

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. Лапшин, С.Н. Смирнов

**КОНСОЛИДАЦИЯ И АГРЕГАЦИЯ ОЦЕНОК
ВЕРОЯТНОСТИ ДЕФОЛТА**

Препринт WP16/2012/02
Серия WP16

Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука

Москва
2012

УДК 336.717

ББК 65.262.6

Л24

Редакторы серии WP16
«Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука»
С.Н. Смирнов, А.Г. Шоломицкий

Л24 **Лапшин, В. А.** Консолидация и агрегация оценок вероятности дефолта : препринт WP16/2012/02 [Текст] / В. А. Лапшин, С. Н. Смирнов ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2012. – 40 с. – 150 экз.

В работе предлагается метод сведения в одну оценку полученных различными способами оценок вероятностей дефолта, риск-нейтральных и реальных. Рассматриваются два «инженерных» способа перевода риск-нейтральных вероятностей в реальные при помощи уравнения связи, полученного из тех или иных соображений. Проводятся расчёты на реальных данных по финансовой отчётности российских банков и статистике экономических дефолтов, с одной стороны, и ценовой информации по рублевым облигациям, для которых банки являются эмитентами, с другой.

УДК 336.717

ББК 65.262.6

Препринты Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики» размещаются по адресу: <http://www.hse.ru/org/hse/wp>

© Лапшин В. А., 2012

© Смирнов С. Н., 2012

© Оформление. Издательский дом
Высшей школы экономики, 2012

1. Введение

Оценка кредитного качества компаний – актуальная прикладная задача, а соответствующие модели составляют важную часть финансовой математики. Для кредитного анализа применяют широкий спектр математических и экономических методов: от теории случайных процессов и математической статистики до макроэкономического анализа. Оценки кредитного качества также строят и публикуют специализированные компании – рейтинговые агентства. Разнообразие источников суждения о кредитном качестве порождает необходимость агрегирования нескольких источников информации в одну оценку. Эта агрегация получила в документе Basel II название подхода, основанного на внутренних рейтингах (IRB, Internal Rating Based approach), так как оценивающий субъект, по сути, проводит работу, аналогичную той, которую проводят рейтинговые агентства: всестороннее изучение всех доступных источников информации о кредитном качестве и вынесение по результатам анализа агрегированного суждения.

Для целей финансовой инженерии и риск-менеджмента обычно используют три количественные характеристики кредитного риска¹:

- 1) экспозицию при дефолте (exposure at default, EAD);
- 2) вероятность дефолта за определенный период времени (probability of default, PD) или же интенсивность дефолта² (default intensity, hazard rate);
- 3) убыточность при дефолте (loss given default, LGD).

В настоящей работе мы концентрируем внимание на второй характеристике; это соответствует низшему уровню IRB – базовому подходу (foundation approach), в рамках которого банки предоставляют собственные оценки PD и полагаются на надзорные оценки для прочих количественных характеристик кредитного риска (в рамках продвинутого под-

¹ В частности, эти характеристики зафиксированы Базельским комитетом в документе Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework (June 2004).

² При этом вероятность будет интегральной, а интенсивность (для моделей сокращенной формы) – инфинитезимальной характеристикой для моделей с непрерывным временем.

хода банки используют внутренние модели для всех трех характеристик риска).

Агрегация нескольких оценок в одну итоговую (составление того самого внутреннего рейтинга) – отдельная задача. Мы же сконцентрируемся на задаче консолидации оценок вероятностей дефолта, то есть на подготовке однородных данных для агрегации; в некотором смысле, «приведении их к общему знаменателю».

1.1. Риск-нейтральные и реальные вероятности дефолта

Одни модели вероятности дефолта основаны на использовании исторических данных о дефолтах. К таким моделям, в частности, относятся модели дискриминантного анализа и эконометрические модели. Вероятность дефолта, которая получается при использовании этих моделей, является реальной (объективной) вероятностью. С другой стороны, существуют модели вероятности дефолта, основанные на использовании рыночной информации о ценах: облигаций, акций и кредитных производных финансовых инструментов (CDS³ – см. работу [1]). Обоснованность таких моделей заключается в предположении о том, что цены активов, формирующиеся на рынке, должны отражать всю доступную инвесторам информацию. Фактически этот косвенный способ определения вероятностей дефолта отражает мнение рынка о кредитном качестве. Разумеется, это мнение может не всегда соответствовать действительности, что требует определенной осторожности. Зато рынок мгновенно отражает текущее состояние дел с учетом поступающей информации.

Основными подходами, построенными на рыночных данных, являются структурные модели и модели сокращенной формы. Можно ожидать, что модели, основанные на рыночных данных, должны давать наиболее свежие, а потому более точные прогнозы дефолтов, однако это не всегда подтверждается эмпирически. Важно отметить, что при использовании моделей, основанных на рыночной информации, вероятности дефолта являются риск-нейтральными. Риск-нейтральность в ценообразовании инструментов является следствием определенной формализации принципа отсутствия арбитражных возможностей, отсутствия торговых ограничений и полноты рынка.

Риск-нейтральные вероятности включают как оценку вероятности дефолта инвесторами, так и их отношение к риску (премию за риск). Кро-

³ Credit default swap.

ме того, если учитывать, что финансовые инструменты не являются абсолютно ликвидными, то риск-нейтральные вероятности дефолта также содержат в себе премию за ликвидность. Проще всего это проиллюстрировать для моделей сокращенной формы; в этом случае удобнее говорить о премиях не в терминах вероятностей, а интенсивностей дефолта. Для наиболее естественно интерпретируемой модели сокращенной формы – подхода частичного возмещения рыночной стоимости (reduced form model, fractionary recovery of market value) Даффи и Синглтона [2] – это выглядит достаточно просто: в момент времени t цена $d(t, T)$ бескупонной (дисконтной) облигации с единичным номиналом, сроком погашения T равна:

$$d(t, T) = E_t e^{\int_t^T (r_u + s_u) du},$$

где $s_t = \lambda_t \theta_t + \omega_t$,

λ – интенсивность дефолта;

θ – убыточность при дефолте (LGD);

ω – компонента, отвечающая за (низкую) ликвидность;

r – мгновенная (непрерывно начисляемая) процентная ставка;

E_t – условное риск-нейтральное среднее при наблюдаемой к моменту t информации.

Сопоставление риск-нейтральных и реальных вероятностей дефолта остается на сегодняшний день актуальной задачей. Делианидис и Гешке [1] показывают, что риск-нейтральные вероятности тесно связаны с реальными вероятностями дефолта, что они могут рассматриваться как верхняя граница для оценки реальной вероятности дефолта, обладают такими же чувствительностями и могут быть оценены с более высокой точностью.

Дриессен [4] оценивает величину премии за риск на основе исторических данных о дефолтах корпоративных облигаций в США. В качестве результата получено, что премия за риск составляет около 68% избыточной доходности 10-летней корпоративной облигации с рейтингом ВВВ по сравнению с государственной облигацией. После проведения корректировки на эффекты от налогов и ликвидности премия за риск остается статистически значимой.

Аналогичные результаты демонстрируют Бернхт и др. [5]. Авторы исследуют взаимосвязь между вероятностями дефолта, полученными с помощью модели Moody's KMV и с помощью кредитных производных

инструментов (CDS). В результате авторы получают, что риск-нейтральные вероятности дефолта в среднем в 2 раза превышают реальные вероятности дефолта.

В связи с этим актуальной становится задача перехода от риск-нейтральных вероятностей дефолта к реальным. Лиу и др. [6] предлагают два подхода к преобразованию риск-нейтральных вероятностей в реальные вероятности: подход, основанный на использовании функции полезности, и статистическую калибровку данных. Чан-Лау [7] предлагает более простой способ преобразования вероятностей, основанный на использовании функции полезности. В качестве других примеров преобразования см. [8–11].

Риск-нейтральные вероятности дефолта, в отличие от реальных вероятностей, как уже отмечалось выше, включают в себя премию за риск, что и приводит к тому, что риск-нейтральные вероятности, полученные из моделей на основе рыночных данных, могут значительно превышать реальные вероятности дефолта. В связи с этим существуют методы перехода от одних вероятностей к другим, позволяющие получить сопоставимые результаты.

2. Сведение различных результатов

Непосредственно формальным процедурам сведения нескольких оценок характеристик кредитного риска эмитентов посвящено только небольшое количество работ. Как уже отмечалось выше, рекомендации Базельского комитета по банковскому надзору сводятся к использованию только одной из имеющихся оценок, выбираемой по простому алгоритму.

Несколько более сложной является методика, предложенная в препринте Европейского центрального банка [12]. В работе рассматривается проблема сопоставления нескольких различных оценок кредитного качества, предоставляемых рейтинговыми агентствами. Хотя понятие кредитного качества не ограничивается только лишь вероятностью дефолта, в работе речь фактически идет только о получении усредненной по различным источникам вероятности дефолта.

Всё изложение ведется на языке кредитных рейтингов, однако в естественном предположении о различии шкал рейтингов агентств результа-

ты могут быть получены только при переходе ко «вменённым» вероятностям, соответствующим каждому уровню кредитного рейтинга. Кроме того, предполагается, что кредитные рейтинги соответствуют одной и той же группе – PIT⁴ или TTC⁵, а оценки вероятностей приведены к общей интерпретации – реальной или риск-нейтральной. Непосредственно сведению оценок предшествует предположение о том, что все они получены одним способом – на основе регрессионной модели, учитывающей все существенные количественные характеристики деятельности заёмщика. При этом подчёркивается, что структура модели может быть при сопоставлении рейтингов неизвестна. После получения оценки кредитного качества (рейтинга) предполагается, что агентства уточняют эту оценку на основе экспертных мнений.

Авторы предлагают в качестве итоговой оценки (синтетического рейтинга – в терминологии работы) использовать одну из следующих величин:

- среднее между оценками;
- медиану оценок;
- лучшую линейную комбинацию оценок;
- лучшую выпуклую комбинацию оценок.

