Домашнее задание 8

Напомним, что *группа Ли* G — это такое гладкое многообразие, на котором определена структура группы, такая, что операции умножения и взятия обратного являются гладкими. *Алгеброй Ли* группы Ли G называется касательное пространство к G в единице (=единичном элементе группы G). Оно отождествляется с пространством всех левоинвариантных векторных полей на G (см. предыдущее д.з.). Коммутатор в алгебре Ли определяется как коммутатор левоинвариантных векторных полей.

Задача 1. Пусть группа Ли G гладко действует на многообразии M. Для каждого элемента X алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, определено векторное поле $\hat{X}$ на M по формуле

$$\hat{X}f(x) = \frac{d}{dt}f(g_t \cdot x)\,|_{t=0}\ ,$$

где g_t — элемент группы G, гладко зависящий от t, так, что $g_0 = I$ — единичный элемент, и $\frac{d}{dt}g_t|_{t=0} = X$. Докажите, что коммутарор векторных полей $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ совпадает с векторным полем $\hat{Z}$, где $Z = [X, Y]$ (коммутатор берется в алгебре Ли $\mathfrak{g}$).

Мы будем писать e^{tX} вместо g_t.

Задача 2. Пусть G — группа Ли, а $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Для всякого элемента $g \in G$, определим линейный оператор $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ по формуле

$$Ad_g(X) = \frac{d}{dt}g\, e^{tX}\, g^{-1}.$$

Проверьте, что

$$[Ad_g(X), Ad_g(Y)] = Ad_g([X, Y]).$$

Докажите, что $g \mapsto Ad_g$ — это представление группы G в векторном пространстве $\mathfrak{g}$.

Пусть V — векторное пространство, а $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Отображение $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$ называется *представлением* алгебры $\mathfrak{g}$, если

$$\rho([X, Y]) = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y) \circ \rho(X),$$

где $\circ$ в правой части обозначает композицию линейных операторов.

Задача 3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G дейсвует на себе по формуле

$$ad_X(Y) = \frac{d}{dt}Ad_{e^{tX}}(Y)\,|_{t=0}\ .$$

Проверьте, что $ad_X(Y) = [X, Y]$, и что соответствие $X \mapsto ad_X$ задает представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Задача 4. Определим коприсоединенные представления группы Ли G и, соответственно, алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathfrak{g}^*$ по формулам

$$Ad^*_g(\alpha) : X \mapsto \alpha(Ad_{g^{-1}}(X)), \quad ad^*_X(\alpha) : X \mapsto \alpha(ad_{-X}(Y)) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{g}^*.$$

Проверьте, что это действительно представления.

Задача 5. Пусть G — группа всех евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^3$ (имеются в виду все движения, в том числе параллельные переносы). Опишите алгебру Ли группы G (описание должно включать в себя формулу для коммутатора), и напишите формулу для ad^*-действия. *Указание:* как множество, $\mathfrak{g}$ можно реализовать как множество пар (X, x), где $X \in so(3, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Задача 6. Пусть V — векторное пространство. Пуассонова структура на V определена однозначно, если заданы скобки Пуассона любых линейных функций на V.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ определена Пуассонова структура. Достаточно определить скобку Пуассона для двух линейных функций на $\mathfrak{g}^*$, то есть на двух векторах их $\mathfrak{g}$ (мы используем отождествление $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{**}$). Определим эту скобку как обычный коммутатор в $\mathfrak{g}$.

Задача 7. Пусть $a = diag(a_1, \dots, a_n)$, $b = diag(b_1, \dots, b_n)$ — диагональные матрицы, диагональные элементы у которых различны. Определим гладкую функцию на $so(n)$ по формуле

$$H(\alpha) = \langle \alpha, (ad_a)^{-1}(ad_b)\alpha \rangle,$$

где $\langle \alpha, \beta \rangle = tr(\alpha\beta)$. Убедитесь, что эта формула имеет смысл (нужно понять, что значит ad_b и $(ad_a)^{-1}$). Проверьте, что уравнение Гамильтона $\dot{\alpha} = \{H, \alpha\}$ эквивалентно уравнению Лакса

$$\dot{L}(t) = [A(t), L(t)],$$

в котором $L(t) = \lambda a + \alpha(t)$, $A(t) = \lambda b + \xi(t)$ для некоторой функции $\xi(t)$ (найдите эту функцию!), где λ — постоянное (не зависящее от t) комплексное число, которое можно выбирать произвольно.

Задача 8. Докажите, что функция $tr(L(t)^k)$ постоянна для любого решения $L(t)$ уравнения Лакса, выписанного выше (при любом $\lambda \in \mathbb{C}$).