

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова  
Механико-математический факультет

На правах рукописи  
УДК 517

Кудряшов Юрий Георгиевич

# **КОСТЛЯВЫЕ АТТРАКТОРЫ И МАГИЧЕСКИЕ БИЛЬЯРДЫ**

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление

**Диссертация**  
на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва, 2011

# Содержание

Введение	4
1 Костистые аттракторы	13
1.1 Введение	13
1.2 Определения и обозначения	15
1.2.1 Устойчивость неподвижных точек и инвариантных множеств	15
1.2.2 Аттрактор динамической системы. Определения и примеры	17
1.2.2.1 Максимальный аттрактор	18
1.2.2.2 Аттрактор Милнора	19
1.2.3 Сдвиг Бернулли и сдвиг Маркова	19
1.2.4 Косые произведения	22
1.2.4.1 Определение косого произведения	22
1.2.4.2 Примеры косых произведений	23
1.2.4.3 Ступенчатые и мягкие косые произведения	24
1.2.4.4 Обозначения	25
1.2.5 Хаусдорфова размерность и лемма Фальконера	26
1.3 Описание стратегии Городецкого–Ильяшенко–Негута	27
1.3.1 От случайных систем к ступенчатым косым произведениям	28
1.3.2 Гладкая реализация	29
1.3.2.1 Подкова Смейла	29
1.3.2.2 Отображение соленоида	30
1.3.2.3 Диффеоморфизм Аносова	32
1.3.3 Возмущения: от косых произведений к диффеоморфизмам общего вида	33
1.3.4 Краткое описание стратегии	35
1.4 Краткий обзор результатов, полученных при помощи стратегии	36
1.5 Пример в классе ступенчатых косых произведений	37
1.5.1 Определение костистого аттрактора для косых произведений	37
1.5.2 Пример	38
1.5.3 Наличие костей	38
1.5.4 Хаусдорфова размерность и мера	39

1.5.5	Плотность графика	41
1.5.6	Совпадение аттракторов	41
1.6	Возмущения в классе ступенчатых косых произведений	42
1.6.1	Открытое множество примеров	43
1.6.2	Наличие костей	44
1.6.3	Хаусдорфова размерность и мера	44
1.6.4	Отсутствие полых костей	46
1.7	Пример в классе гладких отображений	46
1.8	Возмущение в классе мягких косых произведений	48
1.8.1	Технические леммы	50
1.8.2	Наличие костей	57
1.8.3	Хаусдорфова размерность и мера	57
1.8.4	Плотность графика	59
1.8.5	Совпадение аттракторов	60
1.9	Открытое множество примеров в классе диффеоморфизмов	61
1.9.1	От отрезка к окружности	65
2	Бильярды	67
2.1	Введение	67
2.1.1	Основные результаты	67
2.1.2	От гипотезы Вейля к гипотезе Иврия	68
2.2	Сведение к аналитическому случаю	70
2.2.1	Идея доказательства	70
2.2.2	Формальное доказательство теоремы 2.1.3	71
2.3	Аналитический случай	72
2.3.1	Основные обозначения	72
2.3.2	Доказательство теоремы 2.1.4	73
2.3.3	Существование пределов	79
2.3.4	Случай двух особых точек	84
2.3.5	Случай касания	85
2.3.6	Совпадение пределов	91
2.4	Случай произвольного числа вершин	97
2.4.1	Пятиугольные орбиты	98

# Введение

Диссертация посвящена изучению динамических систем. Динамические системы возникают естественным образом как математические модели процессов, происходящих в реальном мире. Различают два вида динамических систем: динамические системы с *непрерывным временем*, задающиеся дифференциальными уравнениями, и динамические системы с *дискретным временем*, которые задаются отображением перехода от состояния системы в настоящий момент времени к её состоянию через фиксированный период времени.

Для системы с непрерывным временем можно рассмотреть семейство отображений  $\varphi_t$ , переводящих состояние системы в настоящий момент в её состояние через  $t$  секунд, а для системы с дискретным временем, заданной отображением  $F$ , — семейство отображений  $F^n$ .

В некоторых особенно простых случаях уравнения, описывающие динамическую систему, удаётся решить в явном виде, то есть получить явную формулу для  $\varphi_t$  или  $F^n$ . В этом случае свойства решений можно изучать, исходя из полученных формул.

В силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши, решение дифференциального уравнения существует и единственно и для более сложных систем. Однако, для этого решения почти никогда не существует явной формулы — выражения, содержащего только элементарные функции и знаки интеграла. Один из первых подобных примеров привел Лиувилль: решения уравнения  $\dot{x} = x^2 - t$  нельзя записать в явном виде.

Но даже если нельзя выписать формулу для решения уравнения, можно выяснить некоторые свойства динамической системы — это и есть задача качественной теории динамических систем.

Вот несколько вопросов, касающихся динамических систем, на которые иногда получается ответить, не зная решений соответствующего уравнения.

- Сколько у системы положений равновесия и периодических орбит?
- Для каких подмножеств фазового пространства множество точек, притягивающихся к этому подмножеству, достаточно велико?

- Что произойдет с траекторией динамической системы, если слегка изменить начальные условия?
- Что произойдет с фазовым портретом динамической системы (то есть с разбиением фазового пространства на траектории системы), если немного изменить законы движения системы?

Диссертация состоит из двух частей. Первая часть диссертации (глава 1 «Костистые аттракторы») касается аттракторов динамических систем. Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем, заданную отображением  $F: X \rightarrow X$ . Неформально говоря, замкнутое подмножество фазового пространства  $A \subset X$  называется *аттрактором* динамической системы, если

- образы достаточно большого подмножества фазового пространства под действием итеративных степеней  $F^n$  отображения  $F$  стремятся к  $A$ , когда  $n$  стремится к бесконечности;
- $A$  — наименьшее по включению инвариантное множество, к которому притягивается это подмножество фазового пространства.

Есть несколько формализаций понятия аттрактора. Некоторые из них приведены в пункте 1.2.2 «Аттрактор динамической системы. Определения и . . .».

Какой может быть геометрическая структура аттрактора динамической системы? В самых простых случаях аттрактор является дискретным множеством (или даже одной точкой — например, для отображения  $x \mapsto x/2$ ). Хорошо известны примеры, когда аттрактор локально представляет собой гладкое многообразие (например, для прямого произведения диффеоморфизма Аносова и сжимающего отображения), канторово множество (например, соленоид Смейла – Вильямса) или канторову книжку (например, аттрактор Лоренца).

Мы построим открытое множество диффеоморфизмов  $F: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  трёхмерного тора  $\mathbb{T}^3$  в себя, обладающих следующими свойствами. Прежде всего, каждый диффеоморфизм  $F$  из этого множества обладает инвариантным слоеением фазового пространства  $\mathbb{T}^3$  на окружности. Далее,  $F$  имеет единственный аттрактор, и этот аттрактор пересекает большинство слоев по одной точке (эту

часть аттрактора мы будем называть *графиком*), а остальные слои — по кривой (по *кости*). В этих свойствах пока что не содержится ничего нового. Более интересное свойство этого аттрактора состоит в том, что множество костей довольно велико, но не слишком велико. Точнее, выполнены следующие условия<sup>1</sup>.

- И график, и объединение костей плотны в аттракторе.
- Множество костей несчётно.
- Мера аттрактора равна нулю (а значит, множество костей не слишком большое).

Опишем пример динамической системы, имеющей костлявый аттрактор. Фазовое пространство этой системы будет не многообразием, а прямым произведением двух канторовых множеств  $C$  и отрезка  $I = [0, 1]$ .

Формально говоря, динамическая система на  $C \times C \times I$  не может иметь костлявого аттрактора в смысле того определения, которое мы привели выше. Однако, наше отображение будет сохранять разбиение фазового пространства на отрезки  $\{pt_1\} \times \{pt_2\} \times I$  и будет удовлетворять определению костлявого аттрактора, если в этом определении заменить инвариантное слоение тора слоением  $\{pt_1\} \times \{pt_2\} \times I$ .

Рассмотрим пространство  $\Sigma^3$  двусторонних последовательностей символов 0, 1, 2:

$$\omega = \dots\omega_{-1}\omega_0\omega_1\dots, \omega_i \in \{0, 1, 2\}.$$

Введём на пространстве  $\Sigma^3$   $p$ -адическую топологию: последовательности  $\omega$  и  $\eta$  будем считать близкими, если они совпадают на отрезке  $[-n, n]$  для большого  $n$ , то есть для большого значения  $n$  равенство  $\omega_i = \eta_i$  выполнено для всех  $i$ ,  $|i| \leq n$ . Несложно проверить, что пространство  $\Sigma^3$  есть прямое произведение двух канторовых множеств: множества  $\Sigma_+^3$  всех правых хвостов  $\omega_0\omega_1\dots\omega_n\dots$  и множества  $\Sigma_-^3$  всех левых хвостов  $\dots\omega_{-n}\dots\omega_{-2}\omega_{-1}$ .

В нашем примере фазовым пространством является прямое произведение  $\Sigma^3 \times I$ , а отображение задано следующим образом:

---

<sup>1</sup> Подробнее см. определение 1.1.1 на странице 13.

$$F: \Sigma^3 \times I \rightarrow \Sigma^3 \times I, \quad (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(x)),$$

где  $\sigma: \Sigma^3 \rightarrow \Sigma^3$  — сдвиг Бернулли,  $(\sigma\omega)_i = \omega_{i+1}$ , а отображения  $f_i: I \rightarrow I$ ,  $i = 0, 1, 2$  задаются формулами

$$f_0(x) = \frac{3x}{5}, \quad f_1(x) = \frac{2+3x}{5}, \quad f_2(x) = \frac{1}{2\pi} \arctan(10x - 5) + \frac{1}{2}. \quad (1)$$

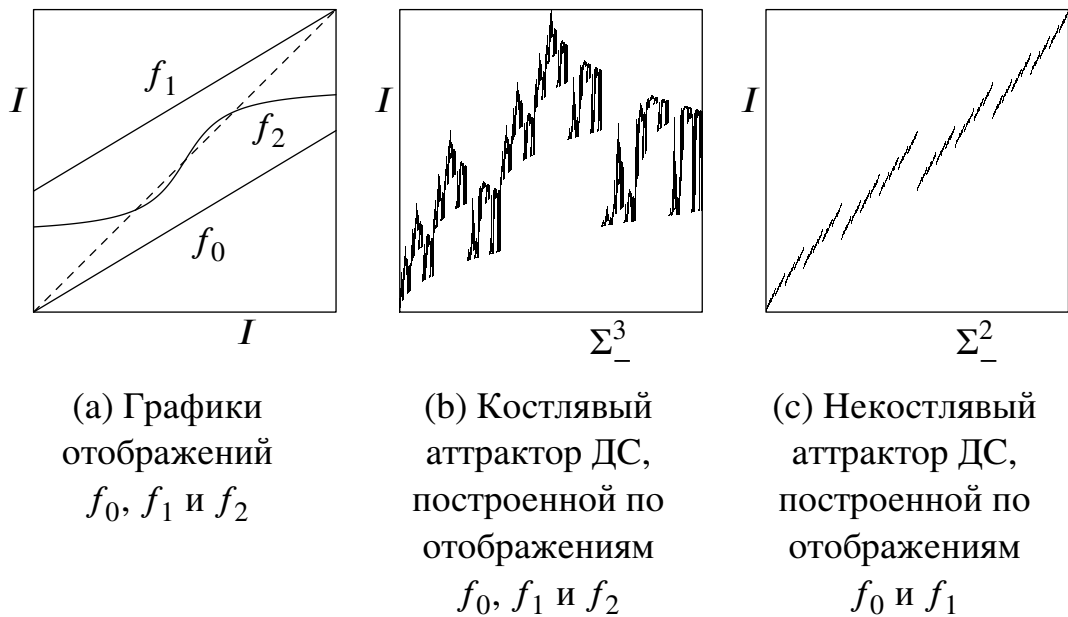
Графики отображений  $f_i$  изображены на рисунке 1 (а). Аттрактор соответствующей динамической системы приближенно изображен на рисунке 1 (б). Второй рисунок получен с помощью скрипта на языке программирования Ruby, который вычислил образы фазового пространства под действием отображения  $F^8$ . На втором рисунке горизонтальная ось соответствует пространству  $\Sigma^3_-$  всевозможных последовательностей  $\dots\omega_{-n}\dots\omega_{-2}\omega_{-1}$ , бесконечных влево, а вертикальная ось соответствует отрезку  $I$ . На рисунке не изображена еще одна координата, параметризующая всевозможные значения последовательности  $\omega_0, \omega_1, \dots$ , бесконечной вправо; дело в том, что пересечение аттрактора со слоем  $\{\omega\} \times I$  не зависит от  $\omega_i$ ,  $i \geq 0$ . Таким образом, аттрактор — это прямое произведение нашего рисунка на канторовское множество.

Чтобы наглядно показать разницу между костлявыми и некостлявыми аттракторами, на рисунке 1 (с) мы приближенно изобразили аттрактор (вернее, снова фактор-множество аттрактора по пространству  $\Sigma^2_+$ ) другой динамической системы, построенной по отображениям  $f_0$  и  $f_1$  таким же образом, как отображение  $F$  было построено по отображениям  $f_0, f_1$  и  $f_2$  (см. (1)).

В главе 1 доказано, что приведенное отображение  $F$  имеет костлявый аттрактор<sup>2</sup>. Далее мы действуем в соответствии со стратегией, предложенной Ю. С. Ильяшенко и А. С. Городецким [19 и 20] и развитой Ю. С. Ильяшенко и А. Негутом [9], и получаем открытое множество  $C^2$ -гладких диффеоморфизмов тора  $\mathbb{T}^3$ , имеющих костлявый аттрактор.

Доказательство основано на двух важных наблюдениях.

<sup>2</sup> Формальное определение костлявого аттрактора для таких отображений можно найти в параграфе 1.5 «Пример в классе ступенчатых косых произведений».



**Рисунок 1** Графики отображений (1), костлявый аттрактор и (тонкий) некостлявый аттрактор

- Марковское разбиение для диффеоморфизмов Аносова двумерного тора  $\mathbb{T}^2$  позволяет переходить от автоморфизмов пространства  $\Sigma^k \times S^1$  к диффеоморфизмам тора  $\mathbb{T}^3$  определенного типа («косые произведения», см. пункт 1.2.4).
- Стратегия Городецкого–Ильяшенко–Негута позволяет переходить от косых произведений к открытым множествам в пространстве  $C^2$ -гладких диффеоморфизмов. Эта стратегия основана на теореме М. W. Hirsch, С. С. Pugh и М. Shub [6, Теорема 6.8] и усиленных вариантах этой теоремы, полученных А. Городецким, Ю. С. Ильяшенко и А. Негутом [9 и 20].

В главе 2 «Бильярды» мы изучаем периодические орбиты в плоских бильярдах.

Математический бильярд — это математическая модель, описывающая движение частицы (идеального шара нулевого радиуса) на бильярдном столе; при этом граница бильярдного стола не обязательно должна быть многоугольником. Шар движется с постоянной скоростью внутри бильярдного стола, и отражается от границ бильярдного стола по обычному правилу (угол падения равен углу отражения).



Зачем нужно изучать такие динамические системы? По многим причинам; мы приведем три из них.

Прежде всего, бильярды возникают как математические модели во многих физических задачах. Например, если область  $\Omega$  — внутренность зеркальной комнаты (пол, стены и потолок которой — зеркала), луч света будет двигаться по бильярдной траектории в области  $\Omega$ . Еще одна известная модель, в которой возникают математические бильярды, — модель Больцмана идеального газа. Оказывается, что движение  $N$  шаров, которые упруго соударяются друг с другом, можно описать с помощью бильярдной траектории в некоторой области  $\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^{3N}$ .

Далее, изучать свойства динамической системы (например, эргодичность или свойства перемешивания) проще в специальных классах динамических систем, чем в общей ситуации.

Наконец, бильярдный поток — естественный аналог геодезического потока, и в некоторых случаях периодические орбиты бильярда играют ту же роль, что замкнутые геодезические. В частности, так происходит в спектральной теории оператора Лапласа  $\Delta u = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ . J. J. Duistermaat и V. Guillemin [4] обнаружили связь между свойствами множества замкнутых геодезических на римановом многообразии  $M$  без края и асимптотическим поведением собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа. Позже В. Я. Иврий показал, что в случае многообразия *с краем* множество замкнутых геодезических надо заменить на множество периодических траекторий бильярда.

Таким образом, оказывается, что асимптотика собственных значений лапласиана (то есть количество гармоник высокой частоты у барабана заданной формы) связана с периодическими траекториями соответствующего бильярда. Так как для основного текста этой диссертации результат В. Я. Иврия не понадобится, мы сформулируем только частный случай теоремы В. Я. Иврия, касающийся оператора Лапласа в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . История появления теоремы и её формулировка приведены в следующих абзацах петитом.

Пусть  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^n$  с кусочно гладкой границей достаточно высокой гладкости. Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа в этой области:

$$\Delta u = \mu, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

В 1911 Г. Вейль доказал, что для количества  $N(\lambda)$  собственных значений  $\mu$ , не превосходящих  $\lambda^2$ , выполнена следующая асимптотическая формула:

$$N(\lambda) = c_0 \text{Vol}_m(\Omega) \lambda^m + o(\lambda^m),$$

где  $c_0 = c_0(m)$  — известная геометрическая константа.

Он также предположил, что

$$N(\lambda) = c_0 \text{Vol}_m(\Omega) \lambda^m + c_1 \text{Vol}_{m-1}(\partial\Omega) \lambda^{m-1} + o(\lambda^{m-1}),$$

где  $c_1 = c_1(m)$  — известная константа, а  $\text{Vol}_{m-1}$  — это  $(m - 1)$ -мерный объём.

В 1975 J. J. Duistermaat и V. Guillemin [4] доказали гипотезу Вейля для многообразий без края<sup>3</sup>, удовлетворяющих следующему геометрическому условию: мера множества замкнутых геодезических равна нулю.

В 1980 В. Я. Иврий [21] обобщил этот результат на случай многообразий с краем. Оказывается, в этом случае роль замкнутых геодезических играют замкнутые бильярдные траектории соответствующего бильярда. Точнее, В. Я. Иврий доказал гипотезу Г. Вейля для многообразий с краем, удовлетворяющих некоторому геометрическому условию. В случае области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  условие заключалось в том, что множество периодических орбит соответствующего бильярда имеет меру нуль.

Затем В. Я. Иврий сформулировал следующую гипотезу.

**Гипотеза 1 (В. Я. Иврий, 1980)** *Для любой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ , граница которой  $C^\infty$ -гладкая, множество периодических орбит соответствующего бильярда имеет меру нуль.*

Когда В. Я. Иврий сформулировал эту гипотезу на семинаре Синая, участники семинара считали, что гипотеза будет доказана через несколько дней; затем — что через несколько недель или несколько месяцев... Вопрос остается открытым уже 30 лет!

В главе 2 «Бильярды» приведено доказательство частного случая гипотезы Иврия. Точнее, в этой главе показано, что для любой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с (кусочно) гладкой границей достаточной гладкости множество периодических четырёхугольных орбит имеет меру нуль.

<sup>3</sup> Выше мы сформулировали гипотезу Вейля только для областей в  $\mathbb{R}^m$ , но на самом деле Г. Вейль формулировал её для любых римановых многообразий. В этом случае объёмы в формулировке гипотезы надо заменить на интегралы некоторых функций, зависящих от метрики.

Доказательство проходит в два этапа: в параграфе 2.2 показано, что утверждение гипотезы Иврия достаточно доказать для бильярдов с кусочно-аналитической границей (теорема 2.1.3), а в параграфе 2.3 показано, что не существует бильярда на плоскости с кусочно-аналитической границей, для которого множество четырёхугольных периодических орбит имеет меру нуль (теорема 2.1.4).

Первый из этих результатов получен автором самостоятельно, а второй — в соавторстве с А. А. Глуцюком (ENS Lyon).

Сведение гипотезы В. Я. Иврия к случаю бильярда с кусочно-аналитической границей основано на теории пфаффовых систем. Ключевую роль в доказательстве теоремы 2.1.3 играет теорема Картана–Рашевского–Кураниси о бесконечной серии продолжений пфаффовой системы.

Основная идея доказательства второго результата — изучить границу множества четырёхугольных периодических траекторий. Оказывается, что точка общего положения на этой границе соответствует «вырожденной» периодической траектории. Мы рассматриваем всевозможные типы вырождений, и показываем, что для каждого типа вырождения множество соответствующих точек на границе не более чем счётно. Но множество точек границы равномощно вещественной прямой, и полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Я искренне благодарен моему научному руководителю профессору Юлию Сергеевичу Ильяшенко за постановку задачи, полезные обсуждения и постоянную поддержку во время моего обучения в аспирантуре. Я глубоко благодарен моему научному соруководителю академику Французской Академии Наук ведущему научному сотруднику Высшей Нормальной Школы Лиона Этьенну Жису (Étienne Ghys, UMPA ÉNS Lyon) за полезные обсуждения и критику предварительного текста диссертации.

Я также признателен кандидату физико-математических наук Виктору Алексеевичу Клепцыну, который оказал огромное влияние на мой выбор научного руководителя и помогает мне до сих пор. Я благодарю моего соавтора кандидата физико-математических наук сотрудника CNRS (ENS Lyon) Алексея Антоновича Глуцюка за плодотворное сотрудничество. Огромное спасибо моей

жене Наталии Борисовне Гончарук за терпение и помощь в подготовке текста диссертации.

# 1 Костистые аттракторы

## 1.1 Введение

Эта глава диссертации посвящена исследованию возможной геометрической структуры аттрактора типичной динамической системы. Основным результатом этой главы является построение открытого множества динамических систем на трёхмерном торе, аттрактор Милнора каждой из которых имеет новый тип геометрической структуры — является *костистым*.

Неформальное описание понятия костистого аттрактора и иллюстрирующий это понятие рисунок можно найти во введении к диссертации на странице 8. Приведём формальное определение.

**Определение 1.1.1** Пусть  $X$  — компактное многообразие. Будем говорить, что непрерывное отображение  $G: X \rightarrow X$  имеет *костистый аттрактор*, если существует  $G$ -инвариантное слоение с гладкими одномерными компактными слоями, для которого выполнены следующие условия.

1. Каждый слой инвариантного слоения либо не пересекает аттрактор Милнора  $A_M$  (см. определение 1.2.7), либо пересекает  $A_M$  по одной точке, либо пересекает  $A_M$  по кривой (*кости*).
2. Объединение костей плотно в аттракторе Милнора, и множество костей равномощно  $\mathbb{R}$ .
3. Пусть  $Y \subset X$  — насыщение аттрактора Милнора слоями инвариантного слоения. Тогда хаусдорфова размерность  $\dim_H A_M$  аттрактора Милнора строго меньше хаусдорфовой размерности множества  $Y$ .

$$\dim_H A_M < \dim_H Y. \quad (1.1)$$

Дополнение к объединению костей в аттракторе Милнора будем называть *графиком*  $\Gamma$ .

Второе условие означает, что множество костей достаточно большое, а последнее условие — что это множество не слишком большое.

**Определение 1.1.2** Будем говорить, что непрерывное отображение  $G: X \rightarrow X$  имеет *костистый аттрактор без полых костей*, если отображение  $G$  имеет костистый аттрактор и выполнены следующие два дополнительных условия.

1. График  $\Gamma$  плотен в аттракторе Милнора:  $SI\Gamma = A_M$ .
2. Аттрактор Милнора асимптотически устойчив.

Главным результатом этой главы диссертации является следующая теорема.

**Теорема 1.1.3** *Существует непустое открытое подмножество пространства  $C^2$ -гладких диффеоморфизмов трёхмерного тора, такое что каждый из диффеоморфизмов этого множества имеет костистый аттрактор без полых костей.*

Доказательство будет проводиться в рамках стратегии Городецкого–Ильяшенко–Негута, описанию которой посвящён параграф 1.3. Перед этим в параграфе 1.2 мы напомним некоторые определения и классические результаты из теории динамических систем, а также введём используемые в этой главе обозначения. В параграфе 1.4 мы перечислим некоторые результаты, полученные другими авторами в рамках стратегии Городецкого–Ильяшенко–Негута.

В параграфе 1.5 построен один пример отображения, имеющего костистый аттрактор без полых костей. В соответствии со стратегией Городецкого–Ильяшенко–Негута, пример строится в пространстве случайных динамических систем на отрезке, или, что то же самое, в пространстве ступенчатых косых произведений со слоем отрезок над сдвигом Бернулли (левым сдвигом в пространстве последовательностей). При этом приходится немного модифицировать определение 1.1.1, чтобы оно стало применимо к динамическим системам на  $\Sigma^k \times I$ .

Далее в параграфе 1.6 свойства построенного в предыдущем параграфе отображения распространены на открытое множество в пространстве ступенчатых косых произведений над сдвигом Маркова.

В параграфе 1.7 описана гладкая реализация исходного примера, то есть гладкое косое произведение, аттрактор которого имеет ту же структуру, что и аттрактор исходного косого произведения. В целях упрощения конструкции в

этом параграфе пример приводится в классе косых произведений над соленоидом Смейла–Вильямса.

В последних двух параграфах происходит переход от ступенчатых косых произведений к *гёльдеровым* (параграф 1.8), а затем к диффеоморфизмам общего вида (параграф 1.9). При этом второй переход напрямую следует из теорем Городецкого–Ильяшенко и Ильяшенко–Негута, а большинство технических трудностей приходится преодолевать в параграфе 1.8. В результате получается построить косое произведение со слоем окружность над диффеоморфизмом Аносова двумерного тора, такое что любой близкий к этому косому произведению диффеоморфизм трёхмерного тора имеет костистый аттрактор без полых костей.

## 1.2 Определения и обозначения

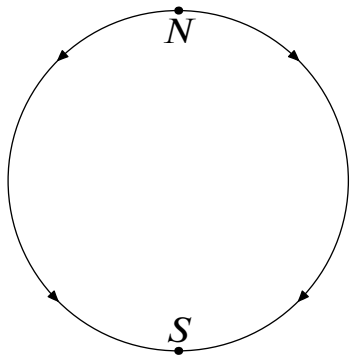
### 1.2.1 Устойчивость неподвижных точек и инвариантных множеств

Следующее понятие было введено Ляпуновым в работе [24].

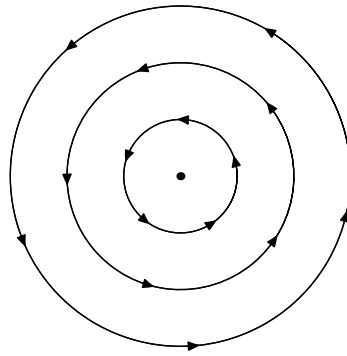
**Определение 1.2.1** Пусть  $F$  — непрерывное отображение метрического пространства  $X$  в себя. Неподвижная точка  $x \in X$ ,  $Fx = x$  называется *устойчивой по Ляпунову*, если для сколь угодно малой окрестности  $U \ni x$  существует меньшая окрестность  $V \ni x$ ,  $V \subset U$ , такая что траектории, начинающиеся в  $V$ , никогда не покидают  $U$ . Другими словами,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \varepsilon) \forall y \in B(x, \delta) \forall n > 0 d(x, F^n y) < \varepsilon.$$

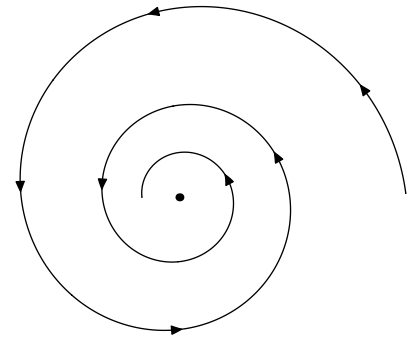
Рассмотрим отображения, изображённые на рисунке 1.1. У северо–южного отображения (см. рис. 1.1 (а)) есть две неподвижные точки: неустойчивый северный полюс  $N$  и устойчивый южный полюс  $S$ . У каждого из отображений, изображённых на рисунках 1.1 (b)–(f), есть ровно одна неподвижная точка — начало координат. Эта точка устойчива по Ляпунову для отображений на рисунках 1.1 (b) и (c) и неустойчива по Ляпунову для отображений на рисунках 1.1 (d)–(f).



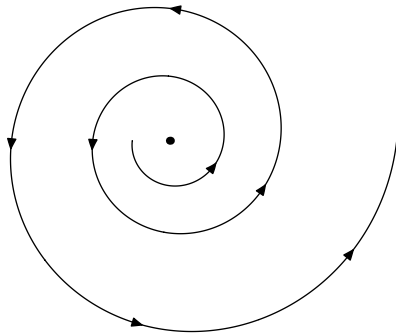
(a) Северо-южное отображение  
 $\varphi \mapsto \varphi - 0.1 \cos \varphi$



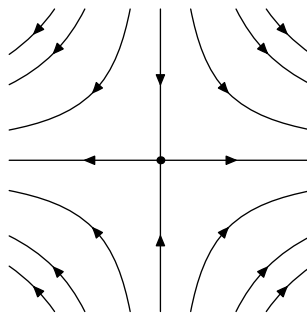
(b) Поворот  
 $(r, \varphi) \mapsto (r, \varphi + \alpha)$



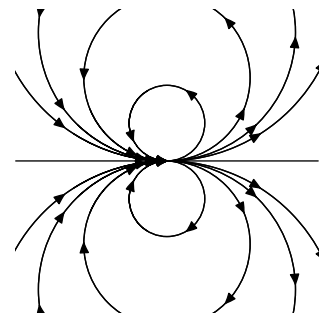
(c) Устойчивый фокус  
 $(r, \varphi) \mapsto (kr, \varphi + \alpha), k < 1$



(d) Неустойчивый фокус  
 $(r, \varphi) \mapsto (kr, \varphi + \alpha), k > 1$



(e) Линейное седло,  
 $(x, y) \mapsto (ax, y/a)$



(f) Преобразование потока поля  $\dot{z} = z^2$  на сфере Римана

**Рисунок 1.1** Примеры устойчивый и неустойчивых неподвижных точек



Хотя начало координат устойчиво по Ляпунову и для центра (рис. 1.1 (b)), и для устойчивого фокуса (рис. 1.1 (c)), эти отображения ведут себя вблизи начала координат совершенно по-разному. Это различие мотивирует следующее определение.