Под линейной комбинацией авторы понимают взвешенное среднее с произвольными весами, сумма которых равна единице. Под выпуклой комбинацией понимается взвешенное среднее с неотрицательными весами и единичной суммой. В качестве критерия качества последних двух оценок выбирается величина среднего квадрата отклонения отдельных оценок от синтетического рейтинга. Последний полагается тем лучшим, чем меньше указанная величина.

В работах [10, 13, 14] авторы рассматривают возможность сведения рейтингов агентства Moody's и оценок кредитного качества, основанных на модели Мёртона [15]. Подробное описание современных вариантов модели и сопоставление её с другими способами оценки вероятности дефолта приведено в работе [16]. Для исследования необходимости такого сведения авторы строят набор кривых Лоренца (cumulative accuracy plots) при различных способах ранжирования эмитентов: только на основе рыночной модели, только на основе кредитных рейтингов Moody's, на основе обоих источников информации. Основной результат заключа-

⁴ Point in time – оценка кредитного качества компании на данный момент времени.

⁵ Through the cycle – оценка кредитного качества компании, учитывающая бизнес-циклы (обычно усреднённая за весь цикл).

ется в том, что оценки кредитного рейтинга Moody's уже включают в себя рыночную информацию, а следовательно, использование отдельно обоих источников не приносит улучшения предсказательной силы оценки. Более того, кривые Лоренца, построенные на основе совокупных оценок, лежат ниже, чем соответствующие кривые, построенные только на основе рыночных данных. Результаты исследований подтверждают опубликованные ранее результаты сотрудников агентства Moody's KMV [17–23].

Однако Лёффлер (Löffler) в своей работе [24], используя на два порядка большую по размеру выборку, приходит к противоположному результату – использование информации из двух источников различной природы приводит к улучшению предсказательной силы модели. Он также ссылается на аналогичные выводы Миллера в работе [25]. Основным инструментом, используемым Лёффлером, является логит-регрессия, используемая для оценки вероятности дефолта. В качестве объясняющих переменных с точностью до преобразований, не изменяющих результатов оценки, выступают кредитный рейтинг и рассчитанные агентством Moody's на основе рыночной информации оценки Expected Default Frequency (далее – EDF).

Кроме того, качество работы модели проверялось по различным группам эмитентов – находящихся в списке особо наблюдаемых (watch list), спекулятивного качества и т.д. Не вдаваясь в технические детали, приведем основной результат – использование обеих оценок вероятности дефолта даёт большую предсказательную силу модели. Однако следует отметить, что получаемые результаты за пределами обучающей выборки (out of sample) по качеству сопоставимы с результатами вычисления среднего арифметического оценок. Это может объясняться как неадекватностью используемого инструментария, так и наличием у рассматриваемой выборки такого системного свойства.

2.1. Способы сведения

В реальной экономике цены активов сильно зависят от их рискованности. Обычно инвесторы требуют плату за неопределенность. Таким образом, форвардная цена (цена сделки, заключённой в будущем) инструмента, вообще говоря, отличается от его ожидаемой стоимости. Чаще всего инвесторы избегают риска и текущей цены ниже математического ожидания, вознаграждая тех, кто принимает на себя риск.

Соответственно, чтобы правильно оценить инструмент, необходимо скорректировать ожидаемую стоимость с учётом риска.

Оказывается, что при достаточно мягких ограничениях (отсутствие арбитражных возможностей) существует другой способ вычислить цену: вместо того чтобы находить среднюю цену в будущем и модифицировать её, учитывая риск, можно всего лишь поменять вероятности различных исходов в будущем таким образом, чтобы они учитывали эффекты, вносимые рискованностью актива.

Тогда математическое ожидание, вычисленное относительно этих изменённых вероятностей – риск-нейтральных⁶, будет равно цене инструмента без всяких дополнительных поправок (они уже были учтены в вероятностях). Реальные вероятности будущих событий, разумеется, остаются без изменений, но использование риск-нейтральных вероятностей позволяет сильно упростить ряд вычислений. С точки зрения теории и практики достоинство риск-нейтрального подхода состоит в существенном упрощении модели: при использовании реальных вероятностей каждый инструмент требовал бы разной поправки (так как степень рискованности разная), а в риск-нейтральном случае для определения цены любого инструмента достаточно взять соответствующее математическое ожидание приведенной стоимости будущих денежных потоков.

Соответственно, для того чтобы сравнивать риск-нейтральные (например, полученные по рыночной модели) и реальные (например, полученные по эконометрической модели) вероятности дефолта, необходимо иметь возможность переводить одно в другое. Соответствующий переход включает величину, вообще говоря, случайную, называемую рыночной ценой риска. В работе [23] были рассмотрены разнообразные варианты параметрической спецификации этой величины. Вывод, к которому пришли авторы, заключается в следующем: на рынке слишком мало данных для идентификации более-менее сложной модели, а простые модели ведут себя практически одинаково (одинаково плохо). Авторы рассматривают нелинейные варианты спецификации рыночной цены риска, но не находят подтверждения этой гипотезе. Соответственно, разумным представляется использование максимально простой модели – во избе-

⁶Эти скорректированные вероятности называются риск-нейтральными, поскольку использующий соответствующее ценообразование агент ведет себя как риск-нейтральный, то есть не требует дополнительной компенсации за риск, оценивая активы по математическому ожиданию их стоимости в будущем.

жение численной неустойчивости модели и для более простой интерпретации её параметров.

В работе [24] предлагается линейная связь между логарифмами интенсивностей дефолта, что примерно соответствует двойному логарифму вероятности дефолта.

Более строго в рассматриваемой модели (с определенными упрощающими предположениями) вероятность дефолта на отрезке от 0 до t полагается равной:

$$p = 1 - E \left(e^{- \int_0^t \lambda(u) du} \right).$$

При некоторых предположениях будет существовать и риск-нейтральная условная плотность дефолта λ^* , для которой выполнено равенство:

$$p^* = 1 - E^Q \left(e^{- \int_0^t \lambda^*(u) du} \right),$$

где p^* – риск-нейтральная вероятность дефолта, а математическое ожидание берётся относительно риска-нейтральной меры Q .

Далее предлагается оценить простую линейную зависимость между величинами λ , λ^* и v , где v – геометрическое среднее условных плотностей дефолта по эталонному набору J фирм:

$$\ln v = \frac{1}{|J|} \sum_{i \in J} \ln \lambda^{(i)}.$$

Авторы предлагают сложную многоэтапную методику оценки этой зависимости, основывающуюся на стохастической динамике всех рассматриваемых величин и поэтапной оценке коэффициентов методом максимального правдоподобия. Как указано в работе, полученные результаты оказываются не очень устойчивыми.

Несмотря на то что такая зависимость нелинейна в терминах интенсивностей дефолтов, авторы приводят средние значения отношения λ^* / λ , которое они называют «премией за риск скачка к дефолту». Средние значения этого коэффициента получаются от 2,0 до 3,0 в зависимости от отрасли, однако с достаточно большим разбросом (обусловленным нелинейностью зависимости и неустойчивостью оценок).

Предположение о постоянстве этого отношения ведёт к простому выражению, связывающему риск-нейтральную и реальную вероятности дефолта. Например, если мы предположим, что интенсивность дефолта λ не зависит от срока, то получим следующее выражение, связываю-

шее реальную вероятность дефолта p и риск-нейтральную вероятность p^* :

$$p = 1 - k \sqrt{1 - p^*},$$

где $k = \lambda^* / \lambda$ – единственный параметр, подлежащий оценке.

В то же время более развёрнутая форма рассматриваемой зависимости может быть представлена в виде более сложного выражения:

$$p = 1 - \exp \left[-t^{1-\beta_3} \beta_1 v^{\beta_2} \left(-\ln(1 - p^*) \right)^{\beta_3} \right],$$

где коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ подлежат оценке, а величина v может быть оценена, например, по эконометрической модели.

2.2. Агрегирование вероятностей дефолта

Для того чтобы иметь возможность агрегировать вероятности дефолта, полученные из разных источников, необходимо убедиться в том, что все они – либо реальные, либо риск-нейтральные. Ибо, как следует из изложенного выше, реальные и риск-нейтральные вероятности, хотя и измеряют одно и то же (степень возможности наступления дефолта), являются величинами, измеренными в разных шкалах, и прямое их сравнение и использование в одних и тех же выкладках некорректно.

Выше была описана одна из методик, используемых в литературе для оценки взаимосвязи между риск-нейтральными и реальными вероятностями (как уже упоминалось, эта связь может быть практически произвольной). Ниже для практических целей мы выберем более простую и, что важно для приложений, легко интерпретируемую зависимость.

Предположим, что мы выбрали некоторую параметрическую модель взаимосвязи. Для практического её использования необходимо указать численные значения параметров, которые необходимо оценить исходя из реальных данных. Для оценки связи двух величин необходимо иметь выборку пар их значений. Однако в действительности мы имеем лишь оценки как риск-нейтральной, так и реальной вероятностей, а priori имеющие недостаточную точность и различную природу: если бы точность была достаточной, не потребовалась бы вторая оценка, а если бы природа была одинаковой, в агрегировании не было бы смысла, так как одно из значений не несло бы новой информации по сравнению с другим.

Таким образом, сложность задачи оценки связи риск-нейтральных и реальных вероятностей заключается в отсутствии качественных входных

данных: заведомо следует ожидать, что полученные при помощи эконометрической модели реальные вероятности и полученные по рыночной модели риск-нейтральные вероятности не соответствуют друг другу.

Следует отметить, что в условиях сильной нехватки данных использование любой модели будет в большей степени произвольным решением: на практике обычно нет оснований предпочесть одну модель другой, кроме как по критериям удобства применения.

В связи с этим представляются возможными несколько подходов:

1. Оценка связи риск-нейтральных и реальных вероятностей на более развитых рынках, где выше точность оценок и где доступно большее количество инструментов, в том числе готовые вероятности дефолта, например, Moody's KMV. Затем перенос найденной связи на российский рынок без изменений.

