

Министерство экономического развития и торговли
Российской Федерации

Государственный университет —
Высшая школа экономики

Нижегородский филиал

Факультет Бизнес-информатики и прикладной
математики

Программа дисциплины

«Математический анализ – 2 (Мера и интеграл)»

для направления 010500.62 – Прикладная математика и
информатика
подготовки бакалавра

Автор: д.ф.-м.н., профессор В. В. Чистяков

Рекомендована УМС
Секция «Математика и информатика»
Председатель

_____ В. М. Демкин

« » 2008 г.

Утверждена УМС филиала
Председатель

_____ Л. Г. Макарова

« » 2008 г.

Одобрена на заседании
кафедры ПМИ
Зав. кафедрой

_____ В. А. Калягин

25 февраля 2008 г.

Нижний Новгород, 2008 г.

І. Пояснительная записка

АННОТАЦИЯ Курс математического анализа является основным фундаментальным курсом начальной математической подготовки студента-экономиста. Курс является подготовительным для прикладных курсов “Теория вероятностей” и “Математическая статистика”.

ТРЕБОВАНИЯ К СТУДЕНТАМ Исходный уровень — хорошее владение аппаратом математического анализа в объеме, читаемом на первом курсе технического ВУЗа.

УЧЕБНАЯ ЗАДАЧА КУРСА Целями курса являются

- углубленное изучение основных понятий теории меры (σ -алгебры, борелевские множества, меры и внешние меры, измеримость по Каратеодори, пополнение и продолжение мер);
- углубленное изучение основных понятий теории интеграла (измеримые функции, сходимость почти всюду и по мере, интеграл по мере, интеграл Лебега, предельные теоремы, произведение мер, интеграл Лебега в \mathbb{R}^n);
- элементарное введение в теорию вероятностей (основные понятия, независимость случайных величин, математическое ожидание и дисперсия, закон больших чисел).

ФОРМЫ КОНТРОЛЯ Текущий контроль осуществляется в виде регулярных контрольных срезов. По курсу предусмотрено 2 контрольных работы. Кроме того, каждый студент выполняет обязательные индивидуальные домашние задания, выполнение которых контролируется преподавателем.

Итоговый контроль — экзамен (после 5-го модуля). Учитываются результаты контрольных срезов и выполнение домашних заданий.

II. Тематический план учебной дисциплины

Наименование темы	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоят. работа
		Лекции	Семинары	
1. σ -алгебры	11	2	2	7
2. Свойства мер	11	2	2	7
3. Внешние меры	15	4	3	8
4. Борелевские меры на \mathbb{R}	11	2	2	7
5. Измеримые функции	11	2	2	7
6. Свойства интеграла	14	3	3	8
7. Предельные теоремы	13	3	2	8
8. Интеграл Лебега в \mathbb{R}^n	11	2	2	7
9. Вероятность	11	2	2	7
Итого	108	22	20	66

Контрольных работ – 2. Экзамен – 1.

III. Формы рубежного контроля и структура итоговой оценки

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль и работа студентов на семинарских занятиях осуществляются в течение двух модулей. По курсу предусмотрены 2 контрольные работы по темам 1–4 и 5–8 (продолжительность 60 минут каждый), 1 экзамен (после пятого модуля) и домашние задания. Каждая форма контроля оценивается оценкой по десятибалльной системе и заносится в рабочую ведомость преподавателя. Оценка за экзамен формируется на основе оценок за контрольные работы и устного собеседования или итоговой контрольной работы и являются округленным до целого (от 1 до 10) значением среднего арифметического предыдущих контролей. Эти оценки проставляются в экзаменационную ведомость и зачетную книжку студента и рядом добавляется соответствующая ей оценка по привычной пятибалльной шкале:

Оценка по 10-бальной шкале	по 5-бальной шкале означает
10 (блестяще)	5 (отлично)
9 (отлично)	5 (отлично)
8 (почти отлично)	5 (отлично)
7 (очень хорошо)	4 (хорошо)
6 (хорошо)	4 (хорошо)
5 (весьма удовлетворительно)	3 (удовлетворительно)
4 (удовлетворительно)	3 (удовлетворительно)
3 (плохо)	2 (неудовлетворительно)
2 (очень плохо)	2 (неудовлетворительно)
1 (неудовлетворительно)	2 (неудовлетворительно)

Библиографический список

Базовый учебник

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: ФМЛ, 7-е изд., 2004.