**Определение 1.2.2** Устойчивая по Ляпунову неподвижная точка  $x$  отображения  $F: X \rightarrow X$  называется *асимптотически устойчивой*, если все орбиты, начинающиеся в достаточно малой окрестности точки  $x$ , стремятся к  $x$ :

$$\exists \varepsilon > 0 \forall u \in B(x, \varepsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} F^n u = x.$$

**Замечание 1.2.3** В предыдущем определении требование устойчивости по Ляпунову нельзя опустить. Действительно, рассмотрим преобразования потока векторного поля  $\dot{z} = z^2$  на сфере Римана  $\bar{\mathbb{C}}$  (см. рисунок 1.1 (f)). Все траектории этого отображения стремятся к началу координат, но начало координат неустойчиво по Ляпунову.

Вместо неподвижной точки можно рассматривать произвольное инвариантное множество.

**Определение 1.2.4** Пусть  $F$  — непрерывное отображение метрического пространства  $X$  в себя. Инвариантное подмножество  $A \subset X$ ,  $F(A) = A$  называется *устойчивым по Ляпунову*, если для сколь угодно малой окрестности  $U \supset A$  существует меньшая окрестность  $V \supset A$ ,  $V \subset U$ , такая что траектории, начинающиеся в  $V$ , никогда не покидают  $U$ . Другими словами,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \varepsilon) \forall u \in X \forall n > 0 (d(A, u) < \delta \Rightarrow d(A, F^n u) < \varepsilon).$$

## 1.2.2 Аттрактор динамической системы. Определения и примеры

Пусть  $F$  — динамическая система с дискретным временем, то есть отображение полного метрического пространства  $X$  в себя,  $F: X \rightarrow X$ . Неформально говоря, аттрактор отображения  $F$  — это замкнутое множество  $A \subset X$ , притягивающее достаточно много орбит отображения  $F$ . У этого понятия есть несколько различных формализаций. Мы приведём две из них.

### 1.2.2.1 Максимальный аттрактор

Напомним сначала, что область  $U \subset X$  называется *поглощающей областью* отображения  $F$ , если  $F(U) \Subset U$ , то есть  $U$  содержит замыкание образа  $F(U)$ , и это замыкание компактно.

**Определение 1.2.5** Пусть  $F$  — отображение полного метрического пространства  $X$  в себя. Пусть  $U$  — поглощающая область отображения  $F$ . *Максимальный аттрактор* ограничения  $F|_U$  — это пересечение всех образов области  $U$  при итерациях<sup>4</sup> отображения  $F$ :

$$A_{\max}(F) = \bigcap_{n \geq 0} F^n(U).$$

Этот аттрактор называется *максимальным*, потому что он притягивает все точки поглощающей области  $U$ .

Заметим, что понятие максимального аттрактора зависит от поглощающей области  $U \subset X$ . Например, рассмотрим отображение, задаваемое в полярных координатах формулой

$$(r, \varphi) \mapsto (2r - r^2, \varphi - 0.1 \cos \varphi). \quad (1.2)$$

Ограничение этого отображения на единичную окружность — северо-южное отображение, изображённое на рисунке 1.1 (а). Приведём некоторые поглощающие области и соответствующие им максимальные аттракторы.

Поглощающая область	Максимальный аттрактор
Диск $\{(x, y) \mid r < 2\}$	Диск $\{(x, y) \mid r \leq 1\}$
Кольцо $\{(x, y) \mid 0.5 < r < 1.5\}$	Окружность $\{(x, y) \mid r = 1\}$
Диск $B_1(S) = \{(x, y) \mid x^2 + (y + 1)^2 < 0.5\}$	Южный полюс $\{S\}$

**Таблица 1.1** Поглощающие области и соответствующие максимальные аттракторы северо-южного отображения (1.2)

<sup>4</sup> Здесь и далее  $g^k$  —  $k$ -я итерационная степень отображения  $g$ .

Как выбрать, который из этих аттрактор изучать? Один из возможных ответов на этот вопрос приведён в следующем подпункте.

### 1.2.2.2 Аттрактор Милнора

Представьте себе, что мы исследуем предельное поведение системы (1.2) при помощи следующего компьютерного эксперимента. Мы выбираем случайную точку, вычисляем её образы при большом количестве итераций отображения  $F$ , рисуем черные кружочки с центрами в этих образах и смотрим на получившееся чёрное множество. Для северо-южного отображения (1.2) образы всех точек, не лежащих на луче  $\varphi = \pi/2$ , стремятся к южному полюсу. Но вероятность того, что случайно выбранная точка попадёт на этот луч, равна нулю. Следовательно, с вероятностью 1 мы увидим только чёрное пятно около южного полюса.

Естественно считать, что аттрактор отображения (1.2) содержит *только* южный полюс. Одно из определений аттрактора, согласно которому единственный аттрактор отображения (1.2) — это южный полюс, предложил Джон Милнор [13].

**Определение 1.2.6** Пусть  $F$  — отображение метрического пространства в себя. Множество  $\omega(x)$  предельных точек последовательности  $F^n(x)$ ,  $n > 0$ , называется  $\omega$ -предельным множеством точки  $x \in X$ .

**Определение 1.2.7** Пусть  $X$  — метрическое пространство с мерой,  $F: X \rightarrow X$  — непрерывное измеримое отображение. Наименьшее замкнутое множество  $A_M \subset X$ , которое содержит  $\omega$ -предельные множества почти всех точек множества  $X$ , называется *аттрактором Милнора*<sup>5</sup> отображения  $F$ .

### 1.2.3 Сдвиг Бернулли и сдвиг Маркова

В этом пункте мы дадим определения сдвига Бернулли и сдвига Маркова. Фазовое пространство сдвига Бернулли — это пространство  $\Sigma^k$  бесконечных в обе стороны последовательностей чисел  $\omega_i$ ,  $\omega_i \in \{0, \dots, k-1\}$ , а фазовое

<sup>5</sup> Милнор в своей работе называет это множество *likely limit set*.

пространство сдвига Маркова — подмножество пространства  $\Sigma^k$ . Оба сдвига задаются формулой  $(\sigma\omega)_i = \omega_{i+1}$ . Главное различие между этими двумя понятиями заключается в выборе меры на пространстве  $\Sigma^k$ .

Сначала определим сдвиг Бернулли. В этом случае элементы последовательности  $\omega$  — независимые одинаково распределённые случайные величины. Более формально, выберем набор вероятностей  $p_0, \dots, p_{k-1}$ , такой что  $\sum p_i = 1$ . На цилиндрах вида

$$C_a^b(v) := \{\omega \mid \omega_a = v_a, \dots, \omega_b = v_b\}, \quad a \leq b$$

мера задаётся формулой

$$\mu(C_a^b(v)) := p_{v_a} \cdot \dots \cdot p_{v_b}, \quad (1.3)$$

а затем продолжается на сигма-алгебру, порождённую этими цилиндрами.

Мы также снабжаем пространство  $\Sigma^k$  « $(\lambda_-, \lambda_+)$ -адической» метрикой

$$d(\omega, \tilde{\omega}) = \max \left( \lambda_-^{-n_-(\omega, \tilde{\omega})}, \lambda_+^{-n_+(\omega, \tilde{\omega})} \right),$$

где  $n_{\pm}(\omega, \tilde{\omega})$  — наименьшее целое неотрицательное число  $n$ , такое что  $\omega_{\pm n} \neq \tilde{\omega}_{\pm n}$ . Часто мы будем рассматривать  $(k, k)$  — адическую метрику.

**Определение 1.2.8** *Сдвигом Бернулли* называется левый сдвиг  $(\sigma\omega)_i = \omega_{i+1}$  пространства  $\Sigma^k$ , снабжённого  $(\lambda_-, \lambda_+)$ -адической метрикой и мерой (1.3).

В случае сдвига Маркова величины  $\omega_i$  перестают быть независимыми, но образуют однородную цепь Маркова. Другими словами,

- величины  $\omega_n$  одинаково распределены:  $P(\omega_n = i) = p_i$ ;
- величина  $\omega_{n+1}$  зависит только от  $\omega_n$ :

$$P(\omega_{n+1} = v_{n+1} \mid \omega_m = v_m, \dots, \omega_n = v_n) = P(\omega_{n+1} = v_{n+1} \mid \omega_n = v_n);$$

- вероятности перехода  $A_{ij} = P(\omega_{n+1} = j \mid \omega_n = i)$  не зависят от  $n$ .

Формально говоря, возьмём матрицу  $A$  размера  $k \times k$  и набор чисел  $p_i$ , удовлетворяющих следующим условиям.

- Вероятности перехода неотрицательны,  $A_{ij} \geq 0$ .
- Вероятности  $p_i$  положительны,  $p_i > 0$ .
- Матрица  $A$  *стохастическая*, то есть

$$\sum_{j=1}^k A_{ij} = 1.$$

- Сумма вероятностей находиться в каждом из состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

- Вероятность находиться в состоянии  $j$  равна сумме вероятностей перехода в это состояние из некоторого предыдущего:

$$\sum_{i=1}^k p_i A_{ij} = p_j.$$

Другими словами,  $(p_i)$  — левый собственный вектор матрицы  $A$  с собственным значением 1.

Меру цилиндра  $C_a^b(v)$  положим равной

$$\mu_A(C_a^b(v)) = p_{v_a} A_{v_a v_{a+1}} \cdots A_{v_{b-1} v_b}. \quad (1.4)$$

Вышеприведённые свойства матрицы  $A$  и набора вероятностей  $p_i$  позволяют продолжить меру  $\mu_A$  на сигма-алгебру, порождённую цилиндрами  $C_a^b(v)$ .

Левый сдвиг на пространстве  $\Sigma^k$ , снабжённом мерой (1.4), естественно ограничить на множество *разрешённых последовательностей*

$$\Sigma_A^k = \left\{ \omega \mid \forall i \in \mathbb{Z} A_{\omega_i \omega_{i+1}} \neq 0 \right\},$$

то есть последовательностей, для которых вероятность каждого из переходов от символа к следующему положительна.

**Определение 1.2.9** *Сдвигом Маркова* называется левый сдвиг  $(\sigma\omega)_i = \omega_{i+1}$  множества разрешённых последовательностей  $\Sigma_A^k$ , снабжённого  $(\lambda_-, \lambda_+)$ -адической метрикой и мерой (1.4).

Оказывается, во многих случаях набор вероятностей  $p_i$  полностью определяется матрицей  $A_{ij}$ . Для формулировки точного результата нам потребуются следующее определение.

**Определение 1.2.10** Матрица  $A$  называется *неотрицательной* (соотв., *положительной*), если все коэффициенты матрицы  $A$  неотрицательны (соотв., положительны).

**Теорема 1.2.11 (Перрон, 1907; Фробениус, 1912)** Пусть  $A$  — неотрицательная стохастическая матрица, такая что для некоторого  $t$  матрица  $A^t$  положительна. Тогда  $1$  — однократное собственное значение матрицы  $A$ , причём правый и левый собственные вектора, соответствующие этому значению, положительны, а все остальные собственные значения матрицы  $A$  по модулю строго меньше единицы.

Другими словами, в условиях теоремы для матрицы  $A$  существует и единственно *стационарное распределение вероятностей*  $\{p_i\}$ .

## 1.2.4 Косые произведения

### 1.2.4.1 Определение косого произведения

Ключевую роль в стратегии Городецкого–Ильяшенко–Негута играет класс *косых произведений*.

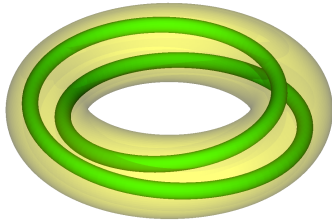
**Определение 1.2.12** Пусть  $h: B \rightarrow B$  — непрерывное отображение метрического пространства  $B$  в себя,  $M$  — метрическое пространство. Непрерывное отображение  $F: B \times M \rightarrow B \times M$  называется *косым произведением* над отображением  $h$  со слоем  $M$ , если оно имеет вид

$$F: B \times M \rightarrow B \times M, \quad F: (b, x) \mapsto (h(b), f_b(x)).$$

Отображения  $f_b$  называются *послойными отображениями* косо́го произведения  $F$ .

### 1.2.4.2 Примеры косых произведений

Очевидно, прямое произведение двух отображений является косым произведением. Приведём несколько менее тривиальных примеров.



**Пример 1.2.13 (Соленоид Смейла–Вильямса)**

Один из наиболее известных примеров косых произведений — это соленоид Смейла–Вильямса. Это отображение полнотория

$$S^1 \times D^2 = \{(z, w) \mid |z| = 1, |w| \leq 1\}$$

**Рисунок 1.2** Отображение соленоида<sup>6</sup> для  $k = 2$  в себя, задаваемое формулой

$$s: (z, w) \mapsto (z^k, 0.5z + \varepsilon w), \quad (1.5)$$

где  $\varepsilon$  — маленькое положительное число. Мы обсудим некоторые свойства этого отображения в подпункте 1.3.2.2.

**Пример 1.2.14 (Щетинистый аттрактор)** Рассмотрим отображение  $F: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ , задаваемое формулой

$$F: (y, x) \mapsto (2y, h(y)x), \quad h(y) = 1 + 0.5 \cos 2\pi y.$$

Это отображение — косое произведение над удвоением окружности  $y \mapsto 2y$ . Можно показать, что оно не сопряжено прямому произведению. Мы не будем ни доказывать этот факт, ни использовать его.

Продолжим отображение  $F$  по непрерывности до отображения  $\hat{F}: S^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ . Поскольку  $\int_{S^1} \log h(y) dy < 0$ , из теоремы Биркгофа–Хинчина следует, что почти все точки фазового пространства стремятся к окружности  $S^1 \times$

<sup>6</sup> © Илья Щуров, работа в public domain. Рисунок получен при помощи программ gnuplot и pov-ray. Исходный код можно найти по адресу [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Smale-Williams\\_Solenoid.png](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Smale-Williams_Solenoid.png)

$\{0\}$ , а значит, эта окружность содержит милноровский аттрактор отображения  $\hat{F}$ . На самом деле милноровский аттрактор совпадает с этой окружностью. С другой стороны, точки бесконечного множества слоёв  $\{pt\} \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$  („щетины“) стремятся к окружности  $S^1 \times \{\infty\}$ . Из этого следует, например, что милноровский аттрактор отображения  $\hat{F}$  неустойчив по Ляпунову.

**Пример 1.2.15 (Перемежающиеся бассейны)** Рассмотрим пространство косых произведений над удвоением окружности, сохраняющих границу цилиндра:

$$F: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1], \quad (y, x) \mapsto (2y, f_y(x)), \quad f_y(0) = 0, \quad f_y(1) = 1.$$

И. Кан [11] нашёл непустое открытое подмножество этого пространства, такое что каждая система из этого подмножества имеет два аттрактора,  $S^1 \times \{0\}$  и  $S^1 \times \{1\}$ , причём их области притяжения сильно перемешаны: для сколь угодно малой окрестности  $U$  пересечение этой окрестности с каждой из областей притяжения имеет положительную меру. Вблизи каждой из граничных окружностей пример И. Кана устроен как щетинистый аттрактор, то есть  $\int_{S^1} \log f'_y(i) dy < 0$  для  $i = 0, 1$ .

Позже Ю. Ильяшенко, В. Клепцын, П. Салтыков [8 и 22] и независимо К. Бонатти, Л. Диаз и М. Виана [2] показали, что свойство перемежаемости аттракторов выживает при малых возмущениях в классе  $C^2$ -гладких отображений цилиндра, сохраняющих границу.

### 1.2.4.3 Ступенчатые и мягкие косые произведения

Хотя изучать косые произведения проще, чем изучать отображения общего вида, бывает удобно начать изучение с ещё меньшего класса *ступенчатых косых произведений*.

**Определение 1.2.16** Косое произведение  $F$  над сдвигом Маркова  $\sigma_A: \Sigma_A^k \rightarrow \Sigma_A^k$  называется *ступенчатым*, если послойные отображения  $f_\omega$  зависят только от нулевого символа  $\omega_0$  последовательности  $\omega$ :

$$F: \Sigma_A^k \times M \rightarrow \Sigma_A^k \times M, \quad (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(x)), \quad f_i: M \rightarrow M.$$



Именно в классе ступенчатых косых произведений удобно строить новые типы предельного поведения динамических систем.

Ступенчатое косое произведение над сдвигом Бернулли можно рассматривать как *случайную динамическую систему* на  $M$ : в каждый момент времени мы случайным образом выбираем, которое из отображений  $f_i$  применить в данный момент.

Желая подчеркнуть, что мы рассматриваем косые произведения общего вида (а не ступенчатые), мы будем называть их *мягкими* косыми произведениями.

#### 1.2.4.4 Обозначения

В этом подпункте мы введём некоторые обозначения, относящиеся к косым произведениям.

Пусть  $f_{b,n}$  — ограничение  $n$ -й композиционной степени  $F^n$  на слой  $\{b\} \times M$ , а  $f_{b,n}^-$  — ограничение отображения  $F^{-n}$  на тот же слой.

$$\begin{aligned} f_{b,n} &= f_{h^{-1}b} \circ \dots \circ f_b; \\ f_{b,n}^- &= (f_{h^{-n}b,n})^{-1} = f_{h^{-n}b}^{-1} \circ \dots \circ f_b^{-1}. \end{aligned}$$

Полный образ отображения  $F^n$  пересекает слой  $\{b\} \times M$  по множеству  $\{b\} \times M_{b,n}$ , где

$$M_{b,n} = f_{h^{-n}b,n}(M) = f_{h^{-1}b} \circ \dots \circ f_{h^{-n}b}(M).$$

Следующие несколько обозначений имеют смысл только для косых произведений со слоем отрезок  $I = [0, 1]$ .

Ясно, что в этом случае множество  $M_{b,n}$  — отрезок. Далее мы будем обозначать этот отрезок  $I_{b,n}$ . В параграфе 1.8 мы введём обозначение  $I_{v,n}$  для *конечного* слова  $v$  (см. определение 1.8.6), имеющее другой смысл. Путаницы не возникнет, так как одно из определений применимо только для конечных слов  $v$ , а другое — только для точек базы, то есть точек  $\mathbb{T}^2$  или  $\Sigma_A^k$ .

Пусть  $\sigma_n^-(b)$  и  $\sigma_n^+(b)$  — нижний и верхний концы отрезка  $I_{b,n}$ , соответственно,

$$\begin{aligned}\sigma_n^-(b) &= f_{h^{-n}b,n}(0) = f_{h^{-1}b} \circ \dots \circ f_{h^{-n}b,n}(0); \\ \sigma_n^+(b) &= f_{h^{-n}b,n}(1) = f_{h^{-1}b} \circ \dots \circ f_{h^{-n}b,n}(1).\end{aligned}$$

Очевидно,  $I_{b,0} \supset I_{b,1} \supset \dots \supset I_{b,n} \supset \dots$ , значит, максимальный аттрактор пересекает слой  $\{b\} \times I$  по отрезку  $\{b\} \times I_b$ , где

$$I_b = \bigcap_{n \geq 0} I_{b,n} = [\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n^-(b), \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n^+(b)] =: [\sigma^-(b), \sigma^+(b)].$$

**Лемма 1.2.17** *Максимальный аттрактор косого произведения  $F: V \times I \rightarrow V \times I$  пересекает каждый слой  $\{b\} \times I$  по отрезку  $[\sigma^-(b), \sigma^+(b)]$ , причём функция  $\sigma^-: V \rightarrow I$  (соотв.,  $\sigma^+: V \rightarrow I$ ) полунепрерывна снизу (соотв., сверху).*

**Доказательство** Функции  $\sigma_n^-$  и  $\sigma_n^+$  непрерывны в силу непрерывности отображения  $F$ , следовательно, функция  $\sigma^-(b) = \sup_n \sigma_n^-(b)$  полунепрерывна снизу, а функция  $\sigma^+(b) = \inf_n \sigma_n^+(b)$  — сверху. ■

## 1.2.5 Хаусдорфова размерность и лемма Фальконера

Напомним определение хаусдорфовой размерности.

**Определение 1.2.18** Пусть  $X$  — метрическое пространство. Рассмотрим открытое покрытие  $U$  пространства  $X$ , то есть конечное или счётное семейство открытых шаров  $Q_j$  радиусов  $r_j$ , такое что объединение шаров  $Q_j$  совпадает с пространством  $X$ . Определим  $d$ -мерный объём  $V_d(U)$  покрытия  $U$  по формуле

$$V_d(U) = \sum_j r_j^d.$$

*Хаусдорфовой размерностью* пространства  $X$  называется точная нижняя грань всех чисел  $d$ , таких что существует открытое покрытие пространства  $X$  сколь угодно малого  $d$ -мерного объёма.

Напомним, что хаусдорфова размерность компактного  $d$ -мерного многообразия  $M$  равна  $d$ . Размерность любого подмножества  $A \subset M$  положительной

меры Лебега также равна  $d$ . Видимо, наиболее известный пример метрического пространства, хаусдорфова размерность которого не является целым числом — это Канторово множество:

$$\dim_H \left\{ x \in [0, 1] \mid \forall n \in \mathbb{N} \{3^n x\} \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \right\} = \log_3 2.$$

Следующая лемма оценивает, насколько может измениться хаусдорфова размерность под действием гёльдерова отображения.

**Лемма 1.2.19 (Фальконер, [5])** Пусть  $Z$  — риманово многообразие,  $A$  — подмножество  $Z$ . Пусть  $\varphi: Z \rightarrow Z$  — гёльдерово отображение с показателем  $\alpha$ . Тогда

$$\dim_H \varphi(A) < \frac{\dim_H A}{\alpha}. \quad (1.6)$$

В частности, если выполнено неравенство  $\dim_H A < \alpha \dim Z$ , то из леммы Фальконера можно получить, что  $\mu(\varphi(A)) = 0$ . Действительно, из этого неравенства и леммы Фальконера следует, что  $\dim_H \varphi(A) < \dim Z$ , откуда  $\mu(\varphi(A)) = 0$ .

Заметим, что равенство  $\mu(A) = 0$ , вообще говоря, не влечёт равенство  $\mu(\varphi(A)) = 0$ . Например, образ стандартного канторова множества под действием отображения «канторова лестница» — отрезок.

### 1.3 Описание стратегии Городецкого–Ильяшенко–Негута

Хотя *отдельные примеры* динамических систем с необычными свойствами и интересны, гораздо больший интерес представляют собой *непустые открытые множества* в пространстве динамических систем, полностью состоящие из систем с необычным поведением.

Можно облегчить себе задачу построения примеров систем с необычными свойствами, если разрешить рассматривать не только классические динамические системы (то есть действия группы  $\mathbb{Z}$ ), но и действия свободной полугруппы с  $k$  образующими. Действительно, действие такой полугруппы на некотором многообразии может быть устроено гораздо сложнее, чем действие одного диффеоморфизма на том же многообразии.

А. Городецкий и Ю. С. Ильяшенко [20] обнаружили, что динамика типичного действия свободной полугруппы на компактном многообразии тесно связана с динамикой типичной «классической» динамической системы на некотором другом фазовом пространстве. Эта связь приводит нас к эвристическому принципу: *все явления, наблюдаемые для динамики типичного действия свободной полугруппы, можно пронаблюдать и для типичных гладких динамических систем*<sup>7</sup>.

В пунктах 1.3.1–1.3.3 мы поочередно опишем основные этапы стратегии Городецкого–Ильяшенко–Негута, перечислим возникающие трудности и некоторые способы их преодоления.

### 1.3.1 От случайных систем к ступенчатым косым произведениям

Первый шаг стратегии Городецкого–Ильяшенко–Негута заключается в переходе от случайной динамической системы к ступенчатому косому произведению.

А именно, рассмотрим случайную динамическую систему на многообразии  $M$ , в которой на каждом шаге применяется один из диффеоморфизмов  $f_0, \dots, f_{k-1}$ . Построим по набору отображений  $f_i$  косое произведение над сдвигом Бернулли, как описано в подпункте 1.2.4.3. Видно, что орбиты полугруппы  $\mathcal{F}$ , порождённой диффеоморфизмами  $f_i$ , совпадают с проекциями положительной части орбит отображения  $F$  вдоль базы на слой. Следовательно, свойства действия полугруппы  $\mathcal{F}$  можно переформулировать в терминах ступенчатого косого произведения  $F$ .

Часто бывает удобно пропустить этот шаг стратегии, и сразу формулировать результаты в терминах свойств ступенчатых косых произведений. В частности, именно так мы поступим при построении костистого аттрактора. В параграфе 1.5 мы приведем пример *одного* ступенчатого косого произведения, имеющего костистый аттрактор, затем в параграфе 1.6 мы покажем, что все свойства аттрактора выживают при малых возмущениях *в классе ступенчатых косых произведений*.

---

<sup>7</sup> точнее, для динамических систем, типичных в некотором открытом множестве в пространстве диффеоморфизмов

## 1.3.2 Гладкая реализация

Конечно,  $\Sigma^k \times M$  не является гладким многообразием, поэтому наличие странных свойств у динамической системы с таким фазовым пространством не очень удивительно. В этом пункте мы опишем несколько способов перехода от примера в классе ступенчатых косых произведений к примеру в классе косых произведений над гладким отображением. Сначала мы построим гладкую реализацию сдвига Бернулли (и сдвига Маркова). Есть два широко известных отображения, ограничения которых на их максимальные гиперболические множества (полу)сопряжены сдвигу Бернулли, и еще одно отображение, которое полусопряжено сдвигу Маркова. В следующих подпунктах мы опишем эти отображения. Чтобы построить гладкую реализацию косоугольного произведения  $F$ , надо заменить в базе сдвиг  $\sigma$  на одно из этих отображений.

### 1.3.2.1 Подкова Смейла

Подкова Смейла — простейшая гладкая реализация сдвига Бернулли. Возьмём  $k$  «горизонтальных» прямоугольников  $D_i$  и  $k$  «вертикальных» прямоугольников  $D'_i$ ,

$$D_i = [0, 1] \times \left[ \frac{2i-1}{2k+1}, \frac{2i}{2k+1} \right]; \quad D'_i = \left[ \frac{2i-1}{2k+1}, \frac{2i}{2k+1} \right] \times [0, 1].$$

Отображение подковы  $h$  отображает каждый «горизонтальный» прямоугольник  $D_i$  на соответствующий «вертикальный» прямоугольник  $D'_i$ , сжимая его по горизонтали и растягивая по вертикали:

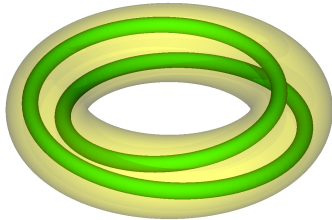
$$h|_{D_i}(x, y) = \left( \frac{2i+x-1}{2k+1}, (2k+1)y - (2i-1) \right).$$

Это отображение легко продолжить до гомеоморфизма двумерной сферы. У отображения  $h$  (и, следовательно, у его продолжения) есть гиперболическое инвариантное множество  $\Lambda$ , такое что ограничение  $h|_{\Lambda}$  сопряжено сдвигу Бернулли  $\sigma: \Sigma^k \rightarrow \Sigma^k$ . Множество  $\Lambda$  состоит из точек  $(x, y)$ , таких что в записях обеих координат этих точек в системе счисления с основанием  $2k+1$  встречаются только нечётные цифры.

Подкова Смейла позволяет легко построить гладкую реализацию любого ступенчатого косо́го произведения  $F$  над сдвигом Бернулли. Действительно, достаточно взять косо́е произведение  $G$  над  $h$ , такое что  $g_b = f_i$  для  $b \in D_i$ . Тогда ограничение  $G|_{\Lambda \times M}$  будет сопряжено исходному косо́му произведению  $F$ .

Основной недостаток этой реализации состоит в том, что множество  $\Lambda$  неустойчиво по Ляпунову для  $h$ , а значит, множество  $\Lambda \times M$  неустойчиво по Ляпунову для  $G$ .

### 1.3.2.2 Отображение соленоида



**Рисунок 1.3** Отображение соленоида<sup>8</sup> для  $k = 2$ .

Напомним (см. 1.2.4.2), что отображение соленоида переводит полноторие

$$S^1 \times D^2 = \{(z, w) \mid |z| = 1, |w| \leq 1\}$$

в себя. Это отображение задаётся формулой

$$s: (z, w) \mapsto (z^k, 0.5z + \varepsilon w), \quad (1.7)$$

где  $\varepsilon$  — маленькое положительное число.

Образ отображения  $s$  — это «тонкое» полноторие, делающее  $k$  оборотов внутри исходного полнотория (см. рис. 1.3 для  $k = 2$ ). Несложно показать, что максимальный аттрактор отображения  $s$  пересекает каждый диск  $\{z\} \times D^2$  по множеству канторовского типа.

Сдвиг Бернулли  $\sigma: \Sigma^k \rightarrow \Sigma^k$  полусопряжён ограничению отображения  $s$  на его максимальный аттрактор  $\Lambda$ , то есть существует отображение  $\Phi: \Sigma^k \rightarrow \Lambda$ , такое что следующая диаграмма коммутативна.

<sup>8</sup> © Илья Щуров, работа в public domain. Рисунок получен при помощи программ gnuplot и pov-ray. Исходный код можно найти по адресу [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Smale-Williams\\_Solenoid.png](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Smale-Williams_Solenoid.png)

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma^k & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma^k \\
\downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\
\Lambda & \xrightarrow{s} & \Lambda
\end{array}$$

Полусопряжение  $\Phi$  называется *отображением судьбы*. Оно задаётся следующим образом. Разделим окружность  $|z| = 1$  на  $k$  равных дуг  $d_i$ , а исходное полноторие — на  $k$  равных частей

$$A_i = d_i \times D^2, \quad d_i = \{z \in S^1 \mid i \leq k \arg z < i + 1\}.$$

Для каждой последовательности  $\omega \in \Sigma^k$  её образ  $\Phi(\omega)$  — это единственная точка полнотория  $x$ , такая что для любого целого  $j$  точка  $s^j(x)$  принадлежит замыканию множеств  $A_{\omega_j}$ . Пусть  $\Sigma_0^k \subset \Sigma^k$  — множество последовательностей  $\omega \in \Sigma^k$ , не имеющих правого хвоста из символов „ $k - 1$ ”. Можно показать, что отображение судьбы  $\Phi$  непрерывно на  $\Sigma^k$ , а ограничение отображения  $\Phi$  на множество  $\Sigma_0^k$  биективно. Более того, прямой образ стандартной меры Бернулли на  $\Sigma^k$  — это SRB-мера на  $\Lambda$ .

