ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

С.А. Кисельгоф

ВЫБОР ВУЗОВ АБИТУРИЕНТАМИ С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОЛЕЗНОСТИ

Препринт WP7/2011/01
Серия WP7
Математические методы
анализа решений в экономике,
бизнесе и политике

Москва
2011

УДК 378:51
ББК 74.58в6
К44

К44 **Кисельгоф, С. А.** Выбор вузов абитуриентами с квадратичной функцией полезности : препринт WP7/2011/01 [Текст] / С. А. Кисельгоф ; Высшая школа экономики. – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2011. – 44 с. – 150 экз.

В России с 2009 г. прием в вузы производится на основании результатов Единого государственного экзамена (ЕГЭ). Абитуриент подает заявления не более чем в пять вузов. Зачисление абитуриентов производится в две «волны», по централизованно утвержденным правилам. В работе построена математическая модель выбора абитуриентом вузов для подачи заявлений. На основе спрогнозированного выбора абитуриентов смоделировано течение приемной кампании. Показаны слабые места существующего механизма зачисления абитуриентов.

УДК 378:51
ББК 74.58в6

Kiselgof, S. College entrants' choice with quadratic utility functions: Working paper WP7/2011/01 [Text] / S. Kiselgof ; Higher School of Economics. – Moscow : Publishing House of the Higher School of Economics, 2011. – 44 p. – 150 copies.

In Russia till 2009-th college admission is based on results of Unified State Exam. Entrant applies to no more than five colleges. Admission mechanism is defined by government for all state colleges. In this paper is modelled, how entrant chooses colleges for application. Based on the entrant's choice prediction, admission process is modelled. Weaknesses of the current admission mechanism are revealed.

Препринты Высшей школы экономики
размещаются по адресу: http://www.hse.ru/org/hse/wp

1 Введение

В работе построена модель приемной кампании в российских государственных ВУЗах. Для целей моделирования сделано предположение о том, что все ВУЗы и все абитуриенты разделены на некоторое количество категорий, в зависимости от их 'качества'; причем разделение на категории известно всем участникам в модели. Выбор абитуриента в рамках приемной кампании ограничен пятью ВУЗами. При подаче документов абитуриент ориентируется на качество ВУЗа и ожидаемую вероятность поступления в этот ВУЗ. При предположении о квадратичных функциях полезности абитуриента и экспоненциальном падении ожидаемой вероятности поступления при росте качества ВУЗа оказывается, что абитуриент будет всегда подавать документ в ВУЗ, поступление в который он считает гарантированным ('качество' такого ВУЗа считаем соответствующим качеству абитуриента), а также, в зависимости от параметров, в один или два ВУЗа качеством выше на 3 'ступени', от одного до трех ВУЗов качеством выше на две 'ступени' и один ВУЗ на одну ступень выше. В результате при существующей системе приема (которая подробно описана ниже) сильно пострадают ВУЗы уровня 'выше среднего': они недоберут студентов, т.к. сильные абитуриенты уйдут в наиболее привлекательные ВУЗы, а более слабые будут лишены возможности перейти на освободившиеся места из-за ограниченного количества шагов. Кроме того, возможны 'несправедливые' ситуации, когда относительно более слабые абитуриенты получат места в более сильных ВУЗах, чем относительно более сильные.

Автор выражает благодарность Ф.Т. Алескерову за всестроннюю поддержку, обсуждения и ценные замечания, а также К.С. Сорокину за важные содержательные комментарии и помощь в подготовке текста.

Автор является сотрудником Лаборатории анализа и выбора решений НИУ ВШЭ и благодарит НИУ ВШЭ за финансирование данного исследования.

2 Обзор существующих исследований

Исследование механизмов построения паросочетаний в ситуациях, когда участники имеют предпочтения и свободу принятия решений, было начато в классической работе [1]. Авторы рассматривали модели построения паросочетаний один-к-одному (когда каждый участник получает не более одного партнера) и один-ко-многим (когда участник одной стороны рынка - студенты - получают ровно одного партнера, а участники другой стороны рынка - колледжи - получают более одного партнера). Авторами был предложен алгоритм, позволяющий за конечное число шагов получить паросочетание при известных предпочтениях участников, являющихся линейными порядками на множестве участников противоположной стороны. В литературе этот алгоритм называется 'алгоритмом отложенного принятия' (deffered acceptance algorithm). Существует две версии алгоритма в зависимости от того, кто является предлагающей стороной, абитуриенты или колледжи.

Рассмотрим вариант, в котором предлагающей стороной являются студенты. До начала работы агоритма подаются предпочтения участников - линейные порядки на множестве агентов противоположной стороны. На первом шаге каждый абитуриент обращается в наиболее предпочтительный для себя ВУЗ. Вуз рассматривает все полученные заявления и (временно) принимает q лучших абитуриентов, где q соответствует числу мест. На следующем шаге те абитуриенты, которым было отказано, обращаются в следующие по предпочтительности ВУЗы. Вузы снова рассматривают все полученные заявления (оставленные с первого шага и вновь поступившие). Если ВУЗ получает новое заявление от абитуриента, которого он предпочтитает временно зачисленному, то последнему ВУЗ отказывает и на следующем шаге такой абитуриент делает предложение следующему ВУЗу. Эта процедура продолжается до тех пор, пока все абитуриенты не будут зачислены в ВУЗы либо не получат отказ от всех ВУЗов, указанных в предпочтениях.

Важным достоинством механизма является то, что он позволяет получить устойчивое паросочетание, т.е. такое, что а) никакой участник не хочет отказаться от предложенного партнера и остаться один и б) никакие два участника не желают сговориться и заключить 'соглашение' друг с другом, избежав предписанного распределения. Кроме того, при использовании варианта механизма, в котором предлагающей стороной вляются студенты, им оказывается выгодно представлять свои истинные предпочтения.

Другие известные механизмы решения этой задачи либо приводят к неустойчивому паросочетанию (top trading cycles), либо эквивалентны механизму отложенного принятия (serial dictatorship)[2].

Работа [1] получила широкое развитие и в теоретических исследованиях, и в прикладном дизайне централизованных механизмов. Механизм отложенного принятия (с незначительными вариациями) был внедрен на программе распределения медицинских интернов в США, системе зачисления в ВУЗы Турции по итогам единого тестирования, а также в департаментах образования Бостона, Нью-Йорка и других городов США для зачисления в муниципальные школы.

Для вычисления распределения абитуриентов по ВУЗам Турции используется механизм Multi-Category Serial Dictatorship [2]. Турецкая система единого экзамена близка к российской: экзамен проводится по набору предметов, и для оценки качества подготовки абитуриентов при зачислении на разные специальности используются различные взвешенные суммы оценок. Приведем используемый в Турции алгоритм вычисления итогового распределения абитуриентов по ВУЗам. До начала работы алгоритма все абитуриенты сообщают свои предпочтения относительно ВУЗов, представленные в виде линейного порядка. В список может быть включено не более 18 факультетов разных вузов. Предпочтения факультетов формируются автоматически, исходя из рассчитанных взвешенных баллов абитуриентов. Факультеты одной специализации имеют одинаковые предпочтения (скажем, для всех физических факультетов устанавливается одинаковая формула для расчета итогового балла абитуриентов; для всех медицинских - другая формула и т.д.). На первом шаге для каждой специализации выполняется следующая процедура: лучший абитуриент, из числа подавших заявку на специализацию, зачисляется в свой наиболее предпочтительный ВУЗ; каждый следующий абитуриент зачисляется в наиболее предпочтительный для себя ВУЗ, в котором еще остались места и т.д.

После проведения этой процедуры для всех специальностей фиксируется временное распределение,в котором некоторые абитуриенты могут быть зачислены более чем в один ВУЗ. Затем предпочтения абитуриентов, зачисленных более чем в один ВУЗ, искусственно 'обрезаются'

таким образом, что в списке приемлемых ВУЗов остается только лучший ВУЗ из числа тех, в которые абитуриент 'предварительно зачислен'. Процедура повторяется до тех пор, пока каждый абитуриент не получит ровно одно место в ВУЗе (либо останется незачисленным). В [2] показано, что данный механизм по получаемому паросочетанию эквивалентен механизму отложенного принятия с предлагающими ВУЗами.
Перед тем, как перейти к описанию российского механизма, приведем еще один пример механизма, на этот раз приводящего к нестабильному паросочетанию. Описанный ниже механизм часто именуется "Бостонским механизмом т.к. именно этот механизм использовался для распределения детей Бостона по муниципальным школам до проведения с участием исследователей-экономистов реорганизации системы зачисления [3].
Перед началом работы механизма участники (школы и поступающие) сообщают свои предпочтения в виде линейных порядков (списков) друг относительно друга. На первом шаге каждый абитуриент подает заявку в наилучшую для себя школу. Если щкола получила больше заявок, чем имеется мест, то она отбирает лучших абитуриентов. На втором шаге абитуриенты, отвергнутые на первом шаге, подают заявки во вторые по предпочтительности школы. Школы не пересматривают результаты зачисления на первом шаге, даже если вновь обратившиеся абитуриенты для них предпочтительнее уже зачисленных. Каждая школа зачисляет лучших из вновь обратившихся абитуриентов на оставшиеся места. Так продолжается до тех пор, пока все абитуриенты не будут зачислены (либо отвергнуты всеми школами).
Такой механизм ведет к созданию неустойчивого паросочетания. Действительно, рассмотрим абитуриента, поставившего на первое и второе места школы X и Y, соответственно. Пусть на первом шаге школа X не приняла абитуриента, т.к. получила достаточное количество заявлений от более предпочтительных абитуриентов; школа Y также полностью заполнила свои места на первом шаге. Тогда на втором шаге абитуриент подает заявление в Y. Но даже если Y считает этого абитуриента лучшим среди всех, она не сможет его принять, так как все места заполнены на первом шаге. Использование этого механизма в Бостонской системе муниципального образования приводило к тому, что родители школьников старались манипулировать своими предпочтениями таким образом,

чтобы попасть в наилучшую доступную школу. Этот алгоритм был заменен алгоритмом отложенного принятия [3], что позволило улучшить получаемое распределение для существенной доли абитуриентов и ликвидировать необходимость манипулирования при представлении предпочтений.

