# 2. Поля и кольца. Знакомство.

◇ **2.1.** *Покажите, что если множество $X$ содержит больше одного элемента, то операция композиции на множестве отображений множества $X$ в себя не коммутативна.*

◇ **2.2.** *1) Придумайте коммутативную, но не ассоциативную операцию.*
*2) Придумайте ассоциативную, но не коммутативную операцию.*
*3) Докажите, что в любом множестве с бинарной операцией имеется не более одного нейтрального элемента.*

◇ **2.3.** *1) Докажите, что если операция ассоциативна, то все различные способы расстановки скобок в произведении $a_1 * a_2 * \ldots a_n$ дают один и тот же результат.(Менять порядок сомножителей нельзя!)*
***2) Сколькими различными способами можно расставить $n-2$ пары скобок в произведении $a_1 * a_2 * \ldots a_n$, так чтобы порядок выполнения действий был определен однозначно? (Операция не предполагается ассоциативной и менять порядок сомножителей по-прежнему нельзя.)*

◇ **2.4.** *Существует ли нейтральный элемент для следующих операций на множествах:*

1) *Операция композиции на множестве отображений множества $X$ в себя;*

2) *Операция $\min(a, b)$ на множестве неотрицательных действительных чисел $[0; +\infty)$;*

3) *Операция $\min(a, b)$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$;*

4) *Операция $\text{НОД}(a, b)$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$;*

5) *Операция $\text{НОК}(a, b)$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$;*

6) *Операция умножения на множестве всех периодических функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, имеющих период $2\pi$;*

7) *Операция объединения множеств на множестве всех подмножеств данного множества $\Omega$;*

8) *Операция пересечения множеств на множестве всех подмножеств данного множества $\Omega$;*

9) *Операция симметрической разности множеств ($A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$) на множестве всех подмножеств данного множества $\Omega$.*

◇ **2.5.** *1) Докажите, что в произвольном поле $(-a)b = -ab$. В частности, $(-1)a = -a$.*
*2) Докажите, что в произвольном поле если $ab = 0$, то либо $a = 0$, либо $b = 0$.*
*3) Докажите, что в произвольном поле умножение на ноль всегда дает ноль: $a0 = 0$.*

◇ **2.6.** *Докажите, что в $\mathbb{Q}$ нет меньших подполей.*

◇ **2.7.** *1) Докажите, что множество действительных чисел вида $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ является подполем в $\mathbb{R}$.*
*2) Является ли множество действительных чисел вида $a + b\sqrt[3]{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ подполем в $\mathbb{R}$? Как описать наименьшее подполе в $\mathbb{R}$, содержащее все такие числа?*
*3) Описать наименьшее подполе в $\mathbb{R}$, содержащее $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.*
**4) Найдите все подполя поля из п. 3.*

Рассмотрим евклидову плоскость и зафиксируем на ней единичный отрезок. Множество $E$ будет состоять из длин всех отрезков, которые можно построить циркулем и линейкой, нуля и всех противоположных им чисел.

◇ **2.8.** *1) Докажите, что $E$ является подполем в $\mathbb{R}$.*
*2) Докажите, что если $x \in E$, $x > 0$, то $\sqrt{x} \in E$.*
**3) Докажите, что $E \neq \mathbb{R}$.*

◇ **2.9.** *Докажите, что при простом $p$ $\mathbb{Z}_p$ является полем.*

Для этих полей имеется другое общепринятое обозначение $\mathbb{F}_p$ , которое мы будем использовать чаще, чем $\mathbb{Z}_p$.