Соленоид  $\Lambda$  — это максимальный аттрактор отображения  $s$ . Следовательно, множество  $\Lambda \times M$  устойчиво по Ляпунову относительно отображения  $G$  и, более того, содержит максимальный аттрактор этого отображения. Другими словами, динамика ограничения  $G|_{\Lambda \times M}$  характеризует динамику отображения  $G$  на всём фазовом пространстве.

Однако теперь области, соответствующие разным символам  $\omega_0$ , соприкасаются, поэтому ступенчатое косое произведение  $G$  с послойными отображениями  $g_b(x) = f_i$ ,  $b \in A_i$  разрывно.

Один из способов обойти эту трудность — это положить  $g_b(x) = f_i$  для  $b \in A_i \setminus (d'_i \times D^2)$ , где  $d'_i$  — маленькие дуги вблизи концов дуг  $d_i$ , и продолжить полученное косое произведение до непрерывного косого произведения  $G$ . В этом случае о послойных отображениях над множествами  $d'_i \times D^2$  известно очень мало, и в доказательствах приходится следить, чтобы интересующие нас точки не принадлежали этим множествам. Хотя это и кажется несложным,

иногда приходится избегать ещё и точек, образы которых принадлежат одной из таких дуг, а такие точки образуют множество полной меры.

Другой способ заключается в том, чтобы рассмотреть отображение соленоида, при котором образ исходного полнотория  $S^1 \times D$  делает не  $k$ , а  $2k$  оборотов внутри полнотория  $S^1 \times D$ . Тогда можно положить  $g_b(x) = f_i$  при  $b \in A_{2i}$ , и доопределить отображение  $G$ , чтобы получилось гладкое косое произведение. На первый взгляд, при таком способе надо избегать ещё большего количества точек, однако теперь проекция образа каждой из частей  $A_{2i}$  на  $z$  — это вся окружность. Оказывается, этот факт позволяет перенести многие доказательства со случая ступенчатого косого произведения на случай мягкого косого произведения над отображением соленоида.

При реализации сдвига Бернулли при помощи отображения соленоида возникают ещё две технические трудности. Во-первых, отображение соленоида только *полусопряжено* сдвигу Бернулли. Во-вторых, отображение соленоида сжимает в устойчивом направлении сильнее, чем растягивает в неустойчивом. Поэтому, если мы хотим, чтобы полусопряжение со сдвигом Бернулли было липшицевым, на пространстве  $\Sigma^k$  приходится рассматривать метрику, у которой показатель сжатия  $\lambda_+$  не равен показателю растяжения  $\lambda_-$  (см. пункт 1.2.3). Обычно обе эти трудности несложно преодолеть.

### 1.3.2.3 Диффеоморфизм Аносова

Мы не будем обсуждать здесь общее определение диффеоморфизма Аносова, а дадим лишь определение линейного диффеоморфизма Аносова двумерного тора  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Пусть  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ , то есть  $A$  — целочисленная матрица  $2 \times 2$  с определителем 1. Тогда действие матрицы  $A$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  опускается до диффеоморфизма двумерного тора  $\mathbb{T}^2$ . Мы будем обозначать полученный диффеоморфизм тора той же буквой  $A$ .

**Определение 1.3.1** Действие матрицы  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  на двумерном торе называется *линейным диффеоморфизмом Аносова*, если собственные значения матрицы  $A$  вещественны и различны.



Оказывается, диффеоморфизм Аносова полусопряжён сдвигу Маркова на пространстве разрешённых слов  $\Sigma_B^k$ . Чтобы это доказать, необходимо построить марковское разбиение тора на несколько параллелограммов  $A_i$  со сторонами, параллельными собственным направлениям матрицы  $A$ , и рассмотреть соответствующее отображение судьбы. Подробнее о Марковских разбиениях, соответствующих диффеоморфизмам Аносова, можно прочесть в [1 и 23].

Основным достоинством такой реализации является то, что множество  $\Lambda$  совпадает со всем фазовым пространством, то есть наблюдаемый эффект относится не к некоторому подмножеству нулевой меры (пусть даже и максимальному аттрактору), а ко всему фазовому пространству.

С другой стороны, построить такую реализации технически сложнее, чем любую из предыдущих. Ко всем техническим трудностям, возникающим в случае соленоида, добавляется новая — отображение в базе полусопряжено не сдвигу Бернулли, а сдвигу Маркова (см. пункт 1.2.3), то есть некоторые переходы вида  $\omega_i \omega_{i+1}$  запрещены, а вероятности разрешённых переходов различны.

### 1.3.3 Возмущения: от косых произведений к диффеоморфизмам общего вида

Итак, на предыдущем этапе общей стратегии построен *пример* диффеоморфизма, обладающего требуемыми свойствами. На первый взгляд, на диффеоморфизм наложено очень сильное условие сохранения вертикального слоения, поэтому построенный пример не является типичным в пространстве диффеоморфизмов (скажем, с  $C^r$ -топологией).

Однако, если построенный диффеоморфизм *частично гиперболический*, то по теореме Пью, Хирша и Шуба [6] любой близкий к нему диффеоморфизм сохраняет некоторое слоение, слои которого близки к вертикальным в топологии  $C^r$ .

Трудность состоит в том, что хотя отдельные листы нового слоения — гладкие многообразия, эта теорема утверждает лишь непрерывную зависимость листов от точки в базе. Поэтому, выпрямляя близкий к косому произведению диффеоморфизм по теореме Хирша–Пью–Шуба, нам пришлось бы доказывать

требуемое свойство для косых произведений, *лишь непрерывно зависящих от точки в базе.*

В работе [18] А. С. Городецкий доказал, что на самом деле слои нового центрального слоения зависят от точки в базе *гёльдерово*. Недавно эта теорема была уточнена Ю. С. Ильяшенко и А. Негутом [9]. Точная формулировка этой теоремы приведена несколькими абзацами ниже. В частности эта теорема утверждает, что для косых произведений над подковой, соленоидом и двумерным диффеоморфизмом Аносова, удовлетворяющих модифицированному условию *dominated splitting*, показатель гёльдеровости можно сделать сколь угодно близким к единице.

Эта теорема вместе с леммой Фалконера (см. с. 27) позволяет переносить утверждения о хаусдорфовой размерности с косых произведений на диффеоморфизмы.

Рассмотрим косое произведение  $F$  над гиперболическим диффеоморфизмом  $h$ . Пусть ограничение  $dh$  на устойчивое направление умножает длины всех векторов на числа, расположенные между  $\lambda_-$  и  $\lambda$ , а ограничение  $dh^{-1}$  — на числа, расположенные между  $\mu_-$  и  $\mu$ :

$$\lambda_-|v| \leq |dh(v)| \leq \lambda|v|, \quad \text{для } v \in E^s; \mu_-|v| \leq |dh^{-1}(v)| \leq \mu|v|, \quad \text{для } v \in E^u. \quad (1.8)$$

Пусть, кроме того, устойчивое и неустойчивое расслоения тривиальны.

**Определение 1.3.2** Будем говорить, что косое произведение  $F$  над гиперболическим диффеоморфизмом  $h$  удовлетворяет модифицированному условию *dominated splitting*, если

$$\max \left( \max(\lambda, \mu) + \left\| \frac{\partial f_b^{\pm 1}}{\partial b} \right\|_{C^0(X)}, \left\| \frac{\partial f_b^{\pm 1}}{\partial x} \right\|_{C^0(X)} \right) =: L < \max(\lambda^{-1}, \mu^{-1}).$$

**Теорема 1.3.3 (Ильяшенко–Негут)** Пусть  $F$  — косое произведение над диффеоморфизмом  $h$  с гиперболическим инвариантным множеством  $\Lambda$ . Пусть диффеоморфизм  $h$  удовлетворяет условию (1.8), а косое произведение  $F$  — модифицированному условию *dominated splitting*. Тогда для достаточно малого  $\delta > 0$  и любого  $\delta$ -возмущения  $G$  отображения  $F$  в классе  $C^1$ -гладких отображений выполнены следующие свойства.

- существует  $G$ -инвариантное множество  $Y \subset X$  и непрерывное отображение  $p: Y \rightarrow \Lambda$ , такое что  $p \circ G = h \circ p$ . Более того, отображение

$$H: Y \rightarrow \Lambda \times M, \quad H(b, x) = (p(b, x), x)$$

является гомеоморфизмом.

- листы  $W_b = p^{-1}(b)$  липшицево близки к вертикальным и гёльдерово зависят от  $b$ . Это означает, что листы  $W_b$  — графики липшицевых отображений  $\beta_b: M \rightarrow B$ , таких что

$$d_{C^0}(\beta_b, b) \leq O(\delta), \quad \text{Lip} \beta_b \leq O(\delta),$$

$$d_{C^0}(\beta_b, \beta_{b'}) \leq d(b, b')^{\alpha - O(\delta)} O(\delta^{-\alpha}),$$

где

$$\alpha = \min \left( \frac{\log \lambda}{\log \lambda_-}, \frac{\log \mu}{\log \mu_-} \right).$$

Более того, отображение  $H^{-1}$  тоже гёльдерово с тем же показателем  $\alpha - O(\delta)$ .

### 1.3.4 Краткое описание стратегии

В этом пункте мы кратко напомним описанные выше этапы стратегии Городецкого–Ильяшенко–Негута.

- Построить локально типичный пример действия свободной полугруппы на многообразии с интересными динамическими свойствами.
- Используя конструкцию, описанную в пункте 1.3.1, получить из неё пример ступенчатого косоугольного произведения с интересными свойствами, локально типичный в классе ступенчатых косых произведений.
- Используя одну из гладких реализаций сдвига Бернулли (см. пункт 1.3.2), построить пример гладкого отображения, обладающего аналогичными интересными свойствами. При этом приходится переходить от ступенчатых косых произведений к мягким.

- Доказать, что интересные свойства системы сохраняются при небольших возмущениях в классе гёльдеровых косых произведений с гладкими по-слойными отображениями. При этом можно считать, что показатель гёльдеровости близок к единице.
- Используя теорему Городецкого–Ильяшенко–Негута (см. пункт 1.3.3), перенести полученные результаты на гладкие отображения, близкие к исходному. При этом, возможно, придётся определить аналоги некоторых интересных нас свойств для более общего класса отображений.

#### 1.4 Краткий обзор результатов, полученных при помощи стратегии

В этом параграфе мы перечислим некоторые результаты, полученные при помощи стратегии Городецкого–Ильяшенко–Негута. Данный список не претендует ни на полноту, ни на подробность.

Найдено открытое множество в пространстве гладких отображений кольца в себя, переводящих границу в себя, такое что для каждого из отображений этого множества имеет место перемежаемость бассейнов притяжения (Ю. С. Ильяшенко, В. А. Клепцын и П. С. Салтыков, [8]).

Построено открытое множество диффеоморфизмов, обладающих эффектом невидимости некоторой части аттрактора. Это означает, что некоторую часть аттрактора невозможно пронаблюдать в численном эксперименте. Ю. С. Ильяшенко, А. Негут, [10].

Найдено открытое множество диффеоморфизмов, обладающих «толстым аттрактором», то есть отображений, аттрактор Милнора которых имеет ненулевую и не полную меру; Ю. С. Ильяшенко, [7].

Получено описание типичной динамики частично гиперболических косых произведений со слоем отрезков; Д. С. Волк, В. А. Клепцын, [15], рукопись в работе.

В работе [25] показано, что орбитальное свойство отслеживания неплотно в  $C^1$  топологии.

## 1.5 Пример в классе ступенчатых косых произведений

В этом параграфе мы построим пример ступенчатого косого произведения, имеющего костистый аттрактор без полых костей. В первом пункте мы приведем пример и опишем структуру его аттрактора. Формально говоря, ступенчатое косое произведение не может иметь костистый аттрактор в смысле определения 1.1.1, поскольку фазовое пространство ступенчатого косого произведения не является гладким многообразием. Поэтому в пункте 1.5.1 мы приведём модифицированное определение костистого аттрактора, применимое в рассматриваемом случае.

В остальных пунктах этого параграфа (пп. 1.5.3–1.5.6) мы докажем, что косое произведение, описанное в пункте 1.5.2, действительно имеет костистый аттрактор без полых костей.

### 1.5.1 Определение костистого аттрактора для косых произведений

**Определение 1.5.1** Будем говорить, что косое произведение  $F: B \times I \rightarrow B \times I$  имеет *костистый* аттрактор, если

- множество  $B \setminus \Omega$  точек  $b \in B$ , для которых  $I_b$  — отрезок ненулевой длины, имеет мощность континуум и всюду плотно в  $B$ ;
- Хаусдорфова размерность максимального аттрактора  $A_{max}$  меньше хаусдорфовой размерности фазового пространства, и  $\mu(A_{max}) = 0$  (то есть костей не слишком много).

**Определение 1.5.2** Будем говорить, что аттрактор косого произведения  $F: B \times I \rightarrow B \times I$  *костистый без полых костей*, если этот аттрактор костистый и выполнены два дополнительных требования.

- кости принадлежат замыканию графика  $\Gamma$ ;
- максимальный аттрактор отображения  $F$  совпадает с аттрактором Милнора:  $A_{max}(F) = A_M(F)$ .

## 1.5.2 Пример

Пример в классе ступенчатых косых произведений получается, если в качестве послонных отображений взять отображения

$$f_0(x) = 0.7x, \quad f_1(x) = 0.3 + 0.7x, \quad f_2(x) = \frac{1}{2\pi} \arctan(10x - 5) + \frac{1}{2}.$$

Отображения  $f_0$  и  $f_1$  — линейные сжатия к концам отрезка  $I$ , а у отображения  $f_2$  есть репеллер 0.5.

Построим по этим трём отображениям соответствующее *ступенчатое косое произведение*,

$$F_0: \Sigma^3 \times I \rightarrow \Sigma^3 \times I, \quad F: (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(x)), \quad (1.9)$$

где  $\sigma$  — сдвиг Бернулли,  $(\sigma\omega)_i = \omega_{i+1}$ , а мера и метрика на пространстве  $\Sigma^3$  введены как в пункте 1.2.3.

**Теорема 1.5.3** *Аттрактор косого произведения  $F_0$  — костистый без полых костей.*

Хотя эта теорема и следует из более общей теоремы 1.6.2, мы докажем её отдельно, чтобы продемонстрировать ключевые идеи на простейшем примере.

В остальных пунктах этого параграфа мы докажем теорему 1.5.3.

## 1.5.3 Наличие костей

Рассмотрим отрезок  $\tilde{I} = [0.4, 0.6]$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} f_2(\tilde{I}) &= [f_2(0.4), f_2(0.6)] \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi} \arctan(-1) + 0.5, \frac{1}{2\pi} \arctan(1) + 0.5 \right] = [0.375, 0.625] \supset \tilde{I}. \end{aligned}$$

Рассмотрим любую последовательность  $\omega$ , для которой  $\omega_{-n} = 2$  при достаточно больших  $n$ , то есть

$$\omega = \dots 22\dots 2\omega_{-m}\omega_{-m+1}\dots\omega_{-1}\omega_0\omega_1\dots \quad (1.10)$$

Тогда для любого  $n > m$  имеем:

$$\begin{aligned} I_{\omega,n} &= f_{\omega_{-1}} \circ f_{\omega_{-2}} \circ \dots \circ f_{\omega_{-m}} \circ f_2^{n-m}(I) = \\ &= f_{\sigma^{-m}\omega,m} \circ f_2^{n-m}(I) \supset f_{\sigma^{-m}\omega,m} \circ f_2^{n-m}(\tilde{I}) \supset f_{\sigma^{-m}\omega,m}(\tilde{I}). \end{aligned}$$

Следовательно, отрезок  $I_{\omega,n}$  содержит отрезок  $f_{\sigma^{-m}\omega,m}(\tilde{I})$ . Напомним, что  $I_\omega$  — пересечение всех отрезков  $I_{\omega,n}$ . Следовательно, отрезок  $I_\omega$  тоже содержит отрезок  $f_{\sigma^{-m}\omega,m}(\tilde{I})$ , откуда  $\omega \notin \Omega$ . Осталось заметить, что множество последовательностей вида (1.10) континуально и всюду плотно в  $\Sigma^3$ . Таким образом, отображение  $F_0$  удовлетворяет первому условию определения 1.5.1.

#### 1.5.4 Хаусдорфова размерность и мера

В этом пункте мы будем использовать только одно свойство послыных отображений, а именно, что образы отображений  $f_0^2$  и  $f_1^2$  не пересекаются. Из этого свойства следует, что каждая точка  $x \in I$  не принадлежит хотя бы одному из этих образов.

Пусть  $v = v_{-n} \dots v_{-1}$  — конечное слово. Напомним, что  $C(v)$  — множество последовательностей  $\omega \in \Sigma^3$ , у которых на соответствующих позициях стоят те же символы, что и у  $v$ ,  $\omega|_{[-n,-1]} = v$ . Поскольку послыное отображение зависит только от текущего символа последовательности, отрезок  $I_{\omega,n}$  одинаков для всех последовательностей  $\omega$  из цилиндра  $C(v)$ . Обозначим этот отрезок  $I_v$ .

Каждый отрезок  $I_v$  можно покрыть  $[3^n |I_v|]$  отрезками длины  $3^{-n}$ . Каждый цилиндр  $C(v)$  можно покрыть  $3^{n+1}$  шарами радиуса  $3^{-n}$ . Следовательно, произведение  $C(v) \times I_v$  можно покрыть  $3^{n+1} [3^n |I_v|]$  шарами радиуса  $3^{-n}$ .

Объединение  $C(v) \times I_v$  по всем словам  $v = v_{-n} \dots v_{-1}$  совпадает с  $F^n(\Sigma^3 \times I)$ , значит, это объединение содержит максимальный аттрактор. С другой стороны, это объединение цилиндров можно покрыть

$$3^{n+1} \sum_{|v|=n} [3^n |I_v|] \leq 3^{n+1} \sum_{|v|=n} (3^n |I_v| + 1) = 3^{2n+1} \sum_{|v|=n} |I_v| + 3^{2n+1} \quad (1.11)$$

шарами радиуса  $3^{-n}$ .

Оценим сумму  $\sum_{|v|=n} |I_v|$ . Пусть  $D_{x,n}$  — множество слов  $v$ , таких что  $x \in I_v$ :

$$D_{x,n} = \{v \mid |v| = n, x \in I_v\}.$$

В силу теоремы Фубини,

$$\sum_{|v|=n} |I_v| = \int_I |D_{x,n}| dx,$$

поэтому достаточно оценить  $|D_{x,n}|$  равномерно по  $x$ .

Докажем, что  $|D_{x,n+2}| \leq 8 |D_{x,n}|$  для любого  $x \in I$ . Заметим, что для любого слова  $v \in D_{x,n+2}$  слово  $u = v_{-n} \dots v_{-1}$  должно принадлежать  $D_{x,n}$ , то есть  $v = v_{-n-2} v_{-n-1} u$ ,  $u \in D_{x,n}$ . Действительно,

$$I_v = (f_{v_{-1}} \circ \dots \circ f_{v_{-n}}) \circ (f_{v_{-n-1}} \circ f_{v_{-n-2}})(I) \subset f_{v_{-1}} \circ \dots \circ f_{v_{-n}}(I) = I_u,$$

поэтому  $x \in I_u$ , то есть  $u \in D_{x,n}$ . Следовательно,  $|D_{x,n+2}| \leq 9 |D_{x,n}|$ . Чтобы доказать неравенство  $|D_{x,n+2}| \leq 8 |D_{x,n}|$ , достаточно показать, что для любого слова  $u \in D_{x,n}$  найдутся символы  $v_{-n-2}$  и  $v_{-n-1}$ , такие что  $v_{-n-2} v_{-n-1} u \notin D_{x,n+2}$ .

Рассмотрим точку  $x' = f_{u_{-n}}^{-1} \circ \dots \circ f_{u_{-1}}^{-1}(x)$ . Как было показано в самом начале этого пункта, точка  $x'$  не принадлежит хотя бы одному из отрезков  $f_0^2(I)$  и  $f_1^2(I)$ , поэтому или  $00u \notin D_{x,n+2}$ , или  $11u \notin D_{x,n+2}$ . Итак,  $|D_{x,n+2}| \leq 8 |D_{x,n}|$ .

Следовательно,  $|D_{x,n}| \leq \text{const}(\sqrt{8})^n$ , откуда

$$\sum_{|v|=n} |I_v| \leq \int_I \text{const}(\sqrt{8})^n = \text{const}(\sqrt{8})^n.$$

Оценим теперь сумму (1.11).

$$3^{2n+1} \sum_{|v|=n} |I_v| + 3^{2n+1} \leq \text{const} \cdot 3^{2n+1} (\sqrt{8})^n + 3^{2n+1} < \text{const} \cdot (9\sqrt{8})^n.$$

Следовательно, хаусдорфова размерность максимального аттрактора не превосходит  $\log_3 9\sqrt{8} < 3$ , а значит, его мера равна нулю. Итак, отображение  $F_0$  удовлетворяет и второму условию определения 1.5.1, то есть отображение  $F_0$  имеет костистый аттрактор.



## 1.5.5 Плотность графика

Докажем теперь, что кости содержатся в замыкании графика, то есть что максимальный аттрактор совпадает с замыканием графика  $\Gamma$  ограничения  $\sigma^+|_{\Omega}$ . Возьмём произвольную точку  $p = (\omega, x)$  максимального аттрактора. Пусть  $C(v) \times U$  — её стандартная окрестность, то есть  $C(v)$  — цилиндр, соответствующий слову  $v = \omega_{-n} \dots \omega_0 \dots \omega_n$ , а  $U$  — окрестность точки  $x$ .

Нам надо найти точку в пересечении  $\Gamma \cap (C(v) \times U)$ . На самом деле мы найдём точку графика в меньшем множестве  $C(v) \times \{x\}$ . График  $\Gamma$  инвариантен относительно отображения  $F$ , поэтому достаточно найти точку графика в прообразе  $F^{-n}(C(v) \times \{x\}) = C(\sigma^{-n}v) \times \{f_{\omega,n}^-(x)\}$ . Обозначим  $x' = f_{\omega,n}^-(x)$ . Тогда  $F^{-n}(C(v) \times \{x\}) = C(\sigma^{-n}v) \times \{x'\}$ . Таким образом, мы ищем последовательность  $\omega'$ , такую что  $\omega' \in C_{\sigma^{-n}v}$  и  $I_{\omega'} = \{x'\}$ . Заметим, что первое свойство зависит только от правой части последовательности  $\omega'$ , а второе — только от левой части. Следовательно, мы можем выбирать эти части независимо. В качестве правого хвоста  $\omega'^+$  можно взять любую последовательность, начинающуюся с  $\sigma^{-n}v$ .

Заметим, что образы отображений  $f_0$  и  $f_1$  покрывают  $I$ . Следовательно, для любой точки  $y \in I$  один из прообразов  $f_0^{-1}(y)$  и  $f_1^{-1}(y)$  определён. Поэтому мы можем выбрать последовательность  $\omega'^- = \dots \omega'_{-k} \dots \omega'_{-1}$  из нулей и единиц, такую что для любого  $k$  точка  $f_{\omega'^-,k}^-(x')$  принадлежит образу отображения  $f_{\omega'_{-k-1}}$ , значит,  $x' \in I_{\omega'^-}$ . С другой стороны, отображения  $f_0$  и  $f_1$  сжимают на  $I$  с коэффициентом сжатия 0.7, поэтому длина отрезка  $I_{\omega'^-,m}$  равна  $0.7^m$ . Наконец,  $0.7^m$  стремится к нулю при  $m$  стремящемся к бесконечности, поэтому  $|I_{\omega'^-}| = 0$  и  $I_{\omega'^-} = \{x'\}$ .

Итак, отображение  $F_0$  удовлетворяет первому из требований определения 1.5.2.

## 1.5.6 Совпадение аттракторов

Докажем, что максимальный аттрактор отображения  $F_0$  совпадает с его аттрактором Милнора. Заметим, что точка  $(\omega', x')$  графика  $\Gamma$  принадлежит  $\omega'$ -предельному множеству любой точки  $(\omega, x)$ , для которой последовательность  $\omega'$

принадлежит  $\omega$ -предельному множеству последовательности  $\omega$ . Действительно, если последовательности  $\sigma^n \omega$  и  $\omega'$  совпадают на отрезке  $[-N, N]$ , то точка  $f_{\sigma^n \omega}(x)$  принадлежит отрезку  $I_{\omega', N}$ . С другой стороны,  $x'$  — единственная общая точка всех отрезков  $I_{\omega', N}$ .

Аттрактор Милнора сдвига Бернулли — это всё множество  $\Sigma^3$ , поэтому аттрактор Милнора косоугольного произведения  $F_0$  содержит график  $\Gamma$ . Следовательно, аттрактор Милнора содержит замыкание графика, то есть содержит максимальный аттрактор. Но максимальный аттрактор содержит аттрактор Милнора для любого отображения (а значит, и для  $F_0$ ). Поэтому  $A_{max} = A_M$ .

Итак, отображение  $F_0$  имеет костистый аттрактор без полых костей.

## 1.6 Возмущения в классе ступенчатых косых произведений

Итак, мы построили пример одной динамической системы с достаточно странными свойствами. После этого естественно задаться вопросом, уникальна ли такая система, или её свойства сохраняются при малых возмущениях в объемлющем пространстве. В этом параграфе мы изучим возмущения основного примера  $F_0$  в пространстве ступенчатых косых произведений. При этом мы заодно обобщим наши результаты на случай косоугольного произведения над сдвигом Маркова.

**Теорема 1.6.1** *Рассмотрим сдвиг Маркова с матрицей переходов  $A$  размера  $k \times k$ ,  $k \geq 2$  без нулевых вероятностей. Тогда в пространстве ступенчатых косых произведений над этим сдвигом Маркова  $\sigma: \Sigma_A^k \rightarrow \Sigma_A^k$  со слоем  $I = [0, 1]$  существует открытое множество ступенчатых косых произведений с костистыми аттракторами без полых костей.*

Обозначим через  $J(f_0, \dots, f_{k-1})$  выпуклую оболочку множества неподвижных точек послынных отображений. Максимальный аттрактор  $F$  содержится в полосе  $\Sigma_A^k \times J(f_0, \dots, f_{k-1})$ , поскольку все точки выше этой полосы движутся вниз, а все точки ниже этой полосы — вверх.

Следующая теорема даёт простые достаточные условия для теоремы 1.6.1.

**Теорема 1.6.2** *Пусть строго возрастающие отображения  $f_0, \dots, f_{k-1}: I \rightarrow I$  удовлетворяют следующим условиям:*

1. существует конечный набор отображений  $f_{w_i}$  из полугруппы, порождённой отображениями  $f_i$ , такой что каждое из отображений  $f_{w_i}$  сжимает на  $I$ , а образы отрезка  $J$  под действием этих отображений покрывают отрезок  $J$ ;
2. существует конечная композиция отображений  $f_i$ , у которой есть отталкивающая неподвижная точка.

Тогда соответствующее ступенчатое косое произведение  $F: \Sigma_A^k \times I \rightarrow \Sigma_A^k \times I$  имеет костистый аттрактор без полых костей.

Доказательство этой теоремы практически повторяет доказательство теоремы 1.5.3. Композиция из второго условия играет роль отображения  $f_2$ , а отображения  $f_{w_i}$  играют роль отображений  $f_0$  и  $f_1$ .

### 1.6.1 Открытое множество примеров

В этом пункте мы построим открытое множество ступенчатых косых произведений, каждое из которых удовлетворяет условиям теоремы 1.6.2. Таким образом мы сведём теорему 1.6.1 к теореме 1.6.2.

Для любого  $k \geq 3$  можно построить открытое множество ступенчатых косых произведений, аналогичных основному примеру из параграфа 1.5. А именно, пусть  $f_0$  и  $f_1$  — два отображения, сжимающие к точкам  $x_0 < x_1$ , причём  $0.5 < f'_0, f'_1 < 1$ . Остальные отображения  $f_2, \dots, f_{k-1}$  мы выберем так, что  $f_i(I) \subset (x_0, x_1)$ , а у одного из них есть репеллер. Тогда условие 2 выполнено. Более того, в этом случае  $J = [x_0, x_1]$ , а значит условие  $0.5 < f'_0, f'_1$  влечёт условие 1. Несложно проверить, что описанные в этом абзаце наборы  $(f_0, \dots, f_{k-1})$  образуют открытое непустое множество в топологии  $C^1$ .

Найти пример при  $k = 2$  несколько сложнее. Пусть  $f_0$  — кусочно-линейное отображение с вершинами в точках  $(0; 0)$ ,  $(0.6; 0.2)$ ,  $(1; 0.8)$ , а  $f_1$  — кусочно-линейное отображение с вершинами в точках  $(0; 0.15)$ ,  $(0.4; 0.8)$ ,  $(1; 1)$ . Несложно проверить, что у композиции  $f_0 f_1$  есть репеллер. Сложнее найти композиции  $f_{w_i}$ . Для этого автору пришлось использовать компьютерную программу, которая нашла композиции  $f_0^3, f_0^2 f_1, f_1^2 f_0$  и  $f_1^5$ . С другой стороны, когда эти композиции уже найдены, проверить, что они удовлетворяют первому условию теоремы 1.6.2, уже несложно. Единственный недостаток построенного примера

заключается в том, что он не гладкий, но этот недостаток легко устранить, заменив углы небольшими дугами окружностей. Достаточно маленькая окрестность этого примера будет удовлетворять всем требованиям теоремы 1.6.2.

## 1.6.2 Наличие костей

Пусть  $f_v = f_{v_1} \dots f_{v_n}$  — композиция, у которой есть репеллер  $R$ . Тогда для достаточно маленького отрезка  $\tilde{I} \ni R$  образ этого отрезка под действием  $f_v$  содержит отрезок  $\tilde{I}$ . Значит, для любой последовательности вида

$$\omega = \dots vv \dots v \omega_{-m} \dots \omega_{-1} | \omega_0 \dots$$

и любого числа вида  $n = m + |v|$  имеем

$$I_{\omega, n} = f_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ f_{\omega_{-m}} \circ f_v^n(I) \supset f_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ f_{\omega_{-m}}(\tilde{I}).$$

Следовательно, отрезок  $I_\omega = \bigcap_n I_{\omega, n}$  тоже содержит отрезок  $f_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ f_{\omega_{-m}}(\tilde{I})$ , поэтому  $\omega \notin \Omega$ . Множество таких последовательностей  $\omega$  континуально и всюду плотно в  $\Sigma_A^k$ .