Отметим, что при практической реализации всех описанных механизмов участники только представляют свои предпочтения относительно партнеров противоположной стороны, однако сами шаги механизма, приводящие к получению паросочетания, вычисляются компьютерной системой. В этом состоит ключевое отличие от системы, принятой в России, так как российские абитуриенты и ВУЗы принимают активное участие в процессе зачисления. В то же время формально российский механизм является централизованным, т.к. правила, процедуры и сроки подачи документов и зачисления установлены заранее и извне.

3 Организация приемной кампании в российских государственных ВУЗах в 2010 году

Приемная кампания включает три основных этапа, которые будут описаны ниже. Стоит отметить, что несущественные для нашего исследования детали намеренно опущены.

На первом этапе абитуриенты подают заявления в интересующие их ВУЗы. В 2010 году число ВУЗов, в которые мог подавать заявление абитуриент, было ограничено 5-ю. В каждом ВУЗе абитуриент мог подавать заявление не более чем на 3 специальности. Заявления принимались приемными комиссиями ВУЗов до середины 25 июля. Заявление на определенную специальность принимается при наличии копии аттестата о полном среднем образовании и результатов ЕГЭ по трем или четырем предметам, сдаваемым при приеме на эту специальность. Таким образом, если абитуриент подает заявление на одну и ту же специальность в разные ВУЗы, он имеет одинаковое количество баллов.

После окончания приема заявлений производится так называемая первая волна зачислений. Вузы объявляют списки абитуриентов, которых они готовы принять. Список всех подавших заявления на некоторую специальность сортируется по сумме баллов ЕГЭ. Список принимаемых абитуриентов включает верхнюю часть списка подавших заявления, при этом число принимаемых должно соответствовать числу мест. Если заявления подало меньше абитуриентов, чем имеется мест в ВУЗе, то все подавшие заявления включаются в список принимаемых абитуриентов. До 4 августа абитуриенты должны были принести подлинник аттестата в один из ВУЗов, включивших их в список. Если до установленного срока рекомендованный абитуриент не принес подлинник, то он выбывает из дальнейшего конкурса на эту специальность в этом ВУЗе. Абитуриенты, принесшие подлинник, переходят в разряд официально рекомендованных к зачислению. На втором этапе из списков вычеркиваются все, кто мог бы быть принят, но не принес подлинник. Вузы формируют новые списки принимаемых абитуриентов, опять в соответствии с суммой баллов ЕГЭ абитуриента. Абитуриент, который принес подлинник аттестата в первой волне зачислений, имеет право забрать его и принести в другой ВУЗ, принявший его только во второй волне, но более для этого абитуриента предпочтительный. В остальном правила те же - до установленного централизованно срока (9 августа) ВУЗы ждут абитуриентов с подлинниками аттестатов. После этого централизованная приемная кампания заканчивается и ВУЗы зачисляют тех абитуриентов, которые принесли подлинники.

4 Математическая постановка задачи

4.1 Описание ситуации

Рассматривается прием абитуриентов на одну группу специальностей в государственные ВУЗы в соответствии с описанными выше правилами.

- A - множество всех абитуриентов,
- B - множество всех ВУЗов,
- A_i - множество абитуриентов уровня подготовки $i, i = \overline{1, M}$ Таким образом, абитуриенты разбиты на M категорий по уровню подготовки. Чем выше номер категорий, тем выше уровень подготовки абитуриента (результат ЕГЭ),

- B_j - множество ВУЗов качества $j, j = \overline{1, M+1}$ Таким образом, ВУЗы разбиты на M+1 категории по качеству (репутации). Чем выше номер категории, тем выше качество образования входящих в нее ВУЗов.

Обозначим число абитуриентов в каждой группе через k_i, а число ВУЗов в каждой категории через n. Число мест в каждом ВУЗе примем одинаковым и равным L.

4.2 Предпочтения ВУЗов

Все ВУЗы имеют одинаковые предпочтения на множестве абитуриентов, устроенные следующим образом: группы абитуриентов упорядочены по предпочтительности зачисления в вуз. При этом абитуриенты, сравнить которых между собой ВУЗы не могут, попадают в одну категорию A_i по уровню подготовки. Внутри группы с одинаковым уровнем подготовки ВУЗ не может сравнить абитуриентов, т.е. считает их одинаковыми. Предположение об одинаковых предпочтениях ВУЗов является жизнеспособным в том случае, если мы рассматриваем прием только на одну группу специальностей, на которой в разных ВУЗах требуется одинаковый набор результатов ЕГЭ, и, следовательно, абитуриенты имеют одинаковую сумму баллов с точки зрения любого ВУЗа.

4.3 Предпочтения абитуриентов

- Вузы из более высокой группы предпочтительнее ВУЗов из более низкой группы для любого абитуриента,

- Каждый абитуриент ранжирует ВУЗы внутри группы ВУЗов одинакового качества в индивидуальном порядке,

- Полезность от поступления в ВУЗ $b \in B_j$ для некоторого абитуриента a оценивается в

$$(j + s_a)^2, 0 < s_a \leq 1, \tag{1}$$

- s_a определяется местом ВУЗа в ранжировке данного абитуриента. А именно, если ВУЗ является лучшим для абитуриента в данной группе, то $s_a = 1$. Если ВУЗ является l-ым по предпочтительности в этой группе, то $s_a = \frac{(n-l+1)}{n}$. То есть полезность s_a задается таким образом, чтобы любой вуз категории j+1 был заведомо предпочтительнее любого вуза из категории j.

- Кроме полезности от поступления, ВУЗы оцениваются абитуриентами по вероятности поступления. Вероятность поступления зависит от уровня подготовки абитуриента (прямо) и качества ВУЗа (обратно)

$$p = \begin{cases} 2^{i-j}, j \geq i, \\ 1, j < i. \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом, абитуриенту $a \epsilon A_i$ невыгодно подавать документы в ВУЗ $b \epsilon B_j$, если $i > j$, т.к. это будет заведомой потерей по сравнению с гарантированным ВУЗом из категории $j = i$.

4.4 Выбор ВУЗа абитуриентом

Каждый абитуриент должен выбрать набор из 5 ВУЗов. Для каждого набора оценивается ожидаемая полезность, абитуриент выбирает набор с наибольшей ожидаемой полезностью. Будем считать, что все абитуриенты придерживаются следующего разумного принципа: 'если я зачислен сразу в несколько ВУЗов, то выбираю лучший, т.е. приносящий наибольшую полезность от поступления'. Рассмотрим абитуриента a из группы A_i и его набор, состоящий из 5-ти ВУЗов. Вузы в наборе упорядочены по предпочтительности для абитуриента a: первый ВУЗ (категория j_1) самый лучший, последний (категория j_5) - самый худший. Оценим ожидаемую полезность поступления в лучший ВУЗ набора

$$\overline{u_a(j_1, s_1)} = 2^{i-j_1} * (j_1 + s_1)^2 \tag{3}$$

Если абитуриент не поступит в лучший ВУЗ (а это произойдет с вероятностью с вероятностью $p = 1 - 2^{i-j_1}$), то он будет рассматривать следующий ВУЗ в своем наборе. Абитуриент считает события 'поступил в ВУЗ j_1' и 'поступил в ВУЗ j_2' независимыми, поэтому вероятность того, что абитуриент не поступил в первый ВУЗ, но поступил во второй, оценивается как произведение вероятностей этих событий. Тогда ожидаемая полезность поступления во второй ВУЗ набора равна:

$$\overline{u_a(j_2, s_2)} = (1 - 2^{i-j_1}) * 2^{i-j_2} * (j_2 + s_2)^2 \quad (4)$$

При этом, естественно, выполняется условие $j_1 + s_1 > j_2 + s_2$. Ожидаемая полезность поступления в 3-ий, 4-ый и 5-ый ВУЗы в наборе вычисляется аналогичным образом. Итоговое выражение для ожидаемой полезности абитуриента a выглядит так:

$$\begin{aligned} \overline{u_a} = 2^{i-j_1} * (j_1 + s_1)^2 + \\ +(1 - 2^{i-j_1}) * (2^{i-j_2} * (j_2 + s_2)^2 + (1 - 2^{i-j_2}) * (2^{i-j_3}(j_3 + s_3)^2 + \\ +(1 - 2^{i-j_3}) * (2^{i-j_4} * (j_4 + s_4)^2 + (1 - 2^{i-j_4}) * 2^{i-j_5} * ((j_5 + s_5)^2))) \end{aligned} \quad (5)$$

5 Какой выбор сделает абитуриент?

После того, как сделаны предположения о функции полезности абитуриента, можно определить, в какие ВУЗы он будет подавать заявления. Для поиска наилучшего набора ВУЗов мы будем решать задачу максимизации приведенной выше функции полезности, пользуясь принципом динамического программирования. Ниже приводятся полученные результаты. Их формальное обоснование дано в Приложении.

Первое, что может быть обнаружено при таком подходе - это то, что в качестве самого слабого ВУЗа в наборе все абитуриенты $a \epsilon A_i$, при $i \geq 2$, будут выбирать свой 'любимый' ВУЗ из соответствующей группы B_i, поступление в который абитуриент считает гарантированным. При дальнейшем анализе оказывается, что абитуриенты разных уровней подготовки не единодушны в своем выборе. Они выбирают различные наборы ВУЗов в зависимости от своего уровня i и числа ВУЗов в каждой категории n, то есть степени неопределенности.

