**I Теоретическая модель**

*1) Справедливая цена*

Справедливая цена фьючерсного контракта основывается на цене соответствующего форвардного контракта. В условиях (i) *совершенного рынка капитала*, (ii) *отсутствия транзакционных издержек*, (iii) *возможности внесения депозитной маржи полностью ценными бумагами*, (iv) *возможности совершения коротких продаж*, (v) *равенства безрисковых ставок по ссудам и вкладам* цена форвардного контракта Gt,T в момент t с моментом исполнения Т соотноситься со спотовой ценой по формуле

Gt,T = Ste(r-d)(T-t),

где St обозначает спотовою цену актива в момент t, r обозначает годовую безрисковую ставку, d обозначает годовую дивидендную доходность.

Фьючерсный контракт будет равен форвардному контракту с добавлением дополнительных условий (vi) *нестохастической динамики безрисковой ставки*, (vii) *нестохастической динамики дивидендной доходности*

F\*t,T = Ste(r-d)(T-t).

В данной *модели затрат на поддержание инвестиционной позиции* (*cost-of-carry model*), представленной Cornell и French (1983), (r-d)(T-t) обозначает затраты владения длинной позицией по активу на спотовом рынке до момента T[[1]](#footnote-1). Цена на фьючерсный контракт такова, что исключается возможность арбитражной торговли на полном временном интервале T-t, если соблюдается конвергенция спотовой и фьючерсной цены в момент T.

Годовая дивидендная доходность по фондовому индексу, возможно, не будет лучшей аппроксимацией дивидендных выплат для Индекса ММВБ. Индекс ММВБ не вполне широкий индекс, и на временном интервале менее трех месяцев (именно такой интервал до исполнения фьючерсного контракта рассматривается в настоящем исследовании) уместнее предположить сконцентрированное, а не равномерное распределение дивидендных выплат. Тогда справедливая цена фьючерсного контракта на фондовый индекс принимает вид

F\*t,T = Ster(T-t) – Dt,T,

где St обозначает спотовую стоимость фондового индекса, а Dt,T обозначает стоимость дивидендов в момент T, то есть, дивидендов, выплаченных в период T-t с дальнейшим инвестированием до момента T

Dt,T = $\sum\_{i=1}^{T-t}D\_{t+i }e^{r(T-t-i)}$.

*2) Величина миспрайсинга*

Наблюдаемая цена фьючерсного контракта Ft,T отличается от цены F\*t,T, рассчитанной по теоретической модели. Как показывают Brailsford и Hodgson (1997), отличие будет незначительным, если оно обусловлено стохастической динамикой безрисковой ставки и дивидендной доходности. Таким образом, условия (v) и (vi) могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения. Условия (i) – (iv) будут подробней рассмотрены далее, поскольку они порождают более значительные различия между Ft,T и F\*t,T. Эти отличия выражаются количественно двумя способами. *Абсолютной величиной миспрайсинга* является разность по модулю наблюдаемой цены фьючерса и цены, рассчитанной по теоретической модели

MAt = $\left|F\_{t,T}- F\_{t,T}^{\*}\right|$.

Чаще, однако, используется *относительная величина миспрайсинга*

MPt = Ft,T/F\*t,T,

MPt = $\frac{\left|F\_{t,T}- F\_{t,T}^{\*}\right|}{F\_{t,T}^{\*}}$,

MPt = $\frac{\left|F\_{t,T}- F\_{t,T}^{\*}\right|}{S\_{t}}$,

где миспрайсинг измеряется относительно справедливой цены фьючерса или спотовой стоимости фондового индекса. В настоящем исследовании относительная величина миспрайсинга рассчитывается на основе справедливой цены фьючерса.

*3) Транзакционные издержки и неарбитражный интервал*

Перечисленные выше условия (i) – (iv) не вполне отвечают рыночным реалиям. Институциональные и регулирующие факторы и рыночные несовершенства таковы, что совершение арбитражной торговли требует определенных затрат. Данное понятие обозначает две отдельные группы затрачиваемых средств: *транзакционные издержки и* *расходы по депозитной и вариационной марже*.