## 1.6.3 Хаусдорфова размерность и мера

Мы повторим доказательство для основного примера с небольшими изменениями. Рассмотрим отображения  $f_{u^j}$ . Образы отрезка  $J$  под действием этих отображений покрывают отрезок  $J$ , значит, какие-то два из отображений  $f_{u^j}$  сжимают к разным точкам. Без ограничения общности можно предположить, что отображения  $f_{u^0}$  и  $f_{u^1}$  сжимают к разным точкам. Тогда образы отрезка  $I$  под действием достаточно большой степени этих отображений не пересекаются,  $f_{u^0}^m(I) \cap f_{u^1}^m(I) = \emptyset$ .

**Лемма 1.6.3** *Рассмотрим косое произведение над сдвигом Маркова  $\sigma: \Sigma_A^k \rightarrow \Sigma_A^k$ , порождённое отображениями  $f_0, \dots, f_{k-1}: I \rightarrow I$ . Допустим, что все элементы матрицы  $A$  ненулевые. Пусть существует конечный набор композиций  $f_{u^j}$ , такой что пересечение образов отрезка  $I$  под действием этих композиций пусто:*

$$\bigcap_j f_w(I) = \emptyset.$$

Тогда хаусдорфова размерность максимального аттрактора меньше 3, а его мера равна нулю.

**Доказательство** Пусть  $\varepsilon$  — наименьшая из вероятностей в матрице  $A$ ;  $S$  — наибольшая из длин слов  $u^j$ . Тогда для каждой точки  $x \in I$  найдётся композиция  $f_u$  длины  $S$ , такая что  $x \notin f_u(I)$ .

Обозначим через  $D_{x,n}$  множество слов  $u = u_{-n} \dots u_{-1}$  длины  $n$ , для которых  $x \in f_u(I)$ :

$$D_{x,n} = \{u = u_{-n} \dots u_{-1} \mid x \in f_u(I)\}. \quad (1.12)$$

Для любого слова  $w \in D_{x,n+S}$  слово  $u = w_{-n} \dots w_{-1}$  должно принадлежать множеству  $D_{x,n}$ . Следовательно,  $|D_{x,n+S}| \leq k^S |D_{x,n}|$ . Более того, для любого слова  $u \in D_{x,n}$  существует слово  $v$  длины  $S$ , для которого  $vu \notin D_{x,n+S}$ . Значит,  $|D_{x,n+S}| \leq (k^S - 1) |D_{x,n}|$  и  $\mu C(D_{x,n+S}) \leq (1 - \varepsilon^S) \mu C(D_{x,n})$ . Здесь  $C(D_{x,n})$  — объединение всех цилиндров, соответствующих словам из  $D_{x,n}$ :

$$C(D_{x,n}) = \bigcup_{u \in D_{x,n}} C_{-n}^{-1}(u).$$

Пусть  $D_x$  — множество бесконечных последовательностей  $\omega \in \Sigma_A^k$ , для которых  $x \in I_\omega$ . Очевидно, что множество  $D_x$  является пересечением всех цилиндров  $C(D_{x,n})$ :

$$D_x := \{\omega \in \Sigma^k \mid (\omega, x) \in A_{max}\} = \bigcap_n C(D_{x,n}).$$

Следовательно, мера множества  $D_x$  равна нулю для всех  $x$ . Следовательно, мера аттрактора  $A_{max}$  тоже равна нулю.

Теперь покажем, что хаусдорфова размерность максимального аттрактора меньше трёх. Как и в основном примере, выполнено равенство  $|D_{x,n}| \leq \text{const} \cdot (k^S - 1)^{n/S}$ . Значит,

$$\sum_{|w|=n} |I_w| = \int_I |D_{x,n}| dx \leq \text{const} \cdot (k^S - 1)^{n/S},$$

и максимальный аттрактор можно покрыть не более чем

$$\begin{aligned} k^{n+1} \sum_{|w|=n} [k^n |I_w|] &\leq k^{2n+1} \sum_{|w|=n} |I_w| + k^{2n+1} \\ &\leq \text{const} \cdot k^{2n+1} (k^S - 1)^{n/S} + k^{2n+1} \leq \text{const} \cdot k^{2n} (k^S - 1)^{n/S} \end{aligned}$$

шарами радиуса  $k^{-n}$ . Следовательно, хаусдорфова размерность максимального аттрактора не превосходит

$$\dim_H A_{max} \leq \log_k k^2 (k^S - 1)^{1/S} < 3.$$

Итак, мы доказали, что аттрактор ступенчатого косо́го произведения, удовлетворяющего условиям теоремы 1.6.2, — костистый.

#### 1.6.4 Отсутствие полых костей

Доказательство того, что такое отображение удовлетворяет требованиям определения 1.5.2, совершенно аналогично доказательству этого утверждения для основного примера  $F_0$ .

В доказательстве, приведённом в пункте 1.5.5, достаточно заменить отображения  $f_0$  и  $f_1$  на отображения  $f_w$ , а числа 0.7 — на максимум производных отображений  $f_w$ .

Доказательство, приведённое в пункте 1.5.6, требует ещё меньшего количества изменений — достаточно заменить  $\Sigma^3$  на  $\Sigma_A^k$ . ■

#### 1.7 Пример в классе гладких отображений

В этом параграфе мы построим *один* пример гладкой динамической системы с костистым аттрактором. Наша система будет косым произведением над отображением соленоида Смейла–Ви́ямса (1.5) для  $k = 6$  и  $\varepsilon = 0.2$ :

$$s : (z, w) \mapsto (z^6, 0.5z + 0.2w).$$

Это отображение не является биективным на полнотории, но оно биективно на его максимальном аттракторе  $A_{max}(s)$ , и ограничение  $s$  на максимальный

аттрактор полусопряжено сдвигу Бернулли  $\sigma: \Sigma^6 \rightarrow \Sigma^6$ . Отображение судьбы  $\Phi$ , полусопрягающее  $s$  со сдвигом Бернулли, описано в пункте 1.3.2.

Послойные отображения нашего примера будут зависеть только от будущей части судьбы, то есть только от  $z$ -координаты точки в базе:

$$F_S: ((z, w), x) \mapsto (s(z, w), f_z(x)).$$

На подмножествах  $A_0, A_2$  и  $A_4$  в качестве послойных отображений возьмём  $f_0, f_1$  и  $f_2$ , соответственно. На дугах  $A_1, A_3$  и  $A_5$  доопределим  $F_S$  с помощью линейной интерполяции.

**Теорема 1.7.1** *Отображение  $F_S$  имеет костистый аттрактор без полых костей.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.6.2. Основная трудность — это правильно определить в этом случае множество  $D_{x,n}$  и доказать неравенство  $|D_{x,n+S}| \leq (6^S - 1) |D_{x,n}|$ . Проблема в том, что в этом случае по конечной части последовательности  $\omega_{-n} \dots \omega_{-1}$  уже нельзя однозначно определить прообраз  $f_{\omega,n}^-$  точки  $x$ . Оказывается, однако, что, зная не только прошлое, но и будущее последовательности  $\omega$  (то есть часть  $\omega_{-n} \dots \omega_n$ ), можно определить прообраз  $f_{\omega,n}^-$  с равномерно ограниченной небольшой погрешностью. После этого уже несложно определить, которое из слов  $\underbrace{0 \dots 0}_S \omega_{-n} \dots \omega_n$  и  $\underbrace{2 \dots 2}_S \omega_{-n} \dots \omega_n$  не принадлежит множеству  $D_{x,n+S}$ .

Мы не будем доказывать теорему 1.7.1. Вместо этого в следующем параграфе мы докажем более общую теорему 1.8.3.

## 1.8 Возмущение в классе мягких косых произведений

В этом параграфе мы построим открытое множество систем с костистым аттрактором без полых костей в пространстве мягких косых произведений над сдвигом Маркова. Чтобы в дальнейшем в параграфе 1.9 воспользоваться полученными результатами, нам придётся рассматривать не только косые произведения, послойные отображения которых липшицево зависят от точки в базе, но и те, послойные отображения которых зависят от точки в базе лишь гёльдеро.

Зафиксируем константы  $C > 0$  и  $\alpha < 1$ . Рассмотрим пространство гёльдеровых косых произведений с гладкими послойными отображениями:

$$g_\omega \in C^1(I), \quad (1.13)$$

$$|g_\omega - g_{\omega'}|_{C^0} \leq C d(\omega, \omega')^\alpha \quad (1.14)$$

Расстояние между двумя отображениями  $G$  и  $\tilde{G}$  этого пространства определяется как наибольшее из  $C^1$ -расстояний между соответствующими послойными отображениями:

$$d(G, \tilde{G}) = \max_{\omega \in \Sigma^k} |g_\omega - \tilde{g}_\omega|_{C^1}.$$

**Теорема 1.8.1** *Существует сдвиг Маркова и открытое множество в пространстве гёльдеровых косых произведений над этим сдвигом, такие, что каждое косое произведение из этого множества имеет костистый аттрактор без полых костей.*

Мы построим это открытое множество в виде малой окрестности специально подобранного липшицевого косоугольного произведения. Возмущаемое липшицево отображение будет частично ступенчатым в смысле следующего определения.

**Определение 1.8.2** Будем говорить, что косое произведение  $F$  над сдвигом Бернулли или сдвигом Маркова *частично ступенчатое*, если существует множество  $S \subset \{0, \dots, k-1\}$ , такое что равенство  $\omega_0 = \eta_0 \in S$  влечёт  $f_\omega = f_\eta$ . Послойные отображения  $f_\omega$  для  $\omega_0 \in S$  называются *ступенчатыми послойными отображениями* отображения  $F$ .



В этом и следующем параграфах нам будет удобно заменить отображения  $f_0$ ,  $f_1$  и  $f_2$  на следующие три отображения:

$$f_0: x \mapsto 0.9x + 0.001,$$

$$f_1: x \mapsto 0.999 - 0.9(1 - x),$$

$$f_2: x \mapsto \frac{1}{2\pi} \arctan(10(x - 0.5)) + 0.5.$$

**Теорема 1.8.3** Пусть косое произведение  $F$  над сдвигом Маркова удовлетворяет следующим условиям.

1. При  $i = 0, 1, 2$  для любого символа  $v$  из алфавита найдётся символ  $u \in S$ , такой что вероятность перехода от символа  $u$  к символу  $v$  не равна нулю, а послыйное отображение, соответствующее символу  $u$ , есть  $f_i$ .
2. Послойные отображения  $f_\omega$  и их обратные липшицевы с константой  $L_f$ :

$$\max \left( \sup_{\omega, x} |f'_\omega(x)|, \sup_{\omega, x} |(f_\omega^{-1})'(x)| \right) < L_f. \quad (1.15)$$

3. Отображения  $\omega \mapsto f_\omega$  и  $\omega \mapsto f_\omega^{-1}$  липшицевы с константой  $L_b$  в топологии  $C^0$ ,

$$\sup_{\omega, \omega', x} \frac{|f_\omega(x) - f_{\omega'}(x)|}{d(\omega, \omega')} < L_b, \quad \sup_{\omega, \omega', x} \frac{|f_\omega^{-1}(x) - f_{\omega'}^{-1}(x)|}{d(\omega, \omega')} < L_b. \quad (1.16)$$

4. Отображение  $F$  частично гиперболично. Более того,

$$L_f < \lambda^\alpha.$$

5. Существует отрезок  $J = [a, b] \subset I$ , такой что
  - если  $f_\omega(x) \in I \setminus J$ , то  $f'_\omega(x) < \text{const} < 1$ ;
  - интервалы

$$\left( f_0(a) + \frac{L_b}{\lambda - L_f}, f_0(b) - \frac{L_b}{\lambda - L_f} \right) \text{ и } \left( f_1(a) + \frac{L_b}{\lambda - L_f}, f_1(b) - \frac{L_b}{\lambda - L_f} \right)$$

покрывают отрезок  $J$ .

Тогда для достаточно малых значений  $\delta$  любое гёльдерово косое произведение  $G$ ,  $\delta$ -близкое к  $F$ ,

$$d(F, G) = \max_{\omega \in \Sigma^k} |f_\omega - g_\omega|_{C^1} < \delta, \quad (1.17)$$

имеет костистый аттрактор без полых костей.

Мы можем сразу предположить, что возмущение  $\delta$  настолько мало, что послойные отображения  $g_\omega^{\pm 1}$  липшицевы с константой  $L_f$ :

$$\max \left( \sup_{\omega, x} |g'_\omega|, \sup_{\omega, x} |(g_\omega^{-1})'| \right) < L_f.$$

**Обозначение 1.8.4** Обозначим  $S_j$  множество символов  $i \in S$ , для которых соответствующие ступенчатые послойные отображения есть  $f_j$ . Тогда первое условие теоремы 1.8.3 можно переформулировать следующим образом. Для любого символа  $\nu_0$  и любого числа  $j = 0, 1, 2$  найдётся символ  $u_0 \in S_j$ , такой что слово  $u_0\nu_0$  — разрешённое.

## 1.8.1 Технические леммы

Следующая лемма обобщает лемму 3.1 о погрешности для координаты по слою из статьи [20] на случай липшицевых косых произведений.

**Лемма 1.8.5** Существует число  $K = K(L_f, \alpha, \lambda, C)$ , зависящее только от  $L_f$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$  и  $C$ , такое что для любого косого произведения  $G$ , удовлетворяющего требованиям теоремы, выполнено следующее. Пусть последовательности  $\omega$  и  $\omega'$  совпадают на отрезке  $[-t + 1, t - 1]$ , причём при  $t - s \leq i < t$  символ  $\omega_i$  принадлежит объединению  $S_0 \cup S_1 \cup S_2$ . Тогда

$$|g_{\omega, m} - g_{\omega', m}| \leq K\delta^\beta + \frac{L_b}{\lambda - L_f} \cdot \left( \frac{L_f}{\lambda} \right)^s,$$

где  $\beta = 1 - \log_{\lambda^\alpha} L_f$ .

---

<sup>9</sup> В дальнейшем будет важно, что число  $K$  не зависит от  $\delta$ .

**Доказательство** Пусть  $\delta_i$  — норма разности  $g_{\omega,i} - g_{\omega',i}$  в метрике  $C^0$ ,

$$\delta_i = |g_{\omega,i} - g_{\omega',i}|_{C^0}.$$

Поскольку послынные отображения  $g_\omega$  липшицевы с константой  $L_f$ ,

$$\delta_{i+1} \leq L_f \delta_i + |g_{\sigma^i \omega} - g_{\sigma^i \omega'}|_{C^0}. \quad (1.18)$$

Действительно, для любой точки  $x \in I$  выполнено

$$\begin{aligned} |g_{\omega,i+1}(x) - g_{\omega',i+1}(x)| &= |g_{\sigma^i \omega}(g_{\omega,i}(x)) - g_{\sigma^i \omega'}(g_{\omega',i}(x))| \leq \\ &\leq |g_{\sigma^i \omega}(g_{\omega,i}(x)) - g_{\sigma^i \omega}(g_{\omega',i}(x))| + |g_{\sigma^i \omega}(g_{\omega',i}(x)) - g_{\sigma^i \omega'}(g_{\omega',i}(x))| \leq \\ &\leq L_f \delta_i + |g_{\sigma^i \omega} - g_{\sigma^i \omega'}|_{C^0}. \end{aligned}$$

**План доказательства.** Чтобы применить неравенство (1.18), нам нужна оценка на второе слагаемое. Для каждого индекса  $i = 0, \dots, m-1$  мы будем пользоваться одной из следующих оценок.

1. В силу (1.14),

$$|g_{\sigma^i \omega} - g_{\sigma^i \omega'}| \leq C \cdot d(\sigma^i \omega, \sigma^i \omega')^\alpha \leq C \lambda^{(-m+i)\alpha}. \quad (1.19)$$

2. В силу (1.16) и (1.17),

$$\begin{aligned} |g_{\sigma^i \omega} - g_{\sigma^i \omega'}| &\leq |g_{\sigma^i \omega} - f_{\sigma^i \omega}| + |f_{\sigma^i \omega} - f_{\sigma^i \omega'}| + |f_{\sigma^i \omega'} - g_{\sigma^i \omega'}| \leq \\ &\leq \delta + L_b \lambda^{-m+i} + \delta = 2\delta + L_b \lambda^{-m+i}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

3. Более того, при  $i \geq m-s$  имеем  $f_{\sigma^i \omega} = f_{\sigma^i \omega'}$ , значит

$$|g_{\sigma^i \omega} - g_{\sigma^i \omega'}| \leq 2\delta, \quad \text{при } i \geq m-s. \quad (1.21)$$

Выберем число  $l$ , такое что

$$C \lambda^{-l\alpha} \leq 2\delta < C \lambda^{(-l+1)\alpha}. \quad (1.22)$$

Мы будем пользоваться первой из перечисленных оценок при  $i \leq m-l$ , второй — при  $m-l < i < m-s$ , и третьей при  $i \geq m-s$ . В случае  $l \leq s+1$  мы будем пользоваться второй оценкой.

**Шаг 1.** В силу (1.18) и (1.19),

$$\delta_{i+1} \leq L_f \delta_i + C \lambda^{(-m+i)\alpha}.$$

Поскольку  $\delta_0 = 0$ , по индукции из предыдущего неравенства легко доказать, что

$$\delta_i \leq C \lambda^{-m\alpha} \frac{\lambda^{i\alpha} - L_f^i}{\lambda^\alpha - L_f}.$$

Тогда

$$\delta_l \leq C \lambda^{-m\alpha} \frac{\lambda^{l\alpha} - L_f^l}{\lambda^\alpha - L_f} < C \frac{\lambda^{(-m+l)\alpha}}{\lambda^\alpha - L_f} \leq \frac{2\delta}{\lambda^\alpha - L_f}. \quad (1.23)$$

**Шаг 2.** В силу (1.18) и (1.20),

$$\delta_{i+1} \leq L_f \delta_i + 2\delta + L_b \lambda^{-m+i}.$$

Следовательно,

$$\frac{\delta_{i+1}}{L_f^{i+1}} \leq \frac{\delta_i}{L_f^i} + \frac{2\delta}{L_f^{i+1}} + \frac{L_b \lambda^{-m+i}}{L_f^i L_f}.$$

Откуда

$$\frac{\delta_{m-s}}{L_f^{m-s}} \leq \frac{\delta_l}{L_f^l} + \frac{2\delta}{L_f} \sum_{i=l}^{m-s-1} \frac{1}{L_f^i} + \frac{\lambda^{-m} L_b}{L_f} \sum_{i=l}^{m-s-1} \left( \frac{\lambda}{L_f} \right)^i.$$

**Шаг 3.** В силу (1.18) и (1.21), при  $i \geq m - s$

$$\frac{\delta_{i+1}}{L_f^{i+1}} \leq \frac{\delta_i}{L_f^i} + \frac{2\delta}{L_f^{i+1}}.$$

Значит

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_m}{L_f^m} &\leq \frac{\delta_{m-s}}{L_f^{m-s}} + \frac{2\delta}{L_f} \sum_{i=m-s}^{m-1} \frac{1}{L_f^i} \leq \\
&\leq \frac{\delta_l}{L_f^l} + \frac{2\delta}{L_f} \sum_{i=l}^{m-1} \frac{1}{L_f^i} + \frac{\lambda^{-m} L_b}{L_f} \sum_{i=l}^{m-s-1} \left(\frac{\lambda}{L_f}\right)^i = \\
&= \frac{\delta_l}{L_f^l} + \frac{2\delta}{L_f} \cdot \frac{\frac{1}{L_f^l} - \frac{1}{L_f^m}}{1 - \frac{1}{L_f}} + \frac{\lambda^{-m} L_b}{L_f} \cdot \frac{\frac{\lambda^{m-s}}{L_f^{m-s}} - \frac{\lambda^l}{L_f^l}}{\frac{\lambda}{L_f} - 1} < \\
&< \frac{\delta_l}{L_f^l} + \frac{2\delta}{L_f^l(L_f - 1)} + \frac{L_b}{\lambda^s L_f^{m-s}(\lambda - L_f)}
\end{aligned}$$

Умножим обе части полученного неравенства на  $\delta^m$ :

$$\delta_m < \delta_l L_f^{m-l} + \frac{2\delta L_f^{m-l}}{L_f - 1} + \frac{L_b}{\lambda - L_f} \cdot \left(\frac{L_f}{\lambda}\right)^s.$$

Подставим оценку из формулы (1.23).

$$\delta_m < \left(\frac{1}{\lambda^\alpha - L_f} + \frac{1}{L_f - 1}\right) \cdot 2\delta L_f^{m-k} + \frac{L_b}{\lambda - L_f} \cdot \left(\frac{L_f}{\lambda}\right)^s.$$

В силу правой части неравенства (1.22),

$$L_f^{m-k} = (\lambda^{\alpha(m-k)})^{\frac{\log L_f}{\alpha \log \lambda}} < \left(\frac{C\lambda^\alpha}{2\delta}\right)^{\frac{\log L_f}{\alpha \log \lambda}} = L_f \left(\frac{C}{2\delta}\right)^{\frac{\log L_f}{\alpha \log \lambda}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\delta_m &< \left(\frac{1}{\lambda^\alpha - L_f} + \frac{1}{L_f - 1}\right) \cdot 2\delta L_f \left(\frac{C}{2\delta}\right)^{\frac{\log L_f}{\alpha \log \lambda}} + \frac{L_b}{\lambda - L_f} \cdot \left(\frac{L_f}{\lambda}\right)^s \\
&= K(L_f, \alpha, \lambda, C)\delta^\beta + \frac{L_b}{\lambda - L_f} \cdot \left(\frac{L_f}{\lambda}\right)^s,
\end{aligned}$$

где

$$K(L_f, \alpha, \lambda, C) = \frac{2L_f(\lambda^\alpha - 1)}{(\lambda^\alpha - L_f)(L_f - 1)} \cdot \left(\frac{C}{2}\right)^{\frac{\log L_f}{\alpha \log \lambda}}.$$

■

Одна из технических трудностей при работе с мягкими косыми произведениями состоит в том, что, для двух последовательностей  $\omega$  и  $\omega'$ , совпадающих на отрезке  $[-n, m]$ , отрезки  $I_{\omega, n}$  могут различаться. Поэтому нам потребуется другое определение отрезка  $I_{v, n}$  и множества  $D_{x, n}$ .

**Определение 1.8.6** Для (конечного) слова  $v = v_{-n} \dots v_{-1} | v_0 \dots v_m$ ,  $n, m > 0$ , обозначим через  $I_{v, n}$  наименьший отрезок, содержащий все отрезки вида  $I_{\omega, n}$  для  $\omega \in C_{-n}^m(v)$ ,

$$I_{v, n} = \left[ \inf_{\omega \in C_{-n}^m(v)} f_{\sigma^{-n}\omega, n}(0), \sup_{\omega \in C_{-n}^m(v)} f_{\sigma^{-n}\omega, n}(1) \right]$$

Через  $D_{x, n}$  обозначим множество слов  $v = v_{-n} \dots v_n$ , таких что  $x \in I_{v, n}$ .

Напомним, что ключевую роль в доказательстве леммы 1.6.3 играл тот факт, что к каждому слову  $v \in D_{x, n}$  можно было приписать слева слово длины  $S$  так, чтобы получившееся слово не принадлежало  $D_{x, n+S}$ . Следующая лемма обобщает это соображение на случай мягкого косо го произведения.

**Лемма 1.8.7** Существует такое натуральное число  $S = S(\lambda, L_f, L_b)$ , что для любых  $C$  и  $\alpha$  для достаточно малых значений  $\delta$  выполнено следующее. Пусть  $G$  — косое произведение, удовлетворяющее условиям теоремы 1.8.3. Тогда для любого допустимого конечного слова  $v = v_{-m} \dots v_{m+S}$  и точки  $x \in I$ , найдётся слово  $u$  длины  $S$ , такое что слово  $uv$  допустимо, но не принадлежит  $D_{x, n+S}$ .

**Доказательство** Если  $x \notin I_{v, n}$ , то нам подходит любое слово  $u$  длины  $S$ , такое что слово  $uv$  допустимо; поэтому далее мы предполагаем, что  $x \in I_{v, n}$ .

Неформально говоря, слово  $u$  будет состоять из большого количества символов, принадлежащих  $S_0 \cup S_1$ . Сначала мы припишем к началу слова  $w$  достаточно много элементов  $S_0$ , чтобы увеличить точность в оценке из леммы 1.8.5. После этого будет достаточно приписать 10 элементов  $S_0$  или 10 элементов  $S_1$ .

Перейдём к формальному доказательству. Поскольку 0.1-окрестности образов отображений  $f_0^{10}$  и  $f_1^{10}$  не пересекаются, для достаточно малых значений  $\delta$  и любых последовательностей  $\omega$  и  $\omega'$ , таких что  $\omega_0, \dots, \omega_9 \in S_0$  и  $\omega'_0, \dots, \omega'_9 \in S_1$ , 0.1-окрестности образов отображений  $g_{\omega,10}$  и  $g_{\omega',10}$  также не пересекаются. Кроме того, мы будем предполагать, что  $\delta$  настолько мало, что первое слагаемое в лемме 1.8.5 меньше 0.1. Выберем теперь число  $s_0$  так, чтобы второе слагаемое в оценке из леммы 1.8.5 было меньше 0.1,

$$\frac{1}{\lambda - L} \cdot \left(\frac{L}{\lambda}\right)^s < 0.1.$$

Докажем лемму для  $S = s_0 + 10$  и значений  $\delta$ , принадлежащих выбранной в предыдущем абзаце окрестности нуля. Обозначим через  $u$  такое слово из  $s_0$  символов множества  $S_0$ , что слово  $uv$  допустимо. Тогда в силу леммы 1.8.5,  $|f_{\omega, s_0}^-(x) - f_{\omega', s_0}^-(x)| < 0.2$  для любых двух последовательностей  $\omega, \omega' \in C_{-m-s_0}^{m+S}(uv)$ . Следовательно, множество возможных значений прообраза  $f_{\omega, s_0}^-(x)$  или строго выше множества возможных образов отображения  $g_{\omega,10}$  при  $\omega_0, \dots, \omega_9 \in S_0$ , или же строго ниже множества возможных образов отображения  $g_{\omega,10}$  при  $\omega_0, \dots, \omega_9 \in S_1$ . Следовательно, или приписывая к  $uv$  слева десять элементов множества  $S_0$ , или приписывая десять элементов множества  $S_1$ , мы получим слово, не принадлежащее множеству  $D_{x, n+S}$ , что и требовалось доказать. ■

**Лемма 1.8.8** Пусть  $x \in I$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_{\omega, -n}(x) \in J$ . Тогда  $g_{\eta, -n-1}(x) \in J$  или для любой последовательности  $\eta \in C_{-n}^\infty(\omega)$ , такой что  $\eta_{-n-1} \in S_0$ , или для любой последовательности  $\eta \in C_{-n}^\infty(\omega)$ , такой что  $\eta_{-n-1} \in S_1$ .

**Доказательство** Напомним, что  $J = [a, b]$ . В силу условия 5 теоремы 1.8.3, для достаточно малого  $\delta > 0$  отрезки

$$J_0 = [f_0(a + \delta) + K\delta^\beta + \frac{L_b}{\lambda - L_f}, f_0(b - \delta) - K\delta^\beta - \frac{L_b}{\lambda - L_f}],$$

$$J_1 = [f_1(a + \delta) + K\delta^\beta + \frac{L_b}{\lambda - L_f}, f_1(b - \delta) - K\delta^\beta - \frac{L_b}{\lambda - L_f}],$$

покрывают отрезок  $J$ .

Следовательно, либо  $g_{\omega, -n}(x) \in J_0$ , либо  $g_{\omega, -n}(x) \in J_1$ . Без ограничения общности рассуждений, можно предположить, что  $g_{\omega, -n}(x) \in J_0$ . Пусть  $\eta \in C_{-n}^\infty(\omega)$ ,  $\eta_{-n-1} \in S_0$ . Докажем, что  $g_{\eta, -n-1}(x) \in J$ . Применяя лемму 1.8.5 к последовательностям  $\omega$  и  $\eta$ , получаем неравенство

$$|g_{\omega, -n}(x) - g_{\eta, -n}(x)| \leq K\delta^\beta + \frac{L_b}{\lambda - L_f}.$$

Поэтому

$$g_{\eta, -n}(x) \in [f_0(a + \delta), f_0(b - \delta)] \subset [g_{\sigma^{-n-1}\eta}(a), g_{\sigma^{-n-1}\eta}(b)].$$

Последнее включение выполняется поскольку  $\|g_{\sigma^{-n-1}\eta}^{-1} - \tilde{f}_0^{-1}\|_{C^0} < \delta$ .