Параметр n, напомним, показывает число ВУЗов в одном классе качества. Если это число мало, значит, общество имеет хорошо детализированные представления о качестве ВУЗов. Если же это число, напротив, достаточно велико, то общество и, в частности, абитуриенты, находятся в ситуации существенной неопределенности, т.к. вынуждены опираться только на свои личные впечатления при сравнении больших групп ВУЗов. Теперь покажем, как уровень неопределенности влияет на выбор

абитуриентов. Сначала рассмотрим общую картину выбора абитуриентов при разных n. Мы будем рассматривать ситуации начиная с $n = 3$. Ситуация $n = 2$ - неинтересная и в некотором смысле вырожденная, так как предполагает очень высокий уровень 'определенности' в представлениях абитуриентов о ВУЗах.
Прежде чем переходить к анализу выбора абитуриентов, введем характеристику рискованности набора - вектор вероятностей поступления в выбранные абитуриентом ВУЗы. Если абитуриент $a \epsilon A_i$ выбрал ВУЗы из категорий j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, то вектор рискованности будет иметь вид $(2^{i-j_1}, 2^{i-j_2}, 2^{i-j_3}, 2^{i-j_4}, 2^{i-j_5})$ (в случае, когда все $i \le j$).
Так как набор у нас упорядочен по привлекательности ВУЗа, то и вектор вероятностей будет упорядочен по возрастанию: первая компонента соответствует наиболее желанному и, соответственно, наименее достижимому ВУЗу. На таких векторах можно ввести отношение 'рискованнее, чем'. Это отношение будет на всем множестве наборов задавать частичный порядок. Будем говорить, что для векторов рискованности α и β $\alpha R \beta$, если $\forall \alpha_i$ верно $\alpha_i \le \beta_i$ и $\exists \alpha_i$ такое что $\alpha_i < \beta_i$
Также заметим, что мы изначально не задаем фиксированное число уровней подготовки и групп абитуриентов, а лишь говорим, что это число одинаково. Ясно, что абитуриенты самых сильных групп оказываются в особом положении в силу ограниченности выбора, поэтому их поведение будет рассмотрено отдельно.

5.1 Выбор при разных уровнях неопределенности

Итак, было выявлено четыре ступени неопределенности с разным поведением групп:

1. $n = 3, 4$.

Вуз 1	Вуз 2	Вуз 3	Вуз 4	Вуз 5	$n = 3$	$n = 4$
$(i+3, 1)$	$(i+3, \frac{n-1}{n})$	$(i+2, 1)$	$(i+1, 1)$	$(i, 1)$	$i \ge 6$	$i \ge 3$
$(i+4, 1)$	$(i+3, 1)$	$(i+2, 1)$	$(i+1, 1)$	$(i, 1)$	$2 \le i \le 5$	$i = 2$

Таблица 1: Выбор при n=3,4

Если абитуриентам известно очень подробное разбиение ВУЗов на группы по качеству образовательных услуг (каждая группа содержит три или четыре ВУЗа одного качества), то абитуриенты с низким уровнем подготовки выберут свои 'любимые' ВУЗы из категорий от B_i до B_{i+4}. Абитуриенты с более высокими уровнями подготовки выберут два ВУЗа из категории B_{i+3} и по одному ВУЗу из категорий B_{i+2}, B_{i+1}, B_i.

Уже здесь проявляется закономерность, которая будет наблюдаться все время: при каждом конкретном n, чем слабее группа абитуриентов, тем более рискованный набор они выбирают. Например, при $n = 3$ абитуриенты уровня $i = 5$ выберут набор $(i+4, i+3, i+2, i+1, i)$, в то время как абитуриенты уровня $i = 6$ выберут менее рискованный набор $(i+3, i+3, i+2, i+1, i)$.

2. $5 \le n \le 14$. На второй ступени неопределенности абитуриенты

Вуз 2	Вуз 3	Вуз 4	$n = 5$	$n = 14$
$(i+2, 1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$(i+1, 1)$	$i \ge 47$	$i \ge 13$
$(i+3, \frac{n-1}{n})$	$(i+2, 1)$	$(i+1, 1)$	$4 \le i \le 46$	$i = 12$
$(i+3, \frac{n-1}{n})$	$(i+2, 1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$2 \le i \le 3$	$i \le 11$

Таблица 2: $5 \le n \le 14$

разбиваются на три группы. Заметим, что при $n \ge 5$ абитуриенты всегда выбирают лучший ВУЗ из категории B_{i+3} и худший ВУЗ из (гаратированной) категории B_i. Различия в выборе абитуриентов разных уровней подготовки заключаются только в выборе трех 'средних' ВУЗов.

Назовем три группы абитуриентов условно сильными, средними и слабыми. Граница уровня подготовки, отсекающая слабых от средних, сдвигается вверх с увеличением n, а граница, отделяющая средних от сильных, сдвигается вниз с увеличением n. Таким образом, средняя группа сжимается и в конце концов исчезает.

Абитуриент из слабой группы выбирает два ВУЗа из категории B_{i+3}, два ВУЗа из категории B_{i+2} и гарантированный ВУЗ своей категории B_i. Абитуриенты среднего уровня подготовки вместо второго ВУЗа из категории B_{i+2} выбирают ВУЗ из категории B_{i+1} и рискуют меньше, чем слабые абитуриенты. Наконец, сильные абитуриенты выбирают вместо второго ВУЗа из категории B_{i+3} второй ВУЗ из категории B_{i+2}. Таким образом, сильные абитуриенты рискуют в наименьшей степени.

3. $15 \leq n \leq 37$. При дальнейшем увеличени n, а значит, росте неопре-

Вуз 2	Вуз 3	Вуз 4	$n = 15$	$32 \leq n \leq 37$
$(i+2, 1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$(i+1, 1)$	$i \geq 12$	$i \geq 16$
$(i+3, 1)$	$(i+2, 1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$2 \leq i \leq 11$	$2 \leq i \leq 15$

Таблица 3: Выбор при $15 \leq n \leq 37$

деленности, исчезает средняя группа абитуриентов. Сильные и слабые абитуриенты делают тот же выбор, что и соответствующие группы при меньших n.

Сильные абитуриенты рискуют меньше и выбирают один ВУЗ из категории B_{i+3}, два ВУЗа из категории B_{i+2}, один ВУЗ из категории B_{i+1} и гарантированный ВУЗ категории B_i. Слабая часть абитуриентов выбирает гораздо более рискованный набор - два ВУЗа из категории B_{i+3} и два ВУЗа из категории B_{i+2}.

Заметим, что граница сильные-слабые смещается вверх с увеличением n, то есть все больше абитуриентов попадают в группы слабых и больше рискуют.

4. $n \geq 38$.

Вуз 2	Вуз 3	Вуз 4	$n = 38, 39$	$47 \leq n \leq 58$
$(i+2, 1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$(i+1, 1)$	$i \geq \frac{1}{2}n - 2$	
$(i+2, 1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$(i+2, \frac{n-2}{n})$	$16 \leq i \leq \frac{n}{2} - 3$	$14 \leq i \leq \frac{n}{2} - 3$
$(i+3, 1)$	$(i+2, 1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$2 \leq i \leq 15$	$2 \leq i \leq 13$

Таблица 4: Выбор при $n \geq 38$

Эта, последняя, ступень характеризуется очень высоким уровнем неопределенности и, по всей видимости, должна быть рассмотрена в большей степени для законченности анализа, нежели для практического применения результатов. На этой ступени снова выделяются три группы абитуриентов с разным поведением: сильные, средние, слабые. Естественно, границы групп будут отличаться от таковых на второй ступени неопределенности. При увеличении n граница средние-слабые, как ни странно, опускается вниз, а граница сильные-средние ползет вверх.

Средняя группа выбирает один ВУЗ из категории B_{i+3} и три ВУЗа из категории B_{i+2}. Сильная и слабая группы делают тот же выбор, что и в предыдущих случаях. Здесь соблюдается закономерность: чем сильнее абитуриент, тем менее рискованный набор он выбирает.

5.2 Поведение отдельных категорий абитуриентов при увеличении неопределенности

Теперь посмотрим, как изменяется набор, выбираемый абитуриентом с определенным уровнем подготовки, при изменении уровня неопределенности. Можно поделить уровни подготовки на четыре группы в зависимости от того, как претерпевает изменения стратегия студента при изменении уровня неопределенности. В нашей модели максимально возможный уровень подготовки (и число групп, отличающихся по уровню подготовки) никак не влияет на выбор абитуриента.

1. $2 \leq i \leq 5$. Абитуриенты с низким уровнем подготовки имеют три различных модели поведения. Наименее рискованное поведение наблюдается в среднем случае. Например, для абитуриента с уровнем подготвки i=4 будет рисковать меньше всего при n = 4,5 или 6. Выбор абитуриента с уровнем подготовки i=4 приведен в таблице.

$n \geq 7$	$i+3$	$i+3$	$i+2$	$i+2$	i
$4 \leq n \leq 6$	$i+3$	$i+3$	$i+2$	$i+1$	i
$n = 3$	$i+4$	$i+3$	$i+2$	$i+1$	i

Таблица 5: Выбор абитуриента уровня подготовки $i = 4$ при разных n

2. $6 \leq i \leq 10$. Абитуриенты этих уровней подготовки один раз изменяют свой выбор при увеличении неопределенности, при этом

с ростом неопределенности рискованность выбора растет. В качестве примера приведен выбор абитуриента с уровнем подготовки i = 8.

$n \geq 11$	$i+3$	$i+3$	$i+2$	$i+2$	i
$3 \leq n \leq 10$	$i+3$	$i+3$	$i+2$	$i+1$	i

Таблица 6: Выбор абитуриента уровня подготовки $i = 8$ при разных n

3. $11 \leq i \leq 15$. При таких уровнях подготовки у абитуриентов может наблюдаться 4 различных типа поведения в зависимости от уровня неопределенности. В таблице приведен пример поведения для абитуриентов группы A_{15}. Если обозначить эти типы поведения через $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (по убыванию величины n, см. пример в таблице), то отношение 'рискованнее чем' будет выглядеть следующим образом: $\beta \succ (\alpha, \delta) \succ \gamma$. Для группы A_{15} наиболее рискованное поведение будет наблюдаться ри $32 \leq n \leq 39$. Таким образом, не наблюдается взаимосвязи между уровнем неопределенности и рискованностью выбора абитуриентов.