2. Оценка рыночной цены риска по другой, сторонней модели. Например, если нас интересуют процентные риски, можно использовать в качестве дополнительной модель [26].

3. Постулирование как вида зависимости, так и конкретных численных значений параметров (например, оценённых экспертным образом).

4. Использование малопараметрической (один-два параметра) модели с оценкой неизвестных параметров на основании имеющихся данных: малопараметрическая модель не сможет обеспечить даже приближённое равенство двух типов вероятностей (из того, что модели разные, следует, что это равенство нежелательно), но сможет привести их к одной шкале: один параметр обеспечит примерное равенство средних значений, а два параметра сделают похожими и средний разброс. К сожалению, вид параметрической зависимости необходимо выбрать экспертным образом.

5. Можно предложить несколько методов сведения риск-нейтральной и реальной вероятностей, не использующих непосредственное вычисление рыночной цены риска, а полагающихся на разумное её отражение в оценённых коэффициентах регрессии.

6. Применение к обеим вероятностям логит-преобразования, комбинация получившихся величин и применение к результату обратного логит-преобразования для получения итоговой вероятности. Помимо эвристического (вероятности – явно не аддитивные величины, а логит-преобразование от них можно постулировать аддитивным) смысла, этот подход может иметь следующую интерпретацию: мы предпола-

гаем, что данные вероятности были получены при помощи логит-моделей, подобно описанным в [27]:

$$p_1 = F^{-1}(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n),$$

$$p_2 = F^{-1}(b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m),$$

где $p_{1,2}$ – вероятности по первой и второй моделям соответственно, a_i – коэффициенты первой модели, x_i – объясняющие переменные первой модели, b_i – коэффициенты второй модели, y_i – объясняющие переменные второй модели, $F^{-1}(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ – обратное логит-преобразование. То же самое можно делать и для другого выбора F ,

например, для пробит-моделей. Для простоты мы предположили линейную свертку переменных – стандартный прием в эконометрике. Разумеется, это не всегда хорошо работает, в особенности если есть основания считать, что зависимость от определенных переменных не является монотонной.

Таким образом, применение обратного логит-преобразования к вероятностям даёт нам свёртку объясняющих переменных для одной и для другой модели:

$$X_1 = F(p_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

$$X_2 = F(p_2) = b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m.$$

Этим мы как бы проводим обратную инженерную разработку моделей для получения доступа если не к самим исходным данным, то хотя бы к их агрегатам. Дальнейшая комбинация и применение логит-преобразования соответствуют построению новой, более общей модели, использующей всю доступную информацию, как из одной исходной, так и из другой:

$$p = F^{-1}(\gamma_0 + \gamma_1 F(p_1) + \gamma_2 F(p_2)) = F^{-1}(\gamma_0 + \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2) =$$

$$F^{-1}(\gamma_0 + \gamma_1 [a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n] + \gamma_2 [b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m]).$$

Этот подход, хотя и более логичный для комбинации двух однородных (реальных или риск-нейтральных) вероятностей, может быть использован и в смешанном случае: нетрудно убедиться, что такой подход соответствует некоторому конкретному малопараметрическому

виду зависимости риск-нейтральных вероятностей от реальных, а в данном пункте уже было упомянуто, что выбор одного или другого способа связи осуществляется исключительно из соображений удобства. В данном случае наличие аргумента общего плана, подобного приведённому выше, вполне может быть достаточным основанием для предпочтения этой спецификации рыночной цены риска другим.

7. Использование риск-нейтральной вероятности или некоторой функции от неё (например, логит-преобразования) в качестве ещё одного фактора в эконометрической модели. Это является логичным развитием предыдущей идеи: если модель, использованная для расчёта реальной вероятности, нам доступна, то нет нужды проводить сначала агрегацию объясняющих переменных, затем обратное логит-преобразование, потом логит-преобразование – и всё для того, чтобы получить в результате лишь один агрегат. Гораздо разумнее было бы просто включить полученный из риск-нейтральной вероятности псевдоагрегат в список доступных объясняющих переменных и рассчитывать, что его риск-нейтральная природа будет автоматически учтена адекватным образом при оценке параметров регрессии. При этом оценку следует производить, используя в качестве факторов вероятности, усреднённые за тот же период, к которому относятся эконометрические данные.

Отметим также, что указанные подходы могут комбинироваться: так, например, можно использовать логит-преобразование от риск-нейтральной вероятности в качестве ещё одной объясняющей переменной, но коэффициент при этой переменной оценивать на другом рынке с более полными данными.

2.3. Два метода определения цены риска

Мы рассмотрим два простых и легко интерпретируемых подхода к оценке постоянной и неслучайной цены риска, основанных на рыночных данных.

Первый метод можно считать «фольклорным» – он использовался практиками из банка J.P. Morgan и Moody's KMV. Формулы, получаемые нами, схожи с общезвестными (см., например, работу [10]), однако мы в данной статье акцентируем внимание на интерпретации подхода⁷.

⁷ Близкие по смыслу рассуждения имеются в книге [31].

Взаимосвязь между q_t – риск-нейтральной вероятностью дефолта до момента t и p_t – соответствующей реальной, или объективной, вероятностью дефолта – представляется в виде:

$$q_t = N \left\{ N^{-1}(p_t) + \left[\frac{(\mu_A - r)}{\sigma_A} \right] t^{1/2} \right\}, \quad (2)$$

где N – стандартная нормальная функция распределения;

N^{-1} – обратная стандартная нормальная функция распределения;

μ_A – текущее значение ожидаемой доходности абстрактного актива, подверженного кредитному риску;

σ_A – волатильность доходности актива.

Коэффициент в квадратных скобках есть не что иное, как рыночная цена риска, которую в дальнейшем мы будем обозначать как γ .

Эта формула, как было замечено выше, может быть объяснена двумя способами.

Предположим, что реальная вероятность дефолта p получена при помощи некоторой эконометрической пробит-модели:

$$p_t = N(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n),$$

где x_1, \dots, x_n суть объясняющие переменные, использованные в модели. Тогда

$$N^{-1}(p_t) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

и прибавление члена $\left[\frac{\mu_A - r}{\sigma_A} \right] t^{1/2} = \gamma t^{1/2}$ означает лишь модификацию модели путём включения в неё ещё одного фактора – квадратного корня из времени. Коэффициент же при этом факторе при таком подходе не несёт никакой смысловой нагрузки. Это просто множитель γ .

Смысл множителя γ проявляется, если рассмотреть другой способ вывода этой же формулы. Согласно структурной модели Мертона, долг компании представлен бескупонной облигацией с номиналом F и сроком до погашения t , дефолт объявляется, если на момент погашения стоимость активов компании меньше, чем номинал, подлежащий погашению, а динамика стоимости активов компании описывается геометрическим броуновским движением с заданными параметрами тренда, волатильности и начальной цены – соответственно μ, σ, S_0 . Тогда реальная вероятность дефолта p_t в такой модели будет равна:

$$p_t = P(S_t < F) = P\left(S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_t} < F\right) = P\left(S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma \sqrt{t} \epsilon} < F\right) = \\ P\left(\epsilon < \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \left[\ln\left(\frac{F}{S_0}\right) - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right]\right) = N\left(\frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \left[\ln\left(\frac{F}{S_0}\right) - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right]\right).$$

С другой стороны, риск-нейтральная динамика стоимости активов компании описывается тем же самым броуновским движением с параметрами r, σ, S_0 , где r – безрисковая мгновенная доходность. Тогда риск-нейтральная вероятность дефолта q_t будет равна:

$$q_t = Q(S_t < F) = Q\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_t^*} < F\right) = Q\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma \sqrt{t} \epsilon} < F\right) = \\ Q\left(\epsilon < \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \left[\ln\left(\frac{F}{S_0}\right) - t\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right]\right) = N\left(\frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \left[\ln\left(\frac{F}{S_0}\right) - t\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right]\right) = \\ N\left(\frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \left[\ln\left(\frac{F}{S_0}\right) - t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right] + \sqrt{t}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)\right) = N\left(N^{-1}(p_t) + \sqrt{t}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)\right).$$

То есть связь риск-нейтральной вероятности дефолта q_t и реальной p_t описывается следующим уравнением:

$$q_t = N\left\{N^{-1}(p_t) + \left[\frac{(\mu - r)}{\sigma}\right] t^{1/2}\right\}.$$

Здесь видно, что упомянутый коэффициент γ на самом деле является рыночной ценой риска. С другой стороны, рыночная цена риска – настолько эфемерное понятие (современные исследователи пока не могут прийти к консенсусу даже относительно того, каким образом её следует специфицировать, должна ли она входить линейно или нелинейно и т.п.), что в подавляющем большинстве приложений она используется именно как «просто коэффициент в формуле».

Денежный поток оценивается, как если бы вероятность дефолта равнялась q_t , которая превосходит реальную вероятность p_t . Вероятность де-

фолта, которая используется в целях ценообразования – риск-нейтральная вероятность дефолта – может быть преобразована в реальную вероятность и наоборот, если известна информация о требуемой доходности базового актива. Различие между реальной и риск-нейтральной вероятностью обуславливается наличием систематической компоненты кредитного риска. Чем больше эта компонента, тем больше различие между q_t и p_t .

Теоретически различие между q_t и p_t определяется ожидаемой доходностью, требуемой для покрытия систематического риска базового актива. Если базовый актив не характеризуется наличием систематического риска (ожидаемая доходность соответствует безрисковой доходности), тогда обе вероятности совпадут. Так как систематический риск базового актива влияет на денежные потоки через дефолт, величина премии за риск, требуемой для ценообразования кредитного риска, непосредственно связана с величиной премии за риск по базовому активу.