Значимость затрат варьируется в зависимости от выбора арбитражером длительности временного интервала инвестирования. Поддержание открытых инвестиционных позиций до момента исполнения фьючерсного контракта требует существенных расходов по депозитной и вариационной марже, что добавляет вес этой группе затрат. Преждевременное завершение инвестирования (premature closing) является менее затратным способом совершения индексного арбитража с точки зрения расходов по марже, поскольку закрытие позиций происходит в течение одного или нескольких дней. Brennan и Schwartz (1988, 1990) классифицируют возможность смены инвестиционных позиций после смены миспрайсинга (от недооценки к переоценке или от переоценки к недооценке) как вложенный опцион преждевременного завершения арбитражной стратегии (early unwinding / liquidation option). Наличие этого опциона предполагает получение более высокой арбитражной прибыли, чем прибыль от статичной арбитражной стратегии. Однако увеличивается вес транзакционных издержек, поскольку биржевые сборы за покупку / продажу фьючерса больше, чем биржевые сборы за исполнение фьючерса.

В настоящем исследовании рассматривается *статичная арбитражная стратегия*, то есть, временной интервал инвестирования завершается в момент исполнения фьючерсного контракта. Статичная арбитражная стратегия требует, как правило, следующих затрат. Транзакционные издержки включают две брокерские и биржевые комиссии для сделок на спотовом рынке, одну брокерскую и биржевую комиссию для сделок на фьючерсном рынке, клиринговый сбор и плату за ликвидность, состоящую в покупке по цене предложения и продаже по цене спроса (две платы на спотовом рынке и одна плата на фьючерсном рынке). Считается, что брокерские комиссии и плата за ликвидность составляют большую часть транзакционных издержек. В академических исследованиях миспрайсинг рассчитывается для арбитражера с наиболее выгодной позицией (most favorably placed arbitrageur), *не платящего брокерские комиссии*. Таковым может быть крупный институциональный инвестор, имеющий собственный брокерский дом. Для настоящего исследования использованы данные по реализованным ценам, поэтому *плата за ликвидность далее не рассматривается*. Расходы по депозитной и вариационной марже включают упущенные возможности ликвидных средств, используемых для гарантийного обеспечения и владение достаточными ликвидными средствами для вариационной маржи. *Вторая часть расходов по марже, как правило, незначительна по отношению к первой и не рассчитывается в академических исследованиях*.

Существующие институциональные и регулирующие факторы и рыночные несовершенства увеличивают затраты на совершение арбитражной торговли в дополнение к транзакционным издержкам и расходам по депозитной и вариационной марже. Арбитражер сталкивается с неодинаковыми безрисковыми ставками по ссудам и вкладам. Hogan, Jarrow, Teo и Warachka (2004) ввели консервативный спред по безрисковым ставкам в 2% для исследований индексного арбитража на рынке США, однако новые результаты практически не отличались от предыдущих результатов. Поэтому в настоящем исследовании спред по безрисковым ставкам не учитывается.

Неопределенность относительно дивидендных выплат (dividend uncertainty) способствует увеличению затрат на совершение арбитражной торговли. Возможность непредвиденных колебаний величины дивидендных выплат является возрастающей функцией от времени до момента исполнения фьючерсного контракта и количества акций, составляющих фондовый индекс. Непредвиденное снижение дивидендных выплат уменьшает арбитражную прибыль для cash and carry arbitrage и увеличивает арбитражную прибыль для противоположной стратегии. В автоматической торговле процесс ценообразования фьючерсного контракта основывается на пессимистичном сценарии относительно дивидендных выплат[[2]](#footnote-2). В академической литературе более часто встречается умеренный подход к решению вопроса неопределенности относительно дивидендных выплат, предлагающий не преувеличивать фактор неопределенности, особенно в краткосрочном периоде. Bortoli и Frino (2006) моделируют дивидендную неопределенность, заменяя фактические исторические данные по дивидендам ожидаемыми дивидендами на основе выплаченных дивидендов предшествующего периода. Подсчитанная ошибка прогнозирования дивидендных выплат увеличивает неарбитражный интервал. Поскольку в настоящем исследовании длительность временного интервала инвестирования варьируется от нескольких дней до трех месяцев, дивидендная неопределенность не считается существенным фактором влияния на величину неарбитражного интервала.