$n \geq 40$	α	$i+3$	$i+2$	$i+2$	$i+2$	i
$32 \leq n \leq 39$	β	$i+3$	$i+3$	$i+2$	$i+2$	i
$10 \leq n \leq 31$	γ	$i+3$	$i+2$	$i+2$	$i+1$	i
$3 \leq n \leq 9$	δ	$i+3$	$i+3$	$i+2$	$i+1$	i

Таблица 7: Выбор абитуриента уровня подготовки $i = 15$ при разных n

4. $i \geq 16$. Наконец, для всех абитуриентов с уровнем подготовки $i = 16$ и выше наблюдаются три вида поведения. Третье поведение наблюдается при $n \geq 2i + 4$, в то время как n, напомним, является числом ВУЗов в группе одного качества и поэтому не может быть слишком большим. Пример поведения для абитуриента уровня подготовки $i = 25$ приведен в таблице.

$n \geq 55$	$i+3$	$i+2$	$i+2$	$i+2$	i
$7 \leq n \leq 54$	$i+3$	$i+2$	$i+2$	$i+1$	i
$3 \leq n \leq 7$	$i+3$	$i+3$	$i+2$	$i+1$	i

Таблица 8: Выбор абитуриента уровня подготовки $i = 25$ при разных n

6 Моделирование приемной кампании

Теперь, когда мы определили ожидаемое поведение абитуриентов, можно предсказать развитие приемной кампании. Для этого придется задать следующие параметры:

- параметр M, определяющий число групп качества ВУЗов и абитуриентов,
- параметр n, определяющий число ВУЗов в каждой группе одинакового качества и характеризующий уровень неопределенности,
- количество абитуриентов разного уровня подготовленности.

Поскольку в нашей модели считается одинаковым число ВУЗов в группе и число мест в ВУЗе, то места будут распределены равномерно по качеству. Относительно предпочтений абитуриентов будем предполагать, что каждый ВУЗ встречается на первом, втором и т.д. месте в ранжировке абитуриентов одинаковое число раз. Таким образом мы пока не будем вводить случайную составляющую, связанную с предпочтениями абитуриентов.

Обозначим через r_{ij} число заявлений, которые получает ВУЗ из группы B_j от абитуриентов категории A_i. В силу способа моделирования предпочтений абитуриентов очевидно, что $\forall i, j : i > j$ имеет место $r_{ij} = 0$. Таким образом, абитуриенты не подают заявление в ВУЗы более слабых категорий, следовательно, ВУЗ не имеет возможности получить абитуриента из категории с номером выше, чем его собственная.

Обозначим через s^1_{ij} число абитуриентов категории A_i, рекомендованных в ВУЗ группы B_j на первом этапе, а через s^2_{ij} - число рекомендованных на втором этапе.

Наконец, обозначим через t^1_{ij} число абитуриентов категории A_i, принесших подлинники документа о среднем образовании и считающихся зачисленными в ВУЗ группы B_j на первом этапе, а через t_{ij}^2 - аналогичную величину к концу второго этапа.

6.1 Равномерное распределение абитуриентов. Числовой пример.

Рассмотрим следующий пример.

- M = 10, то есть 10 категорий абитуриентов и 11 категорий ВУЗов,
- n = 20, число ВУЗов в категории,
- Число абитуриентов совпадает с числом мест в ВУЗах,
- Абитуриенты распределены по категориям равномерно.

Общее число ВУЗов будет равно $20 * 11 = 220$, а мест - $220 * L$. Абитуриенты распределены по категориям равномерно, поэтому $\forall i |A_i| = \frac{220*L}{10} = 22L$.
На первом этапе каждый абитуриент категорий $2 \leq i \leq 8$ подаст заявление в ВУЗ своей категории, в два ВУЗа категории B_{i+2} и два ВУЗа категории B_{i+3}. Абитуриенты из двух верхних категорий, в принципе не имеющие категории ВУЗов B_{i+3}, также сделают выбор, максимизирующий их ожидаемую полезность. Для абитуриента из лучшей категории A_{10}набор будет включать ВУЗ своей категории и четыре ВУЗа категории B_{11}. Для абитуриента из категории A_9 набор будет включать один ВУЗ своей категории, один ВУЗ категории B_{10} и три ВУЗа категории B_{11}. Для абитуриента из группы A_1 наилучшим будет выбор, не включающий гарантированный ВУЗ: один ВУЗ из B_2, два ВУЗа из B_3 и два ВУЗа из B_4.

Подача заявлений Какой же набор заявлений получит каждый ВУЗ? Во-первых, число заявлений от абитуриентов собственной категории равно числу абитуриентов, считающих ВУЗ лучшим . Поскольку число абитуриентов, считающих данный ВУЗ лучшим в своей категории, одинаково для любого ВУЗа, то общее число таких заявлений будет $\forall i, j : i = j > 1 r_{i,j} = \frac{22L}{20} = 1.1L$. Вузы категории B_1 в нашей модели не получают ни одного заявления. Значения остальных r_{ij} можно легко вычислить исходя из описанного выше поведения студентов. Матрица R будет выглядеть следующим образом:

$$R^T = \begin{pmatrix} 4.4L & 3.3L & 2.2L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1L & 1.1L & 2.2L & 2.2L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1L & 0 & 2.2L & 2.2L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1L & 0 & 2.2L & 2.2L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 2.2L & 2.2L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 2.2L & 2.2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 2.2L & 2.2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 2.2L & 2.2L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 2.2L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 1.1L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Вузы первых двух категорий получат наибольшее число заявлений. Диаграмма дает представление о том, как меняется число принятых заявлений в зависимости от категории ВУЗа:

Первая волна зачислений. Поскольку ВУЗ не различает абитуриентов одной категории, он рекомендует к зачислению всех абитуриентов лучшей категории, а если остаются места, то целиком всех подавших заявления из следующей категории. Соответственно матрица S, характеризующая число рекомендованных к зачислению, будет выглядеть следующим образом:

$${S_1}^T = \begin{pmatrix} 4.4L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

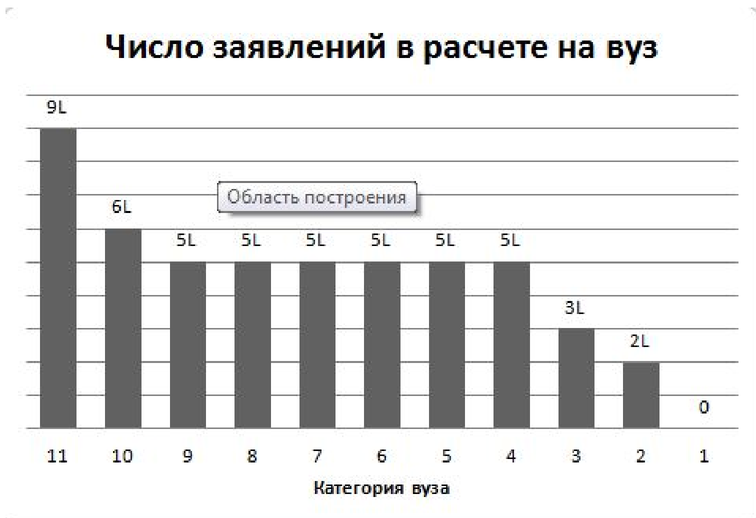

Рис. 1: Число заявлений в расчете на вуз при равномерном распределении студентов

Теперь абитуриенты, увидев списки, принимают решение о том, куда нести подлинник аттестата. На данном этапе каждый, кроме абитуриентов сильной категории, попал в ровно один ВУЗ и отнесет свой подлинник именно туда. Больше всех пострадают ВУЗы категории B_10, т.к. зачисленные ими абитуриенты в полном составе разбредутся по более сильным ВУЗам категории B_11. Надо сказать, что большого превышения числа мест в ВУЗах категории B_11 не будет, т.к. число заявлений не соответствует реальному спросу на места - все сильные абитуриенты подавали заявления сразу в четыре сильных ВУЗа.
Матрица зачислений после первой волны будет выглядеть следующим образом.

$$T_1{}^T = \begin{pmatrix} 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Вторая волна зачислений Вузы, у которых места оказались незанятыми (а это ВУЗы из категории B_10) публикуют новые списки рекомендованных к зачислению. Они предлагают поступить более слабым абитуриентам из группы A_9, которые также подавали заявления (см.

матрицу R).

$$S_2{}^T = \begin{pmatrix} 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Абитуриенты группы A_9 в соответствии с законом имеют возможность забрать свои документы из ВУЗов B_9 и отнести их в более желательные для них ВУЗы $B_1 0$. В итоге после второй волны матрица зачислений будет выглядеть следующим образом.

$$T_2{}^T = \begin{pmatrix} 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Таким образом, ВУЗы категории A_8, если они будут вести себя в соответствии с установленными правилами и отдадут документы абитуриентам после первой волны, останутся без студентов. На иллюстрации представлено распределение числа зачисленных студентов после окончания работы алгоритма. Высота столбца соответствует среднему числу абитуриентов в ВУЗе соответствующей категории.

Рис. 2: Среднее число зачисленных по категориям ВУЗов

6.2 Неполная информация о категориях студентов

Рассмотрим следующий пример.