Основной задачник

2. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа, М.: Наука, 2-е изд., 1988.

Дополнительная литература

3. Рудин У. Основы математического анализа, М.: Мир, 1966.
4. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу, М.: Просвещение, 1981.

IV. Содержание программы

Тема 1: σ -алгебры

Области определения мер: алгебры и σ -алгебры, кольца и σ -кольца, элементарные семейства множеств. Минимальная σ -алгебра, порожденная семейством множеств. Борелевская σ -алгебра. Упражнения.

Тема 2: Свойства мер

Определение меры. Терминология в теории меры. Примеры мер. Свойства мер: монотонность, субаддитивность, непрерывность сверху и снизу. Полные меры. Теорема о пополнении меры. Упражнения.

Тема 3: Внешние меры

Понятие внешней меры. μ^* -измеримые множества и теорема Каратеодори. Теорема Фреше о продолжении предмеры с алгебры множеств на порожденную ей σ -алгебру. Упражнения.

Тема 4: Борелевские меры на вещественной прямой

Элементарные семейства множеств. Техническая лемма. Лемма о предмере Лебега-Стилтьеса. Теорема о характеристике борелевских мер, конечных на ограниченных борелевских множествах. Регулярность меры Лебега-Стилтьеса. Структура измеримых множеств на \mathbb{R} . Свойства меры Лебега на \mathbb{R} . Канторовское совершенное множество и канторовская функция. Упражнения.

Тема 5: Измеримые функции

Определение измеримой функции. Свойства класса измеримых функций. Сходимость почти всюду и сходимость по мере. Сохранение свойства измеримости при предельных переходах. Простые функции. Теорема Егорова. Теорема Лузина. Упражнения.

Темы 6, 7: Свойства интеграла и предельные теоремы

Интегрирование неотрицательных функций. Свойства интеграла по мере. Теорема о монотонной сходимости. Лемма Фату. Интегрирование вещественнозначных функций. Теорема о мажорированной сходимости. Дифференцирование интеграла, зависящего от параметра. Связь с интегралом Римана. Упражнения.

Тема 8: Интеграл Лебега в \mathbb{R}^n

Произведение мер. Теорема Фубини-Тонелли для кратных интегралов. Структура измеримых по Лебегу множеств в \mathbb{R}^n . Свойства меры Лебега в \mathbb{R}^n . Свойства интеграла Лебега в \mathbb{R}^n . Замена переменных в интеграле Лебега. Объем n -мерного шара и площадь поверхности n -мерной сферы. Упражнения.

Тема 9: Введение в теорию вероятностей

Стандартная терминология теории вероятностей. Основные понятия. Независимость случайных величин. Математическое ожидание. Дисперсия. Закон больших чисел.

V. Методические рекомендации преподавателю

См. приложение по методике десятибалльных оценок.

VI. Методические рекомендации студентам

Следует систематически выполнять домашние задания и принимать активное участие в работе семинарских занятий. Многие последующие курсы основаны на свободном владении аппаратом математического анализа.

Приложение: Методика формирования итоговой оценки

Программа предусматривает в качестве форм контроля оценку контрольной работы (теста), оценку домашнего задания, зачет (экзамен). Каждая форма оценивается по десятибалльной системе.