Уравнение (2) предполагает наличие единственного денежного потока в определенный момент в будущем. Обобщение до ситуации, когда существует множество денежных потоков в различные моменты времени, значительно усложняет задачу. В работе [10] утверждается со ссылкой на неопубликованное исследование, что модель с единичным денежным потоком недооценивает вероятность дефолта примерно в 2 раза при условии не слишком больших вероятностей p . Этот факт получил отражение в следующей эмпирической (инженерной) формуле:

$$q_t = 2N\left\{N^{-1}\left(\frac{p_t}{2}\right) + \left[\frac{(\mu_A - r)}{\sigma_A}\right]t^{1/2}\right\}. \quad (3)$$

Если предположить, что премия за риск ($\mu_A - r$) определяется по таким же соображениям, как и в модели CAPM, то можно утверждать, что

$$\mu_A - r = \left[\frac{\text{cov}(r_A, r_M)}{\text{Var}(r_M)} \right] (\mu_M - r)$$

и, следовательно,

$$\frac{\mu_A - r}{\sigma_A} = \left[\frac{\text{cov}(r_A, r_M)}{\sigma_M \sigma_A} \right] \frac{(\mu_M - r)}{\sigma_M}$$

или

$$\frac{\mu_A - r}{\sigma_A} = \rho \lambda, \quad (4)$$

где r_A – доходность актива;
 r_M – рыночная доходность;
 μ_A – ожидаемая доходность актива;
 σ_A – стандартное отклонение доходности актива;
 σ_M – стандартное отклонение рыночной доходности;
 ρ – коэффициент корреляции между r_A и r_M ;
 $\lambda = \frac{(\mu_M - r)}{\sigma_M}$ – рыночный коэффициент Шарпа.

Подставляя последнее уравнение в (3), получаем:

$$q_t = 2N \left\{ N^{-1} \left(\frac{p_t}{2} \right) + \rho \lambda t^{1/2} \right\}.$$

Отношение премии за систематический риск к её стандартному отклонению, как показано выше, представляет собой рыночный коэффициент Шарпа, или рыночную стоимость риска⁸.

Вторая модель, которую мы предлагаем в нашей работе, является однoperiodной⁹ и исходит из определения рыночной цены риска как единицы добавочной доходности, требуемой инвесторами за каждую единицу среднеквадратического отклонения доходности.

Рассмотрим бескупонную облигацию с погашением через срок t . Мы примем конвенцию, что доходность, о которой шла речь выше, использует простое начисление процентов. Тогда, если потери при дефолте равны L , номинальная доходность указанной облигации при простом начислении процентов равна r , а её текущая цена равна 1, выплата в момент времени t равна либо $1 + rt$ с вероятностью $1 - p$ (нет дефолта), либо $1 - L$ с вероятностью p (дефолт)¹⁰.

⁸ Для американского рынка ожидаемое значение числителя равно 0,06–0,08, знаменателя – 0,12–0,20. Соответственно величина рыночной стоимости риска должна находиться в интервале от 0,3 до 0,7. В принципе, нет оснований предполагать, что это значение не будет изменяться во времени и таким образом объяснять частично изменение спредов по облигациям.

⁹ Можно в принципе рассмотреть и многoperiodную – фактически биномиальную – модель. Для простоты изложения мы остановились на самом примитивном варианте.

¹⁰ Мы рассматриваем упрощённую однoperiodную модель, обеспечивающую полноту рынка, или, что равносильно в данном случае, единственность риск-нейтральной вероятности. Выплата будет произведена в конце периода вне зависимости от факта дефолта (размер выплаты от этого факта зависит). Мы здесь также предполагаем, что потери исчисляются от номинальной стоимости облигации, равной единице, а не от рыночной стоимости, для определения которой нужно применять дополнительные предположения.

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \begin{cases} 1 + rt, & \text{с вероятностью } 1 - p \\ 1 - L, & \text{с вероятностью } p. \end{cases}$$

Тогда эффективная риск-нейтральная доходность этой облигации будет определяться так:

$$r^* t = E_p P_1 - 1 = (1 - p)(1 + rt) + p(1 - L) - 1 = rt - p(rt + L).$$

Пусть годовая рыночная доходность равна r_0 . Тогда, согласно нашему определению рыночной цены риска,

$$r^* = r_0 + \gamma\sigma,$$

где σ – среднеквадратическое отклонение доходности в годовом исчислении¹¹: $\sigma^2 t = \text{Var } R$, а R – случайная величина, равная полной реализованной доходности¹²:

$$R = \begin{cases} rt, & \text{с вероятностью } 1 - p \\ -L, & \text{с вероятностью } p. \end{cases}$$

Простое вычисление даёт:

$$\text{Var } R = (rt + L)^2 p(1 - p).$$

Таким образом,

$$r^* = r_0 + \gamma t^{-1/2} (rt + L) \sqrt{p(1 - p)}.$$

С другой стороны, в риск-нейтральном мире эффективная доходность будет равна безрисковой ставке:

$$r_0 t = E_q P_1 - 1 = (1 - q)(1 + rt) + q(1 - L) - 1 = rt - q(rt + L).$$

Подставляя, имеем:

¹¹ Из нашей модели не вытекает эта формула. Мы всего лишь отразили широко используемую рыночную практику пересчёта волатильностей на разные сроки через квадратный корень из времени. На самом деле, подобное соотношение обосновано лишь в рамках модели, предполагающей некоррелированность (в частности, независимость) приращений доходности. Тем не менее рыночная практика именно такова, и мы используем ту же «инженерную» формулу, чтобы получить простой результат.

¹² Возможна другая формализация: премия требуется рынком за каждую единицу дисперсии не полной, а годовой доходности.

$$\begin{aligned}
r^* t &= r_0 t + \gamma \sigma t \\
rt - p(rt + L) &= rt - q(rt + L) + \gamma t^{1/2} (rt + L) \sqrt{p(1-p)}, \\
q &= p + \gamma t^{1/2} \sqrt{p(1-p)}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Для наших целей нужна будет обратная зависимость, так как мы собираемся переводить риск-нейтральные вероятности в реальные. Соответствующая формула приведена ниже:

$$p = \frac{2q - \gamma t^{1/2} \sqrt{\gamma^2 t - 4q^2 + 4q + \gamma^2 t}}{2\gamma^2 t + 2}. \tag{5a}$$

Мы сравним обе формулы перехода между реальными и риск-нейтральными вероятностями дефолта ниже.

Для оценки параметров любой из двух приведённых выше моделей, необходимо выписать уравнение оценки облигаций компании. Мы не можем воспользоваться уже построенными моделями для этого, так как модели строились нами при сильных упрощающих предположениях, которым не удовлетворяют реальные облигации. Поэтому дальнейший ход рассуждений должен быть примерно таким: мы предполагаем связь между риск-нейтральными и реальными вероятностями заданной a priori в виде формулы (3) или (5). После чего, записывая уравнение ценообразования, находим связь между реально наблюдаемыми ценами и риск-нейтральными вероятностями дефолта. Реальные же цены мы определяем по эконометрической модели. К сожалению, вывод взаимосвязи между риск-нейтральными и реальными вероятностями без упрощающих предположений затруднён, что и вынуждает использовать выведенные из упрощённой модели формулы как ad hoc предположения.

Из теории ценообразования можно получить характеристику зависимости между вероятностью дефолта компании и стоимостью ее обязательств. Рассмотрим случай, когда есть единичный денежный поток F в определенный момент времени в будущем t . Пусть r – непрерывная ставка дисконтирования для безрискового денежного потока в момент времени t . Приведенная стоимость будущего денежного потока V выражается формулой

$$V = Fe^{-rt} [1 - q_t \cdot LGD],$$

где q_t – риск-нейтральная вероятность дефолта и LGD – (средняя) доля потерь в случае дефолта¹³.

¹³ Обсуждение предположений, приводящих к такого сорта формулам, имеется в [1].

Распространяя формулу (6) на случай нескольких денежных потоков, получаем:

$$V = \sum_t C_t \exp[-r_t t] [1 - q_t(LGD)],$$

где C_t – денежный поток в момент времени t , суммирование производится по всем датам.

Ключевым требованием для использования вышеуказанной формулы является требование к оценке доли потерь в случае дефолта LGD. Несмотря на то что в последнее время этому вопросу посвящено большое количество работ, многое еще остается неясным. Например, в рамках фундаментального подхода Basel II старшим требованиям к компаниям, государствам и банкам, не обеспеченным признанными залогами, присваивается показатель LGD 45%, а все субординированные требования к корпорациям, государствам и банкам получают LGD 75%. Это, разумеется, сильное и грубое упрощение, но таковы официальные рекомендации Базельского комитета.

Одной из предпосылок является то, что значение λ рыночной стоимости долга определяется только в отношении LGD. Если выбранные оценки слишком низкие, тогда нужно увеличивать λ и наоборот.

Другая сложность возникает, если LGD изменяется для разных групп и коррелирует с вероятностями дефолта, таким образом, затрудняя оценку отдельного эффекта от изменения вероятности дефолта. Кроме того, если не учитывать изменение LGD во времени, можно получить, что будет меняться рыночная стоимость риска, когда на самом деле меняется уровень взыскания (recovery rate). В сущности, выбор спецификации позволяет объяснить цены облигаций вероятностью дефолта.

Таким образом, полученная модель имеет два параметра: потери $L = LGD$ и рыночную цену риска. Первый из них предполагается оценивать статистически или экспертно, а второй – по простой вспомогательной модели или экспертным образом.

2.4. Оценка рыночной цены риска

Для оценки рыночной цены риска мы использовали калибровку к реальным данным. Оценка вероятности дефолта проводилась для российских банков, имеющих торгуемые на рынке облигации. Этот выбор обусловлен наличием доступной информации двух видов: банковской отчетности, с одной стороны, и котировок облигаций (несущих в себе риск

дефолта), с другой. Мы использовали две модели: одну риск-нейтральную (получение риск-нейтральной вероятности дефолта из рыночного кредитного спреда облигаций банка по сравнению с безрисковой бескупонной кривой доходности), а другую – реальную (калибровка эконометрической модели: зависимости вероятности дефолта от показателей банковской отчётности).

