1. Многогранники: поиск прекрасного

Теория выпуклых многогранников имеет несколько источников. Двумя самыми важными являются стремление к прекрасному и жизненная необходимость решать оптимизационные задачи. Мы сначала обсудим первый источник.

2. Задачи линейной оптимизации

Во многих практических вопросах требуется что-либо максимизировать или минимизировать. Люди всегда пытались минимизировать расходы, усилия, и максимизировать прибыль. Эти попытки приводят к задачам оптимизации. Величину, которую мы пытаемся оптимизировать, удобно представлять математически как функцию некоторых параметров. Эти параметры — не обязательно числа. Они могут быть объектами более сложной природы, скажем, функциями. Самая простая ситуация, когда та функция, которую мы пытаемся минимизировать, является линейной функцией конечного числа параметров. Это случается довольно часто. Параметры тоже могут быть связаны соотношениями типа линейных равенст или неравенств. Оптимизационные задачи такого рода часто возникают в экономике, логистике, биологии и социальных науках. Эти задачи называются задачами линейной оптимизации. Существует целый раздел математики, изучающий задачи линейной оптимизации. По историческим причинам, этот раздел называется линейным программированием.

Основы линейного программирования были заложены в 1939 году Л.В. Канторовичем (советским математиком и экономистом, лауреатом Нобелевской премии по экономике). Через несколько лет, они были переоткрыты и усовершенствованы американским математиком Д. Данцигом. Канторович и Данциг разработали простой, но очень мощный алгоритм решения задач линейного программирования: симплекс-метод. Мы ниже обсудим некоторый вариант симплекс-метода.

Вот некоторые задачи из практики, приводящие к задачам линейного программирования:

- Финансовое планирование. Банк предлагает довольно большое число финансовых услуг, и каждая услуга приносит определенную прибыль. Задача состоит в том, чтобы максимизировать суммарную прибыль от всех финансовых услуг, удовлетворив определенным ограничениям, наложенным законодательством, принципами налогообложения, соображениями надежности и проч. Переменными здесь являются

объемы оказываемых финансовых услуг (для каждой услуги свой объем).
- Кормление животных (например, на крупной ферме). Корм для животных должен содержать достаточно много полезных веществ (отдельные ограничения имеются на содержание белков, жиров, углеводов, витаминов, калорий и т.д.). Проблема такая: организовать закупки различных видов кормов таким образом, чтобы удовлетворить всем ограничениям по питательности, и при этом минимизировать затраты.
- Задача транспортировки. Нужно минимизировать расходы по транспортировке товаров, выбирая подходящие комбинации путей транспортировки (можно в гузовиках, по железной дороге, самолетом, морским путем и т.д.) Каждый путь транспортировки соединяет фиксированные точки (не обязательно от одной точки до другой можно доехать на поезде или тем более по морю) и имеет фиксированную стоимость.

В задачах линейной оптимизации полезна следующая геометрическая терминология. Линейной функцией называется функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ вида
$$f(x_1,\dots,x_n)=a_0+a_1x_1+\dots+a_nx_n,$$
где $(x_1,\dots,x_n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, согласно нашей терминологии, линейные функции не обязаны быть однородными (в линейной алгебре принята другая терминология, согласно которой наши линейные функции следует называть аффинными функциями). Линейное неравенство — это неравенство вида $L\le 0$, где L — линейная функция. Выпуклым многогранником называется ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$, заданное как множество всех точек, удовлетворяющих некоторой системе линейных неравенств.

Теорема 1. *Пусть P — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$, не принадлежащий никакому аффинному подпространству размерности меньше n. Тогда многогранник P имеет непустую внутренность.*

Доказательство. В самом деле, если P не лежит ни в каком собственном аффинном подпространстве, то в нем есть $n+1$ точка с этим же свойством. Подходящим аффинным преобразованием можно перевести эти точки в начало координат и концы базисных векторов. Нетрудно проверить, что P является выпуклым множеством: мы определили выпуклый многогранник как пересечение полупространств, а полупространства выпуклы. Следовательно, P обязан содержать выпуклую оболочку выбранных точек, то есть множество вида

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0,\ \sum x_i \leq 1\}.$$

Это множество, очевидно, имеет непустую внутренность. $\square$

Как видно из доказательства, утверждение верно для произвольных выпуклых множеств, а не только для многогранников.

Набор линейных функций $L_1, \dots, L_n$ называется *репером*, если этот набор определяет систему координат в $\mathbb{R}^n$, то есть если отображение

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto (L_1(x), \dots, L_n(x)) \in \mathbb{R}^n$$

является взаимно-однозначным. Рассмотрим многогранник P, заданный системой линейных уравнений

$$L_1 \leq 0, \quad L_2 \leq 0, \quad \dots \quad L_m \leq 0.$$

Будем рассматривать реперы, составленные из линейных функций $L_1, \dots, L_m$. Для краткости, мы будем говорить просто о реперах, имея в виду такие реперы, связанные с конкретной системой неравенств. Предположим, например, что первые n линейных функций $L_1, \dots, L_n$ образуют репер. Тогда, по определению репера, существует единственная точка v, такая что

$$L_1(v) = L_2(v) = \dots = L_n(v) = 0.$$

Эта точка совпадает с началом системы координат, определенной данным репером. Если $v \in P$, то репер называется вершинным, а точка v — вершиной многогранника P. Заметим, что, вообще говоря, одной и той же вершине многогранника P может соответствовать несколько вершинных реперов.

Симплекс-метод основан на таком простом наблюдении.

Теорема 2. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейная функция, а P — выпуклый многогранник. Тогда найдется вершина v многогранника P, в которой реализуется минимальное значение функции f, ограниченной на многогранник.*

Доказательство. Проведем индукцию по размерности многогранника P. В силу доказанной выше теоремы, мы можем считать без ограничения общности, что многогранник P имеет непустую внутренность, то есть что его размерность равна n. Если функция f постоянна, то любая точка многогранника P является точкой минимума, в частности, любая вершина. В противном случае, минимум функции $f|_P$ не может достигаться во внутренней точке многогранника P. Действительно, если бы, скажем, точка 0 лежала внутри многогранника P, а функция f имела бы вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

в котором хотя бы один коэффициент $a_i \neq 0$, то значение $f(0) = a_0$ лежало бы строго между $f(\varepsilon e_i)$ и $f(-\varepsilon e_i)$, где e_i — i-ый базисный вектор, а $\varepsilon > 0$ — достаточно маленькое число.

Значит, минимум функции $f|_P$ достигается на границе многогранника P. Граница состоит из пересечений многогранника P с гиперплоскостями $L_1 = 0$, …, $L_n = 0$, то есть из выпуклых многогранников меньшей размерности. Теперь осталось воспользоваться предположением индукции. □

Таким образом, чтобы найти минимум линейной функции f на многограннике P, достаточно сравнить значения f во всех вершинах многогранника. Но это просто сводит первоначальную задачу к другой, не менее трудной: как найти все вершины многогранника P? В принципе, можно было бы перебрать все реперы линейной системы, задающей многогранник P, и для каждого репера проверить, является ли он вершинным. Однако число реперов $\binom{m}{n}$ обычно слишком велико, что делает описанный подход совершенно неэффективным. Симплекс-метод является намного более эффективным алгоритмом.

Предположим сначала, что нам известна хотя бы одна вершина v многогранника P (про который мы предполагаем, что он имеет непустую внутренность). Тогда шаг симплекс метода состоит в нахождении соседней вершины w, такой, что $f(w) < f(v)$. Если такой соседней вершины найти не удается, то в вершине v достигается минимум функции $f|_P$.

На самом деле, мы будем перебирать не вершины, а вершинные реперы. Пусть, например, вершинный репер, соответствующий вершине v, состоит из функций L_1, …, L_n (мы всегда можем этого добиться, перенумеровав уравнения системы). Поскольку линейные функции L_1, …, L_n задают систему координат в $\mathbb{R}^n$, любая линейная функция g может быть записана в виде

$$g = a_1 L_1 + \dots + a_n L_n + b,$$

где a_1, …, a_n, b — некоторые числа.

В частности, можно записать все функции L_k и f в выбранной системе координат:

$$L_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} L_i + b_k, \quad f = \sum_{i=1}^{n} a_i L_i + b.$$

Поскольку v является вершиной, в частности, принадлежит многограннику P, имеем $L_k(v) \leq 0$ для всех k. Следовательно, $b_k = L_k(v) \leq 0$ для всех k.

Матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & a_2 \\ & & \dots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & a_n \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_m & b \end{array}\right)$$

называется симплекс-таблицей (соответствующей данному реперу). Последний столбец симплекс таблицы играет особую роль — он отвечает за функцию f, а не за неравенства, задающие многогранник. Последняя строка симплекс-таблицы тоже играет особую роль — она содержит свободные члены всех линейных функций, которые мы представляем в выбранном репере. Заметим, что при нашем выборе репера, в первых n строках и первых n столбцах симплекс-таблицы стоит единичная матрица. В пересечении последней строки с первыми n столбцами стоят нули.

Предложение 3. *Если все $a_i \leq 0$, то функция $f|_P$ достигает минимума в точке v.*

Доказательство. Мы знаем, что $f(v) = b$. С другой стороны, если $x \in P$, то

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i L_i(x) + b \geq b,$$

поскольку $L_i(x) \leq 0$ по определению многогранника P, и $a_i \leq 0$ согласно нашему предположению. □

Теперь мы знаем, в какой момент нужно остановиться. Теперь предположим, что вершина v не является минимальной для функции f. Мы хотим перейти к соседней вершине. Для этого нужно поменять репер минимальным возможным образом, то есть одну линейную функцию из него выкинуть, а одну добавить. Допустим, мы хотим выкинуть из репера функцию L_s ($s \leq n$), и добавить в репер функцию L_r ($r > n$). Новый репер будет состоять из функций $L_1, \dots, L_{s-1}, L_{s+1}, \dots, L_n, L_r$.

Чтобы записать симплекс-таблицу, соответствующую новому реперу, нам нужно выразить L_s через функции нового репера. Это можно сделать при помощи соотношения

$$L_r = \sum_{i=1}^{n} a_{ir} L_i + b_r,$$

которое дает

$$L_s = -\frac{1}{a_{sr}} \left(\sum_{i \neq s,\ i \leq n} a_{ir} L_i - L_r + b_r \right).$$

Подставим это выражение в выражение для L_k и для f через $L_1, \ldots, L_n$. Получаем:

$$L_k = \sum_{i \neq s,\ i \leq n} \left(a_{ik} - \frac{a_{sk}}{a_{sr}} a_{ir} \right) L_i + \frac{a_{sk}}{a_{sr}} L_r + \left(b_k - \frac{a_{sk}}{a_{sr}} b_r \right).$$

$$f = \sum_{i \neq s,\ i \leq n} \left(a_i - \frac{a_s}{a_{sr}} a_{ir} \right) L_i + \frac{a_s}{a_{sr}} L_r + \left(b - \frac{a_s}{a_{sr}} b_r \right).$$

Из этого выражения видны элементы новой симплекс-таблицы. В терминах симплекс-таблицы, очень просто описать, что именно произошло. У нас была матрица, в первых n столбцах которой стояли базисные векторы-столбцы (все, кроме того, у которого единица на самом последнем месте). Мы взяли столбец с номером $r > s$, такой, что $a_{sr} \neq 0$. Элементарными операциями над строками, мы сделали так, что этот столбец стал базисным, с единицей на месте (s, r). При этом столбец с номером s перестал быть базисным.

Обозначим через w ту единственную точку, в котором все линейные функции из нового репера обращаются в нуль. Тогда

$$L_k(w) = \left(b_k - \frac{a_{sk}}{a_{sr}} b_r \right),$$

поскольку $L_i(w) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, отличных от s, и $L_r(w) = 0$. Мы хотим, чтобы точка w являлась вершиной многогранника P. Для этого нам нужно потребовать, чтобы выполнялись неравенства $L_k(w) \leq 0$ для всех k, то есть

$$b_k - \frac{a_{ks}}{a_{rs}} b_r \leq 0$$

для всех k. Это условие выполено автоматически, если $b_r = 0$. С другой стороны, в этом случае $v = w$. Если ничего больше мы сделать не можем, то приходится делать это — менять только репер, не меняя вершины. Пусть все-таки $b_r < 0$ (заметим, что $b_r = L_r(v)$ не может быть положительно, поскольку $v \in P$).

Мы хотим, чтобы значение функции f в вершине w было меньше, чем значение в вершине v. Заметим, что $f(v) = b$, а

$$f(w) = b - \frac{a_s}{a_{sr}} b_r.$$

Значит, требуется, чтобы число a_s/a_{sr} было отрицательным (т.к. по предположению $b_r < 0$). Таким образом, наши требования к новому реперу (состоящие в том, чтобы новый репер был вершинным, и чтобы выполнялось неравенство $f(w) < f(v)$) можно записать в виде следующей системы неравенств:

$$\frac{a_s}{a_{sr}} < 0, \quad b_k - \frac{a_{sk}}{a_{sr}} b_r \le 0.$$

Заметим, что $L_s(w) = -b_r/a_{sr} < 0$. Поскольку b_r отрицательно, отсюда вытекает, что a_{sr} тоже отрицательно. Значит, наши неравенства можно записать в следующем виде

$$a_s > 0, \quad \frac{a_{sr}}{b_r} \ge \frac{a_{sk}}{b_k}.$$

Отсюда вытекают следующие два правила для выбора номеров s и r.

(1) Номер s выбирается среди чисел от 1 до n таким образом, чтобы элемент a_s был положительным. Если все $a_s \le 0$, то, как мы уже видели, минимум функции f реализуется в уже найденной вершине. Обычно выбирают такой номер s, для которого $a_s < 0$, и при этом a_s самый большой по модулю среди всех таких.

(2) Номер $r > n$ выбирается так, чтобы отношение $\frac{a_{sr}}{b_r}$ было максимальным среди тех, для которых $a_{sr} < 0$ (этот максимум может быть равен бесконечности; это означает, что мы вынуждены остаться в той же вершине).

Сформулированные правила позволяют переходить от одного вершинного репера к другому. Начиная с любого вершинного репера, мы за конечное число таких шагов доберемся до точки минимума функции $f|_P$ (для этого достаточно проверить, что алгоритм не может зациклиться, оставаясь в одной и той же вершине).

Пусть мы добрались до вершины, в которой значение функции f самое маленькое. Как найти это значение? Оно равно числу b из симплекс-таблицы.

Обсудим теперь, что делать, если нам не известно ни одной вершины многогранника P. В этом случае мы применим такой трюк. Рассмотрим прямое произведение пространства $\mathbb{R}^n$, в котором лежит многогранник P, на $\mathbb{R}$. Введем в новом пространстве координаты $(x_1, \ldots, x_n, t)$, где $(x_1, \ldots, x_n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$, а t — координата в $\mathbb{R}$. В новом пространстве мы можем определить такой многогранник $\tilde{P}$, который будет содержать многогранник P в качестве грани, и, кроме того, будет иметь явную вершину. А именно, мы рассмотрим пирамиду над многогранником P с вершиной в точке $(0, \dots, 0, 1)$. Понятия грань и пирамида мы сейчас используем в интуитивном смысле. Строгие определения будут даны позже.

Пусть многогранник P задается линейными неравенствами

$$L_1 \leq 0,\ L_2 \leq 0,\ \dots,\ L_m \leq 0.$$

Многогранник $\tilde{P}$ будет задаваться линейными неравенствами

$$\tilde{L}_0 \leq 0,\ \tilde{L}_1 \leq 0,\ \tilde{L}_2 \leq 0, \dots,\ \tilde{L}_m \leq 0,$$

в которых $\tilde{L}_0 = -z$, $\tilde{L}_k = L_k + \alpha_k z$, а числа α_k определяются требованием $\tilde{L}_k(0, 0 \dots, 0, 1) = 0$, то есть $\alpha_k = -L_k(0, 0, \dots, 0)$. Заметим, что так определенный многогранник $\tilde{P}$ пересекается с гиперплоскостью $z = 0$ в точности по многограннику P.

Многогогранник $\tilde{P}$ хорош тем, что для него очень просто найти вершинный репер. А именно, из линейных функций L_i, $i = 1, \dots, n$, выберем $n+1$ линейных функций так, чтобы ни в какой точке пространства $\mathbb{R}^n$ они не обращались в нуль одновременно. Допустим для простоты, что эти $n + 1$ линейных функций совпадают с L_1, $\dots$, L_{n+1}. Тогда набор линейных функций $\tilde{L}_1$, $\dots$, $\tilde{L}_{n+1}$ будет вершинным базисом многогранника $\tilde{P}$ с вершиной $(0, \dots, 0, 1)$.

Мы можем запустить симплекс метод, только нам нужно понять, какую функцию на многограннике $\tilde{P}$ мы будем минимизировать. Мы хотим выбрать эту функцию таким образом, чтобы ее ограничение на гиперплоскость $z = 0$ совпадало с функцией f, и чтобы ее минимум достигался на вершине многогранника P, а не в точке $(0, \dots, 0, 1)$. Определим линейную функцию $\tilde{f}$ на пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ формулой

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n, z) = f(x_1, \dots, x_n) + \omega z,$$

где ω — достаточно большое число. На практике, взять достаточно большое число — значит, взять модуль самого большого коэффициента в линейной системе, определяющей многогранник P, и умножить его на 10. Если не поможет, умножить еще раз на 10.

3. Грани выпуклого многогранника

Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый многогранник с непустой внутренностью. Для каждой линейной функции $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, рассмотрим множество точек многогранника P, в которых ограничение функции l на P принимает наибольшее значение. Это множество называется *гранью* многогранника P. Например, сам многогранник P является своей гранью — для того, чтобы это увидеть, достаточно взять функцию l тождественно равной нулю (или любому другому числу). Заметим также, что любая вершина многогранника P является гранью. В самом деле, вершина $v \in P$ определялась как точка многогранника, в которой

$$L_1(v) = \cdots = L_n(v) = 0$$

для некоторого репера $L_1, \ldots, L_n$, выделенного из системы неравенств, задающей многогранник P. Положим $l = L_1 + \cdots + L_n$. Тогда максимальное значение функции l равно нулю, и это максимальное значение достигается в вершине v.

Заметим, что всякая грань многогранника P является выпуклым множеством. В самом деле, грань определяется как пересечение многогранника P с гиперплоскостью (или всем пространством) $l = const$. Как сам многогранник, так и гиперплоскость являются выпуклыми множествами. Пересечение двух выпуклых множеств снова выпукло. Следовательно, грани многогранника выпуклы. Кстати, гиперплоскость $l = const$, в пересечении с которой получается грань, называется *опорной гиперплоскостью* многогранника P. Заметим, что если ограничить все неравенства, задающие многогранник P, на опорную гиперплоскость, то ополучится система неравенств, задающих грань многогранника P. Таким образом, всякая грань многогранника P снова является выпуклым многогранником.

Мы можем определить *размерность* многогранника как размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего многогранник (это аффинное подпространство называется *аффинной оболочкой* многогранника). Как мы уже доказали, если многогранник рассматривать как подмножество своей аффинной оболочки, то он будет иметь непустую внутренность. Внутренность многогранника, рассматриваемого как подмножество своей аффинной оболочки, называется *относительной внутренностью* многогранника. Конечно, понятие относительной внутренности можно определить не только для многогранника, но и для любого выпуклого множества. Поскольку любая грань многогранника P является тоже выпуклым многогранником, имеет смысл говорить о размерности грани.

Задача 1. Докажите, что всякая грань размерности 0 является вершиной.

Два многогранника P и P' называются *комбинаторно эквивалентными*, если существует такое взаимно однозначное соответствие между гранями многогранника P и гранями многогранника

P', при котором из включения $F_1 \subset F_2$ для двух граней F_1, F_2 многогранника P вытекает включение $F_1' \subset F_2'$ для соотвествующих граней F_1', F_2' многогранника P'. Нетрудно убедиться в том, что отношение комбинаторной эквивалентности является действительно отношением эквивалентности. Классы эквивалентности этого отношения называются *комбинаторными классами.* Некоторая числовая величина, связанная с многогранником, называется *комбинаторным инвариантом* многогранника, если эта величина одинакова для всех многогранников одного и того же комбинаторного типа. Другими словами, комбинаторный инвариант — это функция на комбинаторных классах выпуклых многогранников. Понятие комбинаторного инварианта естественным образом обобщается с числовых функций на любые функции, то есть комбинаторными инвариантами могут быть объекты любой природы.

Сейчас мы определим важнейший комбинаторный инвариант выпуклого многогранника. Пусть $f_k(P)$ — число k-мерных граней выпуклого многогранника P. В частности, $f_0(P)$ — это число вершин многогранника P, а $f_1(P)$ — число *ребер* (то есть граней размерности 1). Если размерность многогранника P равна n, то $f_n(P) = 1$. В самом деле, многогранник P является единственной своей n-мерной гранью (остальные грани лежат в опорных гиперплоскостях, следовательно, их размерность не больше $n-1$). Грани размерности $n-1$ называются *гипергранями.* Набор положительных целых чисел

$$(f_0(P), \dots, f_n(P))$$

называется *f-вектором* выпуклого многогранника P. Очевидно, что f-вектор является комбинаторным инвариантом многогранника, то есть комбинаторно эквивалентные многогранники имеют одинаковые f-векторы. Обратное утверждение не верно: многогранники с одинаковыми f-векторами не обязаны быть комбинаторно эквивалентными. Исключение составляют лишь двумерные выпуклые многогранники (то есть выпуклые многоугольники), которые действительно определяются числом ребер (или, что то же самое, числом вершин) с точностью до комбинаторной эквивалентности.

Задача 2. Приведите пример двух трехмерных многогранников, имеющих одиаковые f-векторы, но не являющихся комбинаторно эквивалентыми.

Задача 3. Любой многогранник размерности n с $n+1$ вершинами комбинаторно эквивалентен n-мерному симплексу.

Задача 4. Найдите все комбинаторные классы трехмерных многогранников с 4 вершинами.

Одно из самых важных комбинаторных соотношений на выпуклые многогранники было открыто Эйлером в трехмерном случае, и обобщено Пуанкаре на случай произвольной размерности:

Теорема 4 (Эйлер–Пуанкаре)**.** *Пусть P — выпуклый многогранник размерности n. Тогда компоненты f-вектора многогранника P связаны соотношением*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k(P) = 1.$$

Это соотношение называется *формулой Эйлера.* Мы сейчас дадим топологическое доказательство этой формулы. Недостаток топологического доказательства состоит в том, что оно использует аппарат, далекий от комбинаторной геометрии. Однако, есть и чисто комбинаторно-геометрические доказательства формулы Эйлера. Позже мы наметим одно из них.

