Домашнее задание 9

Задача 1. Пусть $g(t) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — каноническое преобразование, зависящее от времени. Положим $(P(p,q,t), Q(p,q,t)) = g(t)(p,q)$. Докажите, что

$$p\,dq - H\,dt = P\,dQ - K\,dt + dS,$$

где K — некоторая функция от P, Q и t (координата t при преобразовании $g(t)$ не меняется), S — некоторая функция от p, q и t, а равенство становится верным при подстановке вместо P и Q их выражений как функций от p, q и t. *Указание:* сначала докажите, что в ограничении на всякую гиперплоскость $t = const$, имеем $p\,dq = P\,dQ + \alpha$, где α — точная 1-форма.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи, докажите, что отображение $g(t)$ переводит интегральные кривые гамильтоновой системы $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$, $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ в интегральные кривые гамильтоновой системы

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}, \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}.$$

Задача 3. Предположим, что функцию S можно выразить через координаты q и Q; обозначим через $S_1(q,Q,t)$ полученную функцию. Найдите частные производные

$$\frac{\partial S_1}{\partial q}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial Q}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial t}$$

в терминах p, q, P, Q, H, K, t.

Задача 4. Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H(p_1,p_2,q_1,q_2) = p_1^2 + p_2^2 + e^{q_1}$$

относительно стандартной симплектической структуры на $\mathbb{R}^4$. Пользуясь тем, что координата q_2 — циклическая (т.е. гамильтониан от нее не зависит), сведите данную систему к некоторой гамильтоновой системе в $\mathbb{R}^2$.