Использованная рыночная (риск-нейтральная) модель кратко описана в Приложении 1. Использованная эконометрическая модель схожа с представленной в [30] и повторяет по структуре модель, применяемую в настоящее время в Агентстве по страхованию вкладов.

Мы предполагали, что числа, полученные по обеим моделям, являются различными оценками (с ошибками) одной и той же величины – истинной вероятности дефолта.

Следовательно, применение формулы пересчёта к вероятностям, полученным по риск-нейтральной модели, должно давать числа, схожие с вероятностями, полученными по эконометрической (реальной) модели. Как уже отмечалось выше, следует ожидать, что эти числа неравные, так как в противном случае не было бы смысла в использовании второй оценки ввиду отсутствия в ней новой информации по сравнению с уже имеющейся.

Использовался набор вероятностей по эконометрической и рыночной моделям, соответствующим одним и тем же банкам. В качестве параметра бралось то значение, которое обеспечивает их совпадение. Очевидно, что для разных банков и в разное время такое значение будет разным, так как выбранная модель – всего лишь очень грубое приближение, да и точное совпадение, как уже неоднократно упоминалось, не должно наблюдаться на практике. На рисунке показан результат оценки рыночной цены риска для различных банков и среднее её значение.

Если ещё раз посмотреть на уравнение (4), то ясно, что рыночная цена риска ρ_l имеет смысл эффективности портфеля, имеющего соответствующие математическое ожидание доходности и дисперсию. Соответственно, смысл эффективности – в количестве добавочных единиц доходности, которое приносит нам принятие каждой единицы риска, выраженного стандартным отклонением. Большие значения соответствуют несклонности к риску, нулевые – риск-нейтральности, отрицательные – склонности к риску.

$\rho \cdot \lambda$
01-Sep-2008 - 30-Apr-2009

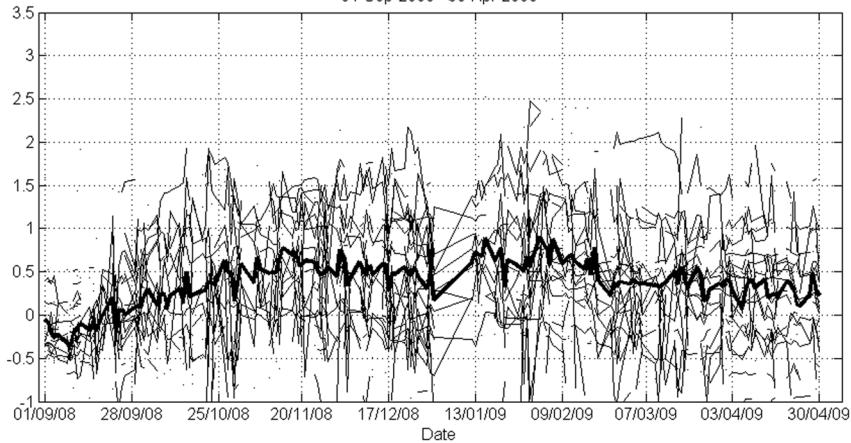


Рис. 1. Оценки рыночной цены риска на основе дневных данных о ценах облигаций, первый метод, формула (3)

$\rho \cdot \lambda$
01-Sep-2008 - 30-Apr-2009

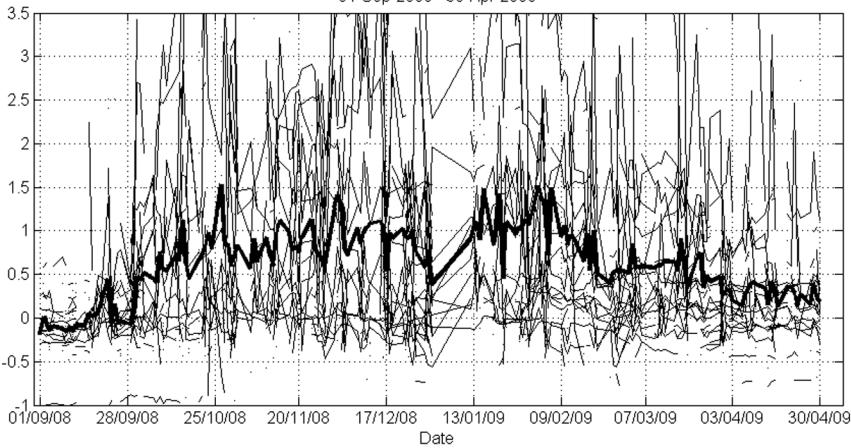


Рис. 2. Оценки рыночной цены риска на основе дневных данных о ценах облигаций, второй метод, формула (5)

Видно, что значения сильно волатильны, что обусловлено тем, что рыночные вероятности слишком сильно меняются в течение месяца, в то время как эконометрические вероятности оцениваются раз в месяц. Это приводит к слишком сильным колебаниям вероятностей. Для решения этой проблемы предлагается сглаживать рыночные вероятности при помощи экспоненциально взвешенного скользящего среднего с эффективной шириной окна, примерно равной периоду поступления эконометрических данных (один месяц).

Ниже приведены результаты оценки рыночной цены риска со сглаживанием.

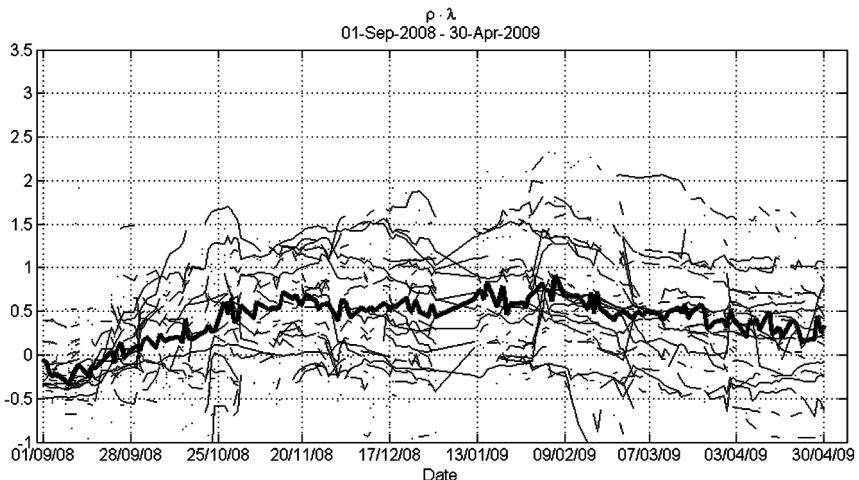


Рис. 3. Оценки рыночной цены риска на основе сглаженных данных о ценах облигаций (экспоненциально взвешенное скользящее среднее с параметром затухания, равным десяти торговым дням),
первый метод, формула (3)

Видно, что этот параметр довольно медленно меняется во времени, и его вполне можно полагать фиксированным на квартал или на два квартала. Тем не менее также видно, что в долгосрочной перспективе его значение меняется, то есть требуется переоценка как минимум 2 раза в год.

Приведённые в качестве примера иллюстрации позволяют зафиксировать на последний момент времени, отражённый на графиках, значе-

ние рыночной цены риска, равное 0,3. Значение t – горизонта прогнозирования – разумно выбрать равным одному году.

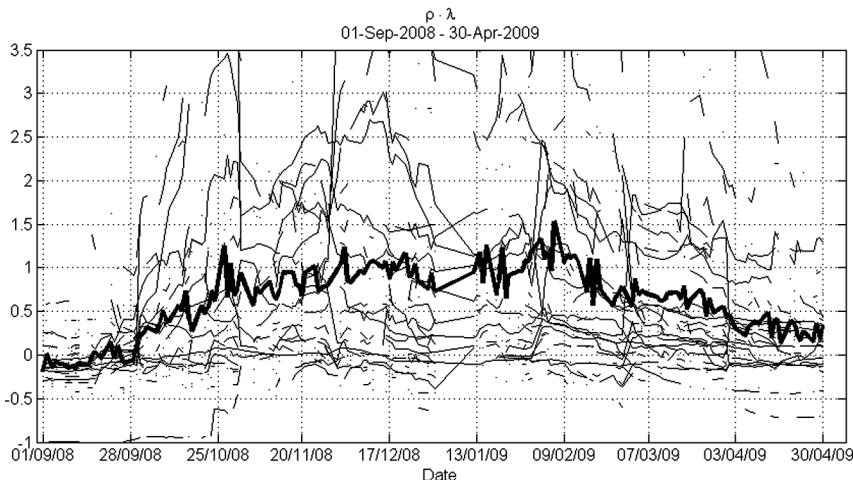


Рис. 4. Оценки рыночной цены риска на основе сглаженных данных о ценах облигаций (экспоненциально взвешенное скользящее среднее с параметром затухания, равным десяти торговым дням), второй метод, формула (5)

Также можно заметить, что в первом методе одни и те же колебания вероятностей соответствуют меньшим колебаниям параметра. Таким образом, можно предположить, что использование первого метода более оправдано в силу того, что один раз оценённый параметр мы будем предполагать неизменным в течение какого-то времени. С другой стороны, чувствительность первой модели по параметру, очевидно, больше, чем второй, так как во второй модели требуется значительно большее изменение параметра для обеспечения одного и того же изменения вероятностей. Однако детальное исследование чувствительности моделей и точности получаемых результатов находится за рамками настоящей работы в силу, прежде всего, методологических неопределённостей: не понятно, как именно определять точность соответствия в случае, когда сами данные могут быть неточными и a priori представляют собой разную информацию.

Ещё одно различие между двумя моделями будет приведено ниже.

2.5. Сведение в итоговую оценку в виде оптимальной аффинной или выпуклой комбинации оценок

В этом пункте мы рассмотрим вопрос о сведении при помощи лучшей линейной/выпуклой комбинации оценок, что уже обсуждалось в начале раздела 2 со ссылкой на препринт Европейского центрального банка [12].

