговое агрегирование трехградационных ранжировок*. Автомат. и телемех., № 1 (2007), 147–152.

[4] Алескеров Ф. Т., Якуба В. И. *Об одном методе агрегирования ранжировок специального вида*. II-я Междунар. конфер. по проблемам управления. Тез. докл. М.: ИПУ РАН, 2003, с. 116.

[5] Алескеров Ф. Т., Якуба В. И. *Метод порогового агрегирования трехградационных ранжировок*. Докл. РАН, **413**, № 2 (2007), 181–183.

[6] Алескеров Ф. Т., Беляева Н. Ю., Бычкова Е. Б., Закамская Е. В., Юзбашев Д. А. *Сравнительный анализ развитости гражданского общества в трех регионах России*. В кн.: Человеческий фактор в управлении (под ред. Н. А. Абрамовой, К. С. Гинсберга, Д. А. Новикова). М: КомКнига, 2005, 83–109.

[7] Алескеров Ф. Т., Беляева Н. Ю. *Количественный анализ развитости гражданского общества в регионах России: параметры, методика, пилотные исследования*. Полития, № 1 (2008), 160–168.

[8] Гончаров А. А., Чистяков В. В. *Некомпенсаторное агрегирование и рейтингование студентов*. Российск. эконом. конгресс. Сборник докл. участников на CD (`\files\kbn0.doc`). М.: ИЭ РАН, 2009, 1–5. Доступно по ссылке: `http://www.econorus.org/consp/files/kbn0.doc`.

[9] Гончаров А. А., Чистяков В. В. *Некомпенсаторное агрегирование и рейтингование студентов. II*. Материалы XI-ой международной научной конференции по проблемам развития экономики и общества, Москва, 6–8 апреля, 2010 (`http://conf.hse.ru/2010/`).

[10] Калягин В. А., Чистяков В. В. *Модель некомпенсаторного агрегирования с произвольным набором оценок*. Докл. РАН, **421**, № 5 (2008), 607–610.

[11] Калягин В. А., Чистяков В. В. *Аксиоматическая модель некомпенсаторного агрегирования*. Препринт WP7/2009/01. – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2009. – 76 с.

[12] Калягин В. А., Чистяков В. В. *Об определении функции предпочтений в задаче рейтингования при отсутствии компенсаций*. В кн.:

Модернизация экономики и глобализация (отв. ред. Е. Г. Ясин). Гос. ун-т – Высшая школа экономики. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, книга 3, 2009, 592–597.

[13] Калягин В. А., Чистяков В. В. *Ранжирование альтернатив по многим критериям: аксиоматика и алгориитмы.* Российск. эконом. конгресс. Сборник докл. участников на CD (`\files\vmtv.pdf`): Програм. секции / Теория коллект. выбора / Анализ влияния и агрегирование / Доклад 2. М.: ИЭ РАН, 2009, 1–6. Доступно по ссылке: `http://www.econorus.org/consp/files/vmtv.pdf`.

[14] Фишберн П. *Теория полезности для принятия решений.* М.: Физматлит, 1978.

[15] Чистяков В. В. *Функция перечисления в многокритериальной задаче порогового агрегирования.* Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Теория функций, ее прилож. и смежные вопр. Материалы 9-ой междунар. Казанской летней научной школы-конф. Казань: Изд-во Казан. матем. об-во, Т. 38, 2009, 304–306.

[16] Aleskerov F. *Arrovian Aggregation Models.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[17] Aleskerov F., Chistyakov V. V. *Aggregating m-graded preferences: axiomatics and algorithms.* 9th International Meeting of the Society for Social Choice and Welfare (Concordia University, Montreal, Canada, June 19–22, 2008).

[18] Aleskerov F., Chistyakov V. V., Kalyagin V. *The threshold aggregation.* Econ. Lett. **107**, № 2 (2010), 261–262.

[19] Aleskerov F. T., Chistyakov V. V., Kalyagin V. A. *Social threshold aggregations.* Soc. Choice Welf. (2010), `doi:10.1007/s00355-010-0454-9`.

[20] Aleskerov F. T., Chistyakov V. V., Kalyagin V. A. *Multiple criteria threshold decision making algorithms.* Препринт WP7/2010/02. – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2010. – 40 с.

[21] Aleskerov F., Yakuba V., Yuzbashev D. *A 'threshold aggregation' of three-graded rankings.* Math. Social Sci., **53**, № 1 (2007), 106–110.

[22] Arrow K. J. *Social Choice and Individual Values.* Yale University Press, 2nd ed., 1963. Перевод: Эрроу К. Дж. *Коллективный выбор и индивидуальные ценности.* М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2004.

[23] Moulin H. *Axioms of Cooperative Decision Making.* Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[24] *Положение о рейтинговой системе оценки учебной работы студентов ГУ-ВШЭ, утвержденное Ученым Советом ГУ-ВШЭ.* Доступно по ссылке: http://www.hse.ru/data/910/337/1241/%D0%9F

%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BA%D1%82%20%D0%9F%D0%BE
%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%20
%D0%BE%20%D1%80%D0%B5%D0%B9%D1%82%D0%B8%D0%BD
%D0%B3%D0%B5%20%D1%81%D1%82%D1%83%D0%B4%D0%B5
%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2(%D0%BD%D0%B0%20%D0
%BE%D0%B1%D1%81%D1%83%D0%B6%D0%B4%D0%B5%D0%BD
%D0%B8%D0%B5).doc.

Препринт WP7/2010/04
Серия WP7
Математические методы анализа решений
в экономике, бизнесе и политике

Гончаров А.А., Чистяков В.В.

Агрегирование предпочтений без учета компенсаций и рейтингование

Публикуется в авторской редакции

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии Государственного университета –
Высшей школы экономики с представленного оригинал-макета

Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 2,4
Усл. печ. л. 2,4. Заказ № . Изд. № 1184

Государственный университет – Высшая школа экономики
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Государственного университета – Высшей школы экономики

Тел.: (495) 772-95-71; 772-95-73