Напомним некоторые свойства эйлеровой характеристики. Эйлерова характеристика $\chi(X)$ определена для любого достаточно хорошего топологического пространства X (например, для любого конечного клеточного комплекса) и является целым числом. Если два топологических пространства гомеоморфны, и для каждого из них определена эйлерова характеристика, то эти две эйлеровы характеристики совпадают. Если пространство X гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ (такое пространство называется n-клеткой), то $\chi(X) = (-1)^n$. Наконец, если даны два топологических пространства X и Y, такие, что для них самих и их пересечения определена эйлерова характеристика, то она также определена для объединения $X \cup Y$, и выражается формулой

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y)$$

(в этом отношении, эйлерова характеристика ведет себя также, как мера). Приведенные свойства можно принять за аксиоматическое определение эйлеровой характеристики (только нужно еще доказать ее существование). Имеются несколько понятий эйлеровой характеристики, и только одно из них удовлетворяет перечисленным аксиомам. Нужная нам эйлерова характеристика получается как знакопеременная сумма чисел Бетти для гомологий с компактными носителями. Если брать просто гомологии, то полученная эйлерова характеристика не будет аддидивной, но зато будет удовлетворять свойству гомотопической инвариантности.

Для примера посчитаем эйлерову характеристику замкнутого шара размерности n. Шар можно представить в виде объединения клетки размерности n, клетки размерности $n-1$ и клетки размерности 0 (то есть точки). Следовательно, эйлерова характеристика замктуного шара равна 1. Заметим теперь, что выпуклый многогранник гомеоморфен замкнутому шару (как и любое выпуклое замкнутое множество с непустой внутренностью; для построения гомеоморфизма достаточно поместить центр шара внутрь выпуклого множества, а потом определить гомеоморфизм как линейное растяжение или сжатие на каждом луче, выходящем из центра). Следовательно, эйлерова характеристика выпуклого многогранника равна 1. С другой стороны, относительные внутренности граней являются клетками, и многогранник представляется как объединение этих клеток. По свойству аддитивности, получаем, что эйлерова характеристика многогранника должна быть равна $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k(P)$. Это завершает топологическое доказательство формулы Эйлера.

Задача 5. Докажите, что аффинная оболочка (в $\mathbb{R}^{n+1}$) f-векторов всех n-мерных выпуклых многогранников задается соотношениями

$$f_n = 1, \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k = 1.$$

Таким образом, никаких других линейных соотношений на компоненты f-вектора произвольного выпуклого многогранника, кроме формулы Эйлера и соотношения $f_n = 1$, нет. Однако есть соотношения типа неравенств. Например,

Теорема 5 (Штейниц). *Числа f_0, f_1, f_2 являются компонентами f-вектора некоторого трехмерного выпуклого многогранника тогда и только тогда, когда они удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2, \quad 4 \le f_0 \le \frac{2}{3} f_1, \quad 4 \le f_2 \le \frac{2}{3} f_1.$$

Соотношение $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ — это теорема Эйлера. Если $f_0 < 4$, многогранник не может быть трехмерным (любые три точки в трехмерном пространстве аффинно зависимы). Неравенство $f_0 \le 2/3 f_1$ можно получить, заметив, что на каждом ребре по 2 вершины, а в каждой вершине сходится не менее трех ребер. Неравенства $4 \le f_2 \le 2/3 f_1$ получаются аналогично. Тем самым необходимость условий Штейница доказана. Достаточность доказывается гораздо сложнее. Мы обсудим доказательство теоремы Штейница позже.

В размерности 4 задача описания f-векторов произвольных выпуклых многогранников остается открытой. Еще сложнее задача описания всех возможных комбинаторных типов. Задача перечисления комбинаторных типов не решена даже в трехмерном случае.

4. Теория двойственности

Мы теперь обсудим двойственность выпуклых множеств и, в частности, двойственность выпуклых многогранников. Пусть Δ — выпуклое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$, содержащее точку 0 в своей внутренности. Определим двойственное выпуклое множество Δ^* как множество всех элементов y двойственного пространства $\mathbb{R}^{n*}$, таких, что $\langle x, y\rangle \leq 1$ для всех $x \in \Delta$. Здесь $\langle x, y\rangle$ обозначает результат канонического спаривания между элементом x пространства $\mathbb{R}^n$ и элементом y двойственного пространства $\mathbb{R}^{n*}$.

Чтобы оправдать терминологию, мы должны доказать, что множество Δ^* действительно является выпуклым. В самом деле, по определению, Δ^* является пересечением бесконечного семейства закнутных полупространств, параметризованных точками множества Δ. А именно, точке $x \in \Delta$ соответствует полупространство в $\mathbb{R}^{n*}$, заданное неравенством $\langle x, y\rangle \leq 1$. Отсюда же вытекает, что множество Δ^* замкнуто. Докажем еще, что множество Δ^* ограниченно. Мы воспользуемся тем, что множество Δ содержит начало координат в своей внутренности. Если так, то можно выбрать такой базис пространства $\mathbb{R}^n$, что концы всех базисных векторов e_i будут лежать в Δ. Более того, можно добиться, чтобы еще и противоположные векторы $-e_i$ лежали в Δ. Предположим, что мы выбрали и зафиксировали такой базис. Тогда среди неравенств, задающих множество Δ^*, есть такие:

$$\langle \pm e_i, y\rangle \leq 1.$$

Отсюда вытекает, что координаты вектора y в двойственном базисе удовлетворяют неравенствам $|y_i| \leq 1$. Следовательно, все точки $y \in \Delta^*$ лежат в единичном кубе. Стало быть, множество Δ^* замкнуто и ограниченно, то есть компактно.

Задача 6. Пусть B — шар единичного радиуса с центром в начале координат (относительно некоторой евклидовой метрики на пространстве $\mathbb{R}^n$). Найдите двойственное выпуклое множество B^*.

Задача 7. Пусть A — выпуклый эллипсоид в $\mathbb{R}^n$, заданный неравенством

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq 1,$$

где все коэффициенты λ_i — положительные числа. Найдите двойственное выпуклое множество A^*.

Отметим следующее простое свойство: если A и B — компактные выпуклые множества, содержащие 0 в своей внутренности и такие, что $A \subseteq B$. Тогда $B^* \subseteq A^*$. В самом деле, множество B^* задано системой из большего числа неравенств (неравенства, задающие множество B^*, находятся во взаимно однозначном соответствии с точками множества B, а неравенства, задающие множество A^*, находятся во взаимно однозначном соответствии с точками множества $A \subseteq B$). Следовательно, само множество будет меньше.

Отсюда, в частности, вытекает, что если Δ — компактное выпуклое множество, содержащее 0 в своей внутренности, то и Δ^* обладает теми же свойствами. Компактность и выпуклость мы уже доказали. Осталось убедиться в том, что множество Δ^* содержит 0 в своей внутренности. В самом деле, поскольку Δ ограниченно, оно содержится в некотором шаре B с центром в начале координат. Следовательно, двойственное множество Δ^* содержит двойственный шар B^*. Таким образом, переход к двойственному выпуклому множеству не выводит за пределы выпуклых компактных множеств, содержащих начало координат в своей внутренности. Некоторая операция называется двойственностью обычно только в том случае, когда она является инволюцией, то есть вторая ее итерация совпадает с тождественным преобразованием. Мы собираемся доказать, что это так для введенного понятия двойственности на выпуклых множествах, то есть $\Delta^{**} = \Delta$ (при естественном отождествлении пространства $\mathbb{R}^n$ и дважды двойственного $\mathbb{R}^{n**}$).

Для этого нам понадобится следующее свойство отделимости:

Теорема 6 (об отделимости). *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — компактное подмножество, а точка $a \in \mathbb{R}^n$ не принадлежит множеству A. Тогда существует гиперплоскость H в $\mathbb{R}^n$, отделяющая точку a от множества A, то есть такая, что точка a лежит по одну сторону от H, а множество A по другую. Другими словами, найдется линейная функция l со следующими свойствами: $l(a) > 0$ и $l(x) < 0$ для всех $x \in A$.*

Доказательство. Введем некоторую евклидову метрику в $\mathbb{R}^n$. Рассморим непрерывную функцию $h(x)$, равную евклидовому расстоянию от точки a до точки $x \in A$. В ограничении на компактное множество A, функция h достигает своего наименьшего значения. Предположим, что это наименьшее значение достигается в точке $b \in A$. Тогда гиперплоскость, перепендикулярная отрезку $[a, b]$ и проходящая через его середину, отделяет точку a от множества A. $\square$

Далеко идущее обобщение сформулированной теоремы на случай бесконечномерных пространств (и некомпактных выпуклых подмножеств) называется теоремой Хана–Банаха. Этот фундаментальный результат доказывается не очень сложно, но он нам в полной общности не понадобится.

Теперь мы можем доказать, что операция перехода к двойственному выпуклому множеству инволютивна.

Теорема 7. *Пусть Δ — выпуклое компактное множество, содержащее 0 в своей внутренности. Тогда $\Delta^{**} = \Delta$.*

Доказательство. По определению, множество Δ^{**} состоит из всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, таких, что $\langle x, y\rangle \leq 1$ для всех $y \in \Delta^*$. Очевидно из определения множества Δ^*, что все точки $x \in \Delta$ этому условию удовлетворяют. Таким образом, мы доказали включение $\Delta \subseteq \Delta^{**}$.

Для доказательства обратного включения предположим, что найдется точка $a \in \Delta^{**}$, не содержащаяся во множестве Δ. Тогда, по теореме об отделимости, существует линейный функционал $y \in \mathbb{R}^{n*}$, такой, что $\langle a, y\rangle > 1$, и при этом $\langle x, y\rangle < 1$ для всех $x \in \Delta$. Из второго неравенства вытекает, что $y \in \Delta^*$, а первое неравенство тогда противоречит включению $a \in \Delta^{**}$. $\square$

Мы теперь можем использовать теорию двойственности для того, чтобы дать альтернативное описание выпуклых многогранников.

Теорема 8. *Любой выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин.*

Доказательство. Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый многогранник размерности n. Вершины многогранника P принадлежат многограннику. Следовательно, любые выпуклые комбинации вершин также принадлежат многограннику. Отсюда вытекает, что выпуклая оболочка вершин является подмножеством многогранника P. Допустим, что многогранник P содержит точку a, не лежающую в выпуклой оболочке вершин. Тогда, по теореме об отделимости, сущестует линейная функция l, принимающая отрицательные значения на всех вершинах и положительное значение в точке a. Однако это противоречит доказанной ранее теореме о том, что максимальное значение ограничения линейной функции на выпуклый многогранник обязательно достигается в вершине многогранника. $\square$

Вы не заметили существенного пробела в приведенном выше доказательстве? Подумайте, прежде чем читать дальше. В приведенном доказательстве действительно имеется существенный пробел. Он состоит в том, что мы молчаливо использовали тот факт, что выпуклая оболочка конечного числа точек является компактным множеством. Этот факт нуждается в доказательстве. Ограниченность, конечно, очевидна (если конечное множество точек содержится в некотором шаре, то и их выпуклая оболочка содержится в том же шаре). Нужно доказать замкнутость. Впрочем, легче доказать сразу компактность. Рассмотрим конечное множество точек $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Допустим сначала, что точки этого множества аффинно независимы. Тогда для всякой последовательности точек $x_n \in \operatorname{conv}(V)$ можно рассмотреть единственное представление

$$x_n = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{n,i} v_i, \quad \lambda_{n,i} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_{n,i} = 1$$

точки x_n в виде выпуклой комбинации точек множества V. Из сходимости $x_n \to x$ вытекает сходимость коэффициентов $\lambda_{n,i} \to \lambda_i$ для каждого i (это нетрудно показать, переведя точки множества V в концы базисных векторов или 0 при помощи некоторого невырожденного линейного преобразования). Отсюда вытекает, что предельная точка x представляется в виде выпуклой комбинации $\sum \lambda_i v_i$, а следовательно, тоже принадлежит множеству $\operatorname{conv}(V)$. Если же точки множества V аффинно зависимы, то их всегда можно получить проекцией некоторых аффинно независимых точек, лежащих в некотором пространстве $\mathbb{R}^N$ большой размерности N. Проекция непрерывна, а образ компакта при непрерывном отображении снова является компактом. Таким образом, компактность множества $\operatorname{conv}(V)$ доказана.

В качестве бесплатного приложения получаем следующую теорему:

Теорема 9. *Любой выпуклый многогранник является проекцией симплекса.*

В самом деле, множество вершин многогранника получается проекцией из некоторого множества аффинно независимых точек. Но выпуклая оболочка аффинно независимых точек является симплексом.

Следующая фундаментальная теорема устанавливает эквивалентность двух определений выпуклого многогранника: как ограниченного множества, заданного конечной системой линейных неравенств и как выпуклой оболочки конечного множества точек.

Теорема 10 (Минковского–Вейля)**.** *Выпуклое множество является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда оно является выпуклой оболочкой конечного числа точек.*

Доказательство. Мы уже доказали, что любой выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой конечного числа точек, а именно, своих вершин. Пусть теперь A — выпуклая оболочка конечного числа точек (а именно, $A = \mathrm{conv}(V)$, где $V = \{v_1, \dots, v_m\}$). Это компактное выпуклое множество, в чем мы уже убедились. Мы можем считать без ограничения общности, что A имеет непустую внутренность, иначе достаточно рассмотреть множество A как подмножество своей аффинной оболочки. При помощи параллельного переноса можно поместить начало координат внутрь множества A. Поэтому мы будем считать, что множество A уже содержит 0 в своей внутренности.

Рассмотрим двойственное множество A^*. Оно задано конечным числом неравенств, а именно, следующей системой

$$\langle v_1, y\rangle \le 1, \quad \dots \quad \langle v_m, y\rangle \le 1.$$

Следовательно, A^* является выпуклым многогранником. Как мы уже доказали, выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой конечного числа точек. Следовательно, A^{**} снова является выпуклым многогранником (как мы показали выше, множество, двойственное к выпуклой оболочке конечного числа точек является выпуклым многогранником). Однако $A = A^{**}$, поэтому A является выпуклым многогранником. $\square$

Мы попутно установили, что выпуклое множество, двойственное к выпуклому многограннику, снова является выпуклым многогранником. Теперь мы построим соответствие между гранями многогранника и гранями двойственного многогранника. Пусть Δ — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$, содержащий 0 в своей внутренности. Рассмотрим грань F многогранника Δ. Допустим, что эта грань содержит вершины v_1, …, v_m многогранника Δ и никакие другие. Определим соответствующую грань $F^\vee$ многогранника Δ^* как подмножество многогранника Δ^*, заданное системой уравнений

$$\langle v_1, y\rangle = 1, \quad \dots \quad \langle v_m, y\rangle = 1.$$

Очевидно, что включение $F_1 \subseteq F_2$ влечет $F_2^\vee \subseteq F_1^\vee$. В самом деле, система, определяющая $F_2^\vee$, содержит больше уравнений, чем система, определяющая $F_1^\vee$, поскольку грань $F_2^\vee$ содержит, вообще говоря, больше вершин.

Задача 8. Докажите, что $F^{\vee\vee} = F$ для любой грани многогранника Δ. Таким образом, соответствие $F \mapsto F^{\vee}$ является взаимно однозначным соответствием между гранями многогранника Δ и гранями двойственного многогранника Δ^*.

Задача 9. Докажите, что $\dim(F^{\vee}) = n - \dim(F) - 1$.

Задача 10. Докажите, что комбинаторный тип двойственного многогранника Δ^* зависит только от комбинаторного типа многогранника Δ.

5. Простые и симплициальные многогранники

Скажем, что n-мерный многогранник называется *простым*, если в каждой его вершине сходятся ровно n гиперграней. Простые многогранники устойчивы относительно малого шевеления гиперграней. Более того, если все гиперграни произвольного многогранника слегка пошевелить, получится простой многогранник. Это связано со следующим фактом: если даны $n+1$ гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$ общего положения, то у них нет ни одной общей точки. Если же случайно $n+1$ гиперплоскостей проходят через одну и ту же точку, то их можно слегка пошевелить так, чтобы после шевеления гиперплоскости не пересекались. При этом даже можно показать, что если гиперплоскости пересекались только по одной точке, то шевеление может сводиться к параллельному переносу на малый вектор. Это утверждение сводится к некоторому утверждению из линейной алгебры про переопределенные системы линейных уравнений. Если есть система из $n+1$ уравнений от n неизвестных, то такая система, как правило, не имеет решений. Условие того, что система все же имеет решения, выражается равенством нулю некоторого определителя. Малым изменением коэффициентов уравнений можно всегда добиться того, чтобы этот определитель стал отличен от нуля. Таким образом, простые многогранники — это многогранники общего положения относительно гиперграней.

Можно еще дать такое геометрическое описание простых многогранников. Рассмотрим вершину v многогранника P. Проведем гиперплоскость H, отделяющую вершину v от остальных вершин многогранника P. Комбинаторный класс пересечения $H \cap P$ не зависит от конкретного выбора гиперплоскости H. Это пересечение называется *линком* вершины v в многограннике P. Если P — простой многогранник, то линк ограничен ровно n гипергранями. Многогранник размерности $n-1$, имеющий ровно n гиперграней, является симплексом. Таким образом, в простом многограннике линки всех вершин — симплексы. Понятно, что обратное утверждение тоже верно: если линки всех вершин симплексы, то многогранник простой.

Задача 11. Еще простота многогранника эквивалентна тому, что в каждой вершине сходится ровно n ребер. Докажите.

Многогранник называется *симплициальным*, если все его собственные грани — симплексы. Нетрудно проверить, что многогранник, двойственный к простому, является симплициальным, и наоборот. Симплициальные многогранники устойчивы относительно малого шевеления вершин. Более того, если слегка пошевелить все вершины произвольного многогранника, то получится симплициальный многогранник. Таким образом, симплициальные многогранники — это многогранники общего положения относительно вершин. Нетрудно проверить, что многогранники "совсем общего положения", то есть и простые, и симплициальные одновременно — это только симплексы.

Задача 12. Докажите последнее утверждение.

Кажущийся парадокс объясняется тем, что понятия общего положения относительно гиперграней и общего положения относительно вершин плохо согласованы друг с другом. В математике есть и несколько других естественных примеров конкурирующих понятий общего положения, таких что некоторое утверждение верно для объектов общего положения в одном смысле и неверно для объектов общего положения в другом смысле.

В силу двойственности, комбинаторика простых многогранников и комбинаторика симплициальных многогранников — это одна и та же теория. Всякое утверждение о комбинаторике простых многогранников можно переписать в виде утверждения о комбинаторике симплициальных многогранников, и наоборот. Однако в некоторых случаях бывает удобней работать с простыми многогранниками, а в некоторых случаях — с симплициальными.

Пусть Δ — простой n-мерный многогранник в $\mathbb{R}^n$. *F-полиномом* многогранника Δ называется производящая функция числа граней, то есть полином

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i t^i.$$

Во многих случаях бывает удобней рассматривать другой полином, по которому F-полином восстанавливается однозначно:

$$H(t) = F(t-1) = \sum_{k=0}^{n} h_k t^k, \quad h_k = \sum_{i \geq k} f_i (-1)^{i-k} \binom{i}{k}.$$

Числа $h_0, \ldots, h_n$ образуют h-*вектор* многогранника Δ (от слова “homology” — гомология). Задание h-вектора эквивалентно заданию f-вектора. Именно, f-вектор простого многогранника выражается через h-вектор по формуле

$$F(t) = H(t+1), \quad f_i = \sum_{k \geq i} h_k \binom{k}{i}.$$

Пример. Пусть Δ — симплекс размерности n. Тогда

$$f_i = \binom{n+1}{i+1}, \quad i \leq n.$$

Действительно, всякая i-мерная грань симплекса содержит ровно $i+1$ вершину. С другой стороны, выпуклая оболочка всякого набора из $i+1$ вершины многогранника Δ является гранью размерности i.

Таким образом, F-полином симплекса равен

$$F(t) = (n+1) + \binom{n+1}{2} t + \binom{n+1}{3} t^3 + \cdots + t^n = \frac{(t+1)^{n+1} - 1}{t}.$$

Отсюда получаем следующее выражение для H-полинома симплекса:

$$H(t) = F(t-1) = \frac{t^{n+1} - 1}{t-1} = 1 + t + \cdots + t^{n-1} + t^n.$$

Следовательно, все компоненты h-вектора симплекса равны единице.

Пример. Пусть Δ_1 и Δ_2 — выпуклые многогранники размерностей m и $n-m$ соответственно. Выразим h-вектор прямого произведения $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ через h-векторы многогранников Δ_1 и Δ_2. Заметим, что всякая k-мерная грань многогранника Δ является прямым произведением $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ грани Γ_1 многогранника Δ_1 и грани Γ_2 многогранника Δ_2, таких что $\dim(\Gamma_1) + \dim(\Gamma_2) = k$. Отсюда получаем:

$$f_k(\Delta_1 \times \Delta_2) = \sum_{i=0}^{k} f_i(\Delta_1) f_{k-i}(\Delta_2).$$

Другими словами, справедливо следующее соотношение на F-полиномы:

$$F_{\Delta_1\times\Delta_2}(t) = F_{\Delta_1}(t)F_{\Delta_2}(t).$$

Но тогда точно таким же соотношением связаны H-полиномы:

$$H_{\Delta_1\times\Delta_2}(t) = H_{\Delta_1}(t)H_{\Delta_2}(t).$$

Пример. Теперь мы можем посчитать h-вектор куба. F-полином отрезка I имеет вид $F_I(t) = 2 + t$, поскольку отрезок имеет 2 вершины и одно ребро. Следовательно, $H_I(t) = 1 + t$. Поскольку куб I^d есть прямое произведение d координатных отрезков, H-полином куба имеет вид

$$H_{I^n}(t) = (1+t)^n.$$

Следовательно, h-вектор куба состоит из биномиальных коэффициентов: $h_k = \binom{d}{k}$.