Для контрольных работ:

- высшая оценка в 9 баллов (10 баллов проставляется в исключительных случаях) проставляется при отличном выполнении заданий: полных (с детальными или многочисленными примерами и возможными обобщениями) ответах на вопросы, правильном решении задачи и четком и исчерпывающем ее представлении;
- почти отличная оценка в 8 баллов проставляется при полностью правильных ответах и решении задач, но при отсутствии какого-либо из вышеперечисленных отличительных признаков, как, например, детальных примеров или обобщений, четкого и исчерпывающего представления решаемой задачи;

– оценка в 7 баллов проставляется при правильных ответах на вопросы и правильном решении задач, но при отсутствии пояснений, примеров, обобщений, без представления алгоритма или последовательности решения задач;

– оценка в 6 баллов проставляется при наличии отдельных неточностей в ответах на вопросы (включая грамматические ошибки) или неточностях в решении задачи непринципиального характера (описки и случайные ошибки арифметического характера);

– оценка в 5 баллов проставляется в случаях, когда в ответах и в решении задач имеются неточности и ошибки, свидетельствующие о недостаточном понимании вопросов и требующие дополнительного обращения к тематическим материалам;

– оценка в 4 балла проставляется при наличии серьезных ошибок и пробелов в знании по контролируемой тематике;

– оценка в 3 балла проставляется при наличии лишь отдельных положительных моментов в ответах на вопросы и в решении задач, говорящих о потенциальной возможности в последующем более успешно выполнить задания; эта оценка ведет, как правило, к повторным ответам на вопросы или решению дополнительных задач;

– оценка в 2 балла проставляется при полном отсутствии положительных моментов в ответах на вопросы и решении задач и, как правило, ведет к повторному написанию контрольной работы в целом;

– оценка в 1 балл проставляется, когда неправильные ответы и решения, кроме того, сопровождаются какими-либо демонстративными проявлениями безграмотности или неэтичного отношения к изучаемой теме.

При оценке выполнения домашнего задания:

– 10 баллов проставляется в исключительных случаях самостоятельно проведенной работы, которая может в дальнейшем использоваться в учебном процессе или в исследовательской работе студента;

– 8–9 баллов проставляется при самостоятельно разработанном или удачно адаптированном и отлично представленном исследовании по выбранной тематике;

– 6–7 баллов проставляется при своевременно выполненном и самостоятельно представленном результате по выбранной тематике;

– 4–5 баллов проставляется при частичном, несамостоятельном участии в выполнении работ;

– 2–3 балла проставляется, когда студент не может самостоятельно представить работу, когда работа носит явные признаки заимствований (в этом случае работу предлагается переделать);

– 1 балл проставляется при наличии каких-либо демонстративных проявлений безграмотности и неэтичного отношения к работе.

На зачете (экзамене), представляющем письменный или устный ответ на вопрос или решение задачи, оценка проставляется следующим образом:

– высшая оценка в 9 баллов (10 баллов проставляется в исключительных случаях) проставляется при отличном выполнении заданий: полных, с примерами и возможными обобщениями ответов на вопросы, при правильном решении задачи и детальном ее представлении;

– почти отличная оценка в 8 баллов проставляется при полностью правильных ответах и решении задач, но при отсутствии какого-либо из вышеперечисленных отличительных признаков, как, например, примеров, обобщений и детального представления решаемой задачи;

– оценка в 7 баллов проставляется при правильных ответах на вопросы и правильном решении задач, но при отсутствии пояснений, примеров, без представления алгоритма решения задач;

– оценка в 6 баллов проставляется при наличии отдельных неточностей в ответах на вопросы или непринципиальных неточностях в решении задачи (описки и случайные ошибки арифметического характера);

– оценка в 4–5 баллов проставляется в случаях, когда в ответах и в решении задачи имеются существенные неточности и ошибки, свидетельствующие о недостаточном понимании проблематики задачи;

– оценка в 2–3 балла проставляется при наличии лишь отдельных положительных моментов в ответах на вопросы и в решении задач и ведет к повторному написанию ответов на вопросы или решению задачи;

– оценка в 1 балл проставляется, когда неправильные ответы и решения, кроме того, сопровождаются какими-либо демонстративными проявлениями безграмотности или неэтичного отношения к учебному процессу.

По результатам устного собеседования с преподавателем выполненной на зачете или экзамене работы возможны корректировки оценки в сторону повышения или понижения.