Наконец,  $g_{\eta, -n}(x) \in [g_{\sigma^{-n-1}\eta}(a), g_{\sigma^{-n-1}\eta}(b)]$ , откуда  $g_{\eta, -n-1}(x) \in [a, b] = J$ . ■

**Лемма 1.8.9** *Если число элементов множества  $D_{x,n}$  растёт экспоненциально медленнее размера множества  $A_n$  всех допустимых слов  $v_{-n} \dots v_n$ ,*

$$\frac{|D_{x,n}|}{|A_n|} < (1 - \varepsilon)^n,$$

*то хаусдорфова размерность максимального аттрактора меньше хаусдорфовой размерности фазового пространства. Точнее,*

$$\dim_H A_{max} < \dim_H(\Sigma_A^k \times I) - \min(1, \log_\lambda \frac{1}{1 - \varepsilon}).$$

**Доказательство** В силу определений множества  $D_{x,n}$  и отрезка  $I_v$ , образ отображения  $F^n$  содержится в объединении произведений вида  $C_{-n}^n(v) \times I_v$  по всем словам  $v \in D_{x,n}$ . Следовательно, множество  $F^n(X)$  покрывается



$$N(n) = \sum_{v \in A_n} [\lambda^n |I_v|] \leq \lambda^n \sum_{v \in A_n} |I_v| + |A_n|$$

шарами радиуса  $\lambda^{-n}$ . Оценим первое слагаемое.

$$\lambda^n \sum_{v \in A_n} |I_v| = \lambda^n \int_I |D_{x,n}| dx \leq \lambda^n (1 - \varepsilon)^n |A_n|.$$

Пользуясь полученными неравенствами, теперь легко доказать требуемую оценку:

$$\begin{aligned} \dim_H(A_{max}) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_\lambda N(n)}{n} \\ &\leq \max \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_\lambda (\lambda^n (1 - \varepsilon)^n |A_n|), \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_\lambda |A_n|}{n} \right) \\ &= \max (\dim_H(\Sigma_A^k) + 1 + \log_\lambda (1 - \varepsilon), \dim_H(\Sigma_A^k)) \\ &= \dim_H(\Sigma_A^k \times I) - \min(1, \log_\lambda \frac{1}{1 - \varepsilon}). \end{aligned}$$

■

## 1.8.2 Наличие костей

Как и в предыдущих случаях (см. пункты 1.5.3 и 1.6.2), рассмотрим отрезок  $\tilde{I}$ , такой что  $f_2(\tilde{I}) \supset \tilde{I}$ . Тогда для достаточно малых  $\delta$  образ  $g_\omega(\tilde{I})$  содержит отрезок  $\tilde{I}$ , если только  $\omega_0 = 2$ . Поэтому для любой последовательности вида  $\omega = \dots 22 \dots 2\omega_{-n} \dots \omega_{-1} | \omega_0 \dots$  множество  $I_\omega$  содержит отрезок  $f_{\sigma^{-n}\omega, n}(\tilde{I})$  ненулевой длины. Очевидно, множество последовательностей с левым хвостом из цифр «2» всюду плотно в  $\Sigma_A^k$  и равномощно  $\mathbb{R}$ .

## 1.8.3 Хаусдорфова размерность и мера

Пусть  $S$  — число из леммы 1.8.7, а возмущение  $\delta$  настолько мало, что выполнено заключение этой леммы.

Пусть  $A_n^{i,j}$  — множество разрешённых слов  $v = v_{-n} \dots v_n$ , таких что  $v_{-n} = i$  и  $v_n = j$ . Обозначим через  $D_{x,n}^{i,j}$  пересечение  $D_{x,n} \cap A_n^{i,j}$ . Очевидно,

$$|A_n| = \sum_{i,j} |A_n^{i,j}|, \quad |D_{x,n}| = \sum_{i,j} |D_{x,n}^{i,j}|.$$

В силу леммы 1.8.9, достаточно доказать, что последовательность  $|D_{x,n}|$  растёт экспоненциально медленнее последовательности  $|A_n|$ . Очевидно, для этого достаточно показать, что другая линейная комбинация чисел  $|D_{x,n}^{i,j}|$  с положительными коэффициентами растёт экспоненциально медленнее линейной комбинации чисел  $|A_n^{i,j}|$  с теми же коэффициентами.

Рассмотрим две последовательности матриц:  $(\mathcal{A}_n)_{ij} = |A_n^{i,j}|$  и  $(\mathcal{D}_{x,n})_{ij} = |D_{x,n}^{i,j}|$ . Пусть  $A_{top}$  — матрица, получающаяся из  $A$  заменой всех ненулевых элементов на единицы, то есть  $(A_{top})_{ij}$  равно нулю, если переход  $ij$  запрещён, и единице, если такой переход разрешён.

Отсюда сразу следует, что  $\mathcal{A}_n = A_{top}^{2n+1}$ . Посмотрим на то, как связаны  $\mathcal{D}_{x,n+S}$  и  $\mathcal{D}_{x,n}$ . Слова  $v_{-n-S} \dots v_{n+S}$ , такие что подслово  $v_{-n} \dots v_n$  принадлежит  $\mathcal{D}_{x,n}$ , перечисляются матрицей  $A_{top}^S D_{x,n} A_{top}^S$ . В силу леммы 1.8.7, для каждого способа приписать к слову  $v_{-n} \dots v_n$  символы  $v_{n+1} \dots v_{n+S}$  найдётся такой способ выбрать символы  $v_{-n-S} \dots v_{-n-1}$ , что полученное слово будет разрешённым, но не будет принадлежать  $D_{x,n+S}$ . Следовательно, среди слов, перечисляемых матрицей  $A_{top}^S D_{x,n} A_{top}^S$ , как минимум  $|D_{x,n}|$  слов не принадлежат множеству  $D_{x,n+S}$ .

В силу теоремы Перрона–Фробениуса, у матрицы  $A_{top}$  есть ровно один левый собственный вектор  $a$  с положительными элементами, и ровно один правый собственный вектор  $b$  с положительными коэффициентами:

$$aA_{top} = \lambda_P a, \quad A_{top}b = \lambda_P b.$$

Мы будем следить за асимптотикой последовательностей  $a\mathcal{A}_n b$  и  $a\mathcal{D}_{x,n} b$ . Первая последовательность устроена очень просто:

$$a\mathcal{A}_n b = aA_{top}^{2n+1} b = \lambda_P^{2n+1} ab.$$

Перейдём теперь ко второй последовательности.

$$a\mathcal{D}_{x,n+S}b = aA_{top}^S\mathcal{D}_{x,n}A_{top}^Sb - a(A_{top}^S\mathcal{D}_{x,n}A_{top}^S - D_{x,n+S})b.$$

Напомним, что среди слов, перечисляемых матрицей  $A_{top}^S D_{x,n} A_{top}^S$ , как минимум  $|D_{x,n}|$  слов не принадлежат множеству  $D_{x,n+S}$ . Следовательно,

$$a(A_{top}^S\mathcal{D}_{x,n}A_{top}^S - D_{x,n+S})b \geq \varepsilon a\mathcal{D}_{x,n}b,$$

где число  $\varepsilon$  зависит только от рассматриваемой цепи Маркова.

Итак,

$$a\mathcal{D}_{x,n+S}b \leq (\lambda_P^S - \varepsilon)a\mathcal{D}_{x,n}b,$$

то есть последовательность линейных комбинаций  $a\mathcal{D}_{x,n+S}b$  растёт экспоненциально медленнее последовательности линейных комбинаций  $a\mathcal{A}_n b$ . Значит, и размер множества  $D_{x,n}$  растёт экспоненциально медленнее, чем общее количество разрешённых слов длины  $2n + 1$ . Прямое применение леммы 1.8.9 завершает доказательство.

Заметим, что полученная в этом пункте оценка на хаусдорфову размерность максимального аттрактора зависит только от матрицы переходов  $A_{top}$  и числа  $S$  (которое, в свою очередь, зависит только от чисел  $L_f, L_b, \lambda$  и  $k$ ). Таким образом, полученная оценка *не зависит от показателя гёльдеровости  $\alpha$* .

#### 1.8.4 Плотность графика

Выберем точку  $p = (\omega, x)$  максимального аттрактора и её стандартную окрестность  $U = C_{-N}^N(\omega) \times (x - \tilde{\varepsilon}, x + \tilde{\varepsilon})$ .

Докажем сначала, что для некоторого  $m > N$  прообраз  $F^{-m}(\{\omega\} \times (x - \tilde{\varepsilon}, x + \tilde{\varepsilon}))$  пересекает полосу  $\Sigma^k \times J$ . Действительно, иначе в силу условия 5 длины этих прообразов должны экспоненциально расти с ростом  $m$ , что невозможно. Фиксируем такое  $m$ ; пусть прообраз точки  $y \in (x - \tilde{\varepsilon}, x + \tilde{\varepsilon})$  принадлежит отрезку  $J$ .

Теперь по индукции, используя на каждом шаге лемму 1.8.8, легко доказать, что существует бесконечная влево последовательность  $\omega' = \dots\omega'_{-m-1}$  элементов  $S_0 \cup S_1$ , такая что  $y \in I_{\omega'\omega'_{-m}'\dots|\omega_0\dots}$ . Напомним, что отображения  $f_0$  и  $f_1$  сжимают, следовательно, точка  $(\omega \omega_{-m}\dots|\omega_0\dots, y)$  принадлежит графику.

Итак, точки графика  $(\omega, x)$ , для которых последовательность  $\omega$  имеет бесконечный влево хвост из элементов  $S_0 \cup S_1$ , плотны в максимальном аттракторе.

### 1.8.5 Совпадение аттракторов

Докажем, что  $A_{max} = A_M$ . Действительно, аттрактор Милнора сдвига Маркова есть всё фазовое пространство, поэтому аттрактор Милнора косоугольного произведения над сдвигом Маркова пересекает каждый слой. С другой стороны, аттрактор Милнора является подмножеством максимального аттрактора, поэтому  $\Gamma \subset A_M$ . Но график всюду плотен в максимальном аттракторе, поэтому максимальный аттрактор совпадает с аттрактором Милнора.

## 1.9 Открытое множество примеров в классе диффеоморфизмов

В этом параграфе мы докажем основной результат этой главы — теорему 1.1.3.

Сначала мы построим мягкое косое произведение над диффеоморфизмом Аносова двумерного тора, такое что марковское кодирование этого произведения будет удовлетворять всем требованиям теоремы 1.8.3. После этого доказательство сведётся к аккуратному применению основной теоремы из статьи [9].

Наше отображение будет косым произведением над диффеоморфизмом Аносова с матрицей

$$T_n = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Несложно проверить, что собственные значения этой матрицы равны  $\lambda = n + \sqrt{n^2 - 1}$  и  $\lambda^{-1} = n - \sqrt{n^2 - 1}$ .

Напомним, как устроено марковское разбиение для такого диффеоморфизма. Сначала строится предмарковское разбиение, состоящее из двух параллелограммов,  $P_1$  и  $P_2$ . При этом образ первого параллелограмма  $n$  раз пересекает первый параллелограмм и  $n+1$  раз второй, а образ второго  $n-1$  раз пересекает первый параллелограмм и  $n$  раз второй.

Параллелограммами марковского разбиения будут пересечения образов параллелограммов предмарковского разбиения с самими параллелограммами предмарковского разбиения. Будем говорить, что параллелограмм, полученный при пересечении образа параллелограмма  $P_i$  с параллелограммом  $P_j$ , относится к типу « $i-j$ ».

Всего при таких пересечениях получается

$$k = n + (n+1) + (n-1) + n = 4n$$

параллелограммов, и матрица соответствующего топологического сдвига Маркова имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1_{n \times n} & 1_{n \times n+1} & 0_{n \times n-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n+1 \times n} & 0_{n+1 \times n+1} & 1_{n+1 \times n-1} & 1_{n+1 \times n} \\ 1_{n-1 \times n} & 1_{n-1 \times n+1} & 0_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n+1} & 1_{n \times n-1} & 1_{n \times n} \end{pmatrix},$$

где  $0_{a \times b}$  и  $1_{a \times b}$  — матрицы размера  $a \times b$  из нулей и единиц соответственно.

Выберем достаточно большое значение  $n$ . После этого выберем три параллелограмма  $Q_{01}$ ,  $Q_{11}$  и  $Q_{21}$  типа «1-1» и три параллелограмма  $Q_{02}$ ,  $Q_{12}$  и  $Q_{22}$  типа «2-2» так, чтобы попарные расстояния между ними были не менее 0.1. Теперь положим  $f_b = f_i$  при  $b \in Q_{ij}$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $j = 1, 2$ . Такой выбор послойных отображений сразу обеспечит нам условие 1.

Поскольку попарные расстояния между параллелограммами не меньше 0.1, мы можем продолжить построенное отображения до косоугольного произведения над диффеоморфизмом  $T_n$ , липшицевого по слою с константой  $L_f = 1.5$  и липшицевого по базе с константой  $L_b$ , не зависящей от  $n$ . Значит, при достаточно больших значениях  $n$  дробь  $\frac{L_b}{\lambda - L_f}$  будет меньше 0.01, то есть условие 5 также будет выполнено. Зафиксируем  $n$  так, чтобы это неравенство выполнялось.

При доказательстве теоремы 1.8.3 мы показали, что хаусдорфова размерность максимального аттрактора косоугольного произведения  $F$  и всех близких к нему косоугольных произведений  $G$  меньше некоторой константы  $d$ , зависящей от показателя гёльдеровости. Выберем теперь настолько малую окрестность косоугольного произведения  $F$  в пространстве гладких отображений произведения  $\mathbb{T}^2 \times I$  в себя, чтобы теорема Ильясенко–Негута гарантировала нам показатель гёльдеровости  $\alpha > d/3$ . Тогда хаусдорфова размерность максимального аттрактора отображения  $G$  будет меньше, чем  $d/\alpha < 3$ , значит, его мера будет равна нулю. Остальные требования в определении костистости и условие плотности графика — чисто топологические, поэтому сохраняются при сопряжении  $H$ .

Итак, все гладкие отображения, достаточно близкие к построенному косоугольному произведению  $F$ , имеют костистый аттрактор, причём максимальный аттрактор совпадает с замыканием графика.

Единственное, что нам осталось доказать — это совпадение максимального аттрактора с аттрактором Милнора. Нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.9.1** *Рассмотрим косое произведение  $\mathcal{F}$  над линейным диффеоморфизмом Аносова  $T$  двумерного тора:*

$$X = \mathbb{T}^2 \times M, \quad \mathcal{F}: X \rightarrow X, \quad (b, m) \mapsto (Tb, \tilde{f}_b(m)),$$

где  $M$  — компактное многообразие. Предположим, что отображение  $\mathcal{F}$  частично гиперболическое, и его центральное слоение — это вертикальное слоение  $\{b\} \times M$ . Тогда существует такое число  $\delta > 0$ , что для любого гладкого отображения  $\mathcal{G}$ ,  $d_{C^2}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) < \delta$  милноровский аттрактор отображения  $\mathcal{G}$  (по отношению к мере Лебега  $m_3$  на  $X$ ) пересекает каждый центральный слой отображения  $\mathcal{G}$ .

Очень похожий результат был доказан (хотя и не сформулирован в виде отдельного утверждения) в книге [2, р. 215]. Я благодарен В. Клепцыну, который обратил мое внимание на эту книгу. Доказательство, приведенное ниже, во многом повторяет последний абзац доказательства Предложения 11.1 из этой книги, но излагается гораздо подробнее.

**Доказательство** Выберем  $\delta$  таким образом, чтобы для любого гладкого отображения  $\mathcal{G}$ ,  $d_{C^2}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) < \delta$  выполнялось условие dominated splitting, и чтобы сильно неустойчивое слоение исходного отображения  $\mathcal{F}$  содержалось в сильно неустойчивых конусах возмущенного отображения  $\mathcal{G}$ .

Будем доказывать утверждение от противного. Предположим, что для некоторого  $C^2$ -гладкого возмущения  $\mathcal{G}$ ,  $d_{C^2}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) < \delta$ , существует такой слой центрального слоения  $\mathcal{G}$ , что милноровский аттрактор  $A_M(\mathcal{G})$  не пересекает этот слой. Тогда милноровский аттрактор отображения  $\mathcal{G}$  не пересекает и насыщение  $\tilde{U}$  малой окрестности этого слоя слоями центрального слоения.

Возьмем открытое множество  $U \Subset \tilde{U}$ . Рассмотрим множество  $V$  таких точек  $p \in \mathbb{T}^2 \times M$ , что их образы под действием  $\mathcal{G}$  никогда не попадают в  $U$ :

$$V = \{p \in X \mid \forall n \geq 0 \mathcal{G}^n(p) \notin U\} = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{G}^{-n}(X \setminus U).$$

Множество  $V$  является пересечением семейства замкнутых множеств, поэтому  $V$  замкнуто. Заметим, что объединение всех прообразов множества  $V$  — множество  $\mathcal{G}^{-n}(V)$  — содержит все точки  $p$ , что  $\omega$ -предельное множество точки  $p$  не пересекается с  $\tilde{U}$ :

$$\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{G}^{-n}(V) \supset \{p \in X \mid (\omega\text{-предельное множество } p) \cap \tilde{U} = \emptyset\}.$$

Действительно, если точка  $p$  не принадлежит объединению  $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{G}^{-n}(V)$ , то включение  $\mathcal{G}^{-n}(p) \in U$  выполнено для бесконечного количества  $n \in \mathbb{N}$ . В таком случае орбита точки  $p$  имеет предельную точку в  $\text{Cl}U \subset \tilde{U}$ , следовательно,  $\omega$ -предельное множество точки  $p$  пересекается с  $\tilde{U}$ .

Напомним, что по предположению аттрактор Милнора не пересекает  $\tilde{U}$ ; значит, множество точек,  $\omega$ -предельное множество которых не пересекает  $\tilde{U}$ , имеет полную меру. Следовательно, объединение всех прообразов  $\mathcal{G}^{-n}(V)$  также имеет полную меру. Поэтому множество  $V$  должно иметь положительную меру Лебега.

По теореме Фубини, тогда существует точка  $m_0 \in M$  и неустойчивый слой  $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$  линейного диффеоморфизма Аносова  $T$ , что пересечение  $V \cap (\tilde{\gamma}(\mathbb{R}) \times \{m_0\})$  имеет положительную одномерную меру Лебега. Через  $\gamma$  обозначим кривую  $\gamma(t) = (\tilde{\gamma}(t), m_0)$ . Тогда множество  $\{t \in \mathbb{R} \mid \gamma(t) \in V\}$  имеет положительную меру Лебега. Не теряя общности, можно считать, что 0 является точкой плотности этого множества:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{meas}(\gamma^{-1}(V) \cap (-\varepsilon, \varepsilon))}{2\varepsilon} = 1.$$

Выберем маленькое положительное число  $\varepsilon > 0$ . Возьмем интервал  $(-\varepsilon', \varepsilon')$ , для которого

$$\text{meas}(\gamma^{-1}(V) \cap (-\varepsilon', \varepsilon')) > 2\varepsilon'(1 - \varepsilon).$$

Пусть  $n(\varepsilon')$  — наименьшее натуральное число, для которого образ  $\gamma_{\varepsilon'}$  кривой  $\gamma|_{(-\varepsilon', \varepsilon')}$  под действием отображения  $\mathcal{G}^{n(\varepsilon')}$  длиннее единицы. Из леммы Данжуа об искажении следует, что существует константа  $C = C(\mathcal{F}, \delta)$ , такая, что

$$\max_{t \in (-\varepsilon', \varepsilon')} \left\| (\mathcal{G}^{n(\varepsilon')})'(\gamma(t)) \right\| < C(\mathcal{F}, \delta) \min_{t \in (-\varepsilon', \varepsilon')} \left\| (\mathcal{G}^{n(\varepsilon')})'(\gamma(t)) \right\|$$

Следовательно,

$$\text{meas}_1(\gamma_{\varepsilon'}(-\varepsilon', \varepsilon') \cap V) > (1 - C\varepsilon) \text{meas}_1(\gamma_{\varepsilon'}(-\varepsilon', \varepsilon')). \quad (1.24)$$



Теперь рассмотрим семейство кривых  $\gamma_{\varepsilon'} = \mathcal{G}^{n(\varepsilon')}(\gamma(-\varepsilon', \varepsilon'))$  для маленьких положительных чисел  $\varepsilon'$ . По теореме Арцела–Асколи, у этого семейства есть предельная точка в пространстве  $C^1$ -гладких кривых. Эту предельную кривую (с натуральной параметризацией) обозначим  $\gamma_0$ . Из неравенства (1.24) следует, что пересечение  $\text{Im } \gamma_0 \cap V$  имеет полную меру в  $\text{Im } \gamma_0$ . Напомним, что  $V$  — замкнутое множество, поэтому  $\text{Im } \gamma_0 \subset V$ .

По теоремам Хирша–Пью–Шуба и Городецкого–Ильяшенко, существует проекция  $\pi: X \rightarrow \mathbb{T}^2$ , для которой следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mathcal{G}} & X \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{T} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Образ  $\pi \circ \gamma_0$  кривой  $\gamma_0$  под действием проекции  $\pi$  — это гладкая кривая в  $\mathbb{T}^2$ , образы которой под действием итераций  $T$  не пересекают открытое множество  $\pi U$ . Но это невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. ■

Используя эту лемму, легко показать, что максимальный аттрактор совпадает с аттрактором Милнора. Действительно, милноровский аттрактор возмущенного отображения  $\mathcal{G}$  пересекает каждый слой центрального слоения  $\mathcal{G}$ . С другой стороны, максимальный аттрактор содержит аттрактор Милнора. Значит, милноровский аттрактор должен содержать ту часть максимального аттрактора, которая представляет собой график  $\Gamma$ . Но график  $\Gamma$  плотен в максимальном аттракторе, значит, милноровский аттрактор совпадает с максимальным аттрактором.

Итак, мы доказали, что отображение  $\mathcal{G}$  имеет костлявый аттрактор без полых костей.

### 1.9.1 От отрезка к окружности

Мы построили такое косое произведение  $\mathcal{F}$  над линейным диффеоморфизмом Аносова со слоем *отрезок*, что любое достаточно близкое к нему гладкое

отображение  $\mathcal{G}$  имеет костлявый аттрактор без полых костей. Рассмотрим полосу  $Y = \mathbb{T}^2 \times I$ . Приклеим эту полосу к нашему фазовому пространству  $X$  так, чтобы получился трехмерный тор, и продолжим отображение  $\mathcal{F}$  на весь трехмерный тор; в полосе  $Y$  отображение  $\mathcal{F}$  будет действовать линейными растяжениями. Тогда  $\mathcal{F}(X) \subset X$ , значит, и  $\mathcal{G}(X) \subset X$  для отображения  $\mathcal{G}$ , достаточно близкого к  $\mathcal{F}$ . Поэтому максимальный аттрактор исходного отображения  $\mathcal{A}_X$  является локально максимальным аттрактором для нового отображения, и новое отображение имеет костлявый аттрактор без полых костей.

## 2 Бильярды

*Результаты этой главы получены совместно с А. Глуцюком.*

### 2.1 Введение

#### 2.1.1 Основные результаты

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  — область с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим *бильярд* в области  $\Omega$  — динамическую систему, которая описывает движение материальной точки («бильярдного шара») в области  $\Omega$ . Внутри области  $\Omega$  шар движется по отрезкам прямых, а от границы области отражается по обычному закону отражения: угол падения равен углу отражения. Фазовое пространство такой динамической системы — это множество пар  $(x, v)$ , где  $x \in \partial\Omega$  — точка отражения, а  $v$  — скорость шара в этой точке (единичный вектор, направленный внутрь области  $\Omega$ ). Динамическую систему задаёт переход от одного момента отражения к следующему.

Эта глава посвящена частному случаю следующей проблемы, поставленной В. Я. Иврием в 1978 году.

**Гипотеза 2.1.1 (В. Я. Иврий, 1978)** *Для области в  $\mathbb{R}^m$  с достаточно гладкой границей множество периодических орбит соответствующего бильярда имеет меру нуль.*

Более формально, мы изучаем множество пар  $(x, v)$ , таких что орбита  $(x, v)$  под действием бильярдного отображения конечна.

Очевидно, достаточно доказать, что для любого натурального числа  $k$  множество  $k$ -угольных орбит  $Per_k$  имеет меру нуль. Для  $k = 2$  это утверждение тривиально. Для треугольных траекторий в плоском бильярде это утверждение было доказано М. Рыхликом [14]. Позже Я. Воробец [17] обобщил результат Рыхлика на бильярды большей размерности.

Мы докажем, что множество четырехугольных периодических орбит в бильярде на плоскости имеет меру нуль.

**Теорема 2.1.2** *Существует такое натуральное число  $r$ , что для любого бильярда на плоскости с кусочно  $C^r$ -гладкой границей множество  $Per_4$  имеет меру 0.*

Эта теорема очевидным образом вытекает из двух следующих.

**Теорема 2.1.3** *Предположим, что для любого  $r$  существует бильярд в  $\mathbb{R}^m$  с кусочно  $C^r$ -гладкой границей, для которого множество  $Per_k$  имеет положительную меру. Тогда существует бильярд в  $\mathbb{R}^m$  с кусочно-аналитической границей, для которого множество  $Per_k$  имеет внутреннюю точку в пространстве всех орбит.*

**Теорема 2.1.4** *Для любого бильярда на плоскости с кусочно-аналитической границей множество  $Per_4$  не имеет внутренних точек.*

## 2.1.2 От гипотезы Вейля к гипотезе Иврия

Хотя гипотеза 2.1.1 сформулирована в терминах теории математических бильярдов, она возникла как геометрическое условие в следующей проблеме из теории уравнений в частных производных.

Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа  $\Delta$  в некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ . Лапласиан  $\Delta$  — отрицательно определенный самосопряженный оператор, значит, его собственные значения с граничными условиями Дирихле  $u|_{\partial\Omega} = 0$  — отрицательные вещественные числа  $0 \geq -\lambda_1^2 \geq -\lambda_2^2 \geq \dots \geq -\lambda_k^2 \geq \dots$ . Пусть  $N(\lambda)$  — количество собственных значений  $-\lambda_i^2$ , для которых  $\lambda_i^2 < \lambda^2$ , то есть

$$N(\lambda) = k \Leftrightarrow \lambda_k < \lambda \leq \lambda_{k+1}. \quad (2.1)$$

**Вопрос 2.1.5** Каково асимптотическое поведение функции  $N(\lambda)$ ?

Г. Вейль [16] доказал, что число  $N(\lambda)$  асимптотически пропорционально  $\lambda^m$ , где  $m = \dim \Omega$ .

**Теорема 2.1.6 (Н. Вейль, 1911)** Пусть  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^m$ , такая что  $\text{mes}(\Omega) < \infty$  и  $\text{mes}(\partial\Omega) = 0$ . Тогда

$$N(\lambda) = c_0 \text{mes}(\Omega) \lambda^m + o(\lambda^m),$$

где  $c_0 = (2\pi)^{-m} \omega_m$ , а  $\omega_m$  — объём  $m$ -мерного единичного шара.

Кроме того, он получил более точную асимптотику для функции  $N(\lambda)$  в случае  $\Omega = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_m; b_m]$ :

$$N(\lambda) = c_0 \text{mes}(\Omega) \lambda^m - c_1 \text{mes}'(\partial\Omega) \lambda^{m-1} + o(\lambda^{m-1}), \quad (2.2)$$

где  $c_1 = \frac{1}{4}(2\pi)^{m-1} \omega_{m-1}$ , а  $\text{mes}'$  —  $(m-1)$ -мерная мера. Вейль предположил, что полученная им формула (2.2) верна и для любой другой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  с достаточно гладкой границей.

Над гипотезой Вейля работали многие математики, в том числе Р. Курант, Б. М. Левитан, В. Авакумович, Л. Хёрмандер, Дж. Дейстермаат, В. Гийемин, Р. Seeley и В. Я. Иврий. Лучший результат был получен Иврием, который в работе [21] доказал гипотезу Вейля для областей, удовлетворяющих дополнительному геометрическому условию.

**Теорема 2.1.7 (В. Я. Иврий, 1980)** Пусть  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^m$  с достаточно гладкой границей. Предположим, что в соответствующем бильярде множество периодических орбит имеет меру 0. Тогда для  $\Omega$  выполнено асимптотическое равенство (2.2).

Это геометрическое условие является непосредственным аналогом условия, возникающего при исследовании аналогичной задачи для римановых многообразий без края: в этом случае приходится требовать, чтобы мера множества замкнутых геодезических равнялась нулю.

В 1978 году В. Я. Иврий<sup>10</sup> сделал доклад на одном из ведущих семинаров по теории бильярдов — семинаре Я. Г. Синая в МГУ. В ходе доклада В. Я. Иврий сформулировал гипотезу 2.1.1 о том, что возникшее у него геометрическое

<sup>10</sup> В этот момент теорема Иврия уже была доказана, но ещё не была опубликована

условие выполнено для всех бильярдов с достаточно гладкой границей. Участники семинара сказали, что через неделю–другую докажут эту гипотезу. Однако...

**Вопрос до сих пор открыт!**

Как мы уже говорили, случай треугольных орбит изучили М. Рыхлик в работе [14] и Я. Воробец в работе [17]. В данной работе изучен случай четырёхугольных траекторий в плоских бильярдах.

## 2.2 Сведение к аналитическому случаю

В этом параграфе мы докажем теорему 2.1.3.

### 2.2.1 Идея доказательства

Сначала для анализа ситуации предположим чуть больше, чем дано в условии теоремы. А именно, предположим, что существует бильярд  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ , такой что у множества  $Per_k$  есть внутренняя точка, соответствующая  $k$ -угольной орбите  $A_1 A_2 \dots A_k$ . Фазовое пространство бильярда  $2(m-1)$ -мерно, поэтому окрестность орбиты  $A_1 A_2 \dots A_k$  —  $2(m-1)$ -мерное семейство  $k$ -угольных траекторий.

Рассмотрим это семейство как  $2(m-1)$ -мерное подмногообразие в  $km$ -мерном пространстве всех  $k$ -угольников в  $\mathbb{R}^m$ . Заметим, что касательная плоскость к этому многообразию принадлежит  $k(m-1)$ -мерной плоскости  $T_{A_1} \partial\Omega \times \dots \times T_{A_k} \partial\Omega$ , причём эта плоскость зависит только от самого многоугольника  $A_1 A_2 \dots A_k$ , а не от бильярда  $\Omega$ . Действительно, каждая касательная гиперплоскость  $T_{A_i} \partial\Omega$  — это ортогональное дополнение к биссектрисе угла  $A_{i-1} A_i A_{i+1}$ .

Таким образом, мы построили аналитическое  $k(m-1)$ -мерное распределение  $\mathcal{F}$  в пространстве всех  $k$ -угольников в  $\mathbb{R}^m$ . Окрестность внутренней точки множества  $Per_k$  — это  $2(m-1)$ -мерная интегральная поверхность распределения  $\mathcal{F}$ . Более того, можно показать, что бильярд с кусочно  $C^r$ -гладкой границей задаёт  $2(m-1)$ -мерную интегральную  $r$ -струю распределения  $\mathcal{F}$ :  $r$ -струю  $2(m-1)$ -мерной поверхности, которая в точке  $A_1 A_2 \dots A_k$  удовлетворяет не только всем уравнениям, задающим плоскость  $\mathcal{F}$ , но и частным производным этих уравнений до порядка  $r-1$  включительно.

В силу теоремы Картана–Кураниши–Рашевского [3, 12 и 26], если у аналитического распределения существуют интегральные  $r$ -струи сколь угодно высокого порядка, то у этого распределения существует и аналитическая интегральная поверхность той же размерности. Для окончания доказательства нам остаётся показать, что по данному  $2(m - 1)$ -мерному интегральному аналитическому многообразию распределения  $\mathcal{F}$ , далёкому от нескольких «вырожденных» семейств, можно построить бильярд с кусочно-аналитической границей, для которого у множества  $Per_k$  есть внутренняя точка.