В общем случае, когда имеется n оценок различного происхождения для вероятности дефолта, мы предположим, что все оценки $p_k, k = 1, \dots, n$ – несмешённые¹⁴ и имеют ошибки $\xi_k, E\xi_k = 0, k = 1, \dots, n$.

Здесь p – неизвестное («истинное») значение вероятности дефолта. Ковариационную матрицу B вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ естественно предположить невырожденной (иначе число используемых оценок можно сократить без ущерба для качества оптимальной оценки); в частности, дисперсии σ_i^2 оценок будут ненулевые, так что корректно говорит о коэффициентах корреляции ρ_{ij} и $B_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$.

Построим оценку \hat{p} в виде аффинной комбинации оценок:

$\hat{p} = \sum_{k=1}^n a_k p_k$ при условии $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ (которое гарантирует несмешённость p).

Дисперсия оценки \hat{p} представляет собой квадратичную форму (Ba, a) , которую необходимо минимизировать при условии $(e, a) = 1$, где $e = (1, \dots, 1)$; решение этой задачи¹⁵ задаётся вектором коэффициентов:

$$a^* = \frac{1}{(B^{-1}e, e)} B^{-1}e,$$

то есть получаем оптимальную аффинную комбинацию.

Для нахождения оптимальной выпуклой комбинации условную минимизацию квадратичной формы (Ba, a) необходимо проводить не только при условии $(e, a) = 1$, но и при дополнительном условии $a_k \geq 0$,

¹⁴ Точнее, мы предполагаем, что смещением можно в первом приближении пренебречь.

¹⁵ Обратная матрица B^{-1} существует в силу предположения о невырожденности; на практике матрица может быть плохо обусловленной, и непосредственное обращение матрицы может приводить к неустойчивым численным результатам.

$k = 1, \dots, n$. Эту задачу квадратического программирования можно решать численно, а соответствующие методы хорошо известны.

В частном случае, для которого проводятся расчеты в данной статье, всего две оценки – полученная на основе финансовой отчётности российских банков и статистики экономических дефолтов, с одной стороны, и полученная на основе ценовой информации по рублевым облигациям, для которых банки являются эмитентами. В этом двумерном случае легко выписываются явные решения для оптимальной аффинной комбинации:

$$\hat{p} = \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho)}{\sigma_1^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho + \sigma_2^2} p_1 + \frac{(\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho)}{\sigma_1^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho + \sigma_2^2} p_2, \quad (7)$$

Для нахождения выпуклой комбинации достаточно заметить, что оба коэффициента при исходных оценках в (7) и неотрицательны, если и только если

$$\rho \leq \frac{\min(\sigma_1, \sigma_2)}{\max(\sigma_1, \sigma_2)}. \quad (8)$$

Поэтому решение дается формулой (7), если выполняется (8), а если (8) не выполняется, то оптимальная оценка совпадает с той из исходных оценок, у которой наименьшая из них дисперсия.

Отметим, что если a priori известно, что оценки p_1 и p_2 принимают заведомо «правильные» значения, то есть лежат в отрезке $[0, 1]$, то разумно пользоваться оптимальной выпуклой оценкой, поскольку в этом случае гарантировано, что итоговая оценка \hat{p} будет также принимать «правильные» значения и, более того, ее значения будут между p_1 и p_2 . Кроме того, это сокращает эффект от потенциальных неприятностей, связанных с тем, что фактически σ_1, σ_2 и ρ оцениваются статистически, причем возможно со значительной статистической ошибкой.

Таким образом, для получения окончательного выражения для итоговой оценки вероятности дефолта, с учётом того, что оценка p_2 – рыночная, то есть риск-нейтральная, её необходимо привести к «шкале реальных вероятностей» по одной из приведённых выше формул:

$$\hat{p}^{(1)} = \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho) p_1 + (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho) 2N \left(N^{-1} \left(\frac{p_2}{2} \right) - \gamma t^{\frac{1}{2}} \right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho}$$

или

$$\hat{p}^{(2)} = \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho) p_1 + (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho) \left(\frac{2p_2 - \gamma t^{1/2} \sqrt{\gamma^2 t - 4p_2^2 + 4p_2} + \gamma^2 t}{2\gamma^2 t + 2} \right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho}$$

Как уже отмечалось выше, численные значения коэффициента корреляции и дисперсий необходимо оценивать по реальным историческим данным. Мы провели такую оценку, однако её результаты заслуживают отдельного обсуждения ввиду своей континтуитивности.

3. Результаты оценки корреляций

В этом разделе мы приводим таблицу оценённых по историческим данным параметров (по состоянию на второй квартал 2009 г.). Следует отметить, что торговля облигациями большинства банков ведётся не очень активно, и по многим облигациям длина ряда для оценки корреляции не очень велика.

В таблице приведены результаты расчётов на основании сглаженных рыночных вероятностей и рассмотрено три случая: эконометрическая вероятность сводится непосредственно с рыночной, преобразованной в реальную шкалу одним из двух описанных способов.

σ_1 – среднеквадратическое отклонение для ряда вероятностей дефолта согласно эконометрической модели;

p_1 – вероятность дефолта согласно эконометрической модели (реальная);

$\sigma_2 (R - N)$ – среднеквадратическое отклонение для ряда вероятностей дефолта согласно рыночной модели (риск-нейтральных);

$p_2 (R - N)$ – вероятность дефолта согласно рыночной модели (риск-нейтральная);

ρ – корреляция рядов вероятностей дефолта (усреднённой рыночной и эконометрической) для данного эмитента. Звёздочками отмечены корреляции, не удовлетворяющие (8);

$\sigma_2 (3)$ – среднеквадратическое отклонение для ряда вероятностей дефолта согласно рыночной модели (пересчитанных в реальные по формуле (3));

$p_2(3)$ – вероятность дефолта согласно рыночной модели (пересчитанная в реальную по формуле (3));

$\sigma_2(5)$ – среднеквадратическое отклонение для ряда вероятностей дефолта согласно рыночной модели (пересчитанных в реальные по формуле (5а));

$p_2(5)$ – вероятность дефолта согласно рыночной модели (пересчитанная в реальную по формуле (5а)).

Отметим, что для оптимальной выпуклой комбинации среднеквадратическое отклонение результирующей оценки p равно:

$$\sigma_p = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho + \sigma_2^2}} (1 - \rho^2), \quad (9a)$$

если выполняется (8), а в противном случае:

$$\sigma_p = \min(\sigma_1, \sigma_2). \quad (9b)$$

На наших данных значение (9а), как правило, незначительно меньше, чем наилучшее из среднеквадратических отклонений исходных оценок. Так, например, при типичных (медианных) значениях $\sigma_1 = 0,015$, $\sigma_2 = 0,03$, $\rho = 0,17$, условие (8) выполняется, и для итоговой оценки получается значение среднеквадратического отклонения $\sigma_p = 0,014$, то есть оптимизация (9а) дает всего лишь около 7% сокращения наилучшего из среднеквадратических отклонений исходных оценок (9б).

Как видно из таблицы (см., например, строки для «СКБ-банка», «Ханты-Мансийского банка», «Восточного экспресса» и «Кедра»), результаты расчётов сильно разнятся в зависимости от выбранного способа перевода. Таким образом, проблему, поставленную в настоящей работе, нельзя считать надуманной. Тем не менее на основании приведённых данных нельзя сделать однозначный вывод относительно предпочтительного способа перевода вероятностей.

На рис. 5 показана гистограмма значений корреляции по совокупности банков.

Видно, что распределение выражено неравномерно. Кроме того, оказалось, что оно практически не зависит от выбора способа перевода рисковнейтральных вероятностей в реальные, поэтому приводится только одна гистограмма. Она отвечает первому способу (формула (3)).

Видно, что среди корреляций наблюдается достаточное количество отрицательных. Более того, три банка имеют корреляции, меньшие $-0,6$. С другой стороны, у некоторых банков корреляция очень близка к 1,0.

	σ_1	p_1	σ_1 ($R-N$)	p_1 ($R-N$)	ρ	PD	σ_2 (3)	$p_2(3)$	ρ	PD	σ_2 (5)	$p_2(5)$	ρ	PD
Банк «Россия»	0.03	0.03	0.10	0.13	-0.66	0.05	0.06	0.06	-0.62	0.04	0.06	0.05	-0.59	0.03
БВРР	0.01	0.04	0.01	0.01	0.35	0.02	0.03	0.00	-0.17	0.03	0.00	0.00	-0.47	0.01
КБ Дельта Кредит	0.07	0.06	0.06	0.09	-0.19	0.08	0.09	0.04	-0.26	0.05	0.03	0.03	-0.14	0.04
Россельхозбанк	0.01	0.01	0.02	0.03	0.38	0.01	0.01	0.01	0.65	0.01	0.01	0.00	0.39	0.01
Крайинвестбанк	0.02	0.04	0.02	0.02	0.65	0.03	0.11	0.01	-0.30	0.03	0.01	0.00	0.64*	0.00
Москоммерц-Банк	0.04	0.11	0.16	0.17	-0.29	0.12	0.01	0.09	0.46*	0.08	0.12	0.08	-0.31	0.11
Газпромбанк	0.01	0.02	0.02	0.05	0.46	0.03	0.01	0.02	0.91	0.02	0.01	0.01	0.47	0.01
КБ Солидарность	0.03	0.12	0.15	0.30	0.26*	0.12	0.09	0.17	-0.44	0.13	0.12	0.18	0.25	0.12
Судостроительный банк	0.02	0.07	0.14	0.12	-0.46	0.07	0.16	0.06	-0.28	0.07	0.10	0.05	-0.44	0.07
ТатФонлайнБанк	0.04	0.02	0.23	0.06	-0.29	0.03	0.11	0.03	0.11	0.02	0.18	0.02	-0.28	0.02
РусьБанк	0.02	0.05	0.16	0.09	0.11	0.05	0.02	0.04	0.58	0.04	0.12	0.03	0.11	0.05
РМБ	0.05	0.02	0.03	0.06	0.59	0.06	0.14	0.03	0.70*	0.02	0.02	0.02	0.57*	0.02
БалтИнвестБанк	0.01	0.01	0.18	0.20	0.67*	0.00	0.02	0.11	0.48	0.01	0.16	0.10	0.71*	0.01
Промсвязьбанк	0.06	0.04	0.04	0.03	0.48	0.03	0.20	0.01	0.60*	0.04	0.02	0.01	0.47*	0.00
Интехбанк	0.11	0.47	0.28	0.69	0.61*	0.44	0.01	0.46	-0.99	0.46	0.24	0.52	0.60*	0.47
Северная Казна	0.03	0.23	0.13	0.12	-0.27	0.22	0.01	0.06	0.13	0.08	0.10	0.05	-0.32	0.20
Транскредит	0.02	0.01	0.03	0.05	0.13	0.02	0.15	0.02	0.08	0.01	0.01	0.01	0.13	0.01
КБ Спурт	0.03	0.06	0.23	0.03	0.20*	0.06	0.03	0.01	0.71	0.04	0.17	0.01	0.16	0.06
НОМОС	0.01	0.01	0.05	0.03	0.72*	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.03	0.01	0.70*	0.01
Банк Москвы	0.03	0.08	0.02	0.07	0.02	0.07	0.08	0.03	-0.15	0.07	0.01	0.02	0.00	0.03
Юниаструм	0.07	0.01	0.13	0.11	-0.17	0.03	0.03	0.05	0.32	0.05	0.10	0.04	-0.14	0.02
МБРР	0.06	0.04	0.06	0.08	0.32	0.06	0.18	0.04	0.08	0.04	0.04	0.03	0.31	0.03
Русский стандарт	0.05	0.10	0.24	0.13	0.10	0.10	0.05	0.07	0.08	0.08	0.21	0.06	0.07	0.09
АвгоЖасбанк	0.09	0.04	0.08	0.32	0.10	0.19	0.02	0.19	0.33*	0.19	0.05	0.19	0.06	0.15
МДМ-банк	0.05	0.00	0.03	0.07	0.35	0.06	0.00	0.03	0.14*	0.03	0.02	0.02	0.29	0.02