В то время как для произвольных выпуклых многогранников единственным линейным соотношением на f-вектор служит теорема Эйлера (кроме очевидного $f_n = 1$), для простых (или симплициальных) многогранников имеется уже примерно $n/2$ линейных соотношений. Например, нетрудно получить соотношение между количеством ребер и количеством вершин простого многогранника: $f_1 = \frac{n\cdot f_0}{2}$. Все линейные соотношения нашел и доказал Соммервиль в 1927 году (некоторые частные случаи были ранее разобраны Деном). Эти соотношения получили название *соотношений Дена–Соммервиля*:

Теорема 11. *Для всякого простого n-мерного многогранника*

$$h_k = h_{n-k}, \quad h_0 = h_n = 1.$$

Другими словами, h-вектор симметричен относительно середины.

Замечание. Доказательство соотношений Дена–Соммервиля, приведенное ниже, является аналогом рассуждения из теории Морса, доказывающего двойственность Пуанкаре. На самом деле, имеется непосредственная связь между соотношениями Дена–Соммервиля и двойственностью Пуанкаре в гомологиях некоторого компактного многообразия. Эту связь обнаружил А.Г. Хованский. Однако доказательство появилось раньше: оно принадлежит замечательному английскому геометру П. Макмаллену.

Пусть Δ — простой выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольную линейную функцию l на пространстве $\mathbb{R}^n$, не постоянную ни на какой грани многогранника Δ положительной размерности (достаточно потребовать, чтобы ограничение этой функции ни на какое ребро не было постоянным). Такую функцию мы будем называть *общей линейной функцией* на многограннике. Вершина многогранника *индекса* m (относительно общей линейной функции l) — это такая вершина, из которой ровно m ребер идут вниз (то есть функция l, ограниченная на эти ребра, достигает максимального значения в рассматриваемой вершине). Остальные ребра идут вверх.

Обозначим через $B(l, m)$ число вершин индекса m многогранника Δ относительно общей линейной функции l.

Предложение 12. *Число $B(l, m)$ не зависит от конкретного выбора общей линейной функции l и явно выражается через компоненты f-вектора многогранника. Именно,*

$$B(l, m) = h_m.$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения заметим, что вершина индекса m есть точка максимума нашей линейной функции, ограниченной на какую-то грань размерности $\leq m$. Посчитаем теперь число f_i следующим образом. Каждой i-мерной грани многогранника Δ сопоставим вершину, в которой ограничение функции l на рассматриваемую грань принимает наибольшее значение. Получим вершину индекса $m \geq i$. Однако из каждой такой вершины выходит вниз ровно $\binom{m}{i}$ i-мерных граней. Следовательно, для того чтобы посчитать число граней размерности i в многограннике Δ, нужно посчитать все вершины индекса $\geq i$, причем вершину индекса m следует посчитать $\binom{m}{i}$ раз. Таким образом,

$$f_i = \sum_{m \geq i} B(l, m) \binom{m}{i}.$$

Следовательно, по определению h-вектора, $B(l, m) = h_m$. Отсюда видно, что число $B(l, m)$ не зависит от выбора линейной функции l. $\square$

6. Теорема о максимальном числе граней

В этом разделе мы обсудим решение следующей проблемы:

Проблема. Описать многогранники, реализующие максимум f-вектора при фиксированном числе вершин (или гиперплоских граней).

Прежде всего, можно существенным образом ограничить класс рассматриваемых многогранников:

Теорема 13. *Максимум f-вектора при фиксированном числе вершин достигается на некотором симплициальном многограннике.*

Максимум f-вектора при фиксированном числе гиперплоских граней достигается на некотором простом многограннике.

Действительно, если в несимплициальном многограннике пошевелить все вершины общим образом, количество граней только увеличится (каждая несимплициальная грань разобьется на несколько симплициальных). Аналогично, если в непростом многограннике общим образом пошевелить все гиперплоские гарни, количество граней только увеличится (например, всякая непростая вершина распадется на несколько простых).

Задача 13. Дайте строгое доказательство теоремы 13.

Укажем естественную оценку сверху для числа k-мерных граней многогранника с m вершинами:

$$f_k \leq \binom{m}{k+1}. \tag{1}$$

Эта оценка очевидна для симплициальных многогранников (всякой k-мерной грани можно однозначно сопоставить $(k+1)$-элементное множество ее вершин). Для произвольных многогранников оценка вытекает из теоремы 13.

Имеет место аналогичная оценка для числа k-мерных граней n-мерного многогранника с m гипергранями:

$$f_k \leq \binom{m}{n-k}. \tag{2}$$

Эта оценка очевидна для простых многогранников (всякой k-мерной грани соответствует $n-k$ гиперграней, ее содержащих). Для произвольных многогранников оценка вытекает из теоремы 13.

В случае симплекса в обоих неравенствах (1) и (2) достигается равенство (в этом случае $m = n+1$). Спрашивается, может ли равенство в (1) и (2) достигаться при $m > n+1$? Например, бывают ли многогранники (отличные от симплекса), в которых любые две вершины соединены ребром? В трехмерном пространстве, очевидно, таких многогранников не бывает. Однако в четырехмерном пространстве бывают. Вообще, в n-мерном пространстве существуют многогранники, в которых всякий набор из $[n/2]$ вершин принадлежит некоторой грани размерности $[n/2]-1$. Такие многогранники называются *смежностными.*

Смежностные многогранники реализуют максимум числа k-мерных граней (при фиксированном числе вершин) в случае $k <$

$[n/2]$. Однако, поскольку на f-вектор симплициального многогранника имеется $[n+1/2]+1$ линейных соотношений (соотношения Дена–Соммервиля), он полностью определяется значениями f_k при $k < [n/2]$. В частности, все симплициальные смежностные многогранники с одинаковым числом вершин имеют один и тот же f-вектор. Оказывается, что этот f-вектор и доставляет максимум среди всех f-векторов с фиксированным $f_0 = m$. Это утверждение было доказано П. Макмалленом в 1970 году и известно под названием *теоремы о максимальном числе граней* (Upper bound theorem).

Теорема о максимальном числе граней для простых многогранников формулируется двойственным образом. Именно, назовем *дуально-смежностным* всякий многогранник, в котором любые $[n/2]+1$ гиперплоских граней пересекаются. Все простые дуально-смежностные многогранники имеют один и тот же f-вектор. Этот f-вектор и является максимальным среди всех f-векторов многогранников с фиксированным $f_{n-1} = m$.

Задача 14. Докажите, что произведение двух треугольников является дуально-смежностным четырехмерным многогранником.

В четномерном пространстве всякий смежностный многогранник симплициален, а всякий дуально-смежностный прост. В нечетномерном пространстве это не так. Например, в $\mathbb{R}^3$ любой многогранник является смежностным и дуально-смежностным (поскольку всякая вершина принадлежит некоторой 0-мерной грани, а всякая двумерная грань непуста). Вообще, пирамида над четномерным смежностным (отличным от симплекса) многогранником является смежностным несимплициальным многогранником.

6.1. **Циклические многогранники.** Теперь мы рассмотрим важный пример смежностных многогранников — циклические многогранники. Циклические многогранники решают задачу о максимальном f-векторе при заданном числе вершин. Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — отображение Веронезе

$$t \mapsto (t, t^2, \ldots, t^n).$$

Рассморим произвольное конечное множество точек A на числовой прямой. *Циклическим многогранником*, порожденным множеством A, называется выпуклая оболочка множества $\gamma(A)$. Если множество A состоит из m элементов, то говорят, что соответствующий цикличекий многогранник имеет тип $C(m,n)$. Чуть ниже мы увидим, что комбинаторный тип циклического многогранника действительно полностью определяется числами m и n, то есть числом вершин и размерностью.

Предложение 14. *Пусть множество A на числовой прямой содержит ровно $n+1$ точку. Тогда точки множества $\gamma(A)$ аффинно независимы.*

Доказательство. Гиперплоскости в пространстве $\mathbb{R}^n$ мы будем отождествлять с многочленами степени n. Именно, пусть гиперплоскость H задается уравнением

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

Тогда ей соответствует многочлен

$$f_H(t) = \alpha(\gamma(t)) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \cdots + \alpha_n t^n.$$

Заметим, что многочлен f_H не равен тождественно нулю. Точка $\gamma(t)$ принадлежит гиперплоскости H тогда и только тогда, когда $f_H(t) = 0$.

Предположим теперь, что точки $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \ldots, \gamma(t_{d+1})$ аффинно зависимы. Но тогда они лежат в одной гиперплоскости H. Следовательно, многочлен f_H обращается в 0 в точках $t_1, \ldots, t_{n+1}$. Но если многочлен степени n обращается в 0 в $n+1$ точке, то этот многочлен тождественно равен нулю. Противоречие. □

Из доказанного предложения вытекает два следствия.

Следствие 15. *Если множество A на числовой прямой содержит не более $n+1$ точки, то тогда точки множества $\gamma(A)$ аффинно независимы.*

Следствие 16. *Циклический многогранник типа $C(n+1, n)$ — симплекс.*

Нам потребуется следующая очевидная лемма:

Лемма 17. *Многочлен $f(t) = \prod\limits_{a \in A} (t - a)$ принимает в точке t положительное (отрицательное) значение тогда и только тогда, когда справа от точки t лежит четное (нечетное) число точек из A.*

Приступим к изучению комбинаторных свойств циклических многогранников.

Предложение 18. *Все точки множества $\gamma(A)$ являются вершинами циклического многогранника* $\mathrm{conv}(\gamma(A))$.

Доказательство. Предположим противное: некоторая точка $\gamma(t_0)$, $t_0 \in A$, лежит в выпуклой оболочке остальных точек $\gamma(t)$, $t \in A$. Тогда, по теореме Каратеодори, точка $\gamma(t_0)$ лежит в некотором симплексе с вершинами $\gamma(t_1)$, $\ldots$, $\gamma(t_{n+1})$, где t_1, $\ldots$, $t_{n+1} \in A$. Это означает, что для каждого $1 \leq k \leq n+1$ многочлен

$$f(t) = \prod_{i \neq k}(t - t_i)$$

принимает значения одного знака в точках t_0 и t_k. Следовательно, четность числа корней этого многочлена справа от точки t_0 совпадает с четностью числа корней справа от точки t_k. Но справа от точки t_k ровно $n-k$ корней. Следовательно, k можно выбрать таким образом, чтобы число корней справа от точки t_0 не было сравнимо по модулю 2 с числом корней справа от точки t_k. Противоречие. $\square$

Теорема 19. *Всякий циклический многогранник является симплициальным.*

Доказательство. В самом деле, ни одна гипергрань не может содержать более n вершин. В противном случае мы найдем аффинно зависимую систему из $n+1$ точки на кривой Веронезе. Итак, всякая гиперплоская грань имеет ровно n вершин. Следовательно, всякая гиперплоская грань — симплекс. Но тогда и все грани (во всех размерностях) — симплексы. $\square$

Для дальнейшего нам понадобится следующее определение. Пусть A — конечное множество на числовой прямой, $X \subseteq A$ — некоторое подмножество. *Компонента* множества X — это максимальная цепочка элементов множества X, идущих в друг за другом во множестве A.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X = \{1, 3, 4, 7, 8\}$. Тогда множество X состоит из следующих компонент: $\{1\}$, $\{3, 4\}$, $\{7, 8\}$.

Компонента множества $X \subseteq A$ называется *собственной*, если она не содержит ни минимального элемента множества A, ни максимального элемента множества A. *Правой компонентой* называется компонента, содержащая максимальный элемент множества A. *Левой компонентой* называется компонента, содержащая минимальный элемент множества A.

Теорема 20 (Критерий четности Гейла). *Пусть A — конечное множество точек на числовой прямой, $X \subseteq A$ — n-элементное подмножество. Множество $\gamma(X)$ является множеством вершин некоторой гиперплоской грани циклического многогранника*

$\mathrm{conv}(\gamma(A))$ *тогда и только тогда, когда все собственные компоненты множества* X *содержат четное число элементов.*

Доказательство. Множество $\mathrm{conv}(\gamma(X))$ является гиперплоской гранью тогда и только тогда, когда все остальные вершины лежат по одну сторону от гиперплоскости, натянутой на $\gamma(X)$. Но в этом случае многочлен $f(t) = \prod_{x \in X}(t - x)$ принимает значения одного и того же знака во всех точках множества $A - X$. Но тогда все собственные компоненты множества X должны содержать четное число элементов. То же рассуждение проходит и в обратную сторону. $\square$

Лемма 21. *Пусть подмножество* $X \subseteq A$ *имеет* r *нечетных собственных компонент. Тогда множество* $X \cup \{x\}$ *имеет не менее* $r - 1$ *нечетной собственной компоненты.*

Доказательство. Если элемент x не примыкает ни к одной из нечетных компонент, то число нечетных компонент увеличится на единицу. Если элемент x примыкает к одной нечетной компоненте, то эта компонента станет четной, а все остальные компоненты останутся такими, как были. Если элемент x примыкает сразу к двум нечетным компонентам, то тогда эти компоненты сольются в одну нечетную компоненту. В любом случае число нечетных компонент уменьшается не более чем на 1. $\square$

Из доказанной леммы непосредственно вытекает следующая

Теорема 22. *Пусть множество* $X \subseteq A$ *состоит из* $k \leq n$ *точек. Множество* $\gamma(X)$ *совпадает с множеством вершин некоторой* $(k-1)$*-мерной грани циклического многогранника* $\mathrm{conv}(\gamma(A))$ *тогда и только тогда, когда множество* X *содержит не более* $(n - k)$ *нечетных собственных компонент.*

Из этой теоремы вытекают два важных следствия:

Следствие 23. *Пусть* $1 \leq k \leq [n/2]$. *Тогда всякие* k *вершин циклического многогранника типа* $C(m, n)$ *образуют грань размерности* $k - 1$. *В частности,*

$$f_{k-1} = \binom{m}{k}.$$

Следствие 24. *Любые два циклических многогранника типа* $C(m, n)$ *комбинаторно эквивалентны.*

Это позволяет говорить о многограннике $C(n, d)$, не уточняя конкретный выбор множества A.

Лемма 25. *Пусть множество A состоит из m элементов. Существует ровно*
$$\binom{m-k}{m-2k}$$
$2k$-элементных подмножеств $X \subseteq A$, все компоненты которых (не только собственные) четные.

Дело в том, что каждую четную компоненту можно заменить компонентой, содержащей вдвое меньше элементов. Из этого наблюдения и вытекает сформулированная лемма.

Предложение 26. *Число гиперплоских граней циклического многогранника $C(m,n)$ выражается формулой*
$$f_{n-1}(C(m,n)) = \mu(m,n) = \binom{m-[\frac{n+1}{2}]}{m-d} + \binom{m-[\frac{n+2}{2}]}{m-n}.$$

Доказательство. Пусть сначала $n = 2k$ четно. Тогда, согласно критерию Гейла, гиперплоские грани представляются подмножествами $X \subseteq A$ следующих двух видов:

- Подмножество X состоит из одних только четных компонент. Количество таких подмножеств X мы уже посчитали.
- Все собственные компоненты множества X четны, а обе несобственные — нечетны. Тогда выкинем из множества X (и из множества A) минимальный и максимальный элементы множества X. Получим множество X', содержащее $2k-2$ элемента и состоящее только из четных компонент. Но количество таких подмножеств X' уже посчитано.

На каждый из описанных типов приходится по биномиальному коэффициенту.

Допустим теперь, что $n = 2k+1$ нечетно. Тогда все собственные компоненты множества X четны, а одна из несобственных (либо правая, либо левая) нечетна. Отсюда сумма биномиальных коэффициентов. □

Задача 15. Проведите доказательство во всех деталях.

При помощи аналогичных соображений можно посчитать и все остальные компоненты f-вектора циклического многогранника. Получится следующий ответ:
$$f_k = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{n}{n-j}\binom{n-j}{j}\binom{j}{k+1-j}, & d = 2m-1, \\ \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{k+2}{n-j}\binom{n-j}{j+1}\binom{j+1}{k+1-j}, & d = 2m. \end{cases}$$

Задача 16. Проведите соответствующие вычисления.

6.2. **Смежностные многогранники.** Пусть многогранник P содержит более k вершин. Многогранник P называется *k-смежностным*, если всякое $(k+1)$-элементное множество вершин многогранника P совпадает с множеством вершин некоторой собственной грани многогранника P.

Очевидно, всякий многогранник является 1-смежностным. В трехмерном пространстве 2-смежностными многогранниками являются только симплексы. Но уже в четырехмерном пространстве существует нетривиальный (то есть не являющийся симплексом) 2-смежностный многогранник.

Лемма 27. *Если многогранник в $\mathbb{R}^n$ является k-смежностным, то $k \leq n$.*

Доказательство. Действительно, предположим противное: $k > n$. Предположим, что многогранник P имеет полную размерность (не лежит ни в каком нетривиальном аффинном подпространстве). Иначе рассмотрим многогранник P внутри его выпуклой оболочки. Если многогранник P имеет размерность n, то тогда можно выбрать $k > n$ аффинно независимых вершин. Но в силу условия k-смежности, эти вершины должны принадлежать некоторой собственной грани. Противоречие. □

Предложение 28. *Циклический многогранник $C(m,n)$ всегда является k-смежностным при $k \leq [n/2]$.*

Это вытекает непосредственно из следствия 23.

Отметим следующие простые свойства k-смежностных многогранников:

Предложение 29. *Справедливы следующие утверждения:*

- *Если многогранник P является k-смежностным, то он является также j-смежностным при $0 < j < k$.*
- *Пусть многогранник P является k-смежностным. Тогда выпуклая оболочка всякого подмножества вершин многогранника P, содержащего более k вершин, тоже является k-смежностным многогранником.*

Следующая теорема вводит ограничение на k, при котором существуют нетривиальные k-смежностные многогранники.

Теорема 30. *Пусть многогранник P является k-смежностным. Тогда, если $k > [n/2]$, то многогранник P является симплексом.*

Доказательство. Действительно, предположим, что многогранник P не является симплексом. Тогда он содержит не менее чем $n+2$ вершин. Пусть X — множество из $n+2$ аффинно независимых вершин многогранника P. По теореме Радона, множество X можно разбить на два подмножества Y и Z таким образом, что выпуклые оболочки этих подмножеств будут пересекаться. Следовательно, ни одно из подмножеств $\mathrm{conv}Y$ и $\mathrm{conv}Z$ не является гранью многогранника P. Однако $\#(Y)+\#(Z)=n+2$. Следовательно, $\#(Y)\leq n/2+1\leq k$ или $\#(Z)\leq n/2+1\leq k$. Таким образом, по условию k-смежности, одно из множеств $\mathrm{conv}X$ или $\mathrm{conv}Y$ должно быть собственной гранью многогранника P. Противоречие. $\square$

Следствие 31. *Пусть многогранник P является k-смежностным. Тогда всякая грань F размерности $0\leq\dim F\leq 2k-1$ является симплексом.*

Напомним, что *смежностный* многогранник размерности n — это $[n/2]$-смежностный многогранник.

Следствие 32. *Пусть n четно. Тогда всякий смежностный многогранник в $\mathbb{R}^n$ является симплициальным.*

Заметим, что если $n\geq 3$ нечетно, то в $\mathbb{R}^n$ существует смежностный многогранник, не являющийся симплициальным. Например, пирамида над смежностным многогранником размерности $n-1$.

Предложение 33. *Пусть P — k-смежностный многогранник. Тогда линк любой его вершины является $(k-1)$-смежностным.*

Доказательство. Рассмотрим $k-1$ вершину линка Q вершины v многогранника P. Вершины многогранника Q соответствуют ребрам многогранника P, сходящимся в вершине v. Рассмотрим концы этих ребер, отличные от v. Вместе с вершиной v они составляют некоторое k-элементное множество вершин многогранника P. Но в силу k-смежности, эти вершины определяют собственную грань многогранника P. А значит, соответствующие вершины многогранника Q определяют собственную грань многогранника Q. $\square$

6.3. **Теорема о максимальном числе граней.** Теперь мы готовы доказать теорему о максимальном числе граней:

Теорема 34. *Максимум f-вектора выпуклого многогранника с фиксированным числом вершин достигается на всяком смежностном симплициальном многограннике (в частности, на циклическом многограннике). Максимум f-вектора выпуклого многогранника с фиксированным числом гиперграней достигается на* *всяком простом дуально-смежностном многограннике (в частности, на многограннике, двойственном к циклическому).*

Достаточно доказать вторую часть этой теоремы (относящуюся к простым многогранникам). Первая часть получится из соображений двойственности.

Лемма 35. *Если* Γ *— гиперплоская грань простого многогранника* P*, то* $h_k(\Gamma) \leq h_k(P)$*.*

Доказательство. Рассмотрим общую линейную функцию l на многограннике P, значение которой на всех вершинах грани Γ меньше, чем на остальных вершинах многогранника. Ограничение функции l на грань Γ является общей линейной функцией на этой грани, поэтому можно говорить об индексе вершины относительно Γ. Все вершины индекса k относительно грани Γ имеют тот же индекс относительно всего многогранника P (поскольку дополнительное ребро всегда смотрит в сторону возрастания функции l). Отсюда неравенство $h_k(\Gamma) \leq h_k(P)$. □

Лемма 36. *Если* P *— дуально-смежностный простой* n*-многогранник, то для всякой гиперграни* Γ *и числа* $k+1 \leq [n/2]$ *имеет место равенство* $h_k(\Gamma) = h_k(P)$*.*

Доказательство. Пусть l — та же линейная функция на многограннике P, что и в доказательстве леммы 35. Мы хотим доказать, что всякая вершина индекса k принадлежит грани Γ. Предположим противное: нашлась некоторая вершина v индекса k, не принадлежащая Γ. Рассмотрим верхнюю сепаратрису F вершины v. Грань F имеет размерность $n-k$, и, следовательно, получается в пересечении k гиперплоскостей $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$. Очевидно, $F \cap \Gamma = \emptyset$, то есть $\Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k \cap \Gamma = \emptyset$. Однако в дуально-смежностном многограннике пересечение $k+1 \leq [n/2]$ гиперплоской грани всегда непусто. Противоречие. □

Лемма 37. *Для всякого простого* n*-мерного многогранника* P *с* m *гипергранями имеет место неравенство*

$$h_{k+1}(P) \leq \frac{m-n+k}{k+1} h_k(P).$$

При доказательстве этой леммы мы будем использовать следующую терминологию, мотивированную теорией Морса. Определим *нижнюю сепаратрису* вершины v простого многогранника P относительно общей линейной функции l как наименьшую грань, содержащую все ребра, идущие из вершины v вниз, или, эквивалентным образом, как наибольшую грань, такую, что ограничение функции l на эту грань достигает своего наибольшего значения в вершине v. Аналогично определяется верхняя сепаратриса вершины v: это грань, натянутая на все ребра, идущие из вершины v вверх.