◇ **2.10.** *Докажите, что в $\mathbb{F}_p$ нет меньших подполей.*

◇ **2.11.** *Докажите, что при изоморфизме полей $\varphi(-a) = -\varphi(a)$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 1$.*

◇ **2.12.** *Докажите, что в любом поле*

$$(\underbrace{\mathbf{1}+\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}}_{n}) + (\underbrace{\mathbf{1}+\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}}_{m}) = \underbrace{\mathbf{1}+\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}}_{n+m}; \tag{2.1}$$

$$(\underbrace{\mathbf{1}+\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}}_{n}) \cdot (\underbrace{\mathbf{1}+\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}}_{m}) = \underbrace{\mathbf{1}+\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}}_{nm}. \tag{2.2}$$

◇ **2.13.** *Докажите, что если среди кратностей единичного элемента поля $\mathbb{K}$ нет повторений, то $\mathbb{K}$ содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Q}$.*

◇ **2.14.** *Докажите, что если среди кратностей единичного элемента поля $\mathbb{K}$, имеются повторения, то $\mathbb{K}$ содержит подполе, изоморфное $\mathbb{F}_p$.*

*Характеристикой* поля $\mathbb{K}$ (обозначается $\operatorname{char}\mathbb{K}$) называется наименьшее положительное число $p$, такое, что $\underbrace{\mathbf{1}+\mathbf{1}+\ldots+\mathbf{1}}_{p} = \mathbf{0}$. Если же такого числа $p$ не существует, то полагают по определению $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$.

◇ **2.15.** *1) Докажите, что* $\operatorname{char}\mathbb{K}$ *является простым числом (или 0).*
*2) Докажите, что при определении характеристики вместо единицы можно было взять любой ненулевой элемент поля. Другими словами, требуется доказать, если $a$ — любой ненулевой элемент поля характеристики ноль, то любая его кратность отлична от нуля, а если $a$ — любой ненулевой элемент поля характеристики $p > 0$, то $\underbrace{a+a+\ldots+a}_{m} = 0$ равносильно тому, что $m$ кратно $p$.*

◇ **2.16.** *Докажите, что в поле характеристики $p > 0$ $(a+b)^p = a^p + b^p$.*

В этом листке мы будем работать **только с коммутативными ассоциативными кольцами с единицей**, которые мы будем для краткости называть просто **кольцами**.

◇ **2.17.** *1) Докажите, что в произвольном кольце $(-a)b = -ab$. В частности, $(-1)a = -a$.*
*2) Докажите, что в произвольном кольце умножение на ноль всегда дает ноль: $a0 = 0$.*

◇ **2.18.** *Докажите, что при изоморфизме колец $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ и $\varphi(0) = 0$.*

◇ **2.19.** *Верно ли, что*

1) *произведение двух обратимых элементов является обратимым элементом?*

2) *если произведение двух элементов является обратимым элементом, то хотя бы один сомножитель является обратимым элементом?*

3) *если произведение двух элементов является обратимым элементом, то оба сомножителя являются обратимыми элементами?*

*4) если произведение двух элементов является делителем нуля, то оба сомножителя являются делителями нуля?*

*5) если произведение двух элементов является делителем нуля, то хотя бы один сомножитель является делителем нуля?*

*6) произведение двух нильпотентных элементов является нильпотентным элементом?*

*7) если произведение двух элементов является нильпотентным, то хотя бы один сомножитель является нильпотентным?*

*8) произведение любого элемента на нильпотентный является нильпотентным?*

*9) произведение двух идемпотентных элементов, является идемпотентным?*

*10) сумма двух обратимых элементов снова является обратимым?*

*11) сумма двух делителей нуля снова является делителем нуля?*

*12) сумма двух нильпотентных элементов снова является нильпотентным?*

*13) сумма двух идемпотентных элементов снова является идемпотентным?*

$\diamond$ **2.20.** *1) Докажите, что идемпотентные элементы всегда являются делителями нуля.*
*2) Докажите, что если элемент кольца $x$ является идемпотентным, то $1-x$ тоже является идемпотентным.*

$\diamond$ **2.21.** *Докажите, что следующие множества с заданными на них операциями сложения и умножения являются кольцами (коммутативными ассоциативными и с единицей!). Найдите в них все делители нуля, нильпотентные и идемпотентные элементы (если таковые есть).*

*1) Множество всех непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения функций.*

*2) Множество всех непрерывных функций из $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ в $\mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения функций.*

*3) Множество всех подмножеств данного множества $\Omega$; в качестве операции сложения берется симметрическая разность двух множеств, а в качестве умножения — пересечение.*