### 2.2.2 Формальное доказательство теоремы 2.1.3

Пусть для любого  $r$  существует бильярд с кусочно  $C^r$ -гладкой границей, для которого мера множества  $Per_k$  положительна.

Зафиксируем  $r \in \mathbb{N}$ , и докажем, что существует  $r$ -струя  $2(m - 1)$ -мерного подмногообразия, касательная к распределению  $\mathcal{F}$ . Пространство всех бесконечных бильярдных траекторий  $A_1 \dots A_k A_{k+1} \dots$  имеет размерность  $2(m - 1)$ , причём оно инъективно проецируется на множество пар точек  $(A_1, A_2)$ . Следовательно, образ  $U$  этого пространства при проекции на множество наборов  $(A_1, \dots, A_k)$  — подмногообразие в  $\mathbb{R}^{mk}$  размерности  $2(m - 1)$ . Множество  $Per_k$  периодических орбит  $A_1 \dots A_k$  длины  $k$  — подмножество многообразия  $U$  нулевой меры. Для каждого элемента этого множества касательное пространство к  $U$  в точке  $(A_1, \dots, A_k)$  содержится в соответствующей плоскости распределения  $\mathcal{F}$ . Следовательно,  $r$ -струя этого  $C^r$ -гладкого  $2(m - 1)$ -мерного подмногообразия касается распределения  $\mathcal{F}$  в любой точке Лебега множества  $Per_k \subset U$ , причём ранг каждой из проекций  $\pi_i: A_1 \dots A_k \mapsto A_i$  равен  $m - 1$ .

Из основной теоремы главы XI книги П. К. Рашевского [26] следует, что для достаточно большого  $r$  и для любой  $2(m - 1)$ -мерной интегральной  $r$ -струи распределения  $\mathcal{F}$  существует  $2(m - 1)$ -мерный интегральный аналитический росток  $U$  с такой  $r$ -струей. Напомним, что проекции  $\pi_i: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\pi_i(A_1 \dots A_k) = A_i$ , имеют ранг  $m - 1$ . Рассмотрим кусочно-аналитический бильярд, граница которого содержит, в частности, образы проекций  $\pi_i$ . Тогда для этого бильярда множество  $Per_k$  имеет внутреннюю точку.

## 2.3 Аналитический случай

### 2.3.1 Основные обозначения

Вопрос о том, является ли данная  $k$ -угольная периодическая траектория  $A_1 A_2 \dots A_k A_1$  внутренней точкой множества  $Per_k$  — локальный. То есть для ответа на этот вопрос достаточно знать только ростки границы  $\partial\Omega$  в вершинах  $A_1, \dots, A_k$ . Поэтому естественным образом возникает следующее определение.

**Определение 2.3.1** Набор ростков границы области  $\Omega$  в  $k$  точках  $A_1, \dots, A_k$  называется  $k$ -ударным бильярдным ростком, если траектория  $A_1 A_2 \dots A_k A_1$  периодична и является внутренней точкой  $Per_k$ .

Ростки границы мы также будем называть зеркалами.

Наша цель — доказать, что аналитических 4-ударных бильярдных ростков не существует. Мы докажем этот факт от противного: предположим, что такой росток существует, и рассмотрим его максимальное аналитическое продолжение, а также максимальное аналитическое продолжение двумерного семейства четырёхугольных периодических орбит. Оказывается, что любая траектория, лежащая на границе такого аналитического продолжения, должна быть вырожденной. Мы будем изучать возможные типы её вырождений.

В дальнейшем иногда нам придётся выделять и отдельно рассматривать случай, когда вершина 4-угольной периодической траектории является особой точкой соответствующего зеркала. А иногда мы будем объединять разные типы вырождения и рассматривать случай, когда вершина 4-угольной периодической траектории является отмеченной в смысле следующего определения.

**Определение 2.3.2** Пусть  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  — аналитические кривые на плоскости. Будем говорить, что точка плоскости  $X$  — *отмеченная*, если она или является особой точкой одной из кривых  $\gamma_i$  (включая точки самопересечения), или является точкой пересечения двух различных кривых.

Подчеркнём, что слова «двух различных кривых» в этом определении означают, что если даже для каких-то двух различных индексов  $i \neq j$  кривые  $\gamma_i$  и



$\gamma_j$  совпадают, мы не будем по этой причине отмечать все точки кривой  $\gamma_i = \gamma_j$ . Поэтому множество отмеченных точек не более чем счётно.

Нам часто придётся рассматривать семейства бильярдных траекторий, в которых одна из вершин приближается к особой точке соответствующего зеркала. При этом мы будем пользоваться следующим соглашением.

**Соглашение 2.3.3** Будем говорить, что гладкая кривая  $\gamma$  имеет касательную  $l$  в особой точке  $G_0 \in \gamma$ , если касательная в точке  $G \in \gamma$  стремится к  $l$  при  $G \rightarrow G_0$ .

В частности, мы можем говорить о касательной к кривой в особой точке типа касп.

**Определение 2.3.4** Будем говорить, что четырёхугольник  $ABCD$  вырожден, если выполнено одно из следующих условий:

- $A = B$ , или  $B = C$ , или  $C = D$ , или  $D = A$ ;
- один из углов четырёхугольника  $ABCD$  равен  $\pi$ .

Обратим внимание на то, что невырожденный четырёхугольник может быть самопересекающимся.

## 2.3.2 Доказательство теоремы 2.1.4

Предположим, что заключение теоремы неверно. Тогда существует четырёхударный аналитический бильярдный росток  $(a, b, c, d)$ . Рассмотрим максимальные аналитические продолжения ростков зеркал и периодических семейств траекторий. Наша стратегия будет заключаться в том, чтобы продолжить зеркала достаточно далеко и получить противоречие.

А именно, в предложении 2.3.18 мы, грубо говоря, докажем, что если у четырёхугольника один из углов — развёрнутый, то он не может быть пределом двупараметрического семейства 4-периодических бильярдных траекторий.

Это следует из того, что соответствующее отображение Пуанкаре не тождественно: когда отражение близко к движению по касательной, задаваемое им отображение Пуанкаре на границе бильярда имеет вид  $(x, y) \mapsto (x + \sqrt{y}, y)$ ; такое отображение нельзя получить с помощью «обычных» отражений.

С другой стороны, мы покажем, что, «раскрывая» один из углов 4-периодической траектории, всегда можно в пределе получить четырёхугольник, один из углов которого — развёрнутый. Из этого противоречия будет следовать утверждение теоремы.

Заменим аналитические ростки  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  их аналитическими продолжениями до максимальных аналитических кривых. Ясно, что аналитические продолжения зеркал  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  могут пересекать бильярдные траектории, поэтому мы разрешим траекториям пролетать сквозь «неправильные» части зеркал.

**Соглашение 2.3.5** Если аналитическая кривая имеет предел в положительном или отрицательном направлении, мы присоединим этот предел (или эти пределы) к кривой, и будем считать их особыми (а значит, отмеченными) точками полученной кривой.

Вершины четырёхугольника  $ABCD$  движутся в направлениях внешних биссектрис углов этого четырёхугольника, поэтому периметр четырёхугольника не меняется. Не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что этот периметр равен единице:

$$AB + BC + CD + DA = 1. \quad (2.3)$$

Мы будем подходить к границе пространства четырёхугольных бильярдных траекторий вдоль специальных «угловых семейств»:  $A = const$ , угол  $\alpha = \angle DAB$  растёт. Точнее, фиксируем некоторую исходную четырёхударную траекторию  $ABCD$ . По определению четырёхударности,  $ABCD$  является внутренней точкой множества четырёхугольных бильярдных траекторий. Следовательно, зафиксировав точку  $A$ , мы получим маленькое однопараметрическое семейство  $AB_\alpha C_\alpha D_\alpha$  четырёхугольных бильярдных траекторий, параметризованное углом  $\alpha = \angle DAB$ . Пусть  $AB_\alpha C_\alpha D_\alpha$ ,  $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$  — максимальное аналитическое продолжение этого семейства. Очевидно, что  $B_\alpha \in b$ ,  $C_\alpha \in c$  и  $D_\alpha \in d$  для всех  $\alpha$ . Если угол  $\alpha_+$  больше  $\pi$ , то мы ограничим угловое семейство на интервал  $(\alpha_-, \pi)$  и изменим обозначения, положив  $\alpha_+ = \pi$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что  $\alpha_+ \leq \pi$ .

**Замечание 2.3.6** Вершины  $B_\alpha$ ,  $C_\alpha$  и  $D_\alpha$  могут быть особыми точками соответствующих зеркал для некоторых значений  $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ .

**Обозначение 2.3.7** Обозначим через  $\beta_\alpha$ ,  $\gamma_\alpha$  и  $\delta_\alpha$  углы  $\angle AB_\alpha C_\alpha$ ,  $\angle B_\alpha C_\alpha D_\alpha$  и  $\angle C_\alpha D_\alpha A$ , соответственно. Обозначим через  $B_+$ ,  $C_+$ ,  $D_+$ ,  $\beta_+$ ,  $\gamma_+$  и  $\delta_+$  пределы (если они существуют) точек  $B_\alpha$ ,  $C_\alpha$ ,  $D_\alpha$  и углов  $\beta_\alpha$ ,  $\gamma_\alpha$  и  $\delta_\alpha$  при  $\alpha \rightarrow \alpha_+$ , соответственно.

Рассмотрим четвёртую степень бильярдного отображения (то есть отображение за четыре отражения от границы бильярда). Поскольку исходная траектория — четырёхударная, это отображение тождественно в некоторой окрестности исходной пары  $(A, \frac{\overline{AB}}{AB})$ . С другой стороны, это отображение — аналитическое. Следовательно, его аналитическое продолжение вдоль семейства траекторий  $AB_\alpha C_\alpha D_\alpha$  тоже тождественно, то есть все траектории  $AB_\alpha C_\alpha D_\alpha$  — четырёхударные.

**Лемма 2.3.8** *Для любого исходного четырёхугольника имеет место один из следующих случаев.*

1. Хотя бы один из пределов  $B_+ = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_+} B_\alpha$ ,  $C_+ = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_+} C_\alpha$  и  $D_+ = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_+} D_\alpha$  не существует.
2. Четырёхугольник  $AB_+C_+D_+$  вырожден в смысле определения 2.3.4.
3. Хотя бы две из точек  $B_+$ ,  $C_+$  и  $D_+$  — особые точки соответствующих зеркал.

**Доказательство** Предположим противное. Тогда для какого-то углового семейства

- существуют пределы  $B_+$ ,  $C_+$  и  $D_+$ ;
- хотя бы два из этих пределов — неособые точки соответствующих зеркал;
- четырёхугольник  $AB_+C_+D_+$  невырожден.

Без ограничения общности рассуждений можно считать, что точка  $B_+$  — неособая точка кривой  $b$ , и одна из точек  $C_+$  и  $D_+$  — также неособая точка соответствующей кривой. Тогда семейство  $B_\alpha$  аналитически продолжается на больший интервал. Заметим, что лучи  $B_\alpha C_\alpha$  и  $AD_\alpha$  зависят только от  $A$ ,  $\alpha$  и  $B_\alpha$ . Действительно, прямая  $B_\alpha C_\alpha$  — образ прямой  $AB_\alpha$  при симметрии относительно касательной к  $b$  в точке  $B_\alpha$ , а луч  $AD_\alpha$  выходит из точки  $A$  под известным углом.

Рассмотрим два случая.

Случай I.  $C_+$  — неособая точка кривой  $c$ . Тогда семейство  $C_\alpha$  аналитически продолжается на больший интервал как пересечение луча  $B_\alpha C_\alpha$  с кривой  $c$ . Следовательно, мы можем определить луч  $C_\alpha D_\alpha$  для значений  $\alpha$ , достаточно близких к  $\alpha_+$  (в том числе для значений  $\alpha$ , больших  $\alpha_+$ ). Таким образом, мы можем определить точку  $D_\alpha$  как пересечение лучей  $C_\alpha D_\alpha$  и  $AD_\alpha$ . Напомним, что  $\delta_+ \neq \pi$ . Следовательно, для значений  $\alpha$ , достаточно близких к  $\alpha_+$ , эта точка пересечения существует, единственна и аналитически зависит от  $\alpha$ . Итак, мы можем продолжить семейство  $AB_\alpha C_\alpha D_\alpha$  на больший интервал, что противоречит предположению о максимальности интервала  $(\alpha_-; \alpha_+)$ . Таким образом, этот случай невозможен.

Случай II.  $D_+$  — неособая точка кривой  $d$ . Тогда семейство  $D_\alpha$  аналитически продолжается на больший интервал как точка пересечения луча  $AD_\alpha$  с кривой  $d$ . Следовательно, луч  $D_\alpha C_\alpha$  определён для значений  $\alpha$ , близких к  $\alpha_+$  (в том числе для значений  $\alpha$ , превосходящих  $\alpha_+$ ). Осталось определить точку  $C_\alpha$  как пересечение лучей  $D_\alpha C_\alpha$  и  $B_\alpha C_\alpha$ . Как и в предыдущем случае, это возможно в силу неравенства  $\gamma_+ \neq \pi$ . Итак, в этом случае мы тоже продолжили семейство  $AB_\alpha C_\alpha D_\alpha$  на больший интервал. Следовательно, и этот случай невозможен.

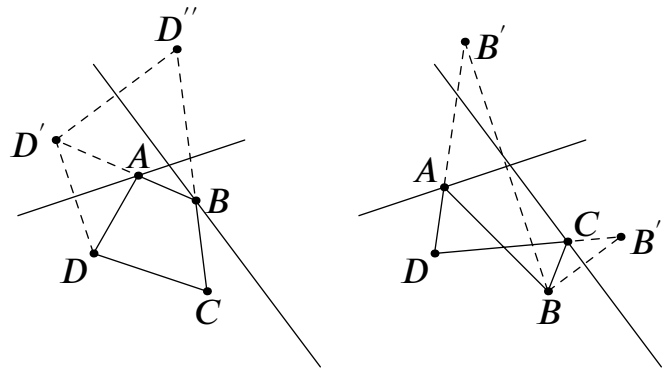
Итак, оба случая невозможны. Лемма доказана. ■

Оказывается, раскрывать угол в произвольной вершине четырёхугольника неудобно, поэтому мы сначала перенумеруем вершины так, чтобы выполнялось следующее условие.

**Соглашение 2.3.9 (Соглашение о нумерации)** Будем говорить, что для четырёхударного ростка  $(a, b, c, d)$  выполнено *соглашение о нумерации*, если

1. ни одно из зеркал  $a$  и  $c$  — не прямая;
2. если одно из зеркал — эллипс, то или  $b$ , или  $d$  — эллипс или прямая.

Заметим, что переименовать зеркала таким образом можно, если среди них не более одной прямой. Действительно, если одно из зеркал — прямая, достаточно переименовать зеркала так, чтобы зеркало  $b$  было прямой. Если же среди



(a) Зеркала  $a$  и  $b$  — прямые.

(b) Зеркала  $a$  и  $c$  — прямые.

**Рисунок 2.1** Два зеркала — прямые

зеркал нет ни одной прямой, первое требование выполнено автоматически, а выполнения второго требования легко добиться.

**Лемма 2.3.10** *Не более одного из зеркал  $a, b, c, d$  — прямая.*

Следующее изящное доказательство было предложено В. А. Клепцыным.

**Доказательство** Предположим, что как минимум две из кривых  $a, b, c$  и  $d$  — прямые. Рассмотрим два случая.

Случай I. Зеркала  $a$  и  $b$  — прямые (см. рис. 2.1(a)). Зафиксируем точку  $D \in d$ , и рассмотрим небольшое угловое семейство  $A_\delta B_\delta C_\delta D$ . Пусть  $D'$  — образ точки  $D$  при симметрии относительно прямой  $a$ ;  $D''$  — образ точки  $D'$  при симметрии относительно прямой  $b$ . Тогда для любой точки  $C \in c$ :

$$DC + CD'' = DC + D'B + BC = DC + DA + AB + BC = 1.$$

Следовательно,  $c$  — эллипс с фокусами  $D$  и  $D''$  для любой точки  $D \in d$ . Таким образом, все точки кривой  $d$  являются фокусами одного и того же эллипса, что невозможно. Итак, этот случай невозможен.

Случай II. Зеркала  $a$  и  $c$  — прямые (см. рис. 2.1(б)). Зафиксируем точку  $B \in b$  и рассмотрим небольшое угловое семейство  $A_\beta B C_\beta D_\beta$ . Пусть  $B'$  и  $B''$  — образы точки  $B$  при отражениях относительно прямых  $a$  и  $c$ , соответственно. Тогда для любой точки  $D \in d$ :

$$B'D + B''D = BA + AD + BC + CD = 1.$$

Следовательно,  $d$  — эллипс с фокусами  $B'$  и  $B''$  для любой точки  $B \in b$ , то есть этот случай также невозможен.

Итак, оба случая приводят к противоречию. Значит, среди зеркал  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  не более одной прямой. ■

Далее вместо фразы «для точки  $A \in a$  общего положения и любого углового семейства, соответствующего этой точке» мы будем писать «для точки  $A \in a$  общего положения» или «для типичной точки  $A \in a$ ». При этом мы будем пользоваться достаточно сильным вариантом понятия общности положения.

**Соглашение 2.3.11** Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для точки  $A \in a$  общего положения, если оно выполняется для всех точек  $A \in a$ , кроме, быть может, счётного множества.

В следующих пунктах мы разберём случаи, перечисленные в лемме 2.3.8, по одному, и в каждом случае покажем, что он имеет место для не более чем счётного множества точек  $A \in a$ . Следовательно, на кривой найдётся точка, не соответствующая ни одному из случаев, что невозможно в силу леммы 2.3.8. Это противоречие завершит доказательство.

Завершим теперь формальное доказательство теоремы 2.1.4 по модулю лемм, которые мы докажем в следующих пунктах.

**Предложение 2.3.12** Пусть выполнено соглашение о нумерации. Тогда для точки  $A \in a$  общего положения пределы  $B_+$ ,  $C_+$ ,  $D_+$  существуют, причём  $B_+ = C_+$  или  $C_+ = D_+$ .

**Доказательство** По лемме 2.3.8, для каждой точки  $A \in a$  имеет место один из вышеперечисленных случаев.

В силу лемм 2.3.13 и 2.3.16, для типичной точки  $A \in a$  существуют пределы  $B_+$ ,  $C_+$  и  $D_+$ , причём  $A \neq B_+$  и  $A \neq D_+$ . Следовательно, для точки  $A \in a$  общего положения или четырёхугольник  $AB_+C_+D_+$  невырожден, или хотя бы две из его вершин являются особыми точками соответствующих зеркал.

В силу предложения 2.3.18 и леммы 2.3.17, для типичной точки  $A \in a$  из неравенств  $B_+ \neq C_+$  и  $C_+ \neq D_+$  следовало бы, что ни один из углов четырёхугольника  $AB_+C_+D_+$  не равен  $\pi$ , и среди точек  $B_+, C_+, D_+$  не более одной особой для соответствующего зеркала.

Это противоречит лемме 2.3.8. Значит, все остальные случаи невозможны, то есть для типичной точки  $A \in a$  или  $B_+ = C_+$ , или  $C_+ = D_+$ . ■

Заметим, что в доказательстве этого предложения мы использовали только леммы из пунктов 2.3.3, 2.3.4 и 2.3.5. Это позволит нам воспользоваться предложением 2.3.12 при доказательстве предложения 2.3.26.

Вернёмся к доказательству теоремы. В силу предложения 2.3.12, для точки  $A$  общего положения пределы  $B_+, C_+$  и  $D_+$  существуют, причём  $B_+ = C_+$  или  $C_+ = D_+$ . Но этот случай невозможен в силу предложения 2.3.26. Полученное противоречие завершает доказательство.

### 2.3.3 Существование пределов

Главным результатом этого пункта являются леммы 2.3.13 и 2.3.16. В них утверждается, что для типичной точки  $A \in a$  пределы  $B_+, C_+$  и  $D_+$  существуют, причём  $B_+ \neq A$  и  $D_+ \neq A$ .

**Лемма 2.3.13** *Предположим, что соглашение о нумерации выполнено. Тогда для точки  $A \in a$  общего положения пределы  $B_+$  и  $D_+$  существуют, причём  $B_+ \neq A$  и  $D_+ \neq A$ .*

**Доказательство** Докажем сначала, что для типичной точки  $A \in a$  пределы  $B_+$  и  $D_+$  существуют. В силу симметрии между  $B$  и  $D$ , достаточно доказать существование предела  $B_+$ .

Заметим, что луч  $AB_\alpha$  зависит только от  $A$  и  $\alpha$ . Следовательно, этот луч стремится к некоторому пределу  $l$  при  $\alpha \rightarrow \alpha_+$ . Если предела  $B_\alpha$  при  $\alpha \rightarrow \alpha_+$  не существует, то кривая  $b$  осциллирует вдоль луча  $l$  (то есть расстояние от точки кривой  $b$  до луча  $l$  стремится к нулю). Но аналитическая кривая может осциллировать вдоль не более чем двух различных прямых — одной в положительном направлении, и одной в отрицательном. Поэтому предел  $B_+$  существует, если только точка  $A$  не принадлежит пересечению зеркала  $a$  с объединением

не более чем двух прямых на плоскости. Напомним, что в силу соглашения о нумерации зеркало  $a$  — не прямая, а значит, оно пересекает любую прямую в не более чем счётном множестве точек. Таким образом, для точки  $A \in a$  общего положения предел  $B_+$  существует.

Докажем теперь, что  $B_+ \neq A$  и  $D_+ \neq A$ . Нам снова достаточно доказать, что  $B_+ \neq A$ . Предположим противное: что для несчётного множества точек  $A$  предел  $B_+$  совпадает с точкой  $A$ .

Напомним, что пределы зеркала  $b$  в положительном и отрицательном направлении (если они существуют) считаются точками зеркала  $b$ , значит,  $B_+ \in b$ . Следовательно, равенство  $A = B_+$  возможно только если  $A \in b$ . Заметим, что если  $a \neq b$ , то пересечение  $a \cap b$  не более чем счётно, и  $A \neq B_+$  для типичной точки  $A \in a$ . Следовательно,  $a = b$ .

Множество точек самопересечения кривой  $a$  не более чем счётно, поэтому равенство  $A = B_+$  выполнено для несчётного множества точек  $A \in a$ , не являющихся точками самопересечения кривой  $a$ .

Пусть  $V \subset a$  — несчётное множество точек  $A$ , таких что предел  $B_+$  существует, совпадает с  $A$ , и  $A$  не является ни отмеченной точкой, ни точкой перегиба кривой  $a$ .

Для любой точки  $A \in V$  точка  $B_\alpha$  стремится к  $A$  вдоль неособой дуги зеркала  $a$ , значит прямая  $AB_\alpha$  стремится к касательной к  $a$  в точке  $A$ . Следовательно, для любой точки  $A \in V$  углы  $\alpha_+$  и  $\beta_+$  равны  $\pi$ , откуда углы  $\gamma_+$  и  $\delta_+$  должны быть равны нулю. Заметим, что в этом случае для любой точки  $A \in V$  пределы  $C_+$  и  $D_+$  существуют и принадлежат пересечению касательной  $T_A a$  с зеркалами  $c$  и  $d$ , соответственно. Заметим также, что для точки  $A \in a$  общего положения эти пересечения — неособые точки соответствующих кривых. Следовательно, для типичной точки  $A \in V$  кривые  $c$  и  $d$  перпендикулярны касательной  $T_A a$  (закон отражения), значит, они перпендикулярны касательной  $T_A a$  и для любой точки  $A \in a$ . Таким образом, кривые  $c$  и  $d$  — инволюты зеркала  $a$ , значит, кривая  $a$  — эволюта каждой из кривых  $c$  и  $d$ .

Заметим, что  $A \neq C_+$  и  $A \neq D_+$  для любой точки  $A \in V$ . Действительно, касательная к кривой  $c$  в точке  $C_+$  и касательная к кривой  $d$  в точке  $D_+$  перпендикулярны касательной к кривой  $a$  в точке  $A$ . Поэтому ростки  $(c, C_+)$  и  $(d, D_+)$  не могут совпадать с ростком  $(a, A)$ . Поскольку точка  $A$  не отмеченная,  $A \neq C_+$  и  $A \neq D_+$ .



Рассмотрим траекторию  $AB_\alpha C_\alpha D_\alpha$  для  $\alpha = \pi - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Выберем декартову систему координат с началом координат в точке  $A$ , такую что касательная  $T_A a$  — ось  $Ox$ , росток  $(a, A)$  находится в полуплоскости  $y > 0$  и точка  $B_\alpha$  находится в полуплоскости  $x > 0$  для значений  $\alpha$ , близких к  $\pi$ . В этой системе координат росток зеркала  $c$  лежит в правой полуплоскости, а росток зеркала  $d$  — в левой полуплоскости. Более того, функция, задающая зеркало  $a$ , строго выпукла вблизи  $A$ , значит, угол наклона прямой  $B_\alpha C_\alpha$  — маленькое положительное число. Следовательно, точка  $C_\alpha$  должна принадлежать верхней полуплоскости.

Пусть  $E_\alpha$  — точка пересечения прямой  $C_\alpha D_\alpha$  с осью  $Oy$ . Напомним, что кривая  $a$  — эволюта кривой  $d$ , значит,  $A$  — центр кривизны кривой  $d$  в точке  $D_+$ . Следовательно, угол падения луча  $AD_\alpha$  есть  $o(\varepsilon)$ , значит, угол отражения луча  $D_\alpha C_\alpha$  тоже равен  $o(\varepsilon)$ . Таким образом,  $AE_\alpha = o(\varepsilon)$ , и угол наклона луча  $E_\alpha C_\alpha$  равен углу наклона луча  $D_\alpha A$  (то есть  $-0.5\varepsilon$ ) с точностью до члена порядка  $o(\varepsilon)$ .

Следовательно, луч  $E_\alpha C_\alpha$  пересекает ось  $Ox$  в точке  $F_\alpha$ , абсцисса которой имеет порядок  $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = o(1)$ . Напомним, что  $A \neq C_+$ , значит, для достаточно малых значений  $\varepsilon$  абсцисса точки  $C_\alpha$  больше абсциссы точки  $F_\alpha$ , а значит, точка  $C_\alpha$  принадлежит нижней полуплоскости.

Итак, для достаточно малых  $\varepsilon$  точка  $C_\alpha$  принадлежит одновременно верхней и нижней полуплоскостям, что невозможно. Лемма доказана. ■

Следующие две леммы понадобятся при доказательстве существования предела  $C_+$ .

**Лемма 2.3.14** *Предположим, что пределы  $B_+$  и  $D_+$  существуют и являются отмеченными точками для несчётного множества точек  $A \in a$ . Тогда  $a$  — эллипс.*

**Доказательство** В условиях леммы функция  $\varphi: A \mapsto (B_+, D_+)$  принимает не более чем счётное множество значений на несчётном множестве. Поэтому эта функция постоянна на некотором несчётном подмножестве. Обозначим её значение на этом множестве через  $(B_+^0, D_+^0)$ . Тогда множество  $\varphi^{-1}(B_+^0, D_+^0)$  несчётно. Заметим, что для каждой точки  $A \in \varphi^{-1}(B_+^0, D_+^0)$  касательная  $T_A a$  — биссектриса внешнего угла  $B_+^0 A D_+^0$ . Рассмотрим аналитическую функцию

$$s(A) = AB_+^0 + AD_+^0.$$

Производная этой функции обращается в ноль в несчётном множестве точек, а именно, во всех изолированных точках множества  $\varphi^{-1}(B_+^0, D_+^0)$ . Следовательно, функция  $s(A)$  — константа, а  $a$  — эллипс. ■

**Лемма 2.3.15** Пусть выполнено соглашение о нумерации. Тогда для точки  $A \in a$  общего положения как минимум одна из точек  $B_+$  и  $D_+$  — неособая точка соответствующего зеркала.

**Доказательство** Докажем эту лемму от противного. Допустим, для несчётного множества точек  $A \in a$  обе точки  $B_+$  и  $D_+$  — особые точки зеркал  $b$  и  $d$ , соответственно. В силу леммы 2.3.14, зеркало  $a$  — эллипс. Но кривые  $b$  и  $d$  — особые, что противоречит соглашению о нумерации. Лемма доказана. ■

**Лемма 2.3.16** Пусть выполнено соглашение о нумерации. Тогда для типичной точки  $A \in a$  предел  $C_+$  существует.

**Доказательство** Обозначим через  $s(A, \alpha)$  сумму  $AB_\alpha + AD_\alpha$ . В силу леммы 2.3.13, для типичной точки  $A \in a$  пределы  $B_+$  и  $D_+$  существуют, поэтому существует и предел  $s(A, \alpha_+)$  суммы  $s(A, \alpha)$  при  $\alpha \rightarrow \alpha_+$ . Значит, предел суммы  $B_\alpha C_\alpha + C_\alpha D_\alpha = 1 - s(A, \alpha)$  тоже существует и равен  $1 - s(A, \alpha_+)$ , то есть вершина  $C_\alpha$  стремится к эллипсу  $\mathcal{E} = \{X \mid B_+X + XD_+ = 1 - s(A, \alpha_+)\}$ .

Рассмотрим сначала случай, когда эллипс  $\mathcal{E}$  — невырожденный, то есть  $1 - s(A, \alpha_+) > B_+D_+$ . В силу леммы 2.3.15, для точки  $A$  общего положения хотя бы одна из точек  $B_+$  и  $D_+$  является неособой точкой соответствующего зеркала. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда  $B_+$  — неособая точка зеркала  $b$ . В этом случае оба предела  $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_+} AB_+$  и  $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_+} T_{B_\alpha} b$  существуют, поэтому существует и предел луча  $B_\alpha C_\alpha$  при  $\alpha \rightarrow \alpha_+$ . Этот предельный луч пересекает эллипс  $\mathcal{E}$  ровно в одной точке  $C'_+$ . Поскольку точка  $C_\alpha$  должна стремиться одновременно к лучу  $B_+C'_+$  и к эллипсу  $\mathcal{E}$ , предел  $C_\alpha$  существует и совпадает с  $C'_+$ . Итак, в этом случае предел  $C_+$  существует.

