Домашнее задание 6

Задача 1. Пусть L_1 и L_2 — комплексные прямые в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящие через 0, а S^{2n+1} — единичная сфера, заданная уравнением

$$\sum_{j=0}^{n} |Z_j|^2 = 1.$$

Рассмотрим окружности $S_1 = S^{2n+1} \cap L_1$ и $S_2 = S^{2n+1} \cap L_2$. Докажите, что евклидово расстояние от точки $x \in S_1$ до ближайшей точки окружности S_2 не зависит от выбора точки x.

Задача 2. Пусть $(\cdot, \cdot)$ — евклидово скалярное произведение на $\mathbb{C}^{n+1}$, инвариантное относительно умножения на i. Докажите, что форма $[Z, W] = (Z, iW)$ является симплектической формой на $\mathbb{C}^{n+1}$, и что форма $\langle Z, W\rangle = (Z, W) + i[Z, W]$ является эрмитовой формой, то есть $\langle Z, W\rangle = \overline{\langle W, Z\rangle}$ и

$$\langle \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2, W\rangle = \lambda_1 \langle Z_1, W\rangle + \lambda_2 \langle Z_2, W\rangle, \qquad \forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},$$

а также что $\langle Z, Z\rangle = (Z, Z)$.

Задача 3. Пусть $(\cdot, \cdot)$ — стандартное евклидово скалярное произведение на $\mathbb{C}^{n+1}$, то есть $(Z, Z) = \sum |Z_j|^2$. Рассмотрим произвольный вектор $W \in \mathbb{C}^{n+1}$ и вектор $Z \in S^{2n+1}$. Докажите, что вектор $p_Z(W) = W - \langle W, Z\rangle Z$ ортогонален как вектору Z, так и вектору iZ.

Задача 4. Рассмотрим каноническую проекцию $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$. Постройте канонический изоморфизм между касательным пространством к $\mathbb{C}P^n$ в точке $\pi(Z)$ и пространством $p_Z(\mathbb{C}^{n+1})$. В дальнейших задачах мы будем отождествлять эти два пространства при помощи построенного изоморфизма.

Задача 5. Определим евклидово скалярное произведение $g_q(\cdot, \cdot)$ на $T_q\mathbb{C}P^n$ как ограничение стандартного евклидового скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ на $p_Z(\mathbb{C}^{n+1})$, где $q = \pi(Z)$. Это скалярное произведение инвариантно относительно умножения на i. Обозначим соответствующую симплектическую форму на $T_q\mathbb{C}P^n$ через $\tilde{\omega}_q$. Таким образом, определена 2-форма $\tilde{\omega}$ на $\mathbb{C}P^n$. Докажите, что эта форма совпадает с симплектической структурой на $\mathbb{C}P^n$, построенной на лекции.

Задача 6. При замене координат из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, вектор $(\partial_y, -\partial_x)$ преобразуется так же, как вектор (x, y). Другими словами,

$$\text{если } \left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{x} & = & ax + by \\ \tilde{y} & = & cx + dy \end{array} \right., \quad \text{то} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} & = & a\partial_y + b(-\partial_x) \\ -\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} & = & c\partial_y + d(-\partial_x) \end{array} \right.,$$

для любых a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, таких, что $ad - bc = 1$.

Задача 7. Гессианом функции $p(x, y)$ называется определитель

$$Hess(p) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Если p — однородный многочлен степени 3, то его гессиан является квадратичной формой. Как эта форма меняется при заменях координат из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$? Верно ли, что дискриминант этой формы является инвариантом многочлена p?