Домашнее задание 7

Задача 1. Пусть группа G (конечная или бесконечная) действует симплектоморфизмами на симплектическом многообразии (M, ω), т.е. $g^*\omega = \omega$ для всякого $g \in G$. Докажите, что пространство $C^\infty(M)^G$ всех гладких G-инвариантных функций на M (т.е. таких гладких функций $f : M \to \mathbb{R}$, что $f(g \cdot x) = f(x)$ для всех $x \in M$, $g \in G$) инвариантно относительно взятия скобки Пуассона, т.е.

$$\forall F, H \in C^\infty(M)^G \quad \{F, H\} \in C^\infty(M)^G.$$

Задача 2. Пусть G — группа Ли, то есть группа, являющаяся одновременно гладким многообразием, причем умножение и взятие обратного являются гладкими операциями. *Левоинваиантным векторным полем* на G называется такое векторное поле ξ на G, которое не меняется при любых левых сдвигах $L_g : h \mapsto gh$, $g \in G$, т.е. $L_*\xi = \xi$ для любого левого сдвига $L = L_g$. Проверьте, что коммутатор левоинвариантных векторных полей снова является левоинвариантным векторным полем.

Задача 3. Найдите все такие $n \times n$ матрицы A, для которых найдется гладкий путь $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U(n)$ со свойством

$$A = \frac{d}{dt}\gamma(t)\,|_{t=0}\ .$$

Тот же вопрос для групп $SU(n)$, $O(n)$ и $SO(n)$.

Задача 4. Пусть $\hat{X}$ — левоинвариантное векторное поле на $SL_2(\mathbb{C})$, такое, что значение поля $\hat{X}$ в точке I (=единичная матрица) совпадает с данной бесследной матрицей X (как мы видели, касательное пространство к $SL_2(\mathbb{C})$ в точке I совпадает с пространством всех 2×2 матриц со следом 0). Проверьте, что коммутатор векторных полей $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ является левоинвариантным векторным полем $\hat{Z}$, где $Z = XY - YX$ — матричный коммутатор.