- M = 10, то есть 10 категорий абитуриентов и 11 категорий ВУЗов, однако ВУЗы могут более четко оценить уровень подготовки абитуриента, чем сами абитуриенты. Поэтому с точки зрения ВУЗа каждая из категорий абитуриентов разделяется на три разноуровневые группы,
- n = 20, число ВУЗов в категории,
- Абитуриенты распределены по категориям равномерно

Для данного примера мы не будем приводить динамику процесса зачисления, приведем лишь иллюстрацию результата зачисления. В данном случае оказывается, что недоберут абитуриентов самые сильные ВУЗы. Если число абитуриентов совпадает с числом мест, то результатом приемной кампании будет распределение, приведенное на рис. 3. Если число абитуриентов (в целом) окажется меньше числа мест (расчет произведен для 0,75N), то результатом приемной кампании будет распреде-

Рис. 3: Среднее число зачисленных по категориям ВУЗов, неполная информация

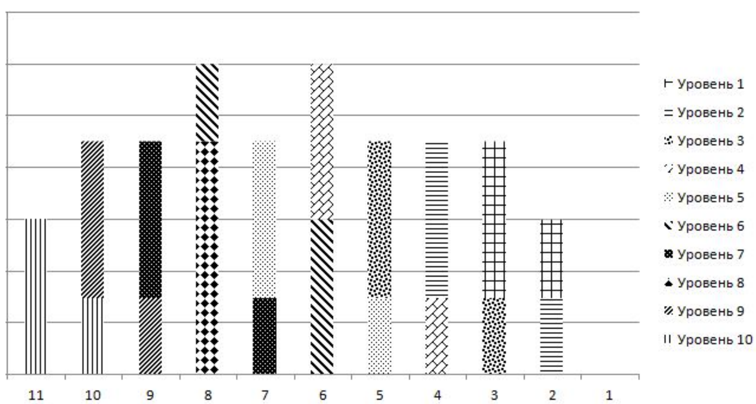

Рис. 4: Среднее число зачисленных по категориям ВУЗов, неполная информация, избыток мест

ление, приведенное на рис. 4. Здесь разными штриховками представлены абитуриенты из групп разного уровня подготовки (для упрощения иллюстрации абитуриенты из подгрупп внутри одной группы выделены одним цветом). Отметим, что в такой ситуации будет наблюдаться несправедливое зачисление, например, абитуриенты уровня 6 зачислены в ВУЗы группы 8, в то время как некоторые абитуриенты уровня 7 (более сильные, чем уровень 6) попали в ВУЗы более слабой группы 7.

7 Заключение

В данном исследовании предложен способ моделирования поведения абитуриента при выборе набора вузов для подачи заявлений, а также смоделирован ход приемной кампании для различных ситуаций - при разной имеющейся у вузов и абитуриентов информации и разном соотношении числа мест и числа абитуриентов. Данная модель позволяет высветить слабые места существующего в России механизма распределения абитуриентов по вузам. Дальнейшее развитие данного исследование предполагает два направления. Во-первых, это моделирование зачисления в течение нескольких лет, при котором абитуриенты второго и последующих лет получают дополнительную историческую информаыцию. Второе направление - моделирование поведения вузов как активных игроков, которое позволило бы описать и предсказать случаи и характер манипулирования механизмом зачисления.

8 Список литературы

1. D. Gale, L. S. Shapley "College Admissions and the Stability of Marriage American Mathematical Monthly, vol. 69,pp 9-14, 1962

2. M. Balinski, T. Sonmez "A Tale of Two Mechanisms: Student Placement Journal of Economic Theory, vol. 84(1), pp 73-94, January, 1999

3. A. Abdulkadiroglu, T. Sonmez "School Choice: A Mechanism Design Approach American Economic Review, vol. 93, pp. 729-747, 2003

9 Приложение. Доказательство утверждения раздела 2

Абитуриент должен выбрать 5 ВУЗов так, чтоб максимизировать свою ожидаемую полезность. Упорядочим ВУЗы в наборе так, что на первом месте будет стоять лучший ВУЗ из 5, а на пятом месте - худший. Тогда процесс выбора ВУЗов может быть описан как задача динамического программирования из 5 шагов. Будем решать эту задачу с конца, начиная с выбора самого слабого ВУЗа в наборе.

9.1 Шаг 5

Выбор наименее предпочтительного ВУЗа в нашем наборе зависит от предпочтений абитуриентв и от того, какой ВУЗ был выбран на 4-ом шаге (т.к. ВУЗ на 5-ом шаге не может быть лучше 4-го и не может совпадать с ним). Выбирать ВУЗ из категории хуже, чем i, абитуриент не может. Поэтому выбор абитуриента будет решением следующей задачи:

$$\begin{array}{l} max(2^{i-j_5} * (j_5 + \frac{x_5}{n})^2) \\ j_4 + \frac{x_4}{n} \geq j_5 + \frac{x_5}{n} + \frac{1}{n} \\ j_4 \geq j_5 \\ j_5 \geq i \\ 1 \leq x_5 \leq n \\ j_5, x_5 \epsilon N \end{array} \tag{11}$$

при каждых заданных j_4, x_4, n и i. Максимум целевой функции этой задачи без учета ограничений, связанных с решением на шаге 4, достигается в точке $j_5 = i, x_5 = n$ при всех $i \geq 2$. Поскольку выбор более одного ВУЗа из категории j=i заведомо невыгоден (поступление в ВУЗ категории i абитуриент считает гаратированным). Следовательно, какими бы ни были решения на первых четырех шагах, в качестве пятого ВУЗа будет выбран гарантированный ВУЗ из категории B_i.

9.2 Шаг 4

Итак, мы знаем, что на пятом шаге все абитуриенты из категорий $i \geq 2$ выберут любимый ВУЗ из числа тех, поступление в который считают гарантированным. Тогда на 4-ом шаге нужно выбрать ВУЗ (заведомо из категории более высокой, чем i), удовлетворяющий следующим условиям:

$$
\begin{array}{l}
max(2^(i - j_4) * (j_4 + \frac{x_4}{n}) + (1 - 2^{i-j_4}) * (i+1)^2) \\
j_3 + \frac{x_3}{n} \geq j_4 + \frac{x_4}{n} + \frac{1}{n} \\
j_3 \geq j_4 \\
j_4 \geq i + 1 \\
1 \leq x_4 \leq n \\
j_4, x_4 \epsilon N
\end{array}
\tag{12}
$$

Экстремум задачи без учета ограничений, связанных с решением, принятым на более ранних шагах, достигается при $j_4 = i + 2$, $x_4 = n$.
При всех решениях предыдущих шагов, таких что $j_3 \geq i+3$, на четвертом шаге будет сделан выбор $j_4 = i + 2$, $s_4 = 1$, т.к. эта точка является глобальным экстремумом в дискретном случае.
Если на предыдущем шаге был выбран ВУЗ $j_3 = i + 1, x_3 = n - y$, то единственно возомжным решение остается $j_4 = i + 1, x_4 = n - y - 1$.
Если же на предыдущем шаге было выбрано $j_3 = i + 2, x_3 = n - y$, то глобальный экстремум целевой функции уже не может быть решением задачи, т.к. не будет удовлетворять ограничениям. Может быть выбрано два варианта: $j_4 = i + 2, x_4 = n - y - 1$ или $j_4 = i + 1, x_4 = 1$. Сравним ожидаемые полезности в этих случаях:

$$u_4(i+2, n-y-1) = \frac{1}{4}(i + 2 + \frac{n-y-1}{n})^2 + \frac{3}{4}(i+1)^2 \tag{13}$$

$$u_4(i+1, n) = \frac{1}{2}(i+2)^2 + \frac{1}{2}(i+1)^2 \tag{14}$$

Функция (12) является убывающей от y. Выбор абитуриента будет зависеть от конкретных y, n, i, однако будет "переключаться от первого варианта ко второму при одном значении y.
Решив соответствующее неравенство, получим, что при $n \geq (y+1)(\frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{i^2 + 6i + 7})$ следует выбирать $j_4 = i + 1$. Иначе говоря, если нет очень привлекательного ВУЗа из категории B_{i+2}, разумнее выбрать наилучший ВУЗ из категории B_{i+1}. Нижняя граница добавочной привлекательности x_4 растет с увеличением i. Таким образом, чем выше качество подготовки абитуриента, тем меньше он склонен рисковать и подавать документы в более сильный ВУЗ.

9.3 Шаг 3

На шаге 3 необходимо будет рассматривать два случая каждый раз, в зависимости от решения, которое последует на шаге 4. В общем случае задача отыскания оптимального решения будет выглядеть следующим образом

$$\begin{aligned}
&max(2^{i-j_3}(j_3+\tfrac{x_3}{n})+(1-2^{i-j_3})(2^{i-j_4}*(j_4+\tfrac{x_4}{n})+(1-2^{i-j_4})*(i+1)^2)),\\
&j_2+\tfrac{x_2}{n}\geq j_3+\tfrac{x_3}{n}+\tfrac{1}{n},\\
&j_2\geq j_3,\\
&j_3\geq j_4,\\
&1\leq x_3\leq n,\\
&j_3,x_3\epsilon N.
\end{aligned} \tag{15}$$

В этой задаче переменными являются j_3, x_3. Величины j_2, x_2, i, n являются параметрами задачи, а величины j_4, x_4 определяются в соответстии с выявленным выше правилом.
Заметим, что поскольку всего в выборе 5 шагов и на первом шаге нецелесообразно выбирать ВУЗ из какой-либо категории с $x_j < n$, то $\forall j_2$ $x_2 = n-1$ или $x_2 = n$.
Рассмотрим последовательно все возможные ситуации.