*4) Множество всех линейных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (т.е. всех $f(x) = kx + b$, $k, b \in \mathbb{R}$); в качестве сложения берется обычное сложение функций, а умножение определяется следующим геометрическим способом. Две линейные функции перемножаются обычным образом, получается квадратный трехчлен, графиком которого является парабола (или прямая, если один из сомножителей был константой). К полученному графику проводится касательная в точке его пересечения с осью ординат; уравнение полученной прямой виде $f(x) = kx + b$ и называется произведением двух исходных функций в этом кольце.*[1]

*5) Множество векторов плоскости, на которой введена прямоугольная система координат. В качестве сложения берется обычное сложение векторов, а умножение (которое мы в этой задаче, чтобы не создавать путаницы, будем обозначать звездочкой) определяется следующим образом. Если два вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ имеют координаты $\vec{u} = (a; b)$ то $\vec{v} = (c; d)$ то $\vec{u} * \vec{v} = (ac; bd)$.*

---

[1]Этот пример не является искусственным, как это может показаться на первый взгляд. Если нас интересуют только очень близкие к нулю значения переменной $x$, то при вычислениях естественно пренебрегать слагаемыми, в которые входит $x$ во второй (и большей) степени. Докажите, что это приводит как раз к умножению, введенному в первой части задачи. Если же нас интересуют более точные вычисления, мы можем рассматривать квадратичные по $x$ выражения и пренебрегать слагаемыми начиная с третьего порядка малости. Опишите получающееся таким образом кольцо.

6) *Изменим в условиях предыдущей задачи закон умножения:* $\vec{u} * \vec{v} = (ac - bd; ad + bc)$.

7) *Докажите, что кольца из последних трех пунктов попарно не изоморфны друг другу.*

◇ **2.22.** *При каких значениях* $n$ *и* $m$ *кольца* $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ *и* $\mathbb{Z}_{nm}$ *изоморфны? Найдите необходимое и достаточное условие.*

◇ **2.23.** *1) Докажите, что любое кольцо из двух элементов изоморфно* $\mathbb{Z}_2$.
*2) Докажите, что любое кольцо из трех элементов изоморфно* $\mathbb{Z}_3$.
*3) Перечислите (с точностью до изоморфизма) все кольца, состоящие из четырех элементов.*

◇ **2.24. *** *Заметим, что примеры колец из п. 5 и 6 задачи 2.21 построены похожим образом. Естественно спросить, какие еще кольца можно так получить. Зафиксируем какие-нибудь действительные числа* $\alpha_1$, $\alpha$, $\beta_1$, $\beta$, $\gamma_1$, $\gamma$, $\delta_1$ *и* $\delta_2$ *и определим закон умножения на множестве векторов плоскости следующим образом:* $\vec{u} * \vec{v} = (\alpha_1 ac + \beta_1 bc + \gamma_1 ad + \delta_1 bd; \alpha_2 ac + \beta_2 bc + \gamma_2 ad + \delta_2 bd)$. *(Здесь, как и в 2.21,* $\vec{u} = (a; b)$ *то* $\vec{v} = (c; d)$*.) Интересно выяснить, при каких значениях* $\alpha_1$, $\alpha$, $\beta_1$, $\beta$, $\gamma_1$, $\gamma$, $\delta_1$ *и* $\delta_2$ *получится коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Отметим, что нужно уточнить вопрос, поскольку в кольцах из п. 5 и 6 задачи 2.21 получились разные единичные элементы. Выберем в качестве основного вариант п. 6: потребуем, чтобы единичным элементом был вектор* $(1; 0)$.

1) *При каких значениях констант* $\alpha_1$, $\alpha$, $\beta_1$, $\beta$, $\gamma_1$, $\gamma$, $\delta_1$ *и* $\delta_2$ *получится коммутативное ассоциативное кольцо, единичным элементом которого будет вектор* $(1; 0)$*?*

2) *Найдутся ли среди полученных колец кольца, изоморфные кольцу из п. 4 задачи 2.21?*

3) *Найдутся ли среди полученных колец кольца, изоморфные кольцу из п. 5 задачи 2.21?*

4) *Найдутся ли среди полученных колец кольца, не изоморфные кольцам из п. 4, 5 и 6 задачи 2.21?*