Доказательство. Назовем *k-инцидентностью* многогранника P пару (Γ, x), состоящую из гиперграни Γ и ее вершины x, имеющей индекс k относительно Γ. Посчитаем число k-инцидентностей I_k двумя способами. С одной стороны, очевидно,

$$I_k = \sum_{\Gamma} h_k(\Gamma),$$

где суммирование ведется по всем гиперплоским граням многогранника P. В силу леммы 35, отсюда следует, что $I_k \leq m h_k(P)$.

С другой стороны, вершина x может участвовать в k-инцидентности только если ее индекс равен k или $k+1$. Если вершина x имеет индекс k, то ей соответствуют k-инцидентности вида (Γ, x), где гипергрань Γ содержит нижнюю сепаратрису вершины x. Таких граней ровно $n-k$. Если же индекс вершины x равен $k+1$, то эта вершина участвует в k-инцидентностях вида (Γ, x), где гиперплоская грань Γ содержит верхнюю сепаратрису точки x (это эквивалентно тому, что Γ не содержит нижнюю сепаратрису). Таких гиперплоских граней ровно $k+1$. Таким образом,

$$I_k = (n-k)h_k(P) + (k+1)h_{k+1}(P).$$

Комбинируя это равенство с неравенством $I_k \leq m h_k(P)$, получаем утверждение леммы. $\square$

Следствие 38. *Для всякого простого n-мерного многогранника P с m гипергранями*

$$h_k(P) \leq \binom{m-n+k-1}{k}.$$

Следствие 39. *Для дуально-смежностного простого n-мерного многогранника P при $k \leq [n/2]$ имеет место равенство*

$$h_k(P) = \binom{f_{n-1}(P)-n+k-1}{k}.$$

Это вытекает из леммы 36 и из доказательства леммы 37 (все неравенства в этой лемме заменяются равенствами).

Следствия 38 и 39 (вместе с соотношениями Дена–Соммервиля) доказывают теорему о максимальном числе граней.

7. Графы многогранников и теорема Штейница

TBA

8. Диаграммы Гейла

8.1. **Множества Гейла.** *Диаграммы Гейла* доставляют общий метод перечисления комбинаторных типов выпуклых многогранников. С помощью диаграмм Гейла мы перечислим комбинаторные типы n-мерных выпуклых многогранников с $n+2$ и $n+3$ вершинами. Начнем с основных определений.

Рассмотрим произвольный выпуклый многогранник P в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть V — множество вершин многогранника P. Допустим, что число вершин многогранника P равно m. Обозначим через $\mathbb{R}[V]$ векторное пространство всех вещественнозначных функций на множестве V (размерность этого пространства равна m). Имеется каноническое вложение $V \to \mathbb{R}[V]$, сопоставляющее каждой вершине $v \in V$ функционал, равный единице в этой вершине и нулю во всех остальных точках множества V. Профакторизуем пространство $\mathbb{R}[V]$ по множеству всех аффинных функционалов, ограниченных на V. Получим векторное пространство $G[V]$ размерности $m-n-1$ — *пространство Гейла.* Отображение

$$\Gamma : V \to G[V]$$

является композицией естественного вложения $V \to \mathbb{R}[V]$ и канонической проекции $\mathbb{R}[V] \to G[V]$. Это отображение называется *отображением Гейла.* Множество $\Gamma(V)$ называется *множеством Гейла* многогранника P.

Множество вершин $W \subseteq V$ называется *когранью* многогранника P, если дополнение $V \setminus W$ является множеством вершин некоторой собственной грани многогранника P. Все множество вершин V тоже считается когранью.

Отображение Гейла обладает следующим важным свойством:

Теорема 40. *Подмножество $W \subseteq V$ является когранью многогранника P тогда и только тогда, когда относительная внутренность выпуклой оболочки множества $\Gamma(W)$ содержит 0.*

Доказательство. Пусть F — некоторая собственная грань многогранника P, а W — соответствующая кограннь. Тогда существует аффинный функционал α, обращающийся в 0 на грани F и положительный во всех остальных точках многогранника P. Функционал α можно нормировать таким образом, чтобы выполнялось равенство $\sum_{v\in W} \alpha(v) = 1$. В пространстве $G[V]$ справедливо следующее

соотношение:
$$\sum_{v\in W}\alpha(v)\Gamma(v)=\alpha=0,$$
причем в левой части стоит нетривиальная выпуклая комбинация точек множества $\Gamma(W)$. Следовательно, 0 принадлежит относительной внутренности выпуклой оболочки этого множества. Те же самые рассуждения действуют и в обратную сторону. $\square$

Следствие 41. *Многогранник P является симплициальным тогда и только тогда, когда*
$$\dim \mathrm{conv}\Gamma(W)=\dim \mathrm{conv}\Gamma(V)$$
для каждой кограни W.

Доказательство. Пусть W — когрань симплициального многогранника P. Тогда для всякой вершины $w\in V-W$ множество $W\cup\{w\}$ тоже является когранью. Согласно теореме 40, оба множества $\Gamma(W)$ и $\Gamma(W\cup\{w\})$ содержат 0 в своей относительной внутренности. Это возможно только в том случае, если аффинные оболочки обоих множеств совпадают. Но вершина w была выбрана произвольно. Следовательно, множество $\Gamma(V)$ лежит целиком в аффинной оболочке множества $\Gamma(W)$. Те же самые рассуждения действуют и в обратную сторону. $\square$

Предложение 42. *Имеет место равенство:* $\sum\limits_{v\in V}\Gamma(v)=0.$

Доказательство. Действительно, сумма в левой части представляет собой аффинный функционал, тождественно равный единице. $\square$

Предложение 43. *Пусть V — множество вершин выпуклого многогранника. Тогда всякое открытое полупространство в $G[V]$, граничная гиперплоскость которого проходит через 0, содержит по крайней мере 2 точки из $\Gamma(V)$.*

Доказательство. Действительно, пусть H — некоторая гиперплоскость в $G[V]$, проходящая через 0, а H^+ и H^- — открытые полупространства, ограниченные гиперплоскостью H. Допустим сначала, что H^+ не содержит ни одной точки из $\Gamma(V)$. Но V — это когрань, а следовательно, по теореме 40, 0 содержится в относительной внутренности $\Gamma(V)$. Значит, $\Gamma(V)\subseteq H$. Однако так не бывает — очевидно, $\Gamma(V)$ порождает все пространство $G[V]$.

Предположим теперь, что H содержит ровно одну точку $\Gamma(v)$ из $\Gamma(V)$. Поскольку $V-\{v\}$ тоже является когранью, получаем

$\Gamma(V - \{v\}) \subseteq H$. Но это противоречит тому, что 0 содержится во внутренности выпуклой оболочки множества $\Gamma(V)$. $\square$

Следующая теорема характеризует системы точек в пространстве $G[V]$, являющиеся множествами Гейла некоторых многогранников.

Теорема 44. *Система точек $\bar{V} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$ в $\mathbb{R}^{m-n-1}$ является множеством Гейла некоторого выпуклого n-многогранника P тогда и только тогда, когда*

: *(1) $\sum \bar{v}_i = 0$,*

: *(2) всякое открытое полупространство H, граничная гиперплоскость которого проходит через 0, содержит по крайней мере 2 точки из $\bar{V}$.*

Нам нужно доказать, что если система точек $\bar{V}$ обладает указанными свойствами, то $\bar{V} = \Gamma(V)$, где V — множество всех вершин некоторого выпуклого n-мерного многогранника.

Рассмотрим векторное пространство A линейных соотношений на векторы $\bar{v}_i$. Другими словами, A состоит из последовательностей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ действительных чисел, таких что

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{v}_i = 0.$$

Пространство A претендует на роль пространства аффинных функционалов на V. Очевидно, $\dim A = n + 1$. Сначала построим множество V, а потом докажем, что это множество вершин некоторого выпуклого многогранника.

Нам понадобится следующая очень общая лемма. Если задуматься над ее утверждением, то станет понятно, что это утверждение очевидно.

Лемма 45. *Пусть S — произвольное конечное множество наборов из m действительных чисел. Тогда найдется такой набор точек $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^N$ и такое вложение $\iota : S \to \mathbb{R}^{N*}$, при котором значение функционала $\iota(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ на точке v_i равно α_i.*

Доказательство. Рассмотрим прямоугольную матрицу M, строками которой являются элементы множества S. Оределим число N как число столбцов матрицы M, а вектор $v_i \in \mathbb{R}^N$ определим как столбец с номером i. Осталось сопоставить строкам матрицы M линейные функционалы на столбцах. Определим линейный функционал, соответствующий строке матрицы M отображение, переводящее вектор-столбец в его элемент, находящийся в данной строке. $\square$

Лемма 46. *Существует такое m-элементное подмножество $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ пространства $\mathbb{R}^n$ и такое отождествление пространства A с пространством линейных функций на V, что для каждого $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in A$ имеем $\alpha_i = a(v_i)$.*

Доказательство. Пусть S — множество векторов пространства A, дополняющее вектор $(1, 1, \ldots, 1)$ до базиса. Как мы знаем, это множество состоит из n элементов. Построим набор точек $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ и вложение $\iota : S \to \mathbb{R}^{n*}$ как в лемме 45. Положим $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Элементы множества S соответствуют линейным функционалам на V, а элемент $(1, 1, \ldots, 1)$ соответствует линейной функции, тождественно равной единице. Поскольку пространство A является линейной оболочкой множества S и элемента $(1, 1, \ldots, 1)$, любой элемент пространства A отождествляется с некоторой линейной функцией на множестве V. $\square$

Рассмотрим векторное пространство $G[V]$ всех функций на множестве V по модулю линейных. Это пространство изоморфно $\mathbb{R}^{m-n-1}$. Точка $\bar{v} \in \bar{V}$ естественным образом отождествляется с функцией, равной 1 в точке $v \in V$ и 0 во всех остальных точках.

Следующая лемма заканчивает доказательство теоремы 44.

Лемма 47. *Множество V является множеством вершин некоторого выпуклого многогранника.*

Доказательство. Предположим противное: точка $v \in V$ лежит в выпуклой оболочке остальных точек множества V. Это означает, что не существует аффинного функционала, равного нулю в точке v и принимающего положительные значения во всех остальных точках. Отсюда следует, что 0 не содержится во внутренности конуса, натянутого на $\bar{V} - \{\bar{v}\}$. Значит, этот конус содержится в некотором замкнутом полупространстве, граничная гиперплоскость которого проходит через 0. А в дополонительном открытом полупространстве лежит точка $\bar{v}$, и только она. Противоречие с условием (2). $\square$

Опишем теперь множество Гейла для пирамиды.

Предложение 48. *Выпуклый многогранник P в пространстве $\mathbb{R}^n$ является пирамидой с вершиной v тогда и только тогда, когда $\Gamma(v) = 0$.*

Доказательство. Действительно, многогранник P является пирамидой с вершиной v если и только если v является когранью. Из теоремы 40 вытекает, что v является когранью тогда и только тогда, когда $\Gamma(v) = 0$ (относительной внутренностью точки v следует считать саму эту точку). $\square$

Элементы $\Gamma(v)$ во множестве Гейла могут совпадать при различных v. *Кратностью* вектора $\bar{v} \in \Gamma(V)$ назовем число элементов в $\Gamma^{-1}(\bar{v})$. Приведем примеры многограников, множества Гейла которых содержат кратные элементы.

Определим *r-гранную n-пирамиду* индукцией по r. 1-гранная n-пирамида — это n-мерный многогранник, являющийся пирамидой над некоторым $(n-1)$-мерным многогранником. r-гранная n-пирамида — это пирамида над $(r-1)$-гранной $(n-1)$-пирамидой.

Предложение 49. *Многогранник P является r-гранной пирамидой с вершиной v тогда и только тогда, когда $\Gamma(v)$ — 0 кратности r в $\Gamma(V)$ (V — множество всех вершин многогранника P).*

Доказательство. Проложим $v_1 = v$. Допустим, $r > 1$. Рассмотрим многогранник Q, такой что P является пирамидой над Q. Сам многогранник Q является $(r-1)$-гранной пирамидой. Обозначим через v_2 вершину этой пирамиды. Действуя подобным образом, получим последовательность вершин $v_1, \dots, v_r$. Нетрудно проверить, что $\Gamma(v_1) = \dots = \Gamma(v_r) = 0$ (в частности, для всякого $1 \le i \le r$ многогранник P является пирамидой с вершиной в v_i). Для всех остальных вершин v имеем $\Gamma(v) \ne 0$. $\square$

8.2. **Диаграммы Гейла.** Пусть A — выпуклое множество. Обозначим через $\mathrm{relint}(A)$ относительную внутренность множества A.

Два множества $\bar{V}$ и $\bar{W}$ в пространстве $\mathbb{R}^{m-n-1}$ называются *эквивалентными*, если существует такое взаимно однозначное соответствие $\phi : \bar{V} \to \bar{W}$, что

$$(\forall \bar{U} \subseteq \bar{V}) \qquad 0 \in \mathrm{relint}(\bar{U}) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \mathrm{relint}(\phi(\bar{U})).$$

Нужно считать, что элементы множеств $\bar{V}$ и $\bar{W}$ имеют кратности, а отображение ϕ эти кратности сохраняет.

Теорема 50. *Выпуклые многогранники комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда их множества Гейла эквивалентны.*

Это вытекает из теоремы 40.

Множество Гейла выпуклого многогранника P можно нормировать: каждый ненулевой вектор заменим параллельным ему единичным вектором (если вектор был нулевым, то он таковым и останется). Полученное множество будет, очевидно, эквивалентно исходному. Оно называется *диаграммой Гейла* многогранника P. Диаграмма Гейла лежит в объединении единичной сферы и начала координат. Если многогранник P имеет m вершин, то размерность сферы равна $m - n - 2$, где n — размерность многогранника P. Элементы диаграммы Гейла, вообще говоря, имеют кратности.

В качестве примера применения диаграмм Гейла перечислим комбинаторные типы n-мерных многогранников с $m = n + 2$ вершинами. В этом случае $m - n - 1 = 1$, и диаграммы Гейла состоят из 3 точек -1, 0 и 1. Обозначим через m_{-1}, m_0 и m_1 соответственно кратности этих точек. Из теоремы 44 вытекает, что $m_1 \geq 2$, $m_{-1} \geq 2$.

Поскольку не бывает одномерных многогранников с тремя вершинами, мы будем считать, что $n \geq 2$.

В 41 мы уже установили некоторый критерий симплициальности многогранника в терминах диаграммы Гейла. Докажем еще следующий критерий:

Предложение 51. *Многогранник P с множеством вершин V является симплициальным тогда и только тогда, когда для каждой гиперплоскости H в $G[V]$, содержащей 0, точка 0 не лежит в относительной внутренности выпуклой оболочки множества $H \cap \Gamma(V)$.*

Доказательство. Если многогранник P с m вершинами не является симплициальным, то он имеет кограннь, состоящую не более чем из $m - n - 2$ точек. Поскольку $\dim G[V] = m - n - 1$, эти точки лежат в некоторой гиперплоскости H. Согласно теореме 40, 0 лежит в относительной внутренности выпуклой оболочки этих точек, а значит, в относительной внутенности множества $\operatorname{conv}(H \cap \Gamma(V))$.

Обратно, пусть 0 лежит в относительной внутренности множества $\operatorname{conv}(H \cap \Gamma(V))$. Тогда, по теореме Каратеодори, 0 лежит во внутренности некоторого симплекса, вершины которого принадлежат $H \cap \Gamma(V)$. Следовательно, эти вершины образуют кограннь. Но их не больше чем $m - n - 2$. Стало быть, многогранник не симплициальный. $\square$

Следствие 52. *Многогранник с $n + 2$ вершинами является симплициальным тогда и только тогда, когда $m_0 = 0$.*

В частности, всякий несимплициальный n-многогранник с $n + 2$ вершинами является пирамидой.

Опишем некоторый класс симплициальных n-многогранников с $n + 2$ вершинами. Нам удобнее будет работать в двойственных терминах и говорить про простые n-многогранники с $n + 2$ гипергранями.

Задача 17. Рассмотрим произведение $S_k \times S_{n-k}$ двух симплексов размерностей k и $n - k$ соответственно. Докажите, что $S_k \times S_{n-k}$

— простой многогранник с $n+2$ гипергранями. Произведения двух симплексов комбинаторно эквивалетны тогда и только тогда, когда они отличаются только, быть может, порядком сомножителей. Это можно установить из сравнения f-векторов.

Задача 18. Пусть S — симплекс размерности n, а H — гиперплоскость. Предположим, что k вершин многогранника S лежат по одну сторону от гиперплоскости H, а остальные вершины — по другую сторону. Докажите, что гиперплоскость H разбивает симплекс S на многогранники, комбинаторно эквивалентные $S_k \times S_{n-k}$ и $S_{k-1} \times S_{n+1-k}$.

Задача 19. Докажите, что многогранник $S_k \times S_{n-k}$, где $k = [n/2]$, комбинаторно эквивалентен многограннику $C(n, n+2)^*$ ($C(n, n+2)$ — это n-мерный циклический многогранник с $n+2$ вершинами, а звездочка означает двойственный многогранник).

Задача 20. Пусть Δ — простой многогранник размерности $n+1$. Рассмотрим линейную функцию l на многограннике Δ, такую, что значения функции l в различных вершинах многогранника Δ различны. Допустим, что c — *критическое значение* функции l, то есть значение в некоторой вершине многогранника Δ. Многогранник $l^{-1}(c) \cap \Delta$ имеет не более одной непростой вершины (то есть вершины, в которой сходится более n гиперграней) Найдите линк многогранника $l^{-1}(c) \cap \Delta$ в непростой вершине. *Ответ*: этот линк комбинаторно эквивалентен $S_{k-1} \times S_{n-k}$, где k — индекс вершины многогранника Δ, значение в которой равно c.

Итак, построена серия из $[n/2]$ симплициальных многогранников с $n+2$ вершинами — это многогранники вида $(S_k \times S_{n-k})^*$. Однако легко проверить, что всего имеется $[n/2]$ диаграмм Гейла с $m_0 = 0$ (рассматриваемых с точностью до изоморфизма). Следовательно, всякий симплициальный n-многогранник с $n+2$ вершинами комбинаторно эквивалентен многограннику вида $(S_k \times S_{n-k})^*$.

Теперь нетрудно, используя этот факт, перечислить все комбинаторные типы n-многогранников с $n+2$ вершинами:

Теорема 53. *Существует ровно $[n^2/2]$ попарно комбинаторно неэквивалентных выпуклых n-мерных многогранников с $n+2$ вершинами. Из них $[n/2]$ симплициальных многогранников вида $(S_k \times S_{n-k})^*$. Остальные комбинаторно эквивалентны r-гранным пирамидам над $(S_k \times S_{n-k-r})^*$.*

8.3. **Многогранники с $n+3$ вершинами.** Диаграмма Гейла выпуклого n-многогранника с $n+3$ вершинами лежит в объединении единичной окружности и начала координат на плоскости. Она разбивается на несколько диаметров. Диаметры можно произвольным образом поворачивать, сохраняя их порядок. Кроме того, если два соседних диаметра имеют ненулевую кратность только на одном конце, причем концы с ненулевыми кратностями соседние, то эти диаметры можно совместить.

Приведем диаграмму Гейла к *стандартному виду*. Именно, совместим все диаметры, которые можно совместить. После этого расположим диаметры таким образом, чтобы их вершины были вершинами правильного многоугольника. Получим *стандартную диаграмму Гейла*. Две стандартные диаграммы эквивалентны тогда и только тогда, когда одна получается из другой поворотом или отражением (то есть действием группы диэдра).

Число стантартных диаграмм Гейла с точностью до эквивалентности можно посчитать при помощи стандартной комбинатрной техники (по формуле Бернсайда).

Задача 21. Докажите, что многогранник является симплициальным тогда и только тогда, когда в стандартной диаграмме Гейла точка 0 имеет нулевую кратность и на каждом диаметре ненулевую кратность имеет только один конец.

Задача 22. Сформулируйте условие смежностности многогранника в терминах диаграмм Гейла. Посчитайте число симплициальных смежностных $(2k+1)$-многогранников с $2k+4$ вершинами.

Задача 23. Докажите при помощи диаграмм Гейла, что всякий n-многогранник с не более чем $n+3$ вершинами комбинаторно эквивалентен некоторому целочисленному многограннику (многограннику, все вершины которого принадлежат целочисленной решетке).

Задача 24. Посчитайте число комбинаторных типов симплициальных n-многогранников с $n+3$ вершинами. *Ответ*: это число равно

$$2^{[n/2]} - \left[\frac{n+4}{2}\right] + \frac{1}{4(n+3)} \sum_{h} \varphi(h) 2^{(n+3)/h}.$$

Суммирование ведется по всем нечетным делителям числа $n+3$, а φ — функция Эйлера.

Задача 25. Посчитайте число комбинаторных типов произвольных выпуклых n-многогранников с $n+3$ вершинами.

8.4. **Многогранники, которые нельзя шевелить.**

9. Объемы выпуклых многограников

Пусть P — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$. Если в $\mathbb{R}^n$ фиксирована форма объема, то имеет смысл говорить об объеме многогранника P. Поскольку разные формы объема (инвариантные относительно параллельных переносов) отличаются только постоянным коэффициентом, отношение объемов двух многогранников определено корректно и ни от чего не зависит (кроме как от структуры аффинного пространства в $\mathbb{R}^n$). Таким образом, за единицу объема можно выбрать любой многогранник с непустой внутренностью. Мы будем считать, что единица объема зафиксирована раз и навсегда. Объемы бывают не только у выпуклых многогранников, но и у любых выпуклых ограниченных множеств.

9.1. **Сумма по Минковскому.** Напомним, что выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ можно складывать и умножать на действительные числа. *Сумма (по Минковскому)* двух подмножеств A, $B \subset \mathbb{R}^n$ определяется как множество

$$A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}.$$

Произведение λA множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и действительного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ определяется как множество

$$\lambda A = \{\lambda a \,|\, a \in A\}.$$

Очевидно, определенные операции не выводят из класса всех выпуклых множеств: сумма двух выпуклых множеств выпукла, и произведение выпуклого множества с любым действительным числом тоже выпукло. Непосредственно из определения вытекает, что множество $A + B$ является объединением множеств вида $a + B$, где a пробегает все точки множества A. Каждое из этих множеств отличается от множества B лишь параллельным переносом.