9.3.1 $j_2 = i+1, x_2 = n-y$

В этом случае единственно возможным решением является $j_3 = i+1, x_3 = n-y-1$ при $n > y$

9.3.2 $j_2 = i+2$

Сначала рассмотрим такие значения n, при которых на четвертом шаге будет выбран ВУЗ из категории B_{i+2}. Рассмотрим случай $x_2 = n-1, n \geq \frac{3}{2}i+\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{i^2+6i+7}$. При таком n, если будет выбрано $j_3 = i+2, x_3 = n-2$, то на четвертом шаге будет принято решение $j_4 = i+2, x_4 = n-3$. Возможные стратегии на третьем шаге: выбрать $j_3 = i+2$ или $j_3 = i+1$. Сравним ожидаемые полезности в обоих случаях

$$u_3(i+2,n-2) = \frac{1}{4}(i+2+\frac{n-2}{n})^2 + \frac{3}{16}(i+2+\frac{n-3}{n})^2 + \frac{9}{16}(i+1)^2 \tag{16}$$

$$u_3(i+1,n) = \frac{1}{2}(i+2)^2 + \frac{1}{4}(i+1+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{1}{4}(i+1)^2 \quad (17)$$

Найдем n, при которых выполняется неравенство $u_3(i+2, \frac{n-2}{n}) \geq u_3(i+1, n)$. Оказывается, что при соблюдении ограничения на значение n (15) всегда больше (16), поэтому выбор при заданных условиях выбор абитуриента однозначный,а именно такой что $j_3 = i+2, x_3 = n-2$.
Теперь рассмотрим ситуацию, когда $x_2 = n, n \geq i + 3 + \sqrt{i^2 + 6 * i + 7}$. Опять сравним ожидаемые полезности в двух вариантах развития событий

$$u_3(i+2, n-1) = \frac{1}{4}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{3}{16}(i+2+\frac{n-2}{n})^2 + \frac{9}{16}(i+1)^2, \quad (18)$$

$$u_3(i+1,n) = \frac{1}{2}(i+2)^2 + \frac{1}{4}(i+1+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{1}{4}(i+1)^2. \quad (19)$$

В данном случае также при выполнении ограничения на n всегда будет выбрано решение $j_3 = i+2, x_3 = n-1$.
Теперь рассмотрим ситуации, когда n достаточно мало, чтобы абитуриент выбирал $j_4 = i+1, x_4 = n$ при $j_3 = i+2$. Здесь опять нужно учесть два возможных предыдущих состояния: $x_2 = n-1$ и $x_2 = n$.
Рассмотрим случай $x_2 = n-1, n < \frac{3}{2}i + \frac{9}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{i^2+6i+7}$. При таком n при выборе $j_3 = i+2, x_3 = n-2$ на четвертом шаге будет принято решение $j_4 = i+1, x_4 = 1$.
Возможные стратегии на третьем шаге: выбрать $j_3 = i+2$ или $j_3 = i+1$. Сравним ожидаемые полезности в обоих случаях:

$$u_3(i+2, n-2) = \frac{1}{4}(i+2+\frac{n-2}{n})^2 + \frac{3}{8}(i+2)^2 + \frac{3}{8}(i+1)^2, \quad (20)$$

$$u_3(i+1,n) = \frac{1}{2}(i+2)^2 + \frac{1}{4}(i+1+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{1}{4}(i+1)^2. \quad (21)$$

Полезность (18) выше при всех $n \geq \frac{2i+8+\sqrt{4i^2+20i+22}}{2i+7}$. Правая часть этого неравенства меньше 2 при всех i. В то же время, для выбора $j_3 = i+2, x_3 = n-2$ значение n должно быть больше или равно 3, так как выбирается три ВУЗа из одной категории. Таким образом, при всех допустимых n выбор абитуриента будет $j_3 = i+2, x_3 = n-2$.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $x_2 = n$, а $n < i+3+\sqrt{i^2+6i+7}$. При данных n, абитуриент, выбравший $j_3 = i+2, x_3 = n-1$, на четвертом шаге сделает выбор $j_4 = i+1, x_4 = 1$.В данном случае можно воспользоваться выводом предыдущего абзаца, так как $u_3(i+2, n-1) > u_3(i+2, n-2)$ при одинаковом выборе на 4-ом шаге. Следовательно, выбор абитуриента в этом случае $j_3 = i+2, x_3 = n-2$.

9.3.3 $j_2 = i+3$

Сначала рассмотрим ситуацию, когда $x_2 = 1$. В результате предшествующего анализа было получено, что $u_3(i+2, n-1) > u_3(i+1, 1)$. Следовательно, верно и следующее: $u_3(i+2, 1) > u_3(i+1, 1)$. Поэтому остается сравнить два возможных решения абитуриента - $j_3 = i+3, x_3 = n-2$ или $j_3 = i+2, x_3 = 1$.
Рассмотрим случай $n \geq \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{i^2+6i+7}$ при котором после $j_3 = i+2$ на 4-ом шаге будет сделан выбор $j_4 = i+2, x_4 = n-1$.
Ожидаемые полезности от возможных решений абитуриента в этом случае равны:

$$u_3(i+3, n-1) = \frac{1}{8}(i+3+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{7}{32}(i+3)^2 + \frac{24}{32}(i+1)^2, \tag{22}$$

$$u_3(i+2, n) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{16}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{12}{16}(i+1)^2. \tag{23}$$

При всех $i \geq 2$ и $n \geq \frac{1}{2}\frac{i+1+\sqrt{i^2+3}}{i-1}$ вторая ожидаемая полезность выше первой. Поскольку $\frac{1}{2}\frac{i+1+\sqrt{i^2+3}}{i-1} < \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{i^2+6i+7}$ при всех $i \geq 2$, то в рассматриваемом случае абитуриент всегда будет делать выбор $j_3 = i+2, x_3 = n$.
Сразу же можно сделать и следующий вывод: при $j_2 = i+3, x_2 = n-1$ выбор будет таким же, т.к. первая ожидаемая полезность будет еще ниже, а вторая не изменится.
Рассмотрим теперь случай $n \leq \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{i^2+6i+7}$, при котором после $j_3 = i+2$ на 4-ом шаге будет сделан выбор $j_4 = i+1, x_4 = n$. Отметим, что $x_2 = n-2$ невозможно, т.к. на первом этапе у абитуриента нет никаких причин выбирать какой-либо ВУЗ кроме лучшего в любой категории: соответственно, на втором этапе могут быть выбраны либо лучшие, либо вторые ВУЗы в каждой категории.

Ожидаемые полезности от двух возможных решений абитуриента в этом случае равны

$$u_3(i+3,n-1) = \frac{1}{8}\left(i+3+\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{7}{32}(i+3)^2 + \frac{24}{32}(i+1)^2, \tag{24}$$

$$u_3(i+2,n) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{8}(i+2)^2 + \frac{3}{8}(i+1)^2. \tag{25}$$

Разница между полезностями равна $\Delta u = -\frac{1}{8}\frac{(i-4)n^2+(2i+8)n-1}{n^2}$.

1. Очевидно, что при $i > 4$ $\Delta u < 0$.
2. При i=4 $\Delta u = -\frac{1}{8}\frac{16n-1}{n^2}$, что меньше 0 при всех $n \geq \frac{1}{16}$.
3. При i=3 $\Delta u = -\frac{1}{8}\frac{-n^2+14n-1}{n^2}$. При $2 \geq n \geq 3 + \frac{1}{2} * \sqrt{34}$ (что соответствует границам рассматриваемого случая) $\Delta u < 0$
4. При i=2 $\Delta u = -\frac{1}{8}\frac{-2n^2+12n-1}{n^2}$. При $2 \geq n \geq 3 + \frac{1}{2} * \sqrt{34}$ (что соответствует границам рассматриваемого случая) $\Delta u < 0$

Таким образом, при всех $i \geq 2$ оказывается, что более выгодным является выбор $j_3 = i+2, s_3 = n$. Аналогично, этот результат можно расширить и на случай $j_2 = i+3, x_2 = n-1$.

9.3.4 $j_2 \geq i+4$

Сравним выбор $j_3 = i+2$ с выбором $j_3 = i+k, k \geq 3$. Сначала рассмотрим первый случай, когда $n \geq \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{i^2+6i+7}$,

$$u_3(i+2,n) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{16}\left(i+2+\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{9}{16}(i+1)^2 \tag{26}$$

$$u_3(i+k,n) = 2^{-k}(i+k+1)^2 + (1-2^{-k})\left(\frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{4}(i+1)^2\right. \tag{27}$$

Исследуем зависимость второй ожидаемой полезности от k. Производная функции имеет два корня, которые при $i > 0$ ограничены следующим образом: $k_1 < 0{,}1.9427 \leq k_2 \leq 2.697$, причем k_2 является точкой максимума ожидаемой полезности. Следовательно, на луче $k \geq 3$ функция убывает и максимум на этом луче достигается при k=3. Поэтому

дальнейшие сравнения (для случаев больших и малых n) будут проводиться между решениями $j_3 = i+2$ и $j_3 = i+3$.
Исследуя разность между ожидаемыми полезностями в этом случае получаем, что при $i \geq 2$ выгоднее выбрать $j_3 = i+2$, если $n \geq \frac{1}{2}\frac{3i+9+\sqrt{9i^2+48i+87}}{i-1}$.
Теперь вспомним про ограничение на значение n в рассматриваемом случае. Соотнеся правые части ограничений, получим следующие выводы:

- $i = 2, 5 \leq n \leq 14 \Rightarrow j_3 = i+3, x_3 = n$,
- $i = 3, 6 \leq n \leq 8$,
- при других значениях i и n $\Rightarrow j_3 = i+2, x_3 = n$.

Теперь рассмотрим второй случай, когда $n < \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{i^2+6i+7}$. Сравним ожидаемые полезности от двух возможных решений (для остальных решений выше уже доказано, что они будут менее эффективны)

$$u_3(i+2,n) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{8}(i+2)^2 + \frac{3}{8}(i+1)^2, \tag{28}$$

$$u_3(i+3,n) = \frac{1}{8}(i+4)^2 + \frac{7}{32}(i+3)^2 + \frac{21}{32}(i+1)^2. \tag{29}$$

Данные выражения не зависят от n, поэтому выражения легко сравнить. Получим, что первая полезность выше второй при $i < 4$ и наилучшим выбором будет $j_3 = i+3, x_3 = n$; при $i = 4$ абитуриент безразличен между двумя вариантами, а при $i > 4$ оптимальным решением на данном шаге будет $j_3 = i+2, x_3 = n$.