	σ_1	p_1	$\sigma_{(R-N)}$ ($R-N$)	$p_{2(N)}$ ($R-N$)	ρ	PD	$\sigma_2(3)$	$p_{2(3)}$	ρ	PD	$\sigma_2(5)$	$p_{2(5)}$	ρ	PD
МКБ	0.11	0.19	0.13	0.09	-0.19	0.15	0.02	0.04	-0.50	0.06	0.09	0.03	-0.20	0.10
АКИБанк	0.01	0.05	0.04	0.24	-0.47	0.08	0.00	0.13	0.25*	0.14	0.02	0.13	-0.52	0.07
АК Барс	0.01	0.01	0.00	0.05	0.25*	0.05	0.03	0.02	0.49*	0.01	0.00	0.01	0.25*	0.01
Петрокоммерц-банк	0.01	0.02	0.06	0.04	0.49	0.02	0.07	0.02	-0.22	0.02	0.03	0.01	0.49*	0.03
Русфинанс	0.11	0.26	0.11	0.08	-0.23	0.17	0.13	0.04	-0.61	0.16	0.07	0.03	-0.21	0.11
СтройКредит Банк	0.02	0.19	0.20	-0.62	0.03	0.16	0.11	0.69*	0.02	0.16	0.10	0.10	-0.60	0.03
СоцГорБанк	0.03	0.08	0.23	0.41	0.67*	0.05	0.07	0.25	-0.42	0.13	0.18	0.26	0.70*	0.06
ГлобэксБанк	0.01	0.04	0.10	0.21	-0.40	0.05	0.01	0.11	0.17	0.10	0.08	0.10	-0.43	0.04
Ханты-Мансийский Банк	0.16	0.01	0.04	0.16	0.08	0.11	0.02	0.64*	0.17	0.01	0.01	0.20	0.20	0.01
Связьбанк	0.04	0.01	0.17	0.08	0.64*	0.00	0.03	0.04	-0.14	0.03	0.12	0.03	0.65*	0.00
Зенит	0.04	0.02	0.05	0.03	-0.15	0.03	0.01	0.01	0.98*	0.01	0.03	0.01	-0.13	0.01
КМБ-Банк	0.05	0.04	0.28	0.05	-0.48	0.04	0.03	0.02	-0.20	0.03	0.21	0.01	-0.46	0.03
Центр-Инвест	0.01	0.00	0.06	0.08	-0.20	0.01	0.01	0.04	0.72	0.00	0.04	0.03	-0.20	0.01
ВТБ	0.03	0.01	0.02	0.03	0.74*	0.03	0.04	0.01	0.67	0.01	0.01	0.01	0.71*	0.01
С.обинбанк	0.01	0.00	0.05	0.32	0.68*	-0.02	0.05	0.19	0.20	0.00	0.04	0.19	0.66*	-0.01
Возрождение	0.01	0.01	0.08	0.06	0.20*	0.01	0.10	0.03	0.37*	0.01	0.05	0.02	0.20	0.01
Восточный экс-пресс	0.05	0.02	0.15	0.25	0.40*	0.02	0.03	0.14	0.61*	0.14	0.12	0.14	0.36	0.03
Кедр	0.01	0.02	0.05	0.19	0.61*	0.00	0.01	0.10	0.45	0.08	0.04	0.09	0.61*	0.01
ВТБ-24	0.01	0.01	0.02	0.00	0.47	0.01	0.12	0.00	0.41*	0.01	0.01	0.00	0.37	0.00
СКБ-Банк	0.02	0.14	0.17	0.06	0.42*	0.14	0.00	0.03	0.94*	0.01	0.13	0.02	0.41*	0.14
ЗапСибКомБанк	0.01	0.01	0.01	0.03	0.94	0.02	0.03	0.01	-0.36	0.01	0.00	0.00	0.94*	0.00
Первый Объединенный Банк	0.07	0.06	0.08	-0.35	0.07	0.06	0.04	-0.35	0.06	0.04	0.02	0.02	-0.37	0.05
	0.03													

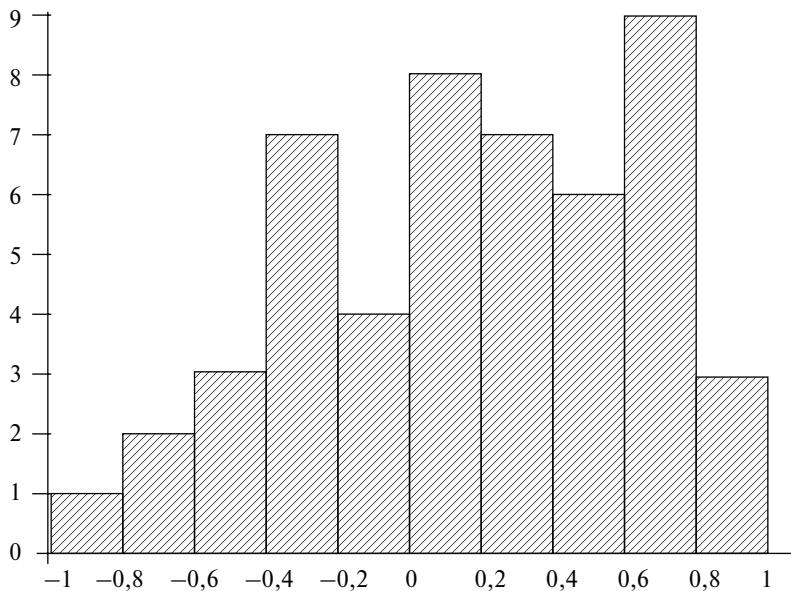


Рис. 5. Гистограмма значений коэффициента корреляции по совокупности банков

По нашему мнению, это может свидетельствовать о большой статистической погрешности при оценке параметров и недостаточном качестве входных данных. Тем не менее положительных значений корреляций всё же больше, что говорит о применимости этого подхода в среднем, на портфельном уровне.

Тезис о низком качестве исходных данных можно понимать несколькими образами. Во-первых, информация о котировках облигаций не всегда доступна в силу малой ликвидности многих выпусков. Во-вторых, в силу той же малой ликвидности в котировках облигаций зачастую существенную роль играет премия за ликвидность, игнорирование которой приводит к неверной оценке премии за кредитное качество и, как следствие, вероятности дефолта. В-третьих, низкое качество также может иметь информация, содержащаяся в банковской отчётности, как ввиду халатности сотрудников банка, подготавливающих отчётность, так и в силу сознательного искажения публикуемых значений (что явилось причиной отзыва некоторого количества лицензий у банков).

4. Заключение

Мы привели краткий обзор литературы, посвящённой сведению воедино различных оценок кредитного качества (вероятностей дефолта). Этой задаче уделялось сравнительно мало внимания; ключевые работы по данной тематике – это [10, 14, 24]. Задачу сведения оценок различной природы мы практически полностью сводим к задаче приведения этих оценок к «общему знаменателю», в частности, к одной природе: риск-нейтральной или реальной. Алгоритмы сведения однородных оценок широко известны; сравнение простейших из них проведено в [12].

Мы рассмотрели несколько подходов к задаче перевода риск-нейтральной вероятности в реальную шкалу и выбрали два простейших варианта – при помощи однопараметрической модели, описанной в [10] и предложенного нами метода.

Оценка единственного параметра модели была проведена на основании реальных данных по вероятностям дефолта, полученным при помощи двух моделей: эконометрической модели, основанной на банковской отчётности и дающей реальные вероятности, и рыночной модели, основанной на котировках облигаций банков и дающей риск-нейтральные вероятности. После сглаживания, необходимого ввиду разной частоты поступления эконометрических вероятностей (раз в месяц) и рыночных (раз в день), единственный параметр модели, имеющий смысл рыночной цены риска, оказывается достаточно устойчивым и слабо меняющимся во времени. К сожалению, однако, для разных банков он устойчиво различен. Одна из возможных причин – слишком много параметров оценивается на ограниченном статистическом материале. Еще одна возможная причина – не учитывается премия за ликвидность, которая может быть весьма существенной для рынка облигаций с низкой ликвидностью.