Задача 26. Пусть Δ — правильный треугольник. Нарисуйте множество $\Delta + (-\Delta) = 0$.

Операция суммирования по Минковскому играет выжную роль в различных разделах математики. В качестве “случайного” примера рассмотрим такой: распространение света в однородной, но неизотропной среде. Пусть источник света помещен в начало координат, а A_t — световое пятно, образованное за время t, то есть множество тех точек, в которые свет успел добраться за время t. Если среда однородна (то есть ее свойства не меняются при параллельном переносе), то источник, помещенный в точку $x \in \mathbb{R}^n$, осветит за время t множество $x + A_t$. Согласно принципу Гюйгенса, множество A_{t+s}

может быть получено следующим образом. В каждой точке множества A_t помещается воображаемый “вторичный источник света”. Множество A_{t+s} есть объединение световых пятен за время s, полученных от всех вторичных источников. Вспоминая определение суммы по Минковскому, получаем, что

$$A_{t+s} = A_t + A_s.$$

Обсудим некоторые свойства операции суммирования по Минковскому. Сумма множеств не зависит ни от порядка слагаемых, то есть $A+B = B+A$, ни от того, в какой последовательности производится суммирование, то есть $A + (B + C) = (A + B) + C$. Это вытекает из аналогичных свойств операции сложения точек. Кроме того, если, несколько злоупотребляя обозначениями, обозначить через 0 множество, состоящее только из начала координат (то есть из точки, все координаты которой нулевые), то $A + 0 = 0 + A$ для любого множества A в $\mathbb{R}^n$. Выполняются обычные распределительные законы

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

Задача 27. Пусть A — подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что $2A \subseteq A + A$. Приведите пример, когда включение строгое.

Задача 28. Если множество A выпукло, то $A + A = 2A$.

Задача 29. Пусть A — отрезок в $\mathbb{R}$, а B — множество его концов. Докажите, что $A + B = A + A = 2A$.

Задача 30. Пусть A — треугольник в $\mathbb{R}^2$, а B — множество его вершин. Докажите, что $2A + B = 2A + A = 3A$.

Задача 31. Пусть A — выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^2$, а B — множество его вершин. Докажите, что $2A + B = 2A + A = 3A$. *Указание:* всякий выпуклый многоугольник можно разбить на треугольники.

Задача 32. Пусть A — симплекс в $\mathbb{R}^n$ (то есть выпуклая оболочка множества из $n + 1$ точек, не связанных никакими аффинными соотношениями), а B — множество его вершин. Докажите, что $nA + B = nA + A = (n + 1)A$.

Мы видим, что, вообще говоря, сумма множеств не удовлетворяет свойству сокращения, то есть из $A + C = B + C$ не следует $A = B$. Однако верно следующее.

Предложение 54. *Предположим, что A и B — произвольные компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. Если $A+C = B+C$ для некоторого компактного множества C, то выпуклые оболочки множеств A и B совпадают.*

Доказательство. Определим функцию $H_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$H_A(x) = \max_{y \in A} \langle x, y \rangle,$$

где $\langle x, y \rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение векторов x и y. Функция H_A называется *опорной функцией* множества A. Нетрудно проверить, что выпуклая оболочка множества A совпадает с множеством всех $y \in \mathbb{R}^n$, таких что $\langle x, y \rangle \leq H_A(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ (докажите это свойство, исходя из определения выпуклой оболочки как минимального выпуклого множества, содержащего A). Отсюда, в частности, следует, что если опорные функции двух множеств равны, то совпадают и выпуклые оболочки этих множеств. Кроме того, пользуясь простейшими свойствами максимума, нетрудно показать, что $H_{A+C} = H_A + H_C$. Точно так же, $H_{B+C} = H_B + H_C$. Отсюда получаем, что $H_A = H_B$, следовательно, выпуклые оболочки множеств A и B совпадают. $\square$

В теории представлений и алгебраической геометрии очень полезна следующая конструкция. Пусть E — некоторое множество, элементы которого можно складывать, причем сложение коммутативно, ассоциативно, и обладает нейтральным элементом, а вот вычитание не определено. Такие множества называются коммутативными полугруппами. Например, множество всех выпуклых компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ со сложением по Минковскому образует коммутативную полугруппу. Множество всех (скажем, конечных) подмножеств решетки $\mathbb{Z}^n$ со сложением по Минковскому тоже образует коммутативную полугруппу. Все ненулевые многочлены от n переменных образуют коммутативную полугруппу по умножению. Мы хотим превратить полугруппу E в группу, то есть сделать так, чтобы там было определено вычитание. Можно рассмотреть множество формальных разностей $a-b$, $a, b \in E$. Здесь $a-b$ означает не результат какой-либо операции, проделанной над элементами a и b, а просто некоторый абстрактный объект, сопоставляемый каждой паре (a, b). На множестве формальных разностей можно определить вычитание: а именно, $a - b$ минус $c - d$ равно $(a + d) - (b + c)$, то есть формальной разности элементов $a+d$ и $b+c$ полугруппы E. Однако, некоторые формальные разности следует считать совпадающими, чтобы выполнялись обычные групповые законы, а именно $a - b$ равно $c - d$, если $a + d = b + c$. В частности, все формальные разности вида $a - a$ отождествляются с $0 - 0$, где 0 — нейтральный элемент полугруппы E. Полученное множество формальных разностей (с указанным отождествлением) называется *группой Гротендика* полугруппы E. Сама полугруппа отображается в свою группу Гротендика: элемент a переходит в формальную разность $a - 0$. Заметим, однако, что это отображение не всегда инъективно. Оно является инъективным, если сложение в полугруппе удовлетворяет условию сокращения: из $a + c = b + c$ вытекает, что $a = b$.

Поскольку сложение выпуклых компактных множеств по Минковскому удовлетворяет условию сокращения, выпуклые компактные множества вкладываются в свою группу Гротендика. Точно, также полугруппа всех выпуклых многогранников вкладывается в свою группу Гротендика. Элементы группы Гротендика выпуклых многогранников называются *виртуальными выпуклыми многогранниками.* Оказывается, что виртуальные многогранники образуют не только группу по сложению, но даже и векторное пространство. А именно, вспомним, что выпуклые многогранники можно умножать на неотрицательные числа (про умножение на отрицательные числа мы вспоминать не будем, поскольку многогранник $(-1) \cdot A$ не имеет никакого отношения к виртуальному многограннику $0 - A$). Теперь определим произведение виртуального многогранника $A - B$ и действительного числа λ по формуле

$$\lambda \cdot (A - B) = \begin{cases} \lambda A - \lambda B, & \lambda \geq 0, \\ |\lambda| B - |\lambda| A, & \lambda < 0 \end{cases}$$

Задача 33. Проверьте, что определенные выше операции над виртуальными выпуклыми многогранниками действительно задают на аддитивной группе виртуальных многогранников структуру векторного пространства.

Конечно, можно рассматривать виртуальные выпуклые множества, а не только виртуальные выпуклые многогранники.

9.2. **Многочлен объема.** Следующая теорема описывает важное свойство объема как функии на выпуклых компактных подмножествах в $\mathbb{R}^n$:

Теорема 55. *Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — выпуклые компактные подмножества в $\mathbb{R}^n$. Тогда объем*

$$\mathrm{Vol}(\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_k A_k)$$

является однородным многочленом степени n многочленом от коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, если все эти коэффициенты положительны.

Эту теорему можно переформулировать более научно: функция объема на компактных выпуклых множествах является ограничением некоторого однородного многочлена степени n, определенного на векторном пространстве всех виртуальных компактных выпуклых множеств.

Прежде чем доказывать теорему 55, разберем несколько элементарных примеров. Например, посчитаем площадь ε-окрестности Δ_ε некоторого треугольника Δ. Для этого заметим, что фигура Δ_ε естественным образом разбивается на три части. Первая часть состоит из самого треугольника Δ. Площадь первой части равна $S(\Delta)$. Вторая часть состоит из прямоугольников, основания которых лежат на сторонах треугольника Δ. Так как длины боковых сторон всех этих прямоугольников равны ε, площадь второй части равна $\varepsilon l(\Delta)$ (где $l(\Delta)$ — периметр треугольника Δ). Наконец, третья часть состоит из секторов круга радиуса ε. Центр каждого сектора совпадает с одной из вершин треугольника. Нетрудно видеть, что если перенести параллельно все эти секторы таким образом, чтобы их центры совпали, то мы получим целый круг. Следовательно, площадь третьей части равна $\pi\varepsilon^2$. В результате получаем следующее разложение:

$$S(\Delta_\varepsilon) = S(\Delta) + \varepsilon l(\Delta) + \varepsilon^2\pi.$$

Это *разложение Штейнера–Минковского* для треугольника.

Заметим, что площадь ε-окрестности треугольника представляет собой многочлен второй степени от ε. Кроме того, наши рассуждения с тем же успехом применимы к произвольному выпуклому многоугольнику. Поэтому площадь ε-окрестности выпуклого многоугольника тоже является многочленом второй степени от ε, причем все коэффициенты этого многочлена имеют простой геометрический смысл. Свободный член равен площади исходного многоугольника, коэффициент при ε равен периметру, а коэффициент при ε^2 равен π (площади единичного круга).

Далее, путем предельного перехода, формулу для ε-окрестности можно распространить на произвольные выпуклые фигуры. Дело в том, что если мы будем приближать выпуклую фигуру на плоскости выпуклыми многоугольниками, то площади многоугольников и их периметры будут стремиться к площади и, соответственно, длине границы выпуклой фигуры.

Выпишем теперь разложение Штейнера–Минковского для тетраэдра. Обозначим тетраэдр через Δ, а его ε-окрестность — через Δ_ε. Выпуклое тело Δ_ε естественным образом разбивается на четыре части. Первая часть — сам тетраэдр (его объем равен $\mathrm{Vol}(\Delta)$).

Вторая часть состоит из цилиндров высоты ε над гранями тетраэдра. Объем этой части равен $\varepsilon S(\partial\Delta)$. Третья часть соответствует ребрам тетраэдра. К каждому ребру примыкает фигура, представляющая собой прямое произведение ребра на некоторый сектор круга радиуса ε. Обозначим через l длину ребра, а через α — угол соответствующего сектора. Угол α образован перпендикулярами к граням, содержащим рассматриваемое ребро. Объем третьей части равен $\sum l\alpha\varepsilon^2/2$, где суммирование ведется по всем ребрам тетраэдра. Наконец, четвертая часть состоит из секторов шара, примыкающих к вершинам. Если сложить вместе все эти секторы, получится целый шар (это уже не столь очевидно, как в двумерном случае, но все же можно усмотреть из рисунка). Таким образом, получаем разложение Штейнера–Минковского для тетраэдра:

$$\mathrm{Vol}(\Delta_\varepsilon) = \mathrm{Vol}(\Delta) + \varepsilon S(\partial\Delta) + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum l\alpha + \varepsilon^3\frac{4}{3}\pi.$$

Мы видим, что объем ε-окрестности тетраэдра является многочленом третьей степени от ε. Точно также выглядит формула для объема ε-окрестности произвольного выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим теперь трехмерное выпуклое тело, не являющееся многогранником. Будем приближать это тело выпуклыми многогранниками. Посмотрим, во что переходит разложение Штейнера–Минковского. Свободный член, очевидно, стремится к объему выпуклого тела. Коэффициент при ε стремится к площади поверхности, а старший член вообще не зависит от выпуклого тела и равен объему шара радиуса ε.

9.3. **Пространства аналогичных многогранников.** Пространство виртуальных компактных выпуклых множеств допускает естественные конечномерные приближения. Мы сейчас определим некоторый естественный класс конечномерных подпространств пространства виртуальных многогранников при помощи понятия аналогичных многогранников. Как мы докажем, любое конечное число компактных выпуклых множеств можно с любой заранее заданной точностью приблизить аналогичными выпуклыми многогранниками.

Начнем с одномерного и двумерного случая. По определению, любые два отрезка *аналогичны*, и никакой отрезок не аналогичен никакому многограннику большей размерности (вообще, два многогранника могут быть аналогичными только если их размерности совпадают). Многоугольники A и B в $\mathbb{R}^2$ с непустой внутренностью называются аналогичными, если между их сторонами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие стороны имеют одинаковые направления внешних нормалей (и, в частности, параллельны). При этом под *внешней нормалью* к ребру E многоугольника A с непустой внутренностью мы понимаем такой линейный функционал $\xi \in \mathbb{R}^{2*}$, что его ограничение на многоугольник A достигает максимального значения во всех точках ребра E, и больше нигде.

Аналогично определяется внешняя нормаль к грани Γ многогранника $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Это такой линейный функционал $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$, ограничение которого на Δ принимает максимальное значение на всех точках гиперграни Γ, и ни в каких других точках.

Рассмотрим многомерный случай. Дадим по индукции определение аналогичных многогранников. Два многогранника называются *аналогичными*, если между их гипергранями можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие грани имеют одинаковые направления внешних нормалей и аналогичны. Имеет смысл говорить об аналогичности многогранников, лежащих в параллельных гиперплоскостях, поскольку их можно всегда перенести в одну гиперплоскость.

Фиксируем некоторый многогранник $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — фиксированные внешние нормали его гиперграней. Всякий многогранник A, аналогичный многограннику Δ, однозначно определяется набором своих опорных чисел

$$H_i(A) = H_A(\xi_i) = \sup_{a \in A} \langle \xi_i, a \rangle.$$

Заметим, что внешние нормали определены не совсем однозначно. Их можно умножвть на положительные действительные числа. В зависимости от контекста, можно поразному фиксировать внешние нормали. Предположим, например, что в $\mathbb{R}^n$ зафиксирована евклидова структура. Тогда можно отождествить двойственное пространство $\mathbb{R}^{n*}$ с $\mathbb{R}^n$ и думать про внешние нормали как про векторы. В этом случае естественно выбирать внешние нормали так, чтобы они имели единичную длину. Еще одна типичная ситуация состоит в том, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ нет фиксированной евклидовой структуры, но есть фиксированная решетка $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ полного ранга (то есть дискретная коммутативная подгруппа, такая, что соответствующая факторгруппа компактна). В этом случае естественно рассматривать только такие многогранники, вершины которых принадлежат решетке $\mathbb{Z}^n$ (такие многогранники называются *целочисленными многогранниками*). В двойственном пространстве $\mathbb{R}^{n*}$ определена двойственная решетка

$$\mathbb{Z}^{n*} = \{\alpha \in \mathbb{R}^{n*} \mid \langle \alpha, z\rangle \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Мы тогда можем выбрать внешние нормали как *примитивные элементы* двойственной решетки, то есть такие ковекторы $\alpha \in \mathbb{Z}^{n*}$, которые нельзя представить в виде произведения $m\beta$, где $\beta \in \mathbb{Z}^{n*}$, а $m > 1$ — целое число.

Множество всех выпуклых многогранников, аналогичных Δ, является полугруппой относительно сложения по Минковскому. Группа Гротендика этой полугруппы представляет собой конечномерное подпространство пространства виртуальных выпуклых тел. Это подпространство называется *пространством аналогичных многогранников* (более точно, *пространством виртуальных многогранников, аналогичных многограннику* Δ). Координатами в пространстве аналогичных многогранников могут служить опорные числа, которые, как нетрудно видеть, являются линейными функциями на пространстве аналогичных многогранников, то есть если многогранники A и B аналогичны многограннику Δ, то

$$H_i(A+B) = H_i(A) + H_i(B), \quad H_i(\lambda \cdot A) = \lambda H_i(A).$$

Если λ в последней формуле отрицательно, то умножение нужно понимать в смысле виртуальных многогранников, и ни в коем случае не как обычное умножение многогранника A на отрицательное число (такой многогранник λA вообще, как правило, не будет аналогичен многограннику Δ).

9.4. **Аппроксимация.** Мы сейчас докажем некоторые теоремы о приближении компактных выпуклых тел аналогичными выпуклыми многогранниками.

Теорема 56. *Пусть A и B — два n-многогранника в $\mathbb{R}^n$. Если λ, λ' и μ, μ' — положительные действительные числа, то многогранники $\lambda A + \mu B$ и $\lambda' A + \mu' B$ аналогичны.*

Чтобы говорить о приближении компактных выпуклых множеств, нужно ввести метрику на этих множествах. Пусть A и B — непустые компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\bar\rho(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 |\ A_\varepsilon \supseteq B\}.$$

Расстоянием по Хаусдорфу между непустыми компактными множествами A и B называется число

$$\rho(A,B) = \max\{\bar\rho(A,B), \bar\rho(B,A)\}.$$

Предложение 57. *Расстояние по Хаусдорфу определяет метрику на множестве всех непустых замкнутых подмножеств пространства* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Симметричность очевидна. Если $\rho(A,B)=0$, то $A_\varepsilon \supseteq B$ для всякого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $B \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = A$. Аналогично, $A \subseteq B$. Значит, $A = B$.

Осталось доказать транзитивность. Пусть A, B и C — выпуклые множества. Пусть $\varepsilon = \bar\rho(A,B) \le \rho(A,B)$, $\delta = \bar\rho(B,C) \le \rho(B,C)$. Тогда $A_\varepsilon \supseteq B$, $B_\delta \supseteq C$. Следовательно, $A_{\varepsilon+\delta} \supseteq C$. Аналогично, $C_{\varepsilon+\delta} \supseteq A$, откуда

$$\rho(A,C) \le \varepsilon + \delta \le \rho(A,B) + \rho(B,C).$$

□

Множество всех компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ некомпактно в метрике Хаусдорфа. Дело в том, что последовательности компактных множеств могут уходить на бесконечность. Если им это запретить, то получим компактное множество.

Предложение 58. *Множество всех непустых компактных подмножеств единичного куба компактно в метрике Хаусдорфа.*

Доказательство. Воспользуемся следующим критерием компактности: метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограниченно (то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечная ε-сеть).

Докажем полноту. Обозначим через C единичный куб. Пусть A_k — последовательность замкнутых подмножеств куба, фундаментальная в метрике Хаусдорфа. Положим

$$B_k = \overline{\bigcup_{m\ge k} A_k}.$$

Мы получили, как нетрудно видеть, убывающую последовательность компактных подмножеств куба. Следовательно, пересечение $A = \bigcap B_k$ непусто и замкнуто, то есть лежит в рассматриваемом пространстве. Докажем, что $A = \lim A_k$.

По определению, имеем:

$$\bar\rho(A_k, A) \le \bar\rho(A_k, B_k) = \rho(A_k, B_k) = \sup_{m>k} \rho(A_k, A_m) \to 0 \quad (k\to\infty) \tag*{(),}$$

кроме того

$$\bar\rho(A, A_k) \le \bar\rho(A, B_k) = \rho(A, B_k) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

а значит, $\rho(A_k, A) \to 0$. Таким образом, $A_k \to A$, что и требовалось доказать.

Предельный переход $\rho(A, B_k) \to 0$ нуждается в обосновании. Последовательность $\rho(A, B_k)$ невозрастает. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для всех k выполнено неравенство $\rho(A, B_k) > \varepsilon$. Это означает, что всякое множество $D_k = \overline{C - A_\varepsilon} \cap B_k$ непусто. Множества D_k компактны и образуют убывающую последовательность. Следовательно, пересечение $\bigcap D_k$ непусто. Но

$$\bigcap D_k = \overline{C - A_\varepsilon} \cap A = \emptyset.$$

Мы пришли к противоречию, которое доказывает, что $\rho(A, B_k) \to 0$.

Докажем теперь вполне ограниченность. Разобьем куб C на k^n равных кубиков со стороной $1/k$. Нетрудно проверить, что всевозможные объединения кубиков составляют ε-сеть при $\varepsilon > \sqrt{n}/k$. Таким образом для каждого $\varepsilon > 0$ можно построить конечную ε-сеть. $\square$

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему о приближении выпуклых компактных множеств выпуклыми многогранниками.

Теорема 59. *Любое конечное число компактных выпуклых множеств можно одновременно приблизить в метрике Хаусдорфа (с произвольной заранее заданной точностью) аналогичными выпуклыми многогранниками.*

Мы воспользуемся без доказательства тем фактом, что любое компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ можно сколь угодно точно приблизить многогранником с непустой внутренностью. Для доказательства теоремы 59 нам осталось только проверить следующее утверждение.

Теорема 60. *Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — произвольные выпуклые многогранники в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся аналогичные многогранники $B_1, \ldots, B_k$, такие, что $\rho(A_i, B_i) < \varepsilon$ для всякого $i = 1, \ldots, k$.*

Доказательство. Достаточно положить

$$B_i = A_i + \alpha(A_1 + \cdots + A_k),$$

где α — достаточно маленькое число. Согласно теореме 56, все эти многогранники аналогичны. $\square$

Теперь мы можем доказать теорему 55.

Доказательство теоремы 55. Согласно теореме 59, достаточно считать, что $A_1, \ldots, A_k$ — выпуклые многогранники, аналогичные одному и тому же многограннику Δ.

Во-первых, заметим, что аналогичные многогранники $A_1, \ldots,$ A_k можно приблизить простыми аналогичными многогранниками. Для этого нужно сделать следующее. Пусть F_1 — грань многогранника A_1, в которой сходятся более чем $n - \dim F_1$ гиперграней. Тогда есть параллельные грани $F_2, \ldots, F_k$ многогранников $A_2, \ldots, A_k$ с таким же свойством. Проведем гиперплоскость Π_1, такую, что параллельный перенос гиперплоскости Π на очень малый вектор содержит грань F_1, причем сама гиперплоскость Π_2 пересекает многогранник A_1. Таким образом, гиперплоскость Π_1 отрезает грань F_1 от многогранника A_1. Аналогичным образом отрежем грани $F_2,$ $\ldots, F_k$ от многогранников $A_2, \ldots, A_k$ гиперплоскостями, параллельными гиперплоскости Π_1. Поскольку от многогранников были отрезаны только очень маленькие (точнее, тоненькие) кусочки, новые многогранники приближают старые в метрике Хаусдорфа. Отрезая последовательно грани размерности k, лежащие более чем в $n - k$ гиперплоскостях, мы рано или поздно получим простой многогранник. Поскольку мы делаем аналогичные операции над всеми многогранниками $A_1, \ldots, A_k$ одновременно, так что они остаются все время аналогичными, все эти многогранники станут простыми одновременно.