9.4 Шаг 2

На шаге 2 необходимо рассматривать два случая каждый раз, в зависимости от решения, которое последует на шаге 4. В общем случае задача отыскания оптимального решения на данном шаге будет выглядеть следующим образом

$$
\begin{aligned}
&max(2^{i-j_2}(j_2+\tfrac{x_2}{n})+(1-2^{i-j_2})((2^{i-j_3}(j_3+\tfrac{x_3}{n})+(1-2^{i-j_3})(2^{i-j_4}*(j_4+\tfrac{x_4}{n})\\
&+(1-2^{i-j_4})*(i+1)^2)),\\
&j_1+\tfrac{x_1}{n}\geq j_2+\tfrac{x_2}{n}+\tfrac{1}{n},\\
&j_1\geq j_2,\\
&j_2\geq j_3,\\
&1\leq x_2\leq n,\\
&j_2,x_2\epsilon N.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

9.4.1 $j_1 = i+1, x_1 = n$

В этом случае нет никаких алmтернатив, кроме выбора $j_2 = i+1, x_2 = n-1$.

9.4.2 $j_1 = i+2, x_1 = n$

Два возможных решения для абитуриента - $j_2 = i+2, x_2 = n-1$ или $j_2 = i+1, x_2 = n$. Поскольку на 4-ом шаге возможны различные варианты поведения абитуриента в зависимости от величины n, рассмотрим отдельно два случая.
Первый случай - $n \geq i+3+\sqrt{i^2+6i+7}$. Ожидаемые полезности в этом случае выглядят так:

$$
\begin{aligned}
u_2(i+2,n-1) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{16}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \\
+\frac{9}{64}(i+2+\frac{n-2}{n})^2 + \frac{27}{64}(i+1)^2
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2(i+1,n) = \frac{1}{2}(i+1)^2 + \frac{1}{4}(i+1+\frac{n-1}{n})^2 + \\
+\frac{1}{8}(i+1+\frac{n-2}{n})^{\frac{1}{8}}(i+1)^2.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

При сравнении оказывается, что первая полезность больше второй при всех $n \geq 1$, $i \geq 1$. Следовательно, абитуриент всегда будет выбирать $j_2 = i+2, x_2 = n-1$ в данных условиях. Кроме того, рассмотрение второго случая, с меньшим n, не требуется, т.к. при малых n $u_2(i+2, n-1)$ будет заведомо выше, чем $u_2(i+1, n)$.

9.4.3 $j_1 = i + 3, x_1 = n$

Возможные решения абитуриента в этой ситуации - $j_2 = i+3, x_2 = n-1$ или $j_2 = i + 2, x_2 = n$. Решение $j_2 = i + 1$ заведомо хуже, как было показано выше, и поэтому может не рассматриваться. Здесь придется рассмотреть три различных случая в зависимости от величины n.
Случай 1: $n \geq i + 3 + \sqrt{i^2 + 6i + 7}$. В этом случае ожидаемые полезности от двух различных решений будут выглядеть следующим образом

$$u_2(i+3, n-1) = \frac{1}{8}(i + 3 + \frac{n-1}{n}) + \frac{7}{32}(i+3)^2 + \\ + \frac{21}{128}(i + 2 + \frac{n-1}{n})^2 + \frac{63}{128}(i+1)^2, \tag{33}$$

$$u_2(i+2, n) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{16}(i + 2 + \frac{n-1}{n})^2 + \\ + \frac{9}{64}(i + 2 + \frac{n-2}{n}) + \frac{27}{64}(i+1)^2. \tag{34}$$

Вычислив и проанализировав разницу между ожидаемыми полезностями получим, что $u_2(i + 3, n - 1) \geq u_2(i + 2, n)$ при $i \leq 10$ и любых n, а также при $i > 10$ и $3 \leq n \leq \frac{1}{4}\frac{23i+53+\sqrt{529i^2+2202i+5169}}{i-10}$. Теперь нужно учесть границы рассматриваемого случая - ограничение на n. При $i \geq 16$ минимальное значение n, соответствующее рассматриваемому случаю, таково, что $u_2(i + 3, n - 1) < u_2(i + 2, n)$ при всех таких n. При $11 \geq i \geq 15$ решение будет разным в зависимости от величины n.
Случай 2: $\frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{i^2 + 6i + 7} \leq n \leq i + 3 + \sqrt{i^2 + 6i + 7}$. В этом случае на 4-ом шаге будет выгодно выбирать второй по предпочтительности ВУЗ из категории B_{i+2}, однако уже невыгодно выбирать третий по предпочтительности ВУЗ из той же категории. Снова сравним ожидаемые полезности в случае принятия разных решений

$$u_2(i+3, n-1) = \frac{1}{8}(i + 3 + \frac{n-1}{n}) + \frac{7}{32}(i+3)^2 + \\ + \frac{21}{128}(i + 2 + \frac{n-1}{n})^2 + \frac{63}{128}(i+1)^2, \tag{35}$$

$$u_2(i+2,n) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{16}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \\ +\frac{9}{32}(i+2) + \frac{9}{32}(i+1)^2. \tag{36}$$

Разница между ожидаемыми полезностями $\Delta u = \frac{1}{128}\frac{13+(76-4i)n^2-(26i+110)n}{n^2}$. Исследуя эту разницу получаем, что при

- $i > 19, n > 2 \Rightarrow \Delta u < 0$, поэтому выбор абитуриента всегда будет $j_2 = i+2, x_2 = n$,
- $16 \le i \le 19$ и для n выполняются ограничения случая 2 $\Rightarrow \Delta u > 0$, абитуриент выбирает $j_2 = i+3, x_2 = n-1$,
- $12 \le i \le 15$ и $i \ge \frac{76n^2-110n+13}{n(13+2n)} \Rightarrow \Delta u < 0$, то есть абитуриент делает разный выбор в зависимости от соотношения i и n,
- $i \le 11$ и для n выполняются ограничения случая 2 $\Rightarrow \Delta u > 0$ $j_2 = i+2, x_2 = n$.

Случай 3: $n \le \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{i^2+6i+7}$ При данном ограничении на n на четвертом шаге абитуриент всегда будет выбирать лучший ВУЗ из категории B_{i+1} вместо второго или третьего по предпочтительности из категории B_{i+2}.
Сравним ожидаемые полезности в этом случае

$$u_2(i+3,n-1) = \frac{1}{8}(i+3+\frac{n-1}{n}) + \frac{7}{32}(i+3)^2 + \\ +\frac{21}{64}(i+2)^2 + \frac{21}{64}(i+1)^2 \tag{37}$$

$$u_2(i+2,n) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{16}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \\ +\frac{9}{32}(i+2) + \frac{9}{32}(i+1)^2. \tag{38}$$

Проанализируем разницу между этими полезностями: $\Delta u = \frac{1}{64}\frac{(17-2i)n^2+(8i+8)n-4}{n^2}$

- при $i \le 8 \Rightarrow \Delta u > 0 \Rightarrow j_2 = i+3, x_2 = n-1$,

- при $9 \le i \le 12$ при выполнении ограничений случая 3 на значения n $\Rightarrow \Delta u > 0 \Rightarrow j_2 = i+3, x_2 = n-1$,

- при $i \ge 13$ $\Delta u > 0$, если $n < \frac{2(2i+2+\sqrt{4i^2+6i+21}}{2i-17}$.

9.4.4 $j_1 \ge i+4, x_1 = n$

Сравним два возможных варианта решения - $j_2 = i+3, x_2 = n$ и $j_2 = i+2, x_2 = n$. Опять рассмотрим три случая в зависимости от величины n. В разных случаях абитуриент будет делать разный выбор на 4-ом шаге при выборе ВУЗов из категории B_{i+2}.

Случай 1: $n \ge i+3+\sqrt{i^2+6i+7}$. Ожидаемые полезности имеют вид:

$$u_2(i+3,n) = \frac{1}{8}(i+4)^2 + \frac{7}{32}(i+3)^2 + \frac{21}{128}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{63}{128}(i+1)^2, \quad (39)$$

$$u_2(i+2,n) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{16}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{9}{64}(i+2+\frac{n-2}{n})^2 + \\ + \frac{27}{64}(i+1)^2. \quad (40)$$

Разница между полезностями равна $\Delta u = \frac{1}{128}\frac{(40-4i)n^2+(78i+234)n-75}{n^2}$ Нас интересуют интервалы, на которых эта функция принимает положительные и отрицательные значения, поэтому рассматривается только числитель второй дроби. Он представлет собой квадратичную функцию относительно n^2. Тогда

- При $i \le 10$ и всех $n > 1$ $\Delta u > 0 \Rightarrow j_2 = i+3, x_2 = n$

- При $11 \le i \le 19$ функция меняет знак внутри множества допустимых n. При $n \ge \frac{1}{4}\frac{39i+117+\sqrt{1521i^2+8826i+16689}}{i-10}$ $\Delta u < 0 \Rightarrow j_2 = i+2, x_2 = n$. При меньших n абитуриент выбирает другую альтернативу.

- При $i \ge 20$ для любого n, удовлетворяющего условиям случая 1, $\Delta u < 0 \Rightarrow j_2 = i+2, x_2 = n$

Случай 2. $\frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{i^2+6i+7} \le n \le i+3+\sqrt{i^2+6i+7}$. Сравним ожидаемые полезности:

$$u_2(i+3,n) = \frac{1}{8}(i+4)^2 + \frac{7}{32}(i+3)^2 + \frac{21}{128}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{63}{128}(i+1)^2 \quad (41)$$

$$u_2(i+2,n) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{16}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{9}{32}(i+2)^2 + \frac{9}{32}(i+1)^2 \quad (42)$$

Разница между полезностями равна $\Delta u = \frac{1}{128}\frac{(76-4i)n^2+(6i+18)n-3}{n^2}$ Исследуем интервалы значений i и n, на которых данная функция принимает положительные (отрицательные) значения. Поскольку отрицательные значения может принимать только числительно второй дроби, представляющий собой квадратичную функцию относительно n, будем рассматривать только эту часть функции. Тогда

- $i \leq, 19 \Delta u > 0$ при всех n, удовлетворяющих ограничениям случая $\Rightarrow j_2 = i+3, x_2 = n$,
- i = 20: при $23 \leq n \leq 34 j_2 = i+3, x_2 = n$, при $35 \leq n \leq 46 j_2 = i+2, x_2 = n$,
- $i \geq 21 \Delta u < 0$при всех n, удовлетворяющих ограничениям случая $\Rightarrow j_2 = i+2, x_2 = n$.