Теперь перейдём к случаю  $1 - s(A, \alpha_+) = B_+ D_+$ . В этом случае точка  $C_\alpha$  стремится к отрезку  $B_+ D_+$ . Заметим, что аналитическая кривая может стремиться не более чем к двум прямым (по одной в положительном и отрицательном направлении изменения параметра), поэтому прямая  $B_+ D_+$  должна быть одной и той же (скажем,  $l$ ) для несчётного множества точек  $A$ .

Докажем, что ни одно из зеркал  $b$  и  $d$  не совпадает с прямой  $l$ . Предположим противное. Как обычно, достаточно рассмотреть случай  $b = l$ . Напомним, что в силу соглашения о нумерации зеркало  $a$  — не прямая, поэтому пересечение  $a \cap l$  не более чем счётно. Поэтому для некоторого несчётного множества точек  $A$  выполнено следующее:

- точка  $A$  не лежит на прямой  $l$ ;
- прямая  $B_+ D_+$  совпадает с прямой  $l$ ;
- точка  $C_\alpha$  осциллирует вдоль прямой  $l$ .

Поскольку  $A \notin l$ , угол между прямыми  $AB_+$  и  $l$  не равен нулю. Поэтому угол между прямой  $b = l$  и отражённым лучом  $B_\alpha C_\alpha$  должен стремиться к тому же ненулевому числу. Но тогда точка  $C_\alpha$  не может осциллировать вдоль прямой  $l$ . Следовательно, наше предположение неверно, то есть ни одно из зеркал  $b$  и  $d$  не совпадает с прямой  $l$ .

Итак, ни одно из зеркал  $b$  и  $d$  не совпадает с прямой  $l$ , значит, точки  $B_+$  и  $D_+$  принадлежат не более чем счётному пересечению  $(b \cup d) \cap l$  для несчётного множества точек  $A$ . Следовательно, для некоторого несчётного множества точек  $A \in a$  точки  $B_+$  и  $D_+$  общие. Значит, в силу леммы 2.3.14, кривая  $a$  — эллипс. По соглашению о нумерации, или  $b$ , или  $d$  является или эллипсом, или прямой.

Без потери общности мы можем считать, что кривая  $b$  является эллипсом или прямой, значит, предел  $T_B b$  при  $B \rightarrow B_+$  существует. Поскольку кривая  $c$  осциллирует вдоль отрезка  $B_+ D_+$ , то найдётся последовательность  $\alpha_n \rightarrow \alpha_+$ , для которой луч  $B_{\alpha_n} C_{\alpha_n}$  стремится к  $B_+ D_+$  при  $n \rightarrow \infty$ . Внешняя биссектриса угла  $AB_{\alpha_n} C_{\alpha_n}$  совпадает с касательной к зеркалу  $b$  в точке  $B_{\alpha_n}$ , значит, последовательность этих биссектрис стремится к прямой  $T_{B_+} b$ . Заметим, что и предел последовательности внешних биссектрис углов  $AB_{\alpha_n} C_{\alpha_n}$ , и предел последовательности лучей  $B_{\alpha_n} C_{\alpha_n}$  не зависят от  $A$ , следовательно, прямая  $AB_+$  тоже не

зависит от  $A$ ; поэтому точка  $A$  должна принадлежать пересечению этой прямой с кривой  $a$ . Следовательно, это пересечение несчётно, и  $a$  является прямой, что противоречит нашему соглашению о нумерации. Это противоречие завершает доказательство леммы. ■

### 2.3.4 Случай двух особых точек

Следующая лемма сводит случай двух особых точек к случаю совпадения пределов.

**Лемма 2.3.17** *Пусть выполнено соглашение о нумерации. Тогда для точки  $A \in a$  общего положения из того, что среди точек  $B_+$ ,  $C_+$ ,  $D_+$  не менее двух точек — особые для соответствующих зеркал, следует, что или  $B_+ = C_+$ , или  $C_+ = D_+$ .*

**Доказательство** Предположим противное. Тогда существует несчётное множество точек  $A \in a$ , для которых среди точек  $B_+$ ,  $C_+$ ,  $D_+$  есть не более двух особых точек соответствующих зеркал, и  $B_+ \neq C_+$ ,  $C_+ \neq D_+$ .

В силу леммы 2.3.15, для типичной точки  $A \in a$  одна из точек  $B_+$ ,  $D_+$  — неособая точка соответствующего зеркала, поэтому или обе точки  $B_+$  и  $C_+$ , или обе точки  $C_+$  и  $D_+$  — особые точки соответствующих зеркал. В силу симметрии, достаточно рассмотреть первый случай, когда  $B_+$  и  $C_+$  — особые точки зеркал  $b$  и  $c$ , и  $B_+ \neq C_+$ .

Множество особых точек аналитической кривой не более чем счётно, поэтому для некоторых двух особых точек  $B^0 \in b$ ,  $C^0 \in c$ ,  $B^0 \neq C^0$ , множество  $V(B^0, C^0) = \{A \mid B_+(A) = B^0, C_+(A) = C^0\}$  несчётно. Заметим, что если  $A \in V(B^0, C^0) \setminus \{B^0\}$ , то  $A \neq B_+$  и  $B_+ \neq C_+$ , поэтому существует предел внешней биссектрисы угла  $AB_\alpha C_\alpha$  при  $\alpha \rightarrow \alpha_+$ . С другой стороны, эта внешняя биссектриса — касательная к зеркалу  $b$  в точке  $B_\alpha$ , поэтому существует предел касательной к зеркалу  $b$  в точке  $B$  при  $B \rightarrow B_+$ .

Прямая  $AB_+$  — образ прямой  $B_+C_+$  при отражении относительно касательной  $T_{B_+} b$ , поэтому прямая  $l = AB_+$  — общая для всех точек  $A \in V(B^0, C^0) \setminus$

$\{B^0\}$ . Следовательно,  $V(B^0, C^0) \setminus \{B^0\}$  — подмножество пересечения  $l \cap a$ , которое не более чем счётно. Таким образом, множество  $V(B^0, C^0)$  не более чем счётно, что противоречит утверждению из предыдущего абзаца. Лемма доказана. ■

### 2.3.5 Случай касания

В этом пункте мы докажем следующее предложение.

**Предложение 2.3.18** *Пусть соглашение о нумерации выполнено. Тогда для типичной точки  $A \in a$  из того, что  $B_+ \neq C_+$  и  $C_+ \neq D_+$ , следует, что ни один из углов четырёхугольника  $AB_+C_+D_+$  не равен  $\pi$ .*

**Замечание 2.3.19** *Напомним, что для точки  $A \in a$  общего положения пределы  $B_+$ ,  $C_+$  и  $D_+$  существуют, причём  $A \neq B_+$  и  $A \neq D_+$ . Условия  $B_+ \neq C_+$  и  $C_+ \neq D_+$  необходимы, чтобы определить углы четырёхугольника  $AB_+C_+D_+$ .*

Мы разобьём доказательство этого предложения на несколько лемм. В следующих трёх леммах мы докажем, что для типичной точки  $A$  развёрнутый угол не может возникать вместе с каким-то другим вырождением (в частности, вместе с ещё одним развёрнутым углом), а в потом — что развёрнутый угол не может возникать при отсутствии других вырождений.

**Лемма 2.3.20** *Пусть выполнено соглашение о нумерации. Тогда для точки  $A \in a$  общего положения из того, что  $B_+ \neq C_+$  и  $C_+ \neq D_+$ , следует, что среди углов  $\alpha_+$ ,  $\beta_+$ ,  $\gamma_+$  и  $\delta_+$  не более одного развёрнутого.*

**Доказательство** Предположим, что какие-то два угла из  $\alpha_+$ ,  $\beta_+$ ,  $\gamma_+$ ,  $\delta_+$  — развёрнутые. Тогда два других угла равны нулю, и четырёхугольник  $AB_+C_+D_+$  вырождается в отрезок. Заметим, что при росте параметра угол  $\alpha$  только увеличивается, поэтому  $\alpha_+ \neq 0$ . Следовательно,  $\alpha_+ = \pi$ , значит, прямая  $AB_+C_+D_+$  касается зеркала  $a$  и одного из зеркал  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Пусть  $p$  — то из зеркал  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , которого касается прямая  $AB_+C_+D_+$ , а  $P$  — соответствующая вершина.

Для двух различных аналитических кривых множество их общих касательных не более чем счётно. Множество прямых, которые касаются кривой  $a$  в

двух разных точках, также не более чем счётно (напомним, что  $a$  — не прямая). Следовательно,  $P = A$  и  $p = a$ . В силу леммы 2.3.13, для точки  $A \in a$  общего положения ни  $B_+$ , ни  $D_+$  не совпадает с  $A$ . Следовательно,  $p = c$  и  $P = C_+$ .

Аналогично лемме 2.3.13 можно показать, что зеркала  $b$  и  $d$  — инволюты зеркала  $a$ . Заметим, что для значений  $\alpha$ , достаточно близких к  $\pi$ , у зеркала  $a$  нет точек перегиба между  $A$  и  $C_\alpha$ . Пусть  $l_\alpha$  — биссектриса угла  $AB_\alpha C_\alpha$ . С одной стороны, прямая  $l_\alpha$  должна пересекать зеркало  $a$  между точками  $A$  и  $C_\alpha$ , то есть  $l_\alpha$  не может касаться  $a$ . С другой стороны, прямая  $l_\alpha$  перпендикулярна инволюте кривой  $a$ , поэтому она должна касаться  $a$ . Это противоречие завершает доказательство. ■

**Лемма 2.3.21** Пусть выполнено соглашение о нумерации. Тогда для точки  $A$  общего положения из того, что  $B_+ \neq C_+$ ,  $C_+ \neq D_+$  и ровно один из углов четырёхугольника  $AB_+C_+D_+$  равен  $\pi$ , следует, что ни одна из вершин этого четырёхугольника не является особой точкой соответствующего зеркала.

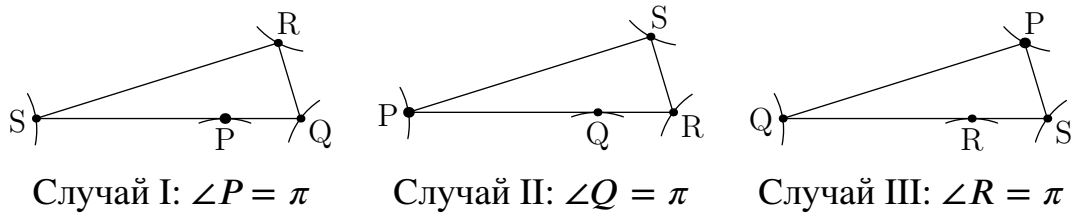
**Доказательство** Эта лемма напрямую следует из следующей леммы и того, что множество особых точек аналитической кривой не более чем счётно. ■

**Лемма 2.3.22** Пусть выполнено соглашение о нумерации. Тогда не существует несчётного множества  $V \subset a$  и точки  $P \in \mathbb{R}^2$ , таких что для любой точки  $A \in V$  выполняются следующие условия.

1. пределы  $B_+$ ,  $C_+$  и  $D_+$  существуют;
2.  $A \neq B_+$ ,  $B_+ \neq C_+$ ,  $C_+ \neq D_+$  и  $D_+ \neq A$ ;
3. ровно один из углов четырёхугольника  $AB_+C_+D_+$  равен  $\pi$ ;
4. одна из точек  $A$ ,  $B_+$ ,  $C_+$ ,  $D_+$  совпадает с  $P$ .

**Доказательство** Докажем эту лемму от противного. Без ограничения общности рассуждений можно предположить, что один и тот же угол четырёхугольника  $AB_+C_+D_+$  равен  $\pi$  для всех  $A \in V$ , и одна и та же вершина совпадает с  $P$ . Пусть  $P, Q, R, S$  — вершины четырёхугольника  $AB_+C_+D_+$ , занумерованные, начиная с  $P$ , или по часовой стрелке, или против часовой стрелки;  $p, q, r, s$  — соответствующие зеркала.

В силу второго предположения леммы, зеркала  $p, q, r$  и  $s$  имеют касательные в точках  $P, Q, R, S$  в смысле соглашения 2.3.3.



**Рисунок 2.2** Один развёрнутый угол, одна неподвижная вершина

Рассмотрим три случая (см. рис. 2.2).

Случай I.  $\angle P = \pi$ . В этом случае точки  $S$  и  $Q$  принадлежат пересечению прямой  $T_{pp}$  с зеркалами  $s$  и  $q$  соответственно. Заметим, что это пересечение не более чем счётно. Действительно, если одно из зеркал  $s$  или  $q$  пересекает прямую  $T_{pp}$  по несчётному числу точек, то это зеркало должно совпадать с прямой  $T_{pp}$ , значит, или  $\angle S = \pi$ , или  $\angle Q = \pi$ , что противоречит лемме 2.3.20. Наконец, вершина  $R$  также принадлежит счётному множеству: она принадлежит множеству пересечений двух счётных семейств прямых — образов касательной  $T_{pp}$  при отражении относительно прямых  $T_{Qq}$  и  $T_{Ss}$ . Следовательно, множество четырёхугольников  $PQRS$  не более чем счётно, и этот случай невозможен.

Случай II.  $\angle Q = \pi$  или  $\angle S = \pi$ . Мы рассмотрим только случай  $\angle Q = \pi$ , поскольку второй случай сводится к нему переименованием вершин. Заметим, что через точку  $P$  проходит не более чем счётное множество касательных к зеркалу  $q$ . Следовательно, прямая  $PQR$  принадлежит не более чем счётному множеству. Прямая  $RS$  — образ прямой  $PR$  при отражении относительно прямой  $T_{Rr}$ , поэтому прямая  $RS$  также принадлежит не более чем счётному множеству. Итак, каждая из вершин  $P, Q, R, S$  принадлежит объединению не более чем счётного множества прямых. В частности, точка  $A$  принадлежит объединению не более чем счётного множества прямых. В силу соглашения о нумерации, точка  $A$  принадлежит не более чем счётному множеству точек. Таким образом, этот случай также невозможен.

Случай III.  $\angle R = \pi$ . Докажем, что множество возможных треугольников  $PQS$  дискретно. Рассмотрим один из четырёхугольников  $PQ_0R_0S_0$  и еще один четырёхугольник  $PQRS$ , достаточно близкий к  $PQ_0R_0S_0$ . Заметим, что  $Q_0R_0S_0$  и  $QRS$  — касательные к кривой  $r$  в близких точках  $R$  и  $R_0$ . Следовательно, отрезки  $QS$  и  $Q_0S_0$  должны пересекаться. С другой стороны, внешние биссектрисы углов  $\angle QPS$  и  $\angle Q_0PS_0$  совпадают, поэтому либо  $\angle QPS_0 > \angle Q_0PS_0$  и

$\angle SPQ_0 > \angle S_0PQ_0$ , либо  $\angle QPS_0 < \angle Q_0PS_0$  и  $\angle SPQ_0 < \angle S_0PQ_0$ . Значит, отрезки  $QS$  и  $Q_0S_0$  не пересекаются. Это противоречие завершает доказательство.

Итак, ни один из этих случаев невозможен. Лемма доказана. ■

Итак, в предыдущих трёх леммах мы доказали, что развёрнутый угол не может возникать вместе с другим вырождением. В следующих леммах мы докажем, что развёрнутый угол не может быть единственным вырождением.

**Лемма 2.3.23** Пусть выполнено соглашение о нумерации. Тогда для типичной точки  $A \in a$  из того, что  $B_+ \neq C_+$  и  $C_+ \neq D_+$ , следует, что ни один из углов  $\beta_+$  и  $\delta_+$  не равен  $\pi$ .

**Доказательство** Напомним (см. замечание 2.3.19), что для точки  $A \in a$  общего положения из неравенств  $B_+ \neq C_+$  и  $C_+ \neq D_+$  следует существование пределов  $\beta_+$ ,  $\gamma_+$  и  $\delta_+$ . Напомним также, что в силу леммы 2.3.21 вершины  $B_+$ ,  $C_+$  и  $D_+$  — неособые точки соответствующих зеркал.

Предположим противное:  $\beta_+ = \pi$  или  $\delta_+ = \pi$  для несчётного множества точек  $A \in a$ . В силу симметрии, достаточно рассмотреть случай  $\beta_+ = \pi$ . Заметим, что  $\alpha_+ > 0$ , поэтому ни один из углов  $\gamma_+$  и  $\delta_+$  не равен  $\pi$ . Заметим также, что для точки  $A$  общего положения порядок касания кривой  $b$  и прямой  $AB_+$  равен 1 (то есть касание квадратичное). Рассмотрим траекторию  $AB_\alpha C_\alpha D_\alpha$ , достаточно близкую к  $AB_+C_+D_+$ :  $\alpha = \alpha_+ - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

Найдём порядок длины отрезка  $C_+C_\alpha$  двумя способами: рассматривая путь  $A \rightarrow D \rightarrow C$  и рассматривая путь  $A \rightarrow B \rightarrow C$ .

С одной стороны, угол  $\delta_+$  — не развёрнутый, поэтому как точка  $D_\alpha$ , так и угол падения  $\delta_\alpha/2$  луча  $AD_\alpha$  аналитически зависят от  $\alpha$  вблизи  $\alpha = \alpha_+$ . Поскольку  $\gamma \neq \pi$ , точка  $C_\alpha$  тоже аналитически зависит от  $\alpha$ , значит  $C_\alpha C_+ = O(\varepsilon)$ .

Напомним, что  $A \neq B_+$  и порядок касания прямой  $AB_+$  с кривой  $b$  равен 1, следовательно,  $B_\alpha B_+$  имеет порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ . Следовательно, угол между лучом  $AB_+$  и касательной к зеркалу  $b$  в точке  $B_\alpha$  тоже имеет порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ . Вычислим угол между прямыми  $B_\alpha C_\alpha$  и  $B_+ C_+$ . Угол между прямыми  $AB_\alpha$  и  $AB_+$  равен  $\varepsilon/2$ . Следовательно, угол между прямой  $AB_+$  и образом прямой  $AB_\alpha$  при отражении относительно прямой  $AB_+$  равен  $\varepsilon/2$ . Прямая  $B_\alpha C_\alpha$  — образ этой же



прямой  $AB_\alpha$  при отражении относительно касательной  $T_{B_\alpha}b$ . Угол между осями симметрии имеет порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ , значит, угол между прямыми  $B_\alpha C_\alpha$  и  $AB_+$  тоже имеет порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ .

Обозначим через  $B'_\alpha$  точку пересечения прямой  $B_\alpha C_\alpha$  с перпендикуляром  $(T_{B_+}b)^\perp$  к кривой  $b$  в точке  $B_+$ . Заметим, что длина отрезка  $B'_\alpha B_+$  имеет порядок  $\varepsilon$ . Действительно, расстояние между  $B_\alpha$  и  $B_+$  имеет порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ , и угол между прямыми  $B_\alpha C_\alpha$  и  $AB_+$  тоже имеет порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ . Следовательно, расстояние от точки  $B'_\alpha$  до проекции точки  $B_\alpha$  на перпендикуляр  $(T_{B_+}b)^\perp$  имеет порядок  $\varepsilon$ . С другой стороны, расстояние между этой проекцией и  $B_+$  имеет порядок  $\varepsilon$ . Итак,  $B'_\alpha B_+ = O(\varepsilon)$ .

Пусть  $C'_\alpha$  — точка пересечения зеркала  $c$  с прямой, параллельной  $AC_+$  и проходящей через точку  $B'_\alpha$ . Угол между  $T_{C_+}c$  и  $B_+C_+$  не равен нулю, поэтому расстояние между  $C_+$  и  $C'_\alpha$  имеет тот же порядок, что и  $B'_\alpha B_+$ , то есть  $\varepsilon$ . Напомним, что  $B_+ \neq C_+$ , поэтому расстояние между точками  $C'_\alpha$  и  $C_\alpha$  имеет тот же порядок, что и угол между прямыми  $B_\alpha C_\alpha$  и  $B_+C_+$ , то есть имеет порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ . Таким образом, расстояние между точками  $C_\alpha$  и  $C_+$  — величина порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ .

Итак, длина отрезка  $C_\alpha C_+$  одновременно не превосходит  $O(\varepsilon)$  и не меньше  $\Theta(\sqrt{\varepsilon})$ , что невозможно. Следовательно, угол  $\beta_+$  не может быть равен  $\pi$ . Напомним, что в силу симметрии угол  $\delta_+$  тоже не может быть равен  $\pi$ . ■

**Лемма 2.3.24** Пусть выполнено соглашение о нумерации. Тогда для точки  $A \in a$  общего положения из  $B_+ \neq C_+$  и  $C_+ \neq D_+$  следует  $\alpha_+ \neq \pi$ .

**Доказательство** Будем доказывать это утверждение от противного. Предположим, что для несчётного множества точек  $A \in a$  выполнены неравенства  $B_+ \neq C_+$ ,  $C_+ \neq D_+$ , а угол  $\alpha_+$  равен  $\pi$ . Напомним, что в силу леммы 2.3.21 для точки  $A$  общего положения из равенства  $\alpha_+ = \pi$  следует, что вершины четырёхугольника  $AB_+C_+D_+$  — неособые точки соответствующих зеркал. Более того, в силу леммы 2.3.20 ни один из углов  $\beta_+$ ,  $\gamma_+$  и  $\delta_+$  не равен  $\pi$ .

Зафиксируем точку  $A_0$ , для которой выполнены все утверждения из предыдущего абзаца. Тогда найдётся такая окрестность  $A_0 \in U \subset a$  и такое положительное число  $\varepsilon > 0$ , что для любой точки  $A \in U$  и любого угла  $\alpha \in (\pi - \varepsilon; \pi]$

точки  $B_\alpha(A)$ ,  $C_\alpha(A)$  и  $D_\alpha(A)$  — корректно определённые неособые точки соответствующих кривых. Следовательно, условия леммы (а также условия общности положения из предыдущего абзаца) выполнены и для всех точек  $A \in U$ . Уменьшим, при необходимости, окрестность  $U$ , чтобы кривизна зеркала  $a$  не обращалась в нуль на  $U$ .

Пусть  $A^s$  — натуральная параметризация окрестности  $U$ , для которой касательный вектор  $\frac{dA^s}{ds}$  направлен в сторону точки  $B_\pi(A^s)$ . Докажем, что  $C_\pi(A^s)$  не зависит от  $A^s$ . Для этого рассмотрим семейства  $B^s = B_\pi(A^s)$ ,  $C^s = C_\pi(A^s)$ ,  $D^s = D_\pi(A^s)$  и докажем, что  $\frac{dC^s}{ds} = 0$ . Пусть  $k^s$  — кривизна зеркала  $a$  в точке  $A^s$ . Знак кривизны  $k^s$  выбран так, что она положительна, если и только если росток кривой  $a$  находится внутри треугольника  $B^s C^s D^s$ . Пусть  $l^s$  — касательная к зеркалу  $a$  в точке  $A^s$ .

Найдём производную  $\frac{dC^s}{ds}$  двумя способами: рассматривая траекторию  $A \rightarrow B \rightarrow C$  и рассматривая траекторию  $A \rightarrow D \rightarrow C$ .

Рассмотрим два близких значения параметра:  $s$  и  $s + \Delta s$ . Заметим, что угол между прямыми  $l^s$  и  $l^{s+\Delta s}$  равен  $k\Delta s + o(\Delta s)$ , а расстояние от точки  $A^s$  до прямой  $l^{s+\Delta s}$  есть  $o(\Delta s)$ . Следовательно, угол между прямыми  $l^s$  и  $A^s B_{\pi-2k\Delta s}(A^s)$  равен  $k\Delta s$ , а значит расстояние между точками  $B^{s+\Delta s}$  и  $B_{\pi-2k\Delta s}(A^s)$  есть  $o(\Delta s)$ , как и угол между  $l^{s+\Delta s}$  и  $A^s B_{\pi-2k\Delta s}(A^s)$ . Таким образом,  $C^{s+\Delta s} = C_{\pi-2k\Delta s}(A^s) + o(\Delta s)$ .

С другой стороны, прямая  $A^s D_{\pi-2k\Delta s}(A^s)$  «почти параллельна» прямой  $l^{s-\Delta s}$ , а не  $l^{s+\Delta s}$ . Следовательно, применяя рассуждения из предыдущего абзаца к пути  $A \rightarrow D \rightarrow C$ , несложно показать, что  $C^{s-\Delta s} = C_{\pi-2k\Delta s}(A^s) + o(\Delta s)$ . Итак,  $C^{s+\Delta s} = C^{s-\Delta s} + o(\Delta s)$ , откуда  $\frac{dC^s}{ds} = 0$ , то есть точка  $C^s$  не зависит от  $s$ .

Итак, точка  $C^s$  не зависит от  $s$ . Но в силу леммы 2.3.22 точка  $C_\pi(A)$  не может занимать одно и то же положение для несчётного количества точек  $A \in a$ . Это противоречие завершает доказательство леммы. ■

**Лемма 2.3.25** Пусть выполнено соглашение о нумерации. Тогда для типичной точки  $A \in a$  из  $B_+ \neq C_+$  и  $C_+ \neq D_+$  следует  $\gamma_+ \neq \pi$ .

**Доказательство** Предположим противное: для несчётного множества точек  $A \in a$  точка  $C_+$  не совпадает ни с  $B_+$ , ни с  $D_+$ , и угол  $\gamma_+$  равен  $\pi$ .

Как и в предыдущей лемме, выберем точку  $A_0$ , такую что пределы  $B_+$ ,  $C_+$ ,  $D_+$  существуют и являются неособыми точками соответствующих зеркал,

$A_0 \neq B_+(A_0)$ ,  $B_+(A_0) \neq C_+(A_0)$ ,  $C_+(A_0) \neq D_+(A_0)$ ,  $D_+(A_0) \neq A_0$ , и ни один из углов  $\alpha_+$ ,  $\beta_+$  и  $\delta_+$  не равен  $\pi$ .

Зафиксируем также угол  $\alpha_0$ , настолько близкий к  $\alpha_+$ , что угол  $\gamma_{\alpha_0}$  близок к развёрнутому. Теперь зафиксируем вершину  $C = C_{\alpha_0}$  и начнём увеличивать угол  $\gamma$ . Очевидно, для этого углового семейства соглашение о нумерации также будет выполнено. Заметим, что точки  $B^\gamma$ ,  $A^\gamma$  и  $D^\gamma$  не покинут небольших окрестностей точек  $B_+$ ,  $A_+$  и  $D_+$ , соответственно. Следовательно, точки  $A^+$ ,  $B^+$  и  $D^+$  — неособые точки соответствующих зеркал, и  $C^+ \neq B^+$ ,  $B^+ \neq A^+$ ,  $A^+ \neq D^+$  и  $D^+ \neq C^+$ . Таким образом, угловое семейство  $A^\gamma B^\gamma C D^\gamma$  продолжается до угла  $\gamma^+ = \pi$ , что невозможно в силу леммы 2.3.24. ■

**Доказательство предложения 2.3.18** Это предложение немедленно следует из лемм 2.3.23, 2.3.24 и 2.3.25. ■

### 2.3.6 Совпадение пределов

В этом пункте мы докажем следующее утверждение.

**Предложение 2.3.26** *Для точки  $A \in a$  общего положения пределы  $B_+$  и  $C_+$  не совпадают.*

**Доказательство** Напомним, что для точки  $A \in a$  общего положения в силу лемм 2.3.13 и 2.3.16 пределы  $B_+$ ,  $C_+$  и  $D_+$  существуют.

Заметим, что множество вырожденных четырёхугольников разбивает пространство всех четырёхугольников на две компоненты связности: выпуклые и невыпуклые четырёхугольники. Следовательно, связная компонента нашего двумерного семейства невырожденных четырёхугольных траекторий может содержать траектории только одного из этих типов. Поэтому мы разберём соответствующие случаи по отдельности.

**Выпуклый случай** Добавим одно дополнительное условие к соглашению о нумерации:  $AB + AD \leq BC + CD$ . Легко добиться выполнения этого условия в начальный момент времени, так как остальные условия соглашения о нумерации симметричны относительно  $A$  и  $C$ . С другой стороны, в силу выпуклости четырёхугольника  $ABCD$ , длины отрезков  $AB_\alpha$  и  $AD_\alpha$  убывают по

$\alpha$ , а значит, сумма  $s(A, \alpha) = AB_\alpha + AD_\alpha$  также строго убывает по  $\alpha$ . Следовательно, неравенство  $AB + AD \leq BC + CD$  будет выполнено и для всех значений угла  $\alpha$ , превосходящих  $\alpha_0$ . Выберем интервал  $U \subset a$  и угол  $\alpha_0$  так, чтобы сумма  $s(A, \alpha_0)$  была меньше 0.5 для всех  $A \in U_a$ . Тогда для любой точки  $A \in U$  и угла  $\alpha \geq \alpha_0$  имеем  $s(A, \alpha) < s(A, \alpha_0) < 0.5$ .

По неравенству треугольника, для любой точки  $A \in U$

$$B_\alpha C_\alpha \geq C_\alpha D_\alpha - B_\alpha D_\alpha = 1 - s(A, \alpha) - B_\alpha C_\alpha - B_\alpha D_\alpha \geq 1 - B_\alpha C_\alpha - 2s(A, \alpha),$$

значит

$$B_\alpha C_\alpha \geq 0.5 - s(A, \alpha) > 0.5 - s(A, \alpha_0) > 0.$$

Следовательно, длина отрезка  $B_\alpha C_\alpha$  отделена от нуля, значит,  $B_+ C_+ > 0$  и  $B_+ \neq C_+$ .

**Невыпуклый случай** В этом случае добавить условие  $AB + AD \leq BC + CD$  не получается. Действительно, если даже  $AB_{\alpha_0} + AD_{\alpha_0} < B_{\alpha_0} C_{\alpha_0} + C_{\alpha_0} D_{\alpha_0}$ , левая часть неравенства может возрастать по  $\alpha$ , и неравенство может нарушиться для некоторого  $\alpha > \alpha_0$ . Поэтому в невыпуклом случае нам придётся использовать другие соображения.

Как обычно, будем доказывать утверждение от противного. Предположим, что  $B_+ = C_+$  для несчётного множества точек  $A \in a$ .