Теперь мы будем предполагать, что все многогранники $A_1, \ldots,$ A_k простые и аналогичные друг другу. Значит, они принадлежат одному и тому же пространству аналогичных многогранников. В пространстве аналогичных многогранников, мы ввели линейную систему координат, в которой координатными функциями являются опорные числа. Другими словами, про опорное число $H_i(A_j)$ можно думать как про i-ую координату элемента A_j.

Будем считать, что в $\mathbb{R}^n$ фиксирована евклидова метрика, и что внешние нормали (которые нужно было зафиксировать для определения опорных чисел) имеют единичную длину. Пусть Δ — некоторый многогранник, аналогичный многогранникам $A_1, \ldots, A_k$. Мы можем разместить многогранник Δ таким образом, чтобы начало координат лежало внутри многогранника Δ. Многогранник Δ является объединением призм, основаниями которых служат гиперграни многогранника Δ. Как известно, объем призмы равен произведению объема основания на высоту с коэффициентом $1/n$ (который получается из вычисления интеграла $\int_0^1 t^{n-1}dt$). Таким образом, если призма построена на гиперграни Γ_i многогранника Δ, то ее объем равен

$$\frac{1}{n}H_i(\Delta)\mathrm{Vol}_{n-1}(\Gamma_i),$$

где через $\mathrm{Vol}_{n-1}(\Gamma_i)$ обозначен $(n-1)$-мерный объем гиперграни Γ_i. Таким образом, объем всего многогранника Δ выражается формулой

$$\mathrm{Vol}(\Delta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} H_i(\Delta)\mathrm{Vol}_{n-1}(\Gamma_i).$$

Пусть теперь A — произвольный многогранник, аналогичный многограннику Δ. Обозначим через $\Gamma_i(A)$ гипергрань многогранника A, имеющую то же самое направление внешней нормали, что и гипергрань Γ_i многогранника Δ. Получаем

$$\mathrm{Vol}(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} H_i(A)\mathrm{Vol}_{n-1}(\Gamma_i(A)).$$

Подставим теперь $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_k A_k$ вместо A. Заметим, что в правой части величина $H_i(A)$ является линейной функцией от коэффициентов λ_j. Величина $\mathrm{Vol}_{n-1}(\Gamma_i(A))$ является однородным многочленом степени $n-1$ от коэффициентов λ_j по предположению индукции (если мы договоримся вести индукцию по размерности многогранника; для $n = 1$ утверждение теоремы очевидно). В самом деле, имеем

$$\Gamma_i(A) = \lambda_1\Gamma_i(A_1) + \cdots + \lambda_k\Gamma_i(A_k),$$

а многогранники $\Gamma_i(A_1), \ldots, \Gamma_i(A_k)$ являются аналогичными многогранниками размерности $n-1$ по определению. □

9.5. **Опорные функции, функционалы Минковского и отображения Гаусса.** Пусть A — произвольное выпуклое тело (то есть компактное выпуклое множество с непустой внутренностью) в пространстве $\mathbb{R}^n$. Напомним, что опорная функция H_A тела A — это функция на сопряженном пространстве $\mathbb{R}^{n*}$, определенная следующим образом:

$$H_A(\xi) = \max_{a\in A}\langle \xi, a\rangle.$$

Если отождествить пространство $\mathbb{R}^n$ и его сопряженное $\mathbb{R}^{n*}$ при помощи некоторой евклидовой метрики, то значение опорной функции H_A на единичном векторе ξ будет равно расстоянию от начала координат до опорной гиперплоскости к телу A, перпендикулярной ξ. Это расстояние следует брать со знаком плюс, если начало координат лежит с той же стороны от опорной гиперплоскости, что и тело A. В противном случае, это расстояние нужно брать со знаком минус. В частности, если начало координат лежит внутри тела A, то опорная функция H_A положительна.

Нетрудно проверить, что опорная функция удовлетворяет следующим соотношениям:

- Опорная функция выпукла и положительно однородна степени 1:

$$H_A(\xi+\eta) \leq H_A(\xi) + H_A(\eta), \quad H_A(\alpha\xi) = \alpha H_A(\xi) \quad \alpha \geq 0.$$

- Опорная функция выпуклого тела A линейно зависит от A:

$$H_{A+B} = H_A + H_B, \quad H_{\alpha A} = \alpha H_A \quad \alpha \geq 0.$$

Следующее утверждение мы раньше оставили в качестве упражнения, а теперь приведем полное доказательство:

Теорема 61. *Выпуклое тело однозначно определяется своей опорной функцией. Другими словами, если $H_A = H_B$, то $A = B$.*

Доказательство. Тело A можно восстановить по опорной функции H_A следующим образом:

$$A = \{a \in \mathbb{R}^n | \ (\forall \xi \in \mathbb{R}^{n*}) \ H_A(\xi) \geq \langle \xi, a\rangle\}.$$

Включение $\subseteq$ очевидно. Предположим теперь, что нашлась точка a, удовлетворяющая условию $H_A(\xi) \geq \langle \xi, a\rangle$ для всякого ковектора ξ и не принадлежащая A. Тогда, согласно теореме об отредимости, точку a можно отделить от тела A некоторой аффинной гиперплоскостью. Пусть эта гиперплоскость задается уравнением $\xi = c$, где ξ — некоторый линейный функционал. Тогда $\langle \xi, a\rangle > c$, а $\langle \xi, A\rangle \leq c$, то есть $H_A(\xi) \leq c$. Противоречие с тем, что $H_A(\xi) \geq \langle \xi, a\rangle$. Тем самым доказано включение $\supseteq$. □

Отсюда, как мы знаем, вытекает, что сложение выпуклых тел по Минковскому удовлетворяет свойству сокращения: из $A+C = B+C$ следует, что $A = B$.

Предложение 62. *Предположим, что тело A содержит точку 0 в своей внутренности. Опорная функция тела A совпадает с функционалом Минковского двойственного выпуклого тела A^*:*

$$H_A = p_{A^*}.$$

Доказательство. Действительно, по определению функционала Минковского, имеем:

$$p_{A^*}(\xi) = \min\{\lambda \geq 0 | \ \xi \in \lambda A^*\} = \min\{\lambda \geq 0 | \ (\forall a \in A) < \xi, a\rangle \leq \lambda\} = \max_{a \in A} \langle \xi, a\rangle = H_A(\xi).$$

□

В качестве следствия получаем, что функционал Минковского выпуклого тела, содержащего точку 0 в своей внутренности, совпадает с опорной функцией двойственного тела: $p_A = H_{A^*}$ (поскольку $A^{**} = A$).

Пусть A — выпуклое тело с гладкой (C^1) границей в пространстве $\mathbb{R}^n$ с фиксированной евклидовой структурой (однако, несмотря на то, что евклидова структура фиксирована, мы не будем отождествлять пространство $\mathbb{R}^n$ с двойственным пространством $\mathbb{R}^{n*}$; заметим только, что евклидова структура в $\mathbb{R}^n$ определяет евклидову структуру в $\mathbb{R}^{n*}$ каноническим образом). Определим *гауссово отображение* G_A, переводящее границу тела A в единичную сферу в сопряженном пространстве. Именно, каждой точке $a \in \partial A$ поставим в соответствие единичную внешнюю нормаль к опорной гиперплоскости в точке a. Условие гладкости границы нужно для того, чтобы в каждой точке границы ∂A существовала в точности одна опорная гиперплоскость.

Можно определить гауссово отображение и в общем случае (не требуя гладкости границы). Тогда оно будет, вообще говоря, многозначным. Однако, как известно, граница выпуклого тела почти всюду C^1-гладкая. Следовательно, гауссово отображение почти всюду однозначно определено.

Говорят, что выпуклое тело A *строго выпукло* в точке $a \in \partial A$, если гауссово отображение обратимо в точке $G_A(a)$, то есть $G_A^{-1}(G_A(a)) = \{a\}$. Очевидно, строгая выпуклость эквивалентна невырожденности дифференциала гауссова отображения.

Предложение 63. *Пусть A — выпуклое тело с непустой внутренностью и гладкой границей. Тогда гауссово отображение почти всюду обратимо, то есть множество точек на сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n*}$, имеющих более одного прообраза, имеет меру нуль.*

Доказательство. Обозначим через C множество всех точек из ∂A, в которых дифференциал гауссова отображения вырождается, то есть множество всех точек, в которых нарушается строгая выпуклость. Доказываемое утверждение состоит в том, что множество $G_A(C)$ имеет меру нуль. Но это частный случай леммы Сарда. $\square$

Заметим, что само множество C вовсе не обязано иметь меру нуль. Например, в случае выпуклого многогранника, оно имеет полную меру.

Нетрудно обобщить предложение 63 на случай произвольного выпуклого тела. Таким образом, гауссово отображение почти всюду определено и почти всюду обратимо (только эти “почти всюду” относятся к разным пространством). Это одно из проявлений двойственности.

Теорема 64. *Дифференциал опорной функции, ограниченный на единичную сферу в сопряженном пространстве* $\mathbb{R}^{n*}$, *представляет собой отображение, обратное к гауссовому:*

$$dH|_{S^{n-1}} = G^{-1}.$$

Замечание 1. Дифференциал гауссова отображения определен на сопряженном пространстве, а принимает значения в линейных функционалах на сопряженном пространстве. Но при естественном отождествлении пространства и дважды сопряженного можно считать, что dH отображает $\mathbb{R}^{n*}$ в $\mathbb{R}^{n}$. Так что области определений и области значений у двух отображений, указанных в теореме 64, совпадают.

Замечание 2. Строго говоря, равенство $dH|_{S^{n-1}} = G^{-1}$ имеет место только там, где оба отображения определены. Однако гауссово отображение почти всюду обратимо, а опорная функция почти всюду дифференцируема. Так что оба отображения определены почти всюду.

Доказательство. Пусть A — выпуклое тело. Положим $H = H_A$, $G = G_A$. Пусть ξ — произвольный линейный функционал на $\mathbb{R}^n$. Максимум величины $\langle \xi, a\rangle$, $a \in A$, достигается в точке $a = G^{-1}(\xi)$. Этот максимум по определению равен $H(\xi)$. Поэтому

$$H(\xi) = \langle \xi, G^{-1}(\xi)\rangle.$$

Продифференцируем обе части этого равенства:

$$dH(\xi) = \langle d\xi, G^{-1}(\xi)\rangle + \langle \xi, d_\xi G^{-1}(d\xi)\rangle.$$

Заметим, что в обеих частях полученного равенства стоят линейные функционалы от $d\xi$. При отождествлении пространства и дважды сопряженного линейный функционал $d\xi \mapsto \langle d\xi, G^{-1}(\xi)\rangle$ на $\mathbb{R}^{n*}$ отождествляется с точкой $G^{-1}(\xi) \in \mathbb{R}^n$. Далее, поскольку G^{-1} отображает единичную сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n*}$ в границу тела A, дифференциал $d_\xi G^{-1}(d\xi)$ принимает значения в опорной плоскости к точке $G^{-1}(\xi)$. Но эта опорная плоскость ортогональна ξ по определению гауссова отображения. Следовательно, $\langle \xi, d_\xi G^{-1}(d\xi)\rangle = 0$. Все доказано. $\square$

Доказанная теорема дает эффективный способ представления выпуклого тела. Поверхность ∂A получается как образ единичной сферы при отображении dH_A. Заметим во-первых, что это отображение линейно зависит от A. Во-вторых, поскольку функция H_A

положительно однородна первой степени, дифференциал dH_A — положительно однородное отображение нулевой степени. Другими словами, отображение dH_A постоянно на любом луче, выходящем из начала координат. Поэтому оно переводит не только сферу, но и все сопряженное пространство с выколотым началом координат, в поверхность тела A.

9.6. **Виртуальные выпуклые тела.** Напомним, что полугруппа выпуклых тел относительно сложения по Минковскому вкладывается в группу Гротендика. Нетрудно проверить, что группа Гротендика в данном случае будет векторным пространством (в котором результат умножения виртуального тела $A - B$ на действительное число λ равен $\lambda A - \lambda B$, если $\lambda \geq 0$, и $|\lambda| B - |\lambda| A$, если $\lambda < 0$; напомним, что последняя формальная разность НЕ совпадает с $\lambda A - \lambda B$). Мы называем это пространство *пространством виртуальных выпуклых тел.* Виртуальные выпуклые тела — это формальные разности выпуклых тел.

Со всяким выпуклым телом связана опорная функция. С виртуальным выпуклым телом $A - B$ (A и B — настоящие выпуклые тела) можно связать функцию $H_{A-B} = H_A - H_B$, которую естественно назвать *опорной функцией виртуального выпуклого тела* $A - B$.

Предложение 65. *Всякая достаточно гладкая положительно однородная степени 1 функция на сопряженном пространстве* $\mathbb{R}^{n*}$ *является опорной функцией некоторого виртуального выпуклого тела.*

Доказательство. Опорные функции выпуклых тел — это в точности выпуклые положительно однородные степени 1 функции. Пусть f — произвольная положительно однородная степени 1 функция, а g — опорная функция единичного шара. Докажем, что для достаточно большого числа R функция $f + Rg$ будет выпуклой.

Форма $d^2 g$ всюду положительно определена. Поэтому нетрудно подобрать такое число $R > 0$, что в ограничении на единичную сферу $Rd^2 g + d^2 f > 0$, то есть форма $Rd^2 g + d^2 f$ положительно определена. Вторые дифференциалы $d^2 f$ и $d^2 g$ положительно однородных функций степени 1 являются положительно однородными отображениями степени -1. Следовательно, неравенство $Rd^2 g + d^2 f > 0$ выполняется на всем сопряженном пространстве. Но отсюда следует, что функция $Rg + f$ является выпуклой. Значит, $Rg + f = H_A$

для некоторого выпуклого тела A. Если через B обозначить единичный шар, то $g = H_B$. Следовательно, $f = H_{A-RB}$, что и требовалось доказать. □

9.7. **Еще раз про многочлен объема.** Мы теперь дадим альтернативное доказательство того, если $A_1, \ldots, A_k$ — выпуклые тела, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — положительные числа, то объем

$$\mathrm{Vol}(\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_k A_k)$$

зависит от коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ как однородный многочлен степени n.

Введем систему координат $x_1, \ldots, x_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Объем выпуклого тела A можно записать как интеграл по телу A от формы объема:

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

По теореме Стокса, интеграл от формы объема сводится к некоторому интегралу по поверхности тела A:

$$\int_A dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{\partial A} x_1 \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Здесь существенно, что дифференциал формы $x_1 \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ равен форме объема, а коэффициенты этой формы полиномиально зависят от координат. Конечно, можно написать и много других форм, обладающих теми же свойствами.

Напомним, что поверхность ∂A является образом единичной сферы при отображении dH_A. При помощи этого отображения интеграл по поверхности можно свести к интегралу по сфере:

$$\int_{\partial A} x_1 \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{S^{n-1}} (dH_A)^*(x_1 \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n).$$

Отображение dH_A линейно зависит от A. Ассоциированное отображение на дифференциальных формах с полиномиальными коэффициентами полиномиально зависит от A. В частности, дифференциальная форма $(dH_A)^*(x_1 \cdots dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n)$ является полиномом от A. Интеграл представляет собой линейный функционал на пространстве дифференциальных форм. Следовательно, интеграл от формы $(dH_A)^*(x_1 \cdots dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n)$ тоже полиномиально зависит от A. Но этот интеграл равен объему тела A. Значит, объем тела A полиномиально зависит от A.

10. Смешанные объемы

10.1. **Поляризация однородного многочлена.** Рассморим векторное пространство $\mathcal{V}$ над действительными числами. Нас будет главным образом интересовать случай, когда пространство $\mathcal{V}$ бесконечномерно. В качестве основных примеров мы будем иметь в виду пространство виртуальных выпуклых многогранников, а также пространство виртуальных компактных выпуклых множеств. Рассмотрим функцию $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$. Мы покажем, что следующие два свойства функции f эквивалентны:

(1) для любых векторов $v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{V}$, функция
$$\phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k)$$
является однороным многочленом степени n от действительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$;

(2) существует n-линейная симметрическая форма $F : \mathcal{V}^n \to \mathbb{R}$, такая, что
$$f(v) = F(v, v, \ldots, v)$$
для любого $v \in \mathcal{V}$.

Напомним, что n-линейность формы F — это линейность по каждому аргументу при фиксированных значениях остальных аргументов. Симметричность формы F означает, что значение этой формы не меняется при произвольных перестановках аргументов. Мы будем говорить, что функция f является однородным многочленом степени n на векторном пространстве $\mathcal{V}$, если она удовлетворяет свойству (1) (как мы покажем ниже, это эквивалентно тому, что она удовлетворяет свойству (2)). Симметрическая полилинейная форма F из свойства (2) называется *поляризацией* многочлена f.

Заметим, что из свойства (2) сразу же вытекает свойство (1). В самом деле, если $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$, то в выражении $F(v, v, \ldots, v)$ можно раскрыть скобки по полилинейности. Вообще, с выражением $F(v, v, \ldots, v)$ нужно обращаться также, как с произведением n сомножителей. В частности, справедлива формула *бинома Ньютона*:
$$F(\underbrace{v+w, v+w, \ldots, v+w}_{n}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F(\underbrace{v, v, \ldots, v}_{k}, \underbrace{w, w, \ldots, w}_{n-k}).$$

Теперь нам нужно доказать, что свойство (1) влечет свойство (2), то есть что у любого однородного многочлена есть поляризация. Начнем со случая, когда степень многочлена равна 2. Предположим, что у нас есть калькулятор, который может складывать действительные числа и умножать действительные числа на некоторые фиксированные множители (скажем, на $\pm\frac{1}{2}$). Как на таком калькуляторе посчитать произведение двух произвольных действительных чисел? Ключом к решению этой задачи служит формула

$$xy = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}.$$

Аналогичной формулой можно определить поляризацию любого однородного многочлена степени 2.

Задача 34. Пусть q — квадратичная форма на пространстве $\mathcal{V}$. Тогда функция

$$Q(a,b) = \frac{q(a+b) - q(a) - q(b)}{2}.$$

является билинейной симметрической формой, такой, что $q(a) = Q(a,a)$ для всех $a \in \mathcal{V}$. Другими словами, функция Q является поляризацией многочлена q. Докажите.

Задача 35. Пусть теперь f — однородный многочлен степени 3. Докажите, что поляризация этого многочлена выражается следующей формулой:

$$F(a,b,c) = \frac{f(a+b+c) - f(a+b) - f(b+c) - f(a+c) + f(a) + f(b) + f(c)}{6}.$$

Укажем обобщение этой формулы на случай произвольной степени:

Задача 36. Обозначим через ε набор $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ из n чисел, каждое из которых равно либо 0, либо 1. Через $|\varepsilon|$ обозначим число нулей в последовательности ε. Поляризацию однородного многочлена f степени n можно записать следующей формулой:

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} (-1)^{|\varepsilon|} f(\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n).$$

Мы сейчас получим другую формулу для поляризации однородного многочлена, из которой будет следовать и существование поляризации. Обозначим через L_a оператор дифференцирования по направлению $a \in \mathcal{V}$. Если $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ — достаточно хорошая функция (например, многочлен), то, по определению,

$$L_a f(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x+at) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+at) - f(x)}{t}.$$

Нетрудно проверить, что если f — однородный многочлен степени n, то $L_a f$ является однородным многочленом степени $n-1$.

Нам пригодится следующий бесконечномерный вариант теоремы Эйлера об однородных функциях:

Лемма 66. *Пусть f — однородный многочлен степени n на пространстве $\mathcal{V}$. Тогда для всякой точки $a \in \mathcal{V}$ имеет место равенство*

$$L_a f(a) = n \cdot f(a).$$

Эта лемма доказывается точно так же, как обычная теорема Эйлера. Достаточно посчитать производную в единице от функции $\varphi(\lambda) = f(\lambda a)$ двумя способами: один раз при помощи теоремы о сложной функции, а второй раз воспользовавшись однородностью.

При помощи теоремы Эйлера нетрудно, например, посчитать $L_a^2 f(a)$. В самом деле, положим $g = L_a f$. Это однородный многочлен степени $n-1$. Тогда, по теореме Эйлера, $L_a^2 f(a) = L_a g(a) = (n-1)g(a)$. С другой стороны, $g(a) = L_a f(a) = nf(a)$. Следовательно, $L_a^2 f(a) = n(n-1)f(a)$. Продолжая те же рассуждения, нетрудно доказать

Следствие 67. *Для всякого однородного многочлена степени n имеем*

$$L_a^n f = n! f(a).$$

Заметим, что в левой части выписанного равенства стоит результат применения оператора L_a^n степени n к однородному многочлену f степени n. Это многочлен степени 0, то есть константа. Утверждается что эта константа равна $n!f(a)$.

Теорема 68. *Всякий однородный многочлен степени n обладает единственной поляризацией*

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{d!} L_{a_1} \cdots L_{a_n} f.$$

Доказательство. Форма $F(a_1, \ldots, a_n)$, определенная выше, действительно является поляризацией многочлена f. Полилинейность вытекает из того, что $L_{a+b} = L_a + L_b$, симметричность вытекает из перестановочности операторов дифференцирования по различным направлениям. Нужно только проверить, что $F(a, a, \ldots, a) = f(a)$. Но это вытекает из следствия 67.

Пусть теперь $F(a_1, \ldots, a_n)$ — произвольная поляризация многочлена f. Докажем, что эта поляризация имеет вид $\frac{1}{n!} L_{a_1} \cdots L_{a_n} P$. В самом деле, нетрудно проверить по индукции, что

$$L_{a_1} \cdots L_{a_k} f(x) = \frac{n!}{(n-k)!} F(a_1, \ldots, a_k, x, x, \ldots, x).$$

Для этого достаточно воспользоваться определением производной по направлению и полилинейностью. □

10.2. **Смешанные объемы.** Поляризация многочлена объема на пространстве виртуальных компактных выпуклых множеств называется *формой смешанного объема.* Смешанный объем виртуальных компактных выпуклых множеств $A_1, \ldots, A_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ обозначается через $V(A_1, \ldots, A_n)$.