Случай 3: $n \leq \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{i^2+6i+7}$. Опять сравним ожидаемые полезности

$$u_2(i+3,n) = \frac{1}{8}(i+4)^2 + \frac{7}{32}(i+3)^2 + \frac{21}{64}(i+2)^2 + \frac{21}{64}(i+1)^2 \quad (43)$$

$$u_2(i+2,n) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{16}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{9}{32}(i+2)^2 + \frac{9}{32}(i+1)^2 \quad (44)$$

Разница между полезностями равна $\Delta u = \frac{1}{64}\frac{(17-2i)n^2+(24i+72)n-12}{n^2}$. Рассматриваем числитель второй дроби - единственная составляющая, влияющая на знак. Тогда

- $i \leq 8$ - коэффициент при n^2 положителен и при всех n > 1 $\Delta u > 0 \Rightarrow j_2 = i+3, x_2 = n$,
- $9 \leq i \leq 20$ - при всех n, удовлетворяющих ограничениям случая 3, $\Delta u > 0 \Rightarrow j_2 = i+3, x_2 = n$,
- $i \geq 21$ - при $\frac{2(6i+18+\sqrt{36i^2+210i+375})}{2i-17} \leq n \leq \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{i^2+6i+7}$ абитуриент выбирает $j_2 = i+2, x_2 = n$, при меньших n абитуриент выбирает $j_2 = i+3, x_2 = n$.

9.5 Шаг 1

Поскольку этот шаг - последний, нам необходимо для каждого сочетания значений параметров выбрать оптимальное решение с учетом оптимальных решений, уже найденных для последующих шагов. Поскольку решения на последующих шагах различаются в зависимости от соотношения i и n, нам также придется рассмотреть несколько случаев.

9.5.1 Сравнение решений $j_1 = i + 3$ и $j_1 = i + 2$

Рассмотрим все возможные сочетания решений последующих шагов. Мы не будем определять границы значений i,n при которых принимаются даные решения, т.к., как мы увидим, это не повлияет на результат. Итак, если на шаге 1 выбрано решение $j_1 = i + 2$,то возможны два варианта дальнейшего поведения. Приведем функции полезности, соответствующие этим вариантам решения:

$$u_1^2(i+2,n) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{16}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{9}{64}(i+2+\frac{n-2}{n})^2 + \\ + \frac{27}{256}(i+2+\frac{n-3}{n})^2 + \frac{81}{1024}(i+1)^2, \qquad (45)$$

$$u_1^1(i+2,n) = \frac{1}{4}(i+3)^2 + \frac{3}{16}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{9}{64}(i+2+\frac{n-2}{n})^2 + \\ + \frac{27}{128}(i+2)^2 + \frac{27}{128}(i+1)^2. \qquad (46)$$

Если же на шаге 1 абитуриент выберет решение $j_1 = i + 3$, то возможны четыре варианта дальнейшего поведения (при разных сочетаниях параметров). Соответствующие функции полезности представлены ниже, причем для каждого i каждый следующий выбор является оптимальным при меньших значениях параметра n.

$$u_2^1(i+3,n) = \frac{1}{8}(i+4)^2 + \frac{7}{32}(i+3)^2 + \frac{21}{128}(i+2+\frac{n-1}{n})^2 + \\ + \frac{63}{512}(i+2+\frac{n-2}{n})^2 + \frac{189}{512}(i+1)^2, \qquad (47)$$

$$u_2^2(i+3,n) = \frac{1}{8}(i+4)^2 + \frac{7}{64}(i+3+\frac{n-1}{n})^2 + \frac{49}{256}(i+3)^2 +$$

$$+\frac{147}{1024}(i+2+\frac{n-1}{n})^2+\frac{441}{1024}(i+1)^2, \tag{48}$$

$$u_2^3(i+3,n)=\frac{1}{8}(i+4)^2+\frac{7}{32}(i+3)^2+\frac{21}{128}(i+2+\frac{n-1}{n})^2+$$
$$+\frac{63}{256}(i+2)^2+\frac{63}{256}(i+1)^2, \tag{49}$$

$$u_2^4(i+3,n)=\frac{1}{8}(i+4)^2+\frac{7}{64}(i+3+\frac{n-1}{n})^2+\frac{49}{256}(i+3)^2+$$
$$+\frac{147}{512}(i+2)^2+\frac{147}{512}(i+1)^2. \tag{50}$$

Оказывается, что любая функция полезности, соответствующая выбору $j_1 = i+3$ принимает значения строго большие, чем любая из возможных при тех же значениях i и n функций полезности, соответствующих решению $j_1 = i+2$. Расчитанные разницы между решениями $i+3$ и $i+2$ приведены в таблице, причем приведенные в таблице выражения положительны при всех $n>1$, $i>0$. Следовательно, решение $j_1 = i+3$ всегда лучше решения $j_1 = i+2$.

	u_1^1	u_1^2
u_2^1	$\frac{1}{256}\frac{576n+192in+10n^2i+116n^2-267}{n^2}$	$\frac{1}{128}\frac{5n^2i+85n^2+15in+45n-12}{n^2}$
u_2^2	$\frac{1}{1024}\frac{1102n-509+442in+12n^2i+960n^2}{n^2}$	$\frac{1}{1024}\frac{1102n-509+442in+12n^2i+960n^2}{n^2}$
u_2^3	–	$\frac{1}{256}\frac{10n^2i+107n^2+156in+468n-150}{n^2}$
u_2^4	–	$\frac{1}{512}\frac{992n-328+368in+6n^2i+333n^2}{n^2}$

Таблица 9: Сравнение решений $i+3$ и $i+2$ на шаге 1

9.5.2 Сравнение решений $j_1 = i + 3$ с решениями $j_1 \geq i + 4$

Сравним решение $j_1 = i + 3$ с решением $j_1 = i + 4$. Для того, чтобы сравнить последствия этих решений, надо рассмотреть все возможные комбинации решений на последующих шагах. Различные решения на последующих шагах возникают при разных сочетаниях значений параметров i и n. Перечислим функции полезности для различных решения после $j_1 = i + 4$.

$$u_1^1(i+4,n) = \frac{1}{16}(i+5)^2 + \frac{15}{64}(i+3)^2 + \frac{45}{256}\left(i+2+\frac{n-1}{n}\right)^2 + \\ + \frac{135}{1024}\left(i+2+\frac{n-2}{n}\right)^2 + \frac{405}{1024}(i+1)^2, \quad (51)$$

$$u_1^2(i+4,n) = \frac{1}{16}(i+5)^2 + \frac{15}{128}(i+4)^2 + \frac{105}{512}(i+3)^2 + \\ + \frac{315}{2048}\left(i+2+\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{945}{2048}(i+1)^2, \quad (52)$$

$$u_1^3(i+4,n) = \frac{1}{16}(i+5)^2 + \frac{15}{64}(i+3)^2 + \frac{45}{256}\left(i+2+\frac{n-1}{n}\right)^2 + \\ + \frac{135}{512}(i+2)^2 + \frac{135}{512}(i+1)^2, \quad (53)$$

$$u_1^4(i+4,n) = \frac{1}{16}(i+5)^2 + \frac{15}{128}(i+4)^2 + \frac{105}{512}(i+3)^2 + \\ + \frac{315}{1024}(i+2)^2 + \frac{315}{1024}(i+1)^2, \quad (54)$$

Можно было бы рассмотреть отдельно каждый случай, однако мы обобщим анализ, как и в предыдущем пункте, с помощью таблицы. В столбцах таблицы будут перечислены возможные решения при $j_1 = i + 3$, в строках - возможные решения при $j_1 = i + 4$. При этом будут рассмотрены только те пары решений, которые могут быть оптимальными на шаге 2 при одинаковых значениях параметров i и n. Разница между u_2 и u_3 будет стоять в ячейках таблицы в тех случаях, когда решения могут быть оптимальными при одинаковых значениях параметров i и n. В некоторых случаях неравенство $\Delta u > 0$ выполняется не при всех n > 1. Рассмотрим эти случаи подробнее: Ячейка 4-4. Два варианта решения, сравниваемые в ячейке 4-4, могут быть выбраны при

$n < \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{i^2 + 6i + 7}$. При исследовании выражения Δu_{44} оказывается, что $u_{42} < u_{43}$ при $n \leq \frac{4(28i+112+sqrt784i^2+5502i+11921)}{110i+89}$. При сопоставлении этих границ оказывается, что при $i = 2; 3 \leq n \leq 5$, а также при $i = 3, 4, 5$ $n = 3$ для абитуриента выгоднее будет сделать выбор $j_1 = i+4$, $x_1 = n$ на первом шаге. Опустим выкладки для остальных сомнительных ячеек - во всех остальных случаях выбор $j_1 = i+3$ всегда будет выгоднее выбора $j_1 = i + 4$ с учетом огранчиений на n и i.

Препринт WP7/2011/01
Серия WP7
Математические методы анализа решений
в экономике, бизнесе и политике

Кисельгоф С. А.

Выбор вузов абитуриентами с квадратичной функцией полезности

Публикуется в авторской редакции

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии Высшей школы экономики
с представленного оригинал-макета

Формат 60×84 1/16. Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 2,6
Усл. печ. л. 2,6. Заказ №   . Изд. № 1330

Высшая школа экономики
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Высшей школы экономики

Тел.: (495) 772-95-71; 772-95-73

Для заметок