Докажем сначала, что если  $B_+ = C_+$ , то точка  $B_+$  — отмеченная. Действительно, точка  $B_+$  принадлежит пересечению зеркал  $b$  и  $c$ , значит, или  $B_+$  — отмеченная точка, или  $b = c$  и  $B_+ = C_+$  — неособая точка этой кривой. В последнем случае прямая  $AB_+$  обязана касаться зеркала  $b$  в точке  $B_+$ , значит, прямая  $AB_+$  должна совпадать с прямой  $C_+ D_+$ , и угол  $\alpha_+$  должен быть равен нулю. С другой стороны,  $\alpha_+ > \alpha_0 > 0$ . Это противоречие доказывает, что в случае  $B_+ = C_+$  точка  $B_+$  — отмеченная.

Таким образом, точка  $B_+ = C_+$  — одна и та же точка  $X$  для несчётного множества точек  $A$ . В дальнейшем мы будем рассматривать только точки  $A$  из этого несчетного множества.

Заметим, что пределы касательных к кривым  $b$  и  $c$  при  $B \rightarrow B_+$  и  $C \rightarrow C_+$  существуют или не существуют одновременно. Действительно, угол между прямыми  $AB_\alpha$  и  $C_\alpha D_\alpha$  равен  $\pi - 2\angle(T_{B_\alpha} b, T_{C_\alpha} c)$ . Следовательно, предел угла  $\angle(T_{B_\alpha} b, T_{C_\alpha} c)$  существует и равен  $0.5(\pi - \angle AXD_+)$ . Значит, или оба предела  $\lim_{B \rightarrow B_+} T_B b$  и  $\lim_{C \rightarrow C_+} T_C c$  существуют, или оба эти предела не существуют.

Докажем, что для точки  $A$  общего положения, такой что  $B_+ = C_+ = X$ , точка  $D_+$  — неособая точка кривой  $d$ . Действительно, в противном случае для несчётного множества точек  $A$  обе точки  $B_+$  и  $D_+$  не зависят от  $A$ , а тогда в силу леммы 2.3.14 кривая  $a$  — эллипс с фокусами  $B_+$  и  $D_+$ . В силу соглашения о нумерации, одна из кривых  $b$  и  $d$  — тоже эллипс или прямая. Точка  $D_+$  — особая точка кривой  $d$ , следовательно, зеркало  $b$  — эллипс или прямая. Таким образом, существует как предел касательной к  $b$  в точке  $B_\alpha$  при  $\alpha \rightarrow \alpha_+$ , так и предел касательной к зеркалу  $c$  в точке  $C_\alpha$ . Следовательно, угол  $\angle AXD_+ = \pi - 2\angle(T_{B_+} b, T_{C_+} c)$  не зависит от  $A$ . Значит, прямая  $AX$  также не зависит от  $A$ , и зеркало  $a$  пересекает эту прямую в несчётном множестве точек, что невозможно. Это противоречие доказывает, что для точки  $A$  общего положения из равенства  $B_+ = C_+ = X$  следует, что точка  $D_+$  — неособая точка кривой  $d$ .

Теперь мы сведём случай, когда оба предела  $\lim_{B \rightarrow B_+} T_B b$  и  $\lim_{C \rightarrow C_+} T_C c$  не существуют, к случаю, когда оба этих предела существуют.

**Лемма 2.3.27** Пусть существует росток четырёхударного аналитического бильярда, такой что

- четырёхугольник  $AB_\alpha C_\alpha D_\alpha$  невыпуклый;
- для несчётного множества точек  $A \in a$  точки  $B_+$  и  $C_+$  совпадают, а ни один из пределов  $\lim_{B \rightarrow B_+} T_B b$  и  $\lim_{C \rightarrow C_+} T_C c$  не существует.

Тогда существует другой аналитический четырёхударный росток бильярда, такой что для несчётного множества точек  $A \in a$  точки  $B_+$  и  $C_+$  совпадают, и оба предела  $\lim_{B \rightarrow B_+} T_B b$  и  $\lim_{C \rightarrow C_+} T_C c$  существуют.

**Доказательство** Заметим, что для точки  $A \in a$  общего положения, такой что  $B_+ = C_+$ , угол  $\alpha_+$  строго меньше  $\pi$ . Действительно, в силу соглашения

о нумерации, зеркало  $a$  — не прямая, а значит, для каждой фиксированной точки  $B_+$  прямая  $AB_+$  общего положения не является касательной к кривой  $a$ . С другой стороны, точка  $B_+$  принадлежит не более чем счётному множеству. Поэтому множество точек  $A$ , для которых  $\alpha_+ = \pi$ , тоже принадлежит не более чем счётному множеству.

Следовательно, для значений  $\alpha$ , достаточно близких к  $\alpha_+$ , точки  $B_\alpha$  и  $C_\alpha$  лежат в одной полуплоскости относительно прямой  $AD_\alpha$ . Значит, прямая  $AB_\alpha$  не параллельна прямой  $C_\alpha D_\alpha$  (напомним, что четырёхугольник  $AB_\alpha C_\alpha D_\alpha$  невыпуклый), и точка пересечения этих прямых принадлежит одному из интервалов  $AB_\alpha$  или  $C_\alpha D_\alpha$ .

Временно забудем о том, что кривые  $b$  и  $c$  известны, и рассмотрим трёхмерное пространство  $M^3$  всех невырожденных невыпуклых четырёхугольников  $ABCD$ , таких что  $A \in a$ ,  $D \in d$ ,  $A \neq D$ ,  $AB + BC + CD + DA = 1$ , точки  $B$  и  $C$  лежат в одной полуплоскости относительно прямой  $AD$ , и закон отражения выполнен в точках  $A$  и  $D$ . Пусть  $O$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

Точка общего положения в пространстве  $M^3$  определяется следующими тремя параметрами: два параметра задают положение точек  $A$  и  $D$ , а третий — длину отрезка  $AB$ . Действительно, точка  $C$  однозначно определяется по точкам  $A$ ,  $B$  и  $D$ , если только точка  $B$  не совпадает с точкой  $O$ . У этой параметризации пространства  $M^3$  есть два небольших недостатка: она не определена для четырёхугольников, для которых  $B = O$ , и в этих координатах сложно записать существование предела  $\lim_{B \rightarrow B_+} T_B b$ .

Чтобы избавиться от этих недостатков, мы рассмотрим следующую систему координат на  $M^3$ .

- координаты  $x_A, y_A, \dots, x_D, y_D$  точек  $A, B, C$  и  $D$ ;
- длины отрезков  $AB, BC, CD$  и  $DA$ .

Тогда наше трёхмерное подмногообразие задаётся в этом 12-мерном пространстве следующими уравнениями:

- $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2, \dots, DA^2 = (x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2$  (4 уравнения);
- $A \in a, D \in d$  (2 уравнения);
- законы отражения света в вершинах  $A$  и  $D$  (2 уравнения);
- $AB + BC + CD + DA = 1$ ;

и ещё несколькими аналитическими неравенствами ( $AB > 0$  и т. д.).

Пусть  $\omega$  — 1-форма на  $\mathbb{R}^{12}$ , которая равна нулю, если точка  $B$  движется вдоль биссектрисы внешнего угла  $ABC$ .

Ограничение формы  $\omega$  на подмногообразии  $M^3$  задаёт двумерное поле плоскостей на  $M^3$ . По теореме Фробениуса, это распределение интегрируемо на подмногообразии  $\omega \wedge d\omega|_{M^3} = 0$ . Очевидно, наше двухпараметрическое семейство бильярдных траекторий является двумерной интегральной поверхностью этого семейства. Следовательно, оно содержится в подмногообразии  $\omega \wedge d\omega|_{M^3} = 0$ , значит, размерность этого подмногообразия равна двум или трём.

В первом случае предельная конфигурация — особая точка аналитической поверхности, значит оба предела  $\lim_{B \rightarrow B_+} T_B b$  и  $\lim_{C \rightarrow C_+} T_C c$  существуют, что противоречит предположению.

Рассмотрим второй случай:  $\omega \wedge d\omega|_{M^3} \equiv 0$  на  $M^3$ . В этом случае распределение  $\text{Ker } \omega$  интегрируемо на  $M^3$ , значит, через каждый прямоугольник  $ABCD \in M^3$  проходит единственная интегральная поверхность  $\sigma \subset M^3$ . Рассмотрим отображения

$$\pi_B, \pi_C: \sigma \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \pi_B: (A, B, C, D) \mapsto B, \quad \pi_C: (A, B, C, D) \mapsto C.$$

По определению формы  $\omega$ , образы этих отображений — одномерные аналитические кривые  $\tilde{b}$  и  $\tilde{c}$ , такие что бильярдный росток  $(a, \tilde{b}, \tilde{c}, d)$  четырёхударный.

Выберем теперь четырёхугольник  $ABCD \in M^3$ , у которого отрезок  $CD$  очень короткий. Более формально, возьмём четырёхугольник  $A^0 B^0 C^0 D^0 \in M^3$ , такой что  $A^0$  и  $D^0$  — неособые точки зеркал  $a$  и  $d$ , соответственно. Пусть  $O^0$  — точка пересечения лучей  $A^0 B^0$  и  $D^0 C^0$ . Напомним, что четырёхугольник  $A^0 B^0 C^0 D^0$  невыпуклый, значит периметр треугольника  $A^0 O^0 D^0$  меньше единицы. Таким образом, для каждой точки  $C$  на отрезке  $C^0 D^0$  найдётся единственная точка  $B$  на луче  $A^0 B^0$ , такая что периметр четырёхугольника  $A^0 B C D^0$  равен единице. Теперь выберем точку  $C^1$  общего положения на отрезке  $C^0 D^0$  очень близко к  $D^0$ , и найдём соответствующую точку  $B^1$ .

Рассмотрим зеркала  $a, \tilde{b}, \tilde{c}, d$ , которые соответствуют четырёхугольнику  $A^0 B^1 C^1 D^0$ . Несложно показать, что для точки  $C^1 \in C^0 D^0$  общего положения зеркала  $a, \tilde{b}, \tilde{c}, d$  удовлетворяют соглашению о нумерации.

Выберем точку  $C \in \tilde{c}$  общего положения, близкую к  $C^1$ , и рассмотрим угловое семейство  $A^\gamma B^\gamma C D^\gamma$ ,  $\gamma \in (\gamma_-; \gamma_+)$ . В силу симметрии в соглашении о

нумерации, это угловое семейство тоже удовлетворяет соглашению о нумерации. В силу лемм 2.3.13, 2.3.16, 2.3.17 и предложения 2.3.18, или  $A^+ = B^+$ , или  $A^+ = D^+$ . Заметим, что угол между биссектрисой внешнего угла  $D^0 C^1 B^1$  и касательной к зеркалу  $d$  в точке  $D^0$  стремится к некоторому ненулевому числу, когда точка  $C^1$  стремится к точке  $D^0$ . Значит, для точек  $C^1$ , достаточно близких к  $D^0$ , и точек  $C$ , достаточно близких к  $C^1$ , все точки  $D^\gamma$  близки к  $D^0$ . Следовательно, точка  $A^\gamma$  лежит в той же полуплоскости относительно прямой  $C^1 D^0$ , что и точка  $A^0$ . С другой стороны, точка  $B^\gamma$  лежит в той же полуплоскости относительно прямой  $C^1 D^0$ , что  $B^1$ . Значит,  $A^+ \neq B^+$ , откуда  $A^+ = D^+$  для точки  $C \in \tilde{c}$  общего положения. Напомним, что точка  $D^\gamma$  близка к точке  $D^0$ , значит,  $D^+$  — неособая точка кривой  $d$ , и предел  $\lim_{D \rightarrow D^+} T_D d$  существует. Лемма доказана. ■

Итак, существует четырёхударный бильярд, для которого выполняется соглашение о нумерации, для несчётного множества точек  $A \in a$  точки  $B_+$  и  $C_+$  совпадают, и существуют пределы  $\lim_{B \rightarrow B_+} T_B b$  и  $\lim_{C \rightarrow C_+} T_C c$ . Точка  $B_+ = C_+$  — отмеченная, поэтому это одна и та же точка  $X$  для всех точек  $A$  из некоторого несчётного множества  $V \subset a$ .

Для любой точки  $A \in V$  угол  $A X D_+$  равен  $\varphi = \pi - 2\angle(T_{B_+} b, T_{C_+} c)$ , поэтому не зависит от  $A$ . Следовательно, угол  $A X D_+$  равен  $\varphi$  для всех точек  $A$  из некоторой малой окрестности  $U \subset a$ . Заметим, что точку  $D_+$  можно найти, зная только точки  $A$ ,  $X$  и угол  $\varphi$  (то есть никакой другой информации о кривых  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  не требуется). Действительно,  $D_+$  — единственная точка, для которой  $\angle A B_+ D_+ = \varphi$  и  $B_+ D_+ + D_+ A = 1 - A B_+$ . Следовательно, касательная  $T_A a$  полностью определяется точками  $A$ ,  $X$  и углом  $\varphi$ . Следовательно,  $a$  — интегральная кривая аналитического поля прямых. Несложно проверить, что это поле прямых инвариантно относительно поворотов вокруг точки  $X$ .

Аналогично доказывается, что  $d$  — интегральная кривая образа этого поля прямых, симметричного предыдущему относительно любой прямой, проходящей через точку  $X$ . Легко убедиться, что  $a$  и  $d$  — спирали, делающие бесконечное число оборотов вокруг точки  $X$ .

Заметим, что для типичной точки  $A \in a$  отображение  $\alpha \mapsto C_\alpha$  не постоянно. Действительно, если для некоторой точки  $A$  точка  $C_\alpha$  не зависит от угла  $\alpha$ , то зеркала  $b$  и  $d$  — эллипсы с фокусами  $A$  и  $C_\alpha$ . Следовательно, для любой другой



точки  $A$  отображение  $\alpha \mapsto C_\alpha$  не постоянно. Значит, найдётся значение  $\alpha_0 < \alpha_+$ , достаточно близкое к  $\alpha_+$ , такое что  $C_{\alpha_0}$  — типичная точка<sup>11</sup> кривой  $c$ .

Рассмотрим теперь угловое семейство  $A^\gamma B^\gamma C D^\gamma$  с фиксированной точкой  $C = C_{\alpha_0}$ . Напомним, что доказываемое сейчас предложение не используется в доказательстве предложения 2.3.12, поэтому мы можем воспользоваться предложением 2.3.12. Применяя это предложение к семейству  $A^\gamma B^\gamma C D^\gamma$ , получаем, что для типичной точки  $C$  либо  $A^+ = B^+$ , либо  $A^+ = D^+$ . Если точка  $C_{\alpha_0}$  достаточно близка к точке  $X$ , то точка  $B^\gamma$  достаточно близка к точке  $X$  для всех углов  $\gamma_{\alpha_0} < \gamma < \gamma^+$ , и угол между касательной к зеркалу  $c$  в точке  $C$  и касательной к зеркалу  $b$  в точке  $B^\gamma$  близок к углу  $\angle(T_{B^+} b, T_{C^+} c)$ . Значит, угол  $A^\gamma X D^\gamma$  достаточно близок к углу  $\varphi$ , то есть  $\angle A^\gamma X D^\gamma > 0$ , откуда  $A^+ \neq D^+$ .

Следовательно,  $A^+ = B^+$ . С другой стороны, точка  $D^\gamma$  не может пройти сквозь прямую  $T_C c$ . Действительно, иначе в момент прохода прямая  $CD^\gamma$  совпадёт с касательной  $T_C c$ , а значит, угол  $\gamma$  будет равен  $\pi$ , что невозможно в силу леммы 2.3.24. Таким образом, точка  $D^\gamma$  делает менее одного оборота вокруг  $X$ . Угол  $A^\gamma X D^\gamma$  близок к  $\varphi$ , поэтому точка  $A^\gamma$  совершает менее двух оборотов вокруг  $X$ . Следовательно, точка  $A^\gamma$  не может достичь некоторой малой окрестности точки  $X$ , и  $A^+ \neq B^+$  для точек  $C$ , достаточно близких к  $X$ . Это противоречие завершает доказательство предложения.

## 2.4 Случай произвольного числа вершин

В этом пункте приведены прямые обобщения некоторых лемм, использованных при доказательстве теоремы 2.1.4. Поскольку этих обобщений недостаточно даже для доказательства того, что  $\mu \text{Per}_5 = 0$ , результаты этого параграфа приводятся без доказательства.

Следующая лемма, как и лемма 2.3.8, перечисляет возможные случаи для предельного положения в угловом семействе  $k$ -угольных орбит.

**Лемма 2.4.1** *Рассмотрим семейство периодических бильярдных траекторий  $A_1 A_2^{\alpha_1} \dots A_k^{\alpha_1}$ , где  $A_1$  — регулярная точка соответствующего зеркала  $\gamma_1$ ,*

<sup>11</sup> Точнее, для любого счётного подмножества зеркала  $c$  и любой окрестности  $(\alpha_+ - \varepsilon; \alpha_+)$  найдётся угол  $\alpha_0$  в этой окрестности, для которого точка  $C_{\alpha_0}$  не принадлежит данному счётному подмножеству.

$\alpha_1 = \angle A_k A_1 A_2$ ,  $\alpha_1 \in (\alpha_1^-, \alpha_1^+) \subset (0, \pi)$ . Тогда выполнено одно из следующих условий.

1. Хотя бы один из пределов  $A_i^+ = \lim_{\alpha_1 \rightarrow \alpha_1^+} A_i^{\alpha_1}$  не существует.
2.  $A_1 A_2^+ A_3^+ \dots A_k^+$  — вырожденный  $k$ -угольник, то есть либо какие-то две его соседние вершины совпадают, либо один из углов равен  $\pi$ .
3. Хотя бы две из вершин  $A_i^+$  являются особыми точками соответствующих зеркал.

Хотя перечисленные в этой лемме случаи совершенно аналогичны случаям, перечисленным в лемме 2.3.8, разнообразие возможных сочетаний перечисленных вырождений гораздо больше. Поэтому прямые обобщения лемм, использованных при рассмотрении случая  $k = 4$ , не покрывают все случаи, которые необходимо рассмотреть даже для  $k = 5$ .

Перечислим некоторые трудности, которые возникают только для  $k > 4$ .

- Некоторые пределы  $A_i^+$  не существуют.
- Не менее двух углов  $\alpha_i^+$  — развёрнутые.
- Один из углов  $\alpha_i^+$  — развёрнутый, и одна из вершин  $A_i^+$  — особая точка соответствующей кривой.
- Две последовательные вершины совпадают:  $A_i^+ = A_{i+1}^+$ .

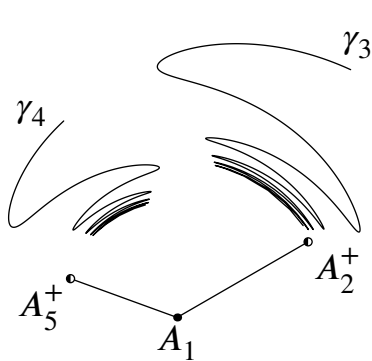
Конечно, есть и другие случаи (например,  $A_2^+ = A_3^+$  и один из углов  $\alpha_i^+$  равен  $\pi$ ), но мы считаем перечисленные выше случаи наиболее важными.

### 2.4.1 Пятиугольные орбиты

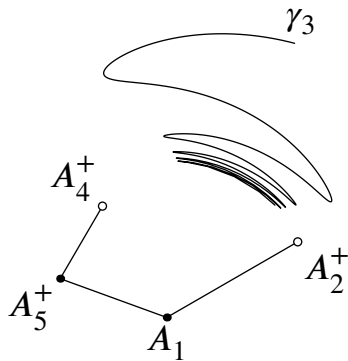
В этом пункте мы лишь перечислим возникающие для  $k = 5$  случаи, невозможность которых не вытекает из прямых обобщений лемм, доказанных в этой главе.

Случаи схематически изображены на рисунках 2.3 и 2.4. Вершины, являющиеся отмеченными точками соответствующих кривых, отмечены кругами с белой внутренностью; вершины, не являющиеся отмеченными точками — чёрными кругами, а вершины, которые могут быть как отмеченными, так и не отмеченными, — чёрными полудисками.

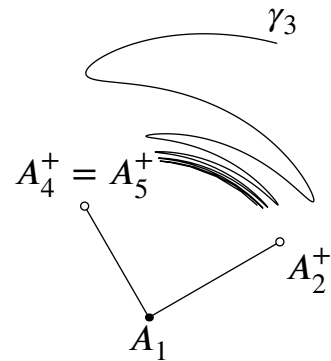
Невозможность некоторых из этих случаев доказана. Например, случай двух развёрнутых углов разобран В. А. Клепцыным.



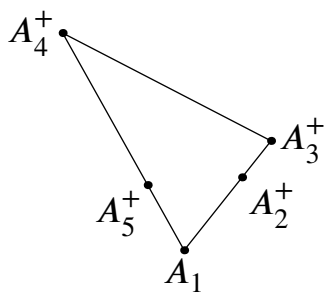
Пределы  $A_3^+$  и  $A_4^+$   
не существуют



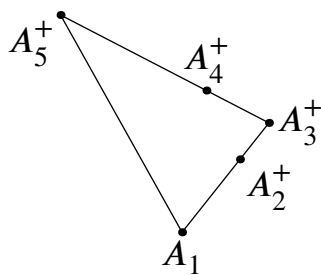
Предел  $A_3^+$  не  
существует



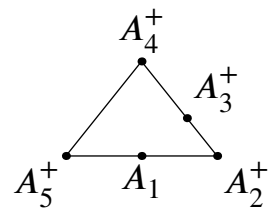
Предел  $A_3^+$  не  
существует,  
 $A_4^+ = A_5^+$



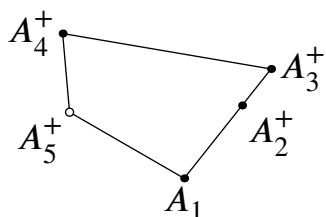
$\alpha_2^+ = \alpha_5^+ = \pi$



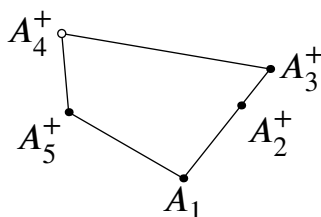
$\alpha_2^+ = \alpha_4^+ = \pi$



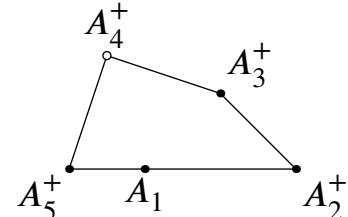
$\alpha_3^+ = \alpha_1^+ = \pi$



$\alpha_2^+ = \pi$ ,  $A_5^+$  —  
особая точка  
кривой  $\gamma_5$

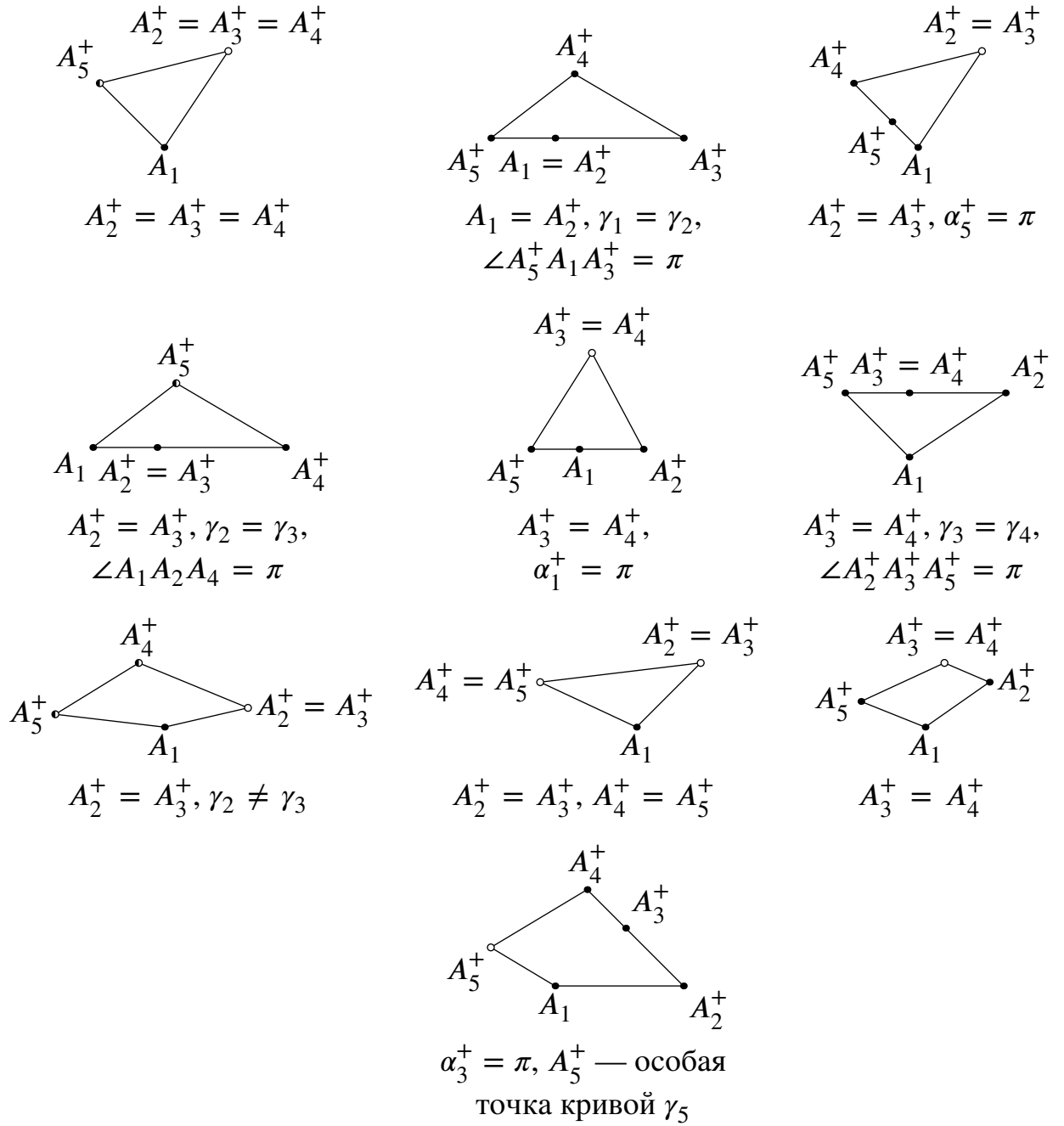


$\alpha_2^+ = \pi$ ,  $A_4^+$  —  
особая точка  
кривой  $\gamma_4$



$\alpha_1^+ = \pi$ ,  $A_4^+$  — особая  
точка кривой  $\gamma_4$

**Рисунок 2.3** «Нетривиальные» случаи для  $k = 5$ . Часть 1.



**Рисунок 2.4** «Нетривиальные» случаи для  $k = 5$ . Часть 2.

## Список литературы

- [1] R. L. Adler и В. Weiss, *Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus*, Proc. of Nat. Acad. Sci. **57:6** (1967), 1573–1576
- [2] C. Bonatti, L. Díaz, and M. Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity: a global geometric and probabilistic perspective*, volume 102 of *Encyclopedia of mathematical sciences*. (Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH and Co. KG, Dordrecht, 2005).
- [3] E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leur applications géométrique*. (Paris, 1945).
- [4] J. J. Duistermaat и V. W. Guillemin, *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics*, Invent. Math. **29** (1975), 39–79
- [5] K. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. (John Wiley and Sons, USA, 1990).
- [6] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, and S. Michael, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math. **583** (1977)
- [7] Yu. S. Ilyashenko, *Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms*, in preparation
- [8] Yu. S. Ilyashenko, V. Kleptsyn, and P. Saltykov, *Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins*, Journal of Fixed Point Theory and Applications **3** (2008), №2, 449–463
- [9] Yu. S. Ilyashenko и A. Negut, *Hölder properties of perturbed skew products and Fubini regained* ArXiv preprint <http://arxiv.org/abs/1005.0173v1>.
- [10] Yu. S. Ilyashenko и A. Negut, *Invisible parts of attractors*, Nonlinearity **23** (2010), №5, 1199–1219
- [11] I. Kan, *Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with everywhere dense basin*, Bull. Amer. Math. Soc. **31** (1994), 68–74
- [12] M. Kuranishi, *On E. Cartan's Prolongation Theorem of Exterior Differential Systems*, American Journal of Mathematics **179** (1957), №1, 1–47
- [13] J. Milnor, *Fubini foiled: Katok's paradoxial example in measure theory*, Math. Intelligencer **19** (1997), №2, 30–32
- [14] M. R. Rychlik, *Periodic points of the billiard ball map in a convex domain*, J. Diff. Geom. **30** (1989), 191–205

- [15] D. Volk и V. Kleptsyn, *Thin attractors in skew products*, готовится к публикации
- [16] H. Weyl, *Gesammelte Abhandlungen*. (Springer-Verlag, Berlin, 1968).
- [17] Я. Б. Воробец, *О мере множества периодических точек бильярда*, Матем. заметки **55** (1994), №5, 25–35
- [18] А. С. Городецкий, *Регулярность центральных слоев частично гиперболических множеств и приложения*, Изв. РАН. Сер. матем. **70** (2006), №6, 19–44
- [19] А. С. Городецкий и Ю. С. Ильяшенко, *Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем*, Функц. анализ и его прил. **33** (1999), №2, 16–30
- [20] А. С. Городецкий и Ю. С. Ильяшенко, *Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленидом*, Тр. МИАН **231** (2000), 96–118
- [21] В. Я. Иврий, *О втором члене спектральной асимптотики для оператора Лапласа–Бельтрами на многообразиях с краем*, Функц. анализ и его прил. **14** (1980), №2, 25–34
- [22] В. А. Клепцын и П. С. Салтыков,  *$S^2$ -устойчивый пример перемежаемости аттракторов в классе отображений кольца, сохраняющих границу* (unpublished, 2010). Готовится к публикации.
- [23] А. В. Клименко, *О количестве классов марковских разбиений для гиперболического автоморфизма двумерного тора* **200** (2009), №8, 147–160
- [24] А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*. (Издание Харьковского Математического Общества, Харьков, 1892).
- [25] А. В. Осипов, *Неплотность орбитального свойства отслеживания относительно  $C^1$ -топологии*, Алгебра и анализ **22** (2010), №2, 127–163
- [26] П. К. Рашевский, *Геометрическая теория уравнений с частными производными*. (ОГИЗ Гостехиздат, 1947).