Приведем некоторые примеры вычисления смешанных объемов. Пусть A — выпуклая фигура на плоскости, а B — единичный круг. Тогда $A + \varepsilon B$ — это ε-окрестность фигуры A. Как мы уже знаем, площадь ε-окрестности равна

$$\mathrm{Vol}_2(A + \varepsilon B) = \mathrm{Vol}_2(A_\varepsilon) = \mathrm{Vol}_2(A) + \varepsilon l(A) + \varepsilon^2\pi.$$

Здесь $l(A)$ — это периметр выпуклой фигуры A. С другой стороны, согласно биному Ньютона,

$$\mathrm{Vol}_2(A + \varepsilon B) = \mathrm{Vol}_2(A) + 2\varepsilon V(A, B) + \varepsilon^2 \mathrm{Vol}_2(B).$$

Следовательно, $\mathrm{Vol}_2(A, B) = l(A)/2$.

Аналогично, если A — пространственное выпуклое тело, а B — единичный шар, то $V(A, A, B) = \mathrm{Vol}_2(\partial A)/3$. Смешанный объем $V(A, B, B)$ равен с коэффициентом $1/3$ интегралу по поверхности тела A от средней кривизны этой поверхности.

Вычислим теперь смешанную площадь двух выпуклых многоугольников. Пусть A — выпуклый многоугольник на плоскости. Обозначим через $H_i(A)$ опорные числа многоугольника A (относительно единичных внешних нормалей), то есть длины перпендикуляров, опущенных на стороны (или на продолжения сторон) из начала координат. Длину перпендикуляра следует взять со знаком плюс, если начало координат лежит по ту же сторону от соответствующей стороны многоугольника A, что и сам многоугольник. Иначе опорное число нужно взять со знаком минус.

Пусть $l_i(A)$ — длина стороны многоугольника A, соответствующей опорному числу $H_i(A)$. Обозначим через ξ_i единичный вектор внешней нормали к этой стороне.

Предложение 69. *Смешанную площадь (то есть смешанный двумерный объем) многоугольника A и фигуры B можно посчитать по формуле*

$$V(A, B) = \frac{1}{2} \sum H_i(B) l_i(A).$$

Доказательство. Посчитаем площадь $\mathrm{Vol}_2(A + \varepsilon B)$. Фигура $A + \varepsilon B$ естественным образом разбивается на три части (как и в случае

ε-окрестности). Первая часть состоит из самого многоугольника A. Вторая часть состоит из прямоугольников, лежащих на сторонах многоугольника A. Боковая сторона прямоугольника, лежащего на стороне многоугольника A с направляющим ковектором ξ_i, равна $\varepsilon H_i(B)$. Таким образом, площадь второй части равна $\varepsilon \sum H_i(B) l_i(A)$. Третья часть состоит из кусков фигуры εB, из которых можно составить всю фигуру.

Мы уже знаем, что смешанная площадь $V(A, B)$ равна половине коэффициента при ε в разложении $\mathrm{Vol}_2(A + \varepsilon B)$. Следовательно, $V(A, B) = \frac{1}{2} \sum H_i(B) l_i(A)$, что и требовалось доказать. $\square$

Предположим теперь, что A и B — выпуклые многоугольники. Предложение 69 содержит несимметричную формулу для вычисления смешанной площади. Однако сама смешанная площадь симметрична. Если подставить в равенство $V(A, B) = V(B, A)$ выражения для смешанных площадей из предложения 69, то получим некоторое нетривиальное утверждение из элементарной геометрии выпуклых многоугольников.

10.3. **Изопериметрическое неравенство на плоскости.** Среди всех плоских фигур одинакового периметра наибольший объем имеет круг (и только круг). Это классическая *изопериметрическая теорема* на плоскости. Под *фигурой* мы понимаем связное квадрируемое множество со спрямляемой границей. Длина границы называется *периметром.* Если не предполагать связности, то утверждение о единственности перестает быть верным.

Изопериметрическая теорема, как нетрудно видеть, эквивалентна следующему неравенству:

$$\mathrm{Vol}_2(A) \leq \frac{l(A)^2}{4\pi}$$

для любой плоской фигуры с конечной длиной границы $l(A)$ и с конечной площадью $\mathrm{Vol}_2(A)$. Число $l^2/4\pi$ равно площади круга длины l. Сформулированное неравенство называется *изопериметрическим неравенством.* Из изопериметрического неравенства вытекает также другой вариант изопериметрического свойства круга: *среди всех плоских фигур заданной площади наименьший периметр имеет круг.*

Изопериметрическое неравенство имеет долгую и интересную историю.

Якоб Штейнер привел красивые эвристические рассуждения, подтверждающие изопериметрическую теорему. Рассуждения

Штейнера таковы. Допустим, что существует единственная фигура с данным периметром, имеющая максимальную площадь. Тогда эта фигура (будем называть ее *оптимальной*) должна обладать следующими свойствами:

- *Выпуклость.* Оптимальная фигура выпукла, поскольку при переходе к выпуклой оболочке площадь не уменьшается, а периметр не увеличивается.
- *Симметричность.* Рассмотрим прямую произвольного направления, делящую пополам периметр фигуры. Эта прямая разбивает фигуру на две части. Рассмотрим часть с максимальной площадью, и симметрично отразим ее относительно прямой. Получим симметричную фигуру с тем же периметром и с не меньшей площадью. Следовательно, оптимальная фигура симметрична относительно некоторой прямой (на самом деле, относительно прямой произвольного направления).
- *Оптимальная фигура является кругом.* Действительно, зафиксируем ось симметрии и рассмотрим произвольную точку B на границе фигуры. Соединим эту точку с точками пересечения A и C границы фигуры и оси симметрии. Получим треугольник ABC. Допустим, что в вершинах этого треугольника установлены подвижные сцепления таким образом, что точки A и C могут скользить по оси симметрии, а угол B может меняться свободно. Допустим также, что части фигуры, лежащие над отрезками AB и BC, жестко скреплены с этими отрезками и двигаются вместе с ними. В частности, площадь этих частей не меняется. Периметр фигуры тоже не меняется в результате движения. Зато можно изменить площадь фигуры, изменив площадь треугольника ABC. Максимальное значение площади достигается в случае, если угол B прямой. Следовательно, точка B должна лежать на окружности с центром в середине отрезка AC. В силу произвольности точки B отсюда заключаем, что граница оптимальной фигуры является окружностью, а значит, сама оптимальная фигура является кругом.

Задача 37. Докажите, что среди всех четырехугольников с одинаковыми длинами сторон максимальную площадь имеет вписанный.

Задача Дидоны. Дидона — дочь тирского царя, легендарная основательница и первая царица Карфагена. Она была вынуждена бежать на Кипр вместе с сокровищами своего мужа Аркебаса, убитого братом Дидоны. Дидона высадилась в Африке. Там она купила у местного царя участок земли на берегу моря, *который можно покрыть шкурой быка*. Царь был учень доволен выгодной сделкой, в то время как Дидона разрезала шкуру на тонкие куски и связала из этих кусков длинную веревку. Длины веревки оказалось достаточно для того чтобы огородить на берегу моря большой участок земли в форме полукруга. На этом участке и возник Карфаген.

Перед Дидоной стояла задача типа изопериметрической. Математически эта задача ставится следующим образом. Пусть на плоскости дана некоторая прямая l. Требуется построить криволинейную дугу фиксированной длины, начинающуюся и кончающуюся на l, так чтобы эта дуга вместе с прямой l охватывала максимальную площадь. Решением задачи Дидоны является дуга окружности с центром на прямой l. Для обоснования решения достаточно воспользоваться приведенными выше рассуждениями Штейнера. Только сначала нужно доказать, что решение существует.

Нетрудно сформулировать изопериметрическое неравенство для пространства $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности n. Мы с самого начала ограничимся рассмотрением *выпуклых тел*, то есть компактных выпуклых множеств. Для выпуклых тел определены естественным образом понятия *объема* и *площади поверхности*. Объем тела A обозначим через $\mathrm{Vol}A$, а площадь поверхности (т.е. $(n-1)$-мерный объем границы) через $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial A)$. Сформулируем *классическое изопериметрическое неравенство*:

Теорема 70. *Пусть σ_n — объем шара в $\mathbb{R}^n$, площадь поверхности которого равна 1. Тогда для всякого выпуклого тела A с непустой внутренностью*

$$\mathrm{Vol}A \leq \sigma_n \mathrm{Vol}_{n-1}(\partial A)^{\frac{n}{n-1}},$$

причем равенство реализуется только для шара.

Таким образом, из всех выпуклых тел с данной площадью поверхности наибольший объем имеет шар.

Изопериметрическое неравенство верно и для невыпуклых тел, лишь бы можно было говорить об их объеме и площади поверхности. Однако утверждение о единственности в этом более широком классе перестает выполняться. Пример доставляет “волосатая сфера” (сфера с одномерными отростками).

10.4. **Геометрия Минковского.** Г. Минковский предложил рассматривать геометрию, в которой роль шара играет произвольное компактное выпуклое множество, содержащее начало координат в своей внутренности. В геометрии Минковского имеет смысл говорить об объеме, площади поверхности и расстояниях. В качестве примера определим расстояние в геометрии Минковского, связанной с симметричным выпуклым множеством.

Пусть B — компактное выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$, содержащее начало координат в своей внутренности. Вообще, компактные выпуклые множества с непустой внутренностью называют *выпуклыми телами. Функционал Минковского*, связынный с выпуклым телом B, определяется следующим образом: для каждой точки $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$p_B(x) = \inf\{\lambda \geq 0 |\ x \in \lambda B\}.$$

Функционал p_B является выпуклым и положительно однородным первой степени. Это означает, что

$$p_B(x+y) \leq p_B(x) + p_B(y),$$

$$p_B(\lambda x) = \lambda p_B(x), \quad \lambda \geq 0.$$

Обратно, всякий выпуклый положительно однородный функционал p имеет вид p_B для выпуклого тела $B = \{x \in \mathbb{R}^n |\ p(x) \leq 1\}$.

Если тело B симметрично относительно начала координат, то $p_B(x) = p_B(-x)$, то есть функционал p_B является нормой на пространстве $\mathbb{R}^d$. В этом случае расстояние между точками x и y можно определить как

$$\rho(x, y) = p_B(x - y).$$

Расстояние в смысле Минковского удовлетворяет неравенству треугольника.

В геометрии Минковского определены объемы (за единицу объема принимается тело B) и площади поверхности. Площадь поверхности выпуклого тела A в смысле Минковского определяется как

$$\mathrm{Vol}_{n-1}^B(\partial A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{Vol}(A + \varepsilon B) - \mathrm{Vol}(A)}{\varepsilon}.$$

Используя определение смешанного объема, получаем

$$\mathrm{Vol}_{n-1}^B(\partial A) = nV(B, A, \ldots, A).$$

На самом деле, геометрия Минковского в пространстве $\mathbb{R}^n$ дает n числовых характеристик выпуклого тела, среди которых объем и площадь поверхности. Это смешанные объемы тела A (взятого k раз) и тела B (взятого $n-k$ раз). Эти характеристики мы изучим позже.

Минковский обобщил классическое изопериметрическое неравенство на геометрию Минковского.

10.5. **Неравенство Минковского на плоскости.** Изопериметрическое неравенство на плоскости с геометрией Минковского записывается как

$$V(A,B)^2 \geq V(A,A) \cdot V(B,B)$$

для любых двух компактных выпуклых фигур A и B с непустой внутренностью. В этом неравенстве B — выпуклая фигура, определяющая геометрию Минковского. Таким образом $V(A,B)$ — это удвоенный периметр фигуры A в геометрии Минковского. Выписанное неравенство называется *неравенством Минковского.* Оно эквивалентно тому, что среди всех выпуклых фигур A с фиксированным значением смешанной площади $V(A,B)$ наибольшую площадь имеет фигура, подобная фигуре B. Неравенство Минковского также эквивалентно тому, что среди всех выпуклых фигур фиксированной площади наименьшую смешанную площадь с фигурой B имеет фигура, подобная фигуре B.

Заметим, что неравенство Минковского имеет вид обращенного неравенства Коши–Буняковского для некоторой билинейной формы, а именно, для формы смешанной площади. Напомним, что обращенное неравенство Коши–Буняковского выполняется для квадратичных форм, положительный индекс инерции которых равен 1. Тому высказыванию, что положительный индекс инерции некоторой квадратичной формы равен 1, можно придать смысл и в бесконечномерной ситуации.

Пусть $Q(\cdot,\cdot)$ — билинейная симметрическая форма на векторном пространстве $\mathcal{V}$. *Положительный индекс инерции этой формы равен 1*, если

- найдется такой вектор $b \in \mathcal{V}$, что $(b,b) > 0$,
- для всякого вектора a, не пропорционального b, найдется такой коэффициент α, что

$$(\alpha a + b, \alpha a + b) \leq 0.$$

Предложение 71. *Пусть Q — билинейная симметрическая форма на векторном пространстве $\mathcal{V}$, а вектор $b \in \mathcal{V}$ удовлетворяет неравенству $Q(b,b) > 0$. Форма Q имеет положительный индекс инерции 1 тогда и только тогда, когда для всякого $a \in \mathcal{V}$ выполняется обращенное неравенство Коши–Буняковского:*

$$Q(a,b)^2 \geq Q(a,a)Q(b,b).$$

Доказательство. Положительный индекс инерции равен 1 тогда и только тогда, когда для всякого $a \in \mathcal{V}$ квадратный трехчлен $q(\alpha) = (\alpha a + b, \alpha a + b)$ имеет по крайней мере один корень, то есть его дискриминант неотрицателен. Условие неотрицательности дискриминанта выражается неравенством $Q(a,b)^2 \geq Q(a,a)Q(b,b)$. $\square$

Теперь мы можем явно доказать, что билинейная форма смешанного объема, ограниченная на пространство аналогичных виртуальных выпуклых многоугольников, имеет положительный индекс инерции 1. Поскольку любые несколько компактных выпуклых фигур на плоскости можно одновременно приблизить аналогичными выпуклыми многоугольниками, отсюда вытекает неравенство Минковского на плоскости.

Пусть Δ — выпуклый многоугольник на плоскости. Впишем многоугольник Δ в некоторый треугольник T_1. Тогда Δ можно представить в виде разности описанного треугольника T_1 и нескольких других треугольников:

$$\Delta = T_1 - T_2 - \cdots - T_m.$$

Процесс вырезания многоугольника Δ из треугольника T_1 можно организовать таким образом, чтобы каждый многоугольник A, аналогичный Δ, естественным образом представлялся бы в виде

$$A = T_1(A) - T_2(A) - \cdots - T_m(A),$$

где $T_i(A)$ — треугольник, аналогичный (то есть подобный) треугольнику T_i.

Отображения T_i можно рассматривать как линейные отображения из пространства виртуальных выпуклых многоугольников, аналогичных многоугольнику Δ, в себя, поскольку $T_i(A+B) = T_i(A) + T_i(B)$ и $T_i(\lambda \cdot A) = \lambda T_i(A)$ (здесь опять умножение на отрицательные числа понимается в смысле виртуальных многоугольников и ни в коем случае как обычное умножение множества A на число λ).

Обозначим через $x_i(A)$ какой-нибудь линейный параметр треугольника $T_i(A)$ (например, длину стороны, длину высоты или радиус описанной окружности). Поскольку все треугольники $T_i(A)$ подобны (при фиксированном i), все линейные параметры будут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем. Поэтому x_i — это линейный функционал на пространстве виртуальных многоугольников, аналогичных многоугольнику Δ, определенный однозначно с точностью до постоянного множителя. Далее, поскольку площадь треугольника пропорциональна квадрату линейных размеров, можно считать что $\mathrm{Vol}_2(T_i(A)) = x_i(A)^2$ (вообще говоря, с некоторым положительным коэффициентом, но коэффициент всегда можно внести в определение линейного функционала x_i). Имеем:

$$\mathrm{Vol}_2(A) = \mathrm{Vol}_2(T_1(A)) - \mathrm{Vol}_2(T_2(A)) - \dots - \mathrm{Vol}_2(T_n(A)) = \\ = x_1(A)^2 - x_2(A)^2 - \dots - x_m(A)^2.$$

Таким образом, квадратичная форма площади представляется в виде разности двух квадратичных форм ($Q = Q_1 - Q_2$), одна из которых (Q_1) является полным квадратом линейной функции, а вторая (Q_2) принимает только неотрицательные значения. Нетрудно проверить, что положительный индекс инерции такой разности всегда равен 1, если только есть хотя бы один вектор b, для которого $Q(b) > 0$ (в нашем случае такие векторы есть: любой настоящий, то есть не виртуальный, выпуклый многоугольник имеет положительную площадь). В самом деле, если взять любой вектор a, не параллельный вектору b, то в векторном двумерном подпространстве, порожденном векторами a и b, найдется такой вектор a', что $Q_1(a') = 0$ (а следовательно, т.к. Q_1 является квадратом линейной функции, вектор a' лежит в ядре формы Q_1). Следовательно, либо $Q(a') = 0$, либо $Q(b + \lambda a') = Q_1(b) - Q_2(b + \lambda a')$ принимает отрицательные значения при достаточно больших λ. В любом случае, в векторном пространстве, порожденном векторами a и b, имеется ненулевой вектор, на котором значение квадратичной формы Q не больше нуля. Следовательно, Q имеет положительный индекс инерции 1.

11. Неравенства Брунна и Минковского

11.1. **Неравенство Брунна.** Предположим, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирована форма объема. Имеет место следующее соотношение между объемами выпуклых тел A, B и $A + B$:

$$\sqrt[n]{\mathrm{Vol}(A + B)} \geq \sqrt[n]{\mathrm{Vol} A} + \sqrt[n]{\mathrm{Vol} B}.$$

Это *неравенство Брунна.*

Неравенство Брунна является обобщением изопериметрического неравенства. Если через B обозначить шар единичного радиуса с центром в начале координат, то $A + \varepsilon B$ — это ε-крестность тела A. Объем поверхности тела A вычисляется по формуле

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{Vol}(A + \varepsilon B) - \mathrm{Vol}(A)}{\varepsilon}.$$

Из неравенства Брунна вытекает, что

$$\mathrm{Vol}(A + \varepsilon B) \geq \mathrm{Vol}(A) + \varepsilon \cdot n \cdot \mathrm{Vol}(A)^{\frac{n-1}{n}} \mathrm{Vol}(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Следовательно, $\mathrm{Vol}(\partial A) \geq d \cdot \mathrm{Vol}(B)^{\frac{1}{n}} \mathrm{Vol}(A)^{\frac{n-1}{n}}$. Но это классическое изопериметрическое неравенство, поскольку для шара B имеем $\mathrm{Vol}(\partial B) = n \cdot \mathrm{Vol}(B)$.

Неравенство Брунна можно переформулмировать следующим образом. Рассмотрим функцию

$$\phi(t) = \mathrm{Vol}((t-1)A + tB)^{\frac{1}{n}}$$

на отрезке $[0,1]$. Утверждение о том, что эта функция является выпуклой вверх, эквивалентно неравенству Брунна. В самом деле, если функция ϕ выпукла вверх, то, в частности, $\phi(\frac{1}{2}) \geq \frac{\phi(0)+\phi(1)}{2}$, то есть

$$\mathrm{Vol}\left(\frac{A+B}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{\mathrm{Vol}(A)^{\frac{1}{n}} + \mathrm{Vol}(B)^{\frac{1}{n}}}{2}.$$

Поскольку функция $A \mapsto \mathrm{Vol}(A)^{1/n}$ является однородной степени 1, отсюда получаем неравенство Брунна. Обратно, если выполено неравенство Брунна, то, применяя его к выпуклым телам $(1-t)A$ и tB, получаем, что функция ϕ всюду на отрезке $[0,1]$ не меньше линейной функции с теми же значениями в точках 0 и 1. Поскольку это рассуждение можно применить не только к точкам 0 и 1, но и к любым двум точкам на отрезке $[0,1]$, функция ϕ является выпуклой вверх.

11.2. **Симметризация по Штейнеру.** Неравенство Брунна можно доказать при помощи одной замечательной геометрической операции, предложенной Штейнером (который использовал ее для доказательства классического изопериметрического неравенства).

Пусть H — некоторая аффинная гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$. Всякому выпуклому телу A сопоставим множество $\mathrm{st}_H(A)$, симметричное относительно гиперплоскости H. Множество $\mathrm{st}_H(A)$ получается следующим образом. Разобьем тело A на отрезки, перпендикулярные гиперплоскости H. Каждый отрезок перенесем вдоль содержащей его прямой таким образом, чтобы середина отрезка попала на гиперплоскость H. Полученное множество $\mathrm{st}_H(A)$, очевидно, будет симметричным относительно гиперплоскости H. Описанный процесс (а также множество $\mathrm{st}_H(A)$) называется *симметризацией по Штейнеру* тела A.

Предложение 72. *При симметризации по Штейнеру выпуклых тел получаются выпуклые тела.*

Доказательство. Пусть A — выпуклое тело, а H — гиперплоскость. Докажем выпуклость множества $\mathrm{st}_H(A)$. Предположим противное: точка x' принадлежит некоторому отрезку $[a', b']$ с концами в $\mathrm{st}_H(A)$, однако $x' \notin \mathrm{st}_H(A)$. Уменьшив при необходимости отрезок $[a', b']$, мы можем считать, что его концы лежат на границе множества $\mathrm{st}_H(A)$.

Базисной трапецией компактного множества (относительно гиперплоскости H) назовем трапецию, основания которой перпендикулярны гиперплоскости H, а все вершины лежат на границе множества. Достроим отрезок $[a', b']$ до базисной трапеции $a'b'c'd'$. Пусть a, b, c, d — прообразы точек a', b', c' и d' соответственно при преобразовании st_H. Получим базисную трапецию $abcd$ выпуклого тела A.

Теперь осталось заметить две вещи. Во-первых, для произвольного выпуклого подмножества $B \subseteq A$ имеет место включение $\mathrm{st}_H(B) \subseteq \mathrm{st}_H(A)$. Во-вторых, $\mathrm{st}_H(abcd) = a'b'c'd'$. Следовательно, $a'b'c'd' \subseteq \mathrm{st}_H(A)$. В частности, $x' \in \mathrm{st}_H(A)$. Противоречие. Таким образом, множество $\mathrm{st}_H(A)$ выпукло. Кроме того, это множество, очевидно, компактно. Доказательство того, что $\mathrm{st}_H(A)$ имеет непустую внутренность, предоставляется читателю. $\square$

Несмотря на простоту доказанного предложения, дадим еще одно его доказательство. Введем в $\mathbb{R}^n$ такую систему координат, что H будет координатной гиперплоскостью. Тело A можно представить как область между графиками двух частично определенных функций $f_1, f_2 : H \to \mathbb{R}$, причем $f_1 \leq f_2$, функция f_1 выпукла вниз, а функция f_2 выпукла вверх. Функции f_1 и f_2 имеют одну и ту же область определения D, совпадающую с проекцией тела A на гиперплоскость H. Область D выпукла.

