

ОЛИМПИАДА

10 класс

10 класс

В варианте 6 задач, решения всех задач должны быть записаны подробно со всеми вычислениями, объяснениями и доказательствами. Задачи можно решать в любом порядке.

1. Можно ли на плоскости отметить 2010 точек таким образом, чтобы любой треугольник с вершинами в отмеченных точках был тупоугольным?

Ответ: Можно. Например, 2010 точек на одной полуокружности.

2. Имеется $2n - 2$ доминошки размера 2×1 , каждая из которых раскрашена так, что один квадратик — черный, а другой — белый. Из них выкладывается рамка квадратной формы со стороной, длина которой n квадратиков (рис. 1). Сколько различных черно-белых орнаментов можно выложить таким образом? Орнаменты, совпадающие при повороте квадрата, считаются разными.

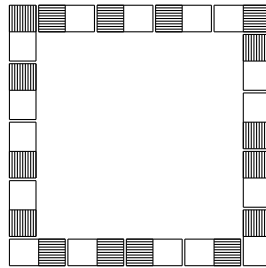


Рис. 1. Рамка из домино со стороной 9.

Ответ: $2^{2n-1} - 2$

3. Окружности S_1, S_2 и S_3 с центрами O_1, O_2 и O_3 проходят через точку F . Известно, что вторая точка пересечения окружностей S_2 и S_3 лежит на прямой FO_1 , а вторая точка пересечения окружностей S_1 и S_3 лежит на прямой FO_2 . Докажите, что вторая точка пересечения окружностей S_1 и S_2 лежит на прямой FO_3 .

Указание: Легко заметить, что FO_1 и FO_2 высоты, тогда и FO_3 высота, откуда следует требуемое.

4. Докажите, что если m и n — различные натуральные числа, то числа $2^{2^m} + 1$ и $2^{2^n} + 1$ не имеют общих делителей.

Указание: Просуммируйте геометрическую прогрессию со знаменателем 2^m .

5. Двусторонняя линейка позволяет проводить прямую через две данные точки, а также прямую, параллельную данной, на расстоянии 3см. Разделите отрезок на три равные части при помощи двусторонней линейки, не пользуясь циркулем.

Указание: Опишите способ построения середины отрезка, а затем воспользуйтесь тем, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $1/2$.

Межрегиональная многопрофильная олимпиада ГУ-ВШЭ 2010.
МАТЕМАТИКА, 10 класс.

6. На плоскости дана декартова система координат. Существует ли окружность, на которой лежит ровно одна точка с рациональными координатами?

Ответ: Существует. Например, $x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 2$.