Применение различных методик преобразования риск-нейтральных вероятностей в реальные даёт существенно разные результаты, что ещё раз подтверждает тезис о необходимости всестороннего качественного и количественного исследования вопроса выбора надлежащего соотношения.

Отдельный вопрос встаёт в связи со способом сведения двух уже приведённых к одной шкале вероятностей дефолта в одну. В настоящей работе был выбран один из возможных способов – оптимальная выпуклая комбинация оценок, однако можно использовать и другие способы сведения, основанные на иных критериях качества оценок. Вопрос предпочт-

тительности какого-то одного способа сведения может составить предмет отдельного исследования.

Оценённые корреляции между двумя вероятностями дают почву для дальнейших исследований, так как для многих банков две оценки, построенные на разнородных и сильно зашумлённых данных, имеют либо практически единичную корреляцию, либо близкую к -1 . И то, и то находит на мысли о возможных проблемах с исходными данными, и исследование конкретных причин обнаруженного явления является перспективным направлением дальнейших изысканий. Одна из возможных причин низкого качества статистических оценок – наличие у временных рядов долговременной памяти.

Приложение 1

Ниже мы в целях замкнутости изложения кратко опишем рыночную модель, использованную нами для оценки риск-нейтральной вероятности дефолта по котировкам облигаций.

Описываемая модель существенным образом основана на стандарте Европейской комиссии по облигациям по определению безрисковой бескупонной кривой доходности и кредитных спредов для стран еврозоны [28]. Ключевым предположением, заимствованным из указанного стандарта, является предположение о наличии у каждого эмитента постоянного кредитного спреда. Подробное обсуждение этого вопроса выходит за рамки настоящей работы, однако ниже мы тезисно приведём его для полноты изложения, ибо отослать читателя к какой-либо другой одной работе представляется затруднительным.

Предполагается, что рыночные котировки облигации приблизительно равны приведенной стоимости будущих потоков платежей и, стало быть, определяются посредством расписания платежей по облигации и рыночной информации о бескупонной кривой доходности:

$$P = \sum_k F_k \exp(-(r(t_k) + \Delta r)t_k),$$

где t_k – время в годах, оставшееся до k -й выплаты по облигации, F_k – объём k -й выплаты, $r(t)$ – бескупонная кривая доходности, Δr – кредитный спред, характерный для эмитента в целом и одинаковый для разных облигаций одного и того же эмитента.

Базовая бескупонная кривая доходности полагается известной. Она оценивается независимо по котировкам облигаций ГКО-ОФЗ. Метод оценки бескупонной кривой доходности, в принципе, может быть произвольным. Мы использовали метод, описанный в [29].

Значения кредитного спреда для каждого эмитента определялись индивидуально нелинейным методом наименьших квадратов.

Из условия риск-нейтральности при (стандартном) упрощающем предположении о фиксированном коэффициенте покрытия и плоской срочной структуре кредитных спредов для одного платежа следует:

$$(1-p) \sum_{i=0}^n F_i e^{-r_i t_i} + Rp \sum_{i=0}^n F_i e^{-r_i t_i} = \sum_{i=0}^n F_i e^{-(r_i + \Delta r)t_i}, \quad (10)$$

где R – коэффициент покрытия,

P – вероятность возникновения дефолта за период t ,

r_i – безрисковая доходность на момент t_i ,

F_i – выплата в момент t_i ,

Δr – кредитный спред.

Таким образом, при заданном коэффициенте покрытия R вероятность дефолта можно найти из уравнения:

$$p = \frac{\sum_{i=0}^n q_i e^{\Delta r_i} - 1}{R - 1},$$

где

$$q_i = \frac{F_i e^{-r_i t_i}}{\sum_{i=0}^n F_i e^{-r_i t_i}}.$$

Значение Δr должно обеспечивать $p < 1$, что даёт ограничение в условной минимизации выше при определении Δr .

Если у эмитента имеется хотя бы две облигации одинакового кредитного качества¹⁶, то R можно определить из (приближенного) решения системы уравнений вида (10); если выпусков более двух, то это можно сделать, например, методом наименьших квадратов.

¹⁶ Если, например, один из выпусков субординированный, а другой – нет, то у этих облигаций одного эмитента отличаются коэффициенты покрытия.

Литература

1. Смирнов С.Н., Тарасова П.В. Методика оценки величины премии за риск ликвидности облигации на основе данных о CDS // Управление риском. 2011. № 3. С. 15–24.
2. Duffie D., Singleton K.J. Modeling Term Structures of Defaultable Bonds Review of Financial Studies. Special 1999. Vol. 12. No. 4. P. 687–720.
3. *Delianedis G., Geske R.* Credit Risk and Risk Neutral Default Probabilities: Information About Migrations and Defaults. Anderson Graduate School of Management. (<http://escholarship.org/uc/item/7dm2d31p>).
4. *Driessens J.* Is Default Event Risk Priced in Corporate Bonds? // Review of Financial Studies. 2005. Vol. 18. No. 1. P. 165–195.
5. *Berndt A.* Measuring Default Risk Premia from Default Swap Rates and EDFs. SSRN. 2008 (http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=556080##).
6. *Liu X.* Closed-form Transformations from Risk-neutral to Real-world Distributions // Journal of Banking and Finance. May 2007. Vol. 31. No. 5. P. 1501–1520.
7. *Chan-Lau J.* Market-Based Estimation of Default Probabilities and Its Application to Financial Market Surveillance. SSRN. 2006 (http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=902758).
8. *Ait-Sahalia Y., Lo A.* Nonparametric risk management and implied risk aversion // Journal of Econometrics. 2000. No. 94. P. 9–51.
9. *Bakshi G., Kapadia N., Madan D.* Stock return characteristics, skew laws, and the differential pricing of individual equity options // Review of Financial Studies. 2003. Vol. 16. No. 1. P. 101–143.
10. *Kealhofer S.* Quantifying credit risk II: Default prediction // Financial Analysts Journal. 2003. Vol. 59, No. 3.
11. *Bliss R., Panigirtzoglou N.* Option-Implied Risk Aversion Estimates // The Journal of Finance. February 2004. Vol. 59. No. 1. P. 407–446.
12. *Tabakis E., Vinci A.* Analysing and combining multiple credit assessments of financial institutions. 2002, ECB working paper.
13. *Kealhofer S., Kurbat M.* The Default Prediction Power of the Merton Approach. Relative to Debt Ratings and Accounting Variables. Moody's KMV. 2001. P. 38.
14. *Kealhofer S.* Quantifying credit risk I: Default prediction // Financial Analysts Journal. 2003. Vol. 59. No. 1.

15. *Merton R.* On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates // *Journal of Finance*. 1974. No. 28. P. 449–470.
16. *Chrohy M., Galai D., Mark R.* A comparative analysis of current credit risk models // *Journal of Banking & Finance*. 2000. No. 24. P. 59–117.
17. *Keenan S.C., Jorge R.S.* *Performance Measures for Credit Risk Models*. Moody's Investors Services, 1999.
18. *Sobehart J.R., Keenan S.C.* *An Introduction to Market-Based Credit Analysis*. Moody's Investors Services, 1999.
19. *Sobehart J.R., Keenan S.C.* *Uncertainty in Pricing Options*. Moody's Investors Services, 1999.
20. *Sobehart J.R., Keenan S.C.* *Equity Market Value and Its Importance for Credit Analysis*. Moody's Investors Services, 1999.
21. *Sobehart J.R., Keenan S.C., Stein R.M.* *Benchmarking Quantitative Default Risk Models: A Validation Methodology*. Moody's Investors Services, 2000.
22. *Sobehart J.R., Stein R.M.* *Moody's Public Firm Risk Model: A Hybrid Approach To Modeling Short Term Default Risk*. Moody's Investors Services, 2000.
23. *Stein R.M.* Evidence on the Incompleteness of Merton-type Structural *Cheridito, P., Filipovic, D., Kimmel, R.L.* Market price of risk specifications for affine models: Theory and evidence // *Journal of Financial Economics*. 2007. Vol. 83. No. 1. P. 123–170.
24. *Löffler G.* The Complementary Nature of Ratings and Market-Based Measures of Default Risk // *Journal of Fixed Income*. 2007. Vol. 17. P. 38–47.
25. *Miller R.* Refining Ratings // *Risk*. August 1998. P. 97–99.
26. *Лапшин В.А.* Непараметрическая модель стохастической динамики процентных ставок // *Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика*. 2009. № 4. С. 25–37.
27. Модели вероятности дефолта российских банков. М.: Российская экономическая школа, 2003–2004.
28. Methodology for Definition of Risk Free Zero-Coupon Yield Curve and Spreads in the Eurozone / EFFAS European Bond Commission Standardised Rules, 2006.
29. *Лапшин В.А.* Определение срочной структуры процентных ставок // *Вестник моск. ун-та. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*. № 4. 2009. С. 37–43.

30. Credit Risk Modeling for Assessing Deposit Insurance Fund Adequacy: The case of Russia // Stochastic modeling symposium and investment seminar. Paper No. 3109. Toronto, 2006.

31. Dufie D., Singleton K. Credit Risk. Pricing, Measurement and Management. Princeton.: Princeton University Press, 2003.

*Препринт WP16/2012/02
Серия WP16
Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука*

В.А. Лапшин, С.Н. Смирнов

Консолидация и агрегация оценок вероятности дефолта

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*

Корректор *А.В. Маслова*

Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии

Национального исследовательского университета

«Высшая школа экономики» с представленного оригинал-макета

Формат 60×84 1/16. Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 2,4

Усл. печ. л. 2,4. Заказ № . Изд. № 1394

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

125319, Москва, Кочновский проезд, 3

Типография Национального исследовательского университета

«Высшая школа экономики»

Тел.: (499) 611-24-15