Подвергнув тело A симметризации Штейнера, мы получим область, заключенную между графиками функций $(f_1 - f_2)/2$ и $(f_2 - f_1)/2$. Первая функция, очевидно, выпукла вверх, а вторая выпукла вниз. Теперь воспользуемся следующей очевидной леммой:

Лемма 73. *Пусть функции g_1 и g_2 определены на одном и том же выпуклом множестве, причем $g_1 \leq g_2$, функция g_1 выпукла вниз, а функция g_2 выпукла вверх. Тогда область между графиками функций g_1 и g_2 выпукла.*

Для доказательства предложения 72 положим в этой лемме $g_1 = (f_1 - f_2)/2$, $g_2 = (f_2 - f_1)/2$.

Предложение 74. *Симметризация по Штейнеру сохраняет объемы.*

Доказательство. Используя ранее введенные обозначения, имеем:

$$\mathrm{Vol}A = \int_D (f_1(x) - f_2(x))dx.$$

Это вытекает из теоремы Фубини. Подынтегральные выражения в формулах для $\mathrm{Vol}A$ и $\mathrm{Vol}(\mathrm{st}_H(A))$ совпадают. Следовательно, тела A и $\mathrm{st}_H(A)$ имеют одинаковые объемы. □

Предложение 75. *Пусть A и B — выпуклые тела, а H — некоторая гиперплоскость. Если начало координат принадлежит H, а α и β — произвольные действительные числа, то*

$$\mathrm{st}_H(\alpha A) = \alpha \cdot \mathrm{st}_H(A),$$

$$\mathrm{st}_H(\alpha A + \beta B) \supseteq \alpha \cdot \mathrm{st}_H(A) + \beta \cdot \mathrm{st}_H(B).$$

Доказательство. В доказательстве нуждается только второе утверждение. Положим $C = \alpha A + \beta B$. Пусть $c' = \alpha a' + \beta b'$, где $a' \in \mathrm{st}_H(A)$, $b' \in \mathrm{st}_H(B)$. Мы хотим доказать, что $c' \in \mathrm{st}_H(C)$. Пусть a, b и c — прообразы точек a', b' и c' при симметризации по Штейнеру выпуклых тел A, B и C соответственно. Обозначим через l_a прямую, перпендикулярную гиперплоскости H и проходящую через точку a. Прямые l_b и l_c определяются аналогично. Рассмотрим отрезки $S_a = A \cap l_a$, $S_b = B \cap l_b$ и $S_c = C \cap l_c$. Очевидно, $S_c = \alpha S_a + \beta S_b$. Достаточно доказать, что

$$\mathrm{st}_H(S_c) \supseteq \alpha \cdot \mathrm{st}_H(S_a) + \beta \cdot \mathrm{st}_H(S_b).$$

В данном случае имеет место равенство. □

Предложение 76. *При симметризации по Штейнеру объем поверхности не увеличивается.*

Доказательство. Обозначим через B шар единичного радиуса. Заметим, что $(n-1)$-мерный объем поверхности выпуклого тела $A \subset \mathbb{R}^n$ можно посчитать по следующей формуле:

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{Vol}(A_\varepsilon) - \mathrm{Vol}(A)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \mathrm{Vol}(A_\varepsilon).$$

Согласно предложению 75 имеем:

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{st}_H(A_\varepsilon)) = \mathrm{Vol}(\mathrm{st}_H(A + \varepsilon B)) \le \mathrm{Vol}(\mathrm{st}_H(A) + \varepsilon B).$$

Дифференцируя обе части этого неравенства при $\varepsilon = 0$, получаем $\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathrm{st}_H(A)) \le \mathrm{Vol}_{n-1}(A)$, что и требовалось доказать. □

11.3. **Теорема Бляшке о шаре.** Проиллюстрируем сначала использование симметризации по Штейнеру для доказательства изопериметрического неравенства. Предположим сначала, что существует единственное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ с данным объемом и наименьшим $(n-1)$-мерным объемом поверхности. Тогда это тело не должно меняться при симметризации по Штейнеру (неважно, относительно какой гиперплоскости мы симметризуем), а следовательно, должно быть шаром. Это доказательство, однако, предполагет существование и единственность оптимальной фигуры.

Чтобы доказать существование, можно пытаться многократно применять симметризацию к выпуклому телу A. После каждой симметризации, тело становится все лучше: его объем не меняется, а площадь поверхности может только убывать. Поскольку пространство всех выпуклых тел, расположенных в некотором кубе, компактно относительно метрики Хаусдорфа, мы можем выделить сходящуюся подпоследовательность симметризаций. Если нам для предела этой сходящейся подпоследовательности удастся доказать, что он уже симметричен относительно всех гиперплоскостей, то мы докажем изопериметрическое неравенство. Проблема в том, что симметризация относительно каждой следующей гиперплоскости портит симметричность относительно предыдущих плоскостей.

Однако имеет место следующая

Теорема 77 (теорема Бляшке о шаре)**.** *Пусть $\mathcal{X}$ — множество выпуклых тел, лежащих в некотором кубе, замкнутое в метрике Хаусдорфа и устойчивое относительно симметризации по Штейнеру с центром в некоторой точке a. Последнее означает, что для всякого множества $A \in \mathcal{X}$ и для всякой гиперплоскости H, содержащей точку a, $\mathrm{st}_H(A) \in \mathcal{X}$. Тогда множество $\mathcal{X}$ содержит либо $\{a\}$, либо некоторый шар с центром в точке a.*

Точку a можно рассматривать как шар с нулевым радиусом. При доказательстве теоремы Бляшке ключевую роль играет следующая лемма:

Лемма 78. *Пусть A — выпуклое тело, лежащее в шаре B, однако не совпадающее с B. Тогда после нескольких симметризаций по Штейнеру относительно гиперплоскостей, содержащих центр шара B, из тела A можно получить тело, не пересекающее границу шара B.*

Доказательство. Обозначим через S граничную сферу шара B. Поскольку A не совпадает с B, сфера S не содержится в A. Рассмотрим произвольную точку $b \in S - A$. Поскольку множество

$S - A$ открыто, оно содержит вместе с точкой b некоторый шар U с центром в точке b. Обозначим через ε радиус шара U.

На сфере S найдется конечная ε-сеть $b_1, \dots, b_k$. Обозначим через U_i шар радиуса ε с центром в точке b_i. Тогда шары U_i покрывают всю сферу S, то есть $S \subseteq \bigcup U_i$.

Обозначим через H_i гиперплоскость, содержащую центр шара B и перпендикулярную отрезку $[b, b_i]$. Положим $A_0 = A$, $A_i = \mathrm{st}_{H_i}(A_{i-1})$ при $i > 0$. Как нетрудно видеть, множество A_1 не пересекается с $S \cap U_1$.

Аналогично, множество A_i, не пересекается с $S \cap (U_1 \cup \dots \cup U_i)$. Следовательно, A_k не пересекается с S. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 77. Докажем, что существует наименьший шар с центром в точке a, содержащий некоторое тело из $\mathcal{X}$. Действительно, обозначим через B пересечение всех шаров с центром в точке a, содержащих некоторые тела из $\mathcal{X}$. Множество B тоже является шаром с центром в точке a. Найдется последовательность шаров B_n, такая что $B = \bigcap B_n$, и шар B_n содержит некоторое выпуклое тело $A_n \in \mathcal{X}$. В силу компактности $\mathcal{X}$ (Теорема 58), последовательность A_n имеет предельную точку $A \in \mathcal{X}$. Нетрудно проверить, что A лежит в шаре B. Таким образом, B — наименьший шар с центром в точке a, содержащий некоторое тело из $\mathcal{X}$.

Если тело A содержит граничную сферу шара B, то тогда, в силу выпуклости, $A = B$. В противном случае, согласно лемме 78, множество $\mathcal{X}$ содержит некоторое тело, не пересекающее границу шара B, а следовательно, лежащее в некотором меньшем шаре. Противоречие с минимальностью B. $\square$

Теперь мы можем дать строгое доказательство изопериметрической теоремы.

Доказательство изопериметрической теоремы. Рассмотрим произвольное выпуклое тело A. Пусть B — шар того же объема. Нам достаточно доказать, что $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial B) \le \mathrm{Vol}_{n-1}(\partial A)$. Действительно, рассмотрим множество $\mathcal{X}$, состоящее из всех выпуклых тел C, таких что $\mathrm{Vol}(C) = \mathrm{Vol}(A)$, $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial C) \le \mathrm{Vol}_{n-1}(\partial A)$. Множество $\mathcal{X}$, очевидно, замкнуто в смысле метрики Хаусдорфа и устойчиво относительно симметризации по Штейнеру. Таким образом, это множество удовлетворяет всем условиям теоремы Бляшке о шаре. Следовательно, $B \in \mathcal{X}$, то есть $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial B) \le \mathrm{Vol}_{n-1}(\partial A)$, что и требовалось доказать. $\square$

Рассмотрим некоторое аффинное подпространство L в $\mathbb{R}^d$. Тело A называется *симметричным* относительно подпространства L, если оно инвариантно относительно всех изометрий, оставляющих на месте все точки из L. Например, тело, симметричное относительно точки — шар с центром в этой точке (не путать с центрально симметричным телом!).

Следующая теорема является обобщением теоремы Бляшке о шаре:

Теорема 79. *Пусть $\mathcal{X}$ — множество выпуклых тел, лежащих в некотором кубе, замкнутое в смысле метрики Хаусдорфа. Предположим, что для каждой гиперплоскости H, содержащей аффинное подпространство L, и для каждого тела $A \in \mathcal{X}$, $\mathrm{st}_H(A) \in \mathcal{X}$. Тогда множество $\mathcal{X}$ содержит некоторое выпуклое тело, симметричное относительно подпространства L.*

Доказательство. Доказательство. Рассмотрим наименьшее симметричное относительно L компактное множество B, содержащее некоторое тело из $A \in \mathcal{X}$. Существование такого множества B вытекает из компактности $\mathcal{X}$ (теорема 58). Если $A = B$, то все доказано. Предположим, что это не так.

Рассмотрим некоторое ортогональное дополнение M к подпространству L, такое что $M \cap B \neq \emptyset$. Тогда $M \cap B$ — это некоторый шар с центром в $M \cap L$. Согласно лемме 78, множество $\mathcal{X}$ содержит некоторое выпуклое тело A', не пересекающее граничную сферу шара $B \cap M$. Обозначим через B' множество, полученное вращением тела A' вокруг L. Более точно, если G — группа изометрий $\mathbb{R}^n$, оставляющих L на месте, то положим $B' = \bigcup_{g \in G} gA'$. Тогда B' является компактным множеством, симметричным относительно L и содержащим тело $A' \in \mathcal{X}$. При этом, очевидно $B' \subset B$. Противоречие с минимальностью тела B. $\square$

11.4. **Доказательство неравенства Брунна.** Приступим теперь к доказательству неравенства Брунна. Для доказательства этого неравенства нам потребуется следующая лемма:

Лемма 80. *Пусть C — некоторое выпуклое тело в $\mathbb{R}^{n+1}$, а φ — некоторый аффинный функционал на $\mathbb{R}^{n+1}$. Для каждого числа $c \in \mathbb{R}$ определим число $f(c)$ как объем сечения тела C гиперплоскостью $\varphi = c$. Тогда функция $f^{\frac{1}{n}}$ выпукла вверх (вогнута), то есть*

$$\sqrt[n]{f(\lambda x + (1-\lambda)y)} \geq \lambda \sqrt[n]{f(x)} + (1-\lambda)\sqrt[n]{f(y)}, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Доказательство. Найдется такая прямая l и такая система координат на этой прямой, что для точки $p \in l$ с координатой c гиперплоскость $\varphi = c$ перпендикулярна прямой l и проходит через точку p.

Заметим, что если подвергнуть тело C симметризации по Штейнеру относительно произвольной гиперплоскости, содержащей прямую l, то функция f при этом не изменится (симметризация по Штейнеру сохраняет объемы всех поперечных сечений). Согласно обобщенной теореме Бляшке о шаре, при помощи штейнеровской симметризации и предельного перехода можно из тела C получить новое тело C', симметричное относительно прямой l. Но для тела C' функция $\sqrt[n]{f(c)}$ пропорциональна радиусу шара $C' \cap \varphi^{-1}(c)$. Функция радиуса, очевидно, выпукла вверх. $\square$

Доказательство неравенства Брунна. Пусть A и B — два выпуклых тела в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ выпуклую оболочку C множеств $A \times \{0\}$ и $B \times \{1\}$. Если рассмотреть в качестве аффинного функционала φ последнюю координату, то, согласно лемме 80, имеем

$$\sqrt[n]{\mathrm{Vol}(C \cap \varphi^{-1}(1/2))} \geq \frac{1}{2}(\sqrt[n]{\mathrm{Vol}(A)} + \sqrt[n]{\mathrm{Vol}(B)}).$$

Однако, как нетрудно проверить, $C \cap \varphi^{-1}(1/2) = (A+B)/2$. Отсюда вытекает неравенство Брунна. $\square$

Рассмотрим теперь следующий пример. Пусть A — координатный параллелепипед со сторонами $a_1, \ldots, a_n$, а B — координатный параллелепипед со сторонами $b_1, \ldots, b_n$. Тогда неравенство Брунна–Минковского, записанное для пары параллелепипедов A и B, выглядит следующим образом:

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_d + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_d} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}.$$

11.5. **Случаи равенства в неравенстве Брунна.** Опишем основной случай равенства в неравенстве Брунна.

Теорема 81. *Предположим, что выпуклые тела A и B имеют гладкие границы. В неравенстве Брунна реализуется равенство только в том случае, когда тела A и B пропорциональны.*

Напомним, что для выпуклых тел A и B и гиперплоскости H, содержащей начало координат, имеет место включение

$$\mathrm{st}_H(A + B) \supseteq \mathrm{st}_H(A) + \mathrm{st}_H(B).$$

Докажем прежде всего, что если на телах A и B неравенство Брунна обращается в равенство, то в приведенном выше включении тоже реализуется равенство.

Лемма 82. *Если в неравенстве Брунна–Минковского, записанном для выпуклых тел A и B, реализуется равенство, то тогда для произвольной гиперплоскости H имеем*

$$\mathrm{st}_H(A+B) = \mathrm{st}_H(A) + \mathrm{st}_H(B).$$

Доказательство. Обозначим через A^*, B^* и C^* результаты симметризации по Штейнеру относительно гиперплоскости H выпуклых тел A, B и C соответственно.

Можно записать следующую цепочку неравенств:

$$(\mathrm{Vol}(A)^{\frac{1}{n}} + \mathrm{Vol}(B)^{\frac{1}{n}})^n = \mathrm{Vol}(C) = \mathrm{Vol}(C^*) \geq \mathrm{Vol}(A^* + B^*) \geq$$

$$\geq (\mathrm{Vol}(A^*)^{\frac{1}{n}} + \mathrm{Vol}(B^*)^{\frac{1}{n}})^n = (\mathrm{Vol}(A^*)^{\frac{1}{n}} + \mathrm{Vol}(B^*)^{\frac{1}{n}})^n.$$

В самом деле, согласно теореме 75, имеет место включение $C^* \supseteq A^* + B^*$. Следовательно, $\mathrm{Vol}(C^*) \leq \mathrm{Vol}(A^* + B^*)$. Поскольку симметризация по Штейнеру не меняет объемы, $\mathrm{Vol}(C^*) = \mathrm{Vol}(C)$. А так как в неравенстве Брунна–Минковского для выпуклых тел A и B реализуется равенство, $\mathrm{Vol}(C) = (\mathrm{Vol}(A)^{\frac{1}{n}} + \mathrm{Vol}(B)^{\frac{1}{n}})^n$. Далее, согласно неравенству Брунна–Минковского для выпуклых тел A^* и B^*, имеем: $\mathrm{Vol}(A^* + B^*) \geq (\mathrm{Vol}(A^*)^{\frac{1}{n}} + \mathrm{Vol}(B^*)^{\frac{1}{n}})^n$. Заметим, наконец, что $\mathrm{Vol}(A^*) = \mathrm{Vol}(A)$, $\mathrm{Vol}(B^*) = \mathrm{Vol}(B)$.

Первый и последний член выписанной цепочки неравенств совпадают. Значит, все неравенства обращаются в равенства. В частности, $\mathrm{Vol}(C^*) = \mathrm{Vol}(A^* + B^*)$, откуда следует, что $C^* = A^* + B^*$, что и требовалось доказать. $\square$

Заметим, что из равенства $\mathrm{Vol}(C^*) = \mathrm{Vol}(A^*+B^*)$ для выпуклых множеств A^*, B^*, C^* следует равенство $C^* = A^* + B^*$ только при условии, что C^* имеет непустую внутренность.

Лемма 83. *Пусть A и B — выпуклые тела с гладкими границами, причем тело A строго выпукло в точке $a \in \partial A$, тело B строго выпукло в точке $b \in \partial B$, и $G_A(a) = G_B(b)$. Обозначим через $[a, a']$ отрезок, высекаемый из тела A прямой, перпендикулярной H и проходящей через точку a. Аналогично определяется отрезок $[b, b']$. Предположим, что*

$$\mathrm{st}_H(A+B) = \mathrm{st}_H(A) + \mathrm{st}_H(B).$$

Тогда $G_A(a') = G_B(b')$.

Доказательство. Обозначим $C = A + B$. Рассмотрим точку $c = a+b$. Нетрудно видеть, что $c \in \partial C$ и $G_C(c) = G_A(a) = G_B(b)$. Более того, тело C строго выпукло в точке c. Действительно, линейный функционал $\xi = G_A(a)$ в ограничении на тело A достигает максимума в единственной точке a, а в ограничении на тело B — в единственной точке b. Следовательно, в ограничении на тело $C = A+B$ функционал ξ достигает максимального значения в единственной точке $c = a + b$. Обозначим через c' противоположный к c конец отрезка $[c, c']$, высекаемого из тела C прямой, перпендикулярной к H.

Мы хотим доказать, что $G_A(a') = G_B(b')$. Для этого достаточно установить, что $c' = a' + b'$. В самом деле, в точке c' достигается максимум линейного функционала $G_C(c')$ в ограничении на тело C. Однако максимум суммы достигается на сумме максимумов. Следовательно, максимум функционала $G_C(c')$ в ограничении на тело A достигается в точке a', а в ограничении на тело B — в точке b'. Следовательно, $G_A(a') = G_B(b') = G_C(c')$.

Докажем, что $c' = a'+b'$. Обозначим через c_* и c'_* образы точек c и c' соответственно при симметризации относительно гиперплоскости H. Согласно равенству $\mathrm{st}_H(C) = \mathrm{st}_H(A) + \mathrm{st}_H(B)$, найдутся такие точки $a_* \in A$, $b_* \in B$, что $c_* = a_* + b_*$. Тогда, из соображений симметрии, $c'_* = a'_* + b'_*$, где a'_* и b'_* — точки, симметричные точкам a_* и b_* соответственно относительно гиперплоскости H.

Рассмотрим отрезки S_a, S_b и S_c, симметризацией которых получены отрезки $[a_*, a'_*]$, $[b_*, b'_*]$ и $[c_*, c'_*]$ соответственно. Нетрудно видеть, что $S_c = S_a + S_b$. Однако точку c можно представить в виде суммы точки из A и точки из B только единственным образом: $c = a+b$. Следовательно, $a \in S_a$, $b \in S_b$. Поскольку $S_a \subseteq A$, $S_b \subseteq B$, отсюда следует, что $S_a \subseteq [a, a']$, $S_b \subseteq [b, b']$.

Обозначим через $|S|$ длину отрезка S. Тогда получаем: $|S_c| = |S_a|+|S_b|$. Однако, с другой стороны, $|S_c| = |c-c'| = |a-a'|+|b-b'|$. Следовательно, $S_a = [a, a']$, $S_b = [b, b']$. Но отсюда следует, что $c' = a' + b'$, что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство теоремы 81. Пусть A и B — выпуклые тела с гладкими границами. Тогда, поскольку гауссово отображение почти всюду обратимо (предложение 63), найдется такая пара точек $a \in \partial A$, $b \in \partial B$, что тело A строго выпукло в точке a, тело B строго выпукло в точке b, и $G_A(a) = G_B(b)$. Если в неравенстве Брунна–Минковского, записанного для тел A и B, реализуется равенство, то тогда, согласно лемме 82, для любой гиперплоскости H, проходящей через начало координат,

$$\mathrm{st}_H(A+B) = \mathrm{st}_H(A) + \mathrm{st}_H(B).$$

Таким образом, мы находимся в условиях леммы 83.

Рассмотрим произвольный линейный функционал ξ. Пусть H — гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^n |\ \xi(x) = 0\}$. Пользуясь обозначениями леммы 83, можно написать, что $a' = G_A^{-1}(\xi)$, $b' = G_B^{-1}(\xi)$. Таким образом, для всякого линейного функционала ξ отрезки $[a, G_A^{-1}(\xi)]$ и $[b, G_B^{-1}(\xi)]$ параллельны. Если перенести точки a и b в начало координат, то это обстоятельство можно будет записать следующим образом:

$$G_B^{-1} = \alpha G_A^{-1},$$

где α — некоторая скалярная функция. Нетрудно понять, что $\alpha = H_B/H_A$ (это вытекает из определения опорной функции).

Воспользуемся теперь предложением 64: $G_A^{-1} = dH_A$, $G_B^{-1} = dH_B$. Следовательно, $dH_B = (H_B/H_A)dH_A$. Кроме того, функция H_B/H_A (определенная всюду кроме нуля) отлична от нуля на всей области определения. Отсюда и из правила Лейбница вытекает, что $H_B/H_A = const$. Таким образом, опорные функции выпуклых тел A и B пропорциональны. Но это означает, что пропорциональны и сами тела. $\square$

Заметим, что кроме описанного выше, неравенство Брунна–Минковского допускает и другие случаи равенства. Например, если рассмотреть два непараллельных отрезка A и B в трехмерном пространстве, то $\mathrm{Vol}(A) = \mathrm{Vol}(B) = \mathrm{Vol}(A+B) = 0$, то есть в неравенстве Брунна–Минковского реализуется равенство. Однако тела A и B не пропорциональны.