Ограничение на короткие продажи (short sale constraints) способствует увеличению неарбитражного интервала, однако некоторые исследователи эмпирически показывают, что reverse cash and carry arbitrage, совершаемый крупными институциональными инвесторами, тем не менее оказывается прибыльной стратегией, поскольку такие участники рынка, квази-арбитражеры, могут привлекать собственный индексный портфель для арбитражной торговли. Дальнейшее исследование проводится с позиции квази-арбитражера.

Таким образом, затраты на совершение арбитражной торговли, в соответствии с Fung и Draper (1999), имеют вид

mf = τf + φf + χf,

по фьючерсной позиции,

ms = τs(St + ST),

по спотовой позиции, где τf и τs обозначает биржевую комиссию для сделки по фьючерсному контракту и индексному портфелю соответственно, φf обозначает клиринговый сбор, χf обозначает упущенные возможности ликвидных средств, используемых для гарантийного обеспечения, ST обозначает спотовую стоимость индекса в момент T. Совокупные затраты, сумма mf и ms, определяют величину неарбитражного интервала [F\*t,T + Ct; F\*t,T - Ct], в пределах которого колебания наблюдаемой цены фьючерса согласуются с принципом отсутствия арбитражных возможностей. Другими словами, если величина миспрайсинга после вычета затрат становится отрицательной, MAt - Ct > 0, то получение арбитражной прибыли невозможно.

*4) Прокси-портфель и погрешность отслеживания*

Прокси-портфелем называется портфель отдельных акций, составляющих фондовый индекс, в котором веса определяются соответственно требованиям имитации – прокси-портфель должен максимально точно повторять индексный портфель по стоимости. Индексный арбитраж на основе прокси-портфеля решает проблему недостаточной ликвидности, как правило, сопряженной с арбитражной торговлей широкими фондовыми индексами. Недостаточно ликвидные и редко торгуемые акции препятствуют совершению мгновенной купли / продажи индекса и имеют более широкий бид-аск спред, что увеличивает неарбитражный интервал. Помимо этого, фиксирование в портфеле «голубых фишек» существенно снижает неопределенность относительно дивидендных выплат, поскольку крупные и прочно утвердившиеся компании не испытывают волатильности в прибыли и придерживаются постоянной дивидендной политики.

Очевидно, что невозможно достигнуть полного соответствия прокси-портфеля и индексного портфеля по стоимости. Стоимость прокси-портфеля является аппроксимацией стоимости индексного портфеля, оцениваемой погрешностью отслеживания (tracking error). Погрешность отслеживания et интерпретируется как дополнительная плата за стремление арбитражера уменьшить транзакционные издержки торговли недостаточно ликвидными акциями для арбитражных стратегий. Поскольку эта плата увеличивает неарбитражный интервал [F\*t,T + Ct + et; F\*t,T - Ct - et], то составление прокси-портфеля требует нахождения разумного компромисса между уменьшением транзакционных издержек и увеличением погрешности отслеживания.

*5) Гипотеза*

В настоящем исследовании тестируется наиболее популярная гипотеза индексного арбитра – *индексный арбитраж ex post*, в соответствии с которой арбитражные возможности рассматриваются на выборке синхронных данных. (Противопоставлением будет индексный арбитраж ex ante, совершаемый по спотовой позиции с отставанием во времени, лагом.)

**Гипотеза:** *Колебания цены фьючерсного контракта на Индекс ММВБ не превышают границ неарбитражного интервала. Превышение границ неарбитражного интервала корректируется немедленно*.

Это равносильно утверждению о невозможности индексного арбитража ex post. Процедура тестирования будет состоять в расчете справедливой цены фьючерсного контракта и величины миспрайсинга с последующим выявлением случаев превышения величины миспрайсинга над совокупными затратами на совершение арбитражной торговли, то есть,

MAt > Ct + et.

1. Klemkosky и Lee (1991) предлагают дискретный вариант F\*t,T = S(t)(1 + r – d)(T-t), однако он менее популярен в академической литературе. [↑](#footnote-ref-1)
2. Если только арбитражная стратегия не предполагает исполнение опциона преждевременного завершения арбитражной стратегии. [↑](#footnote-ref-2)