Дискретная математика – 2

Нормальные модальные логики

Отделение прикладной математики и информатики

Высшая школа экономики

Семантика и синтаксис

- Синтаксический механизм для порождения λ_{F} — множества всех формул, общезначимых на классе фреймов F
- Нормальная модальная логика $\mathbf{K}$ — минимальная система аксиом и правил вывода для рассуждения о фреймах

Вывод

Вывод в логике K — конечная последовательность формул, каждая из которых является аксиомой или может быть получена из предшествующих элементов последовательности при помощи правил вывода

Аксиомы K

- экземпляры всех пропозициональных тавтологий

(K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

- $\Diamond p \equiv \neg\Box\neg p$

Правила вывода K

modus ponens $\frac{\phi, \phi\to\psi}{\psi}$

подстановка $\frac{\phi}{\theta}$, где θ — подстановочный пример ϕ

обобщение $\frac{\phi}{\Box\phi}$

$\vdash_{\mathbf{K}} \phi$ — формула ϕ выводима (доказуема) в **K**, если она является последним элементом некоторого вывода в логике **K**

Аксиомы и правила вывода

Тавтологии могут содержать модальные операторы: $\Diamond q \vee \neg\Diamond q$

Modus ponens сохраняет общезначимость: если $\Vdash \phi$ и $\Vdash \phi \to \psi$, то $\Vdash \psi$

Modus ponens сохраняет глобальную истинность: если $\mathfrak{M} \Vdash \phi$ и $\mathfrak{M} \Vdash \phi \to \psi$, то $\mathfrak{M} \Vdash \psi$

Modus ponens сохраняет локальную истинность: если $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ и $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \to \psi$, то $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$

Подстановка сохраняет общезначимость, но не истинность: из $\mathfrak{M} \Vdash p$ не следует $\mathfrak{M} \Vdash q$

Аксиомы и правила вывода

K $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ — общезначима

K — аксиома дистрибуции; позволяет вывести $\Box\psi$ из $\Box(\phi \to \psi)$ и $\Box\phi$

$\Diamond p \equiv \neg\Box\neg p$ соответствует определению $\Box$

Обобщение позволяет добавлять модальные операторы к формулам в выводе

Обобщение сохраняет общезначимость и глобальную, но не локальную истинность

Логика **K**

K — минимальная модальная гильбертовская система

Аксиомы — общезначимы

Правила вывода сохраняют общезначимость

Логика **K**

K — минимальная модальная гильбертовская система

Аксиомы — общезначимы

Правила вывода сохраняют общезначимость

Непротиворечивость: Выводимые формулы — общезначимы

Полнота: Общезначимые формулы — выводимы

Вывод

Пример

Вывод общезначимой формулы $(\Box p \,\&\, \Box q) \to \Box(p \,\&\, q)$:

1. $\vdash p \to (q \to (p \,\&\, q))$ Тавтология

Вывод

Пример

Вывод общезначимой формулы $(\Box p \,\&\, \Box q) \to \Box(p \,\&\, q)$:

1. $\vdash p \to (q \to (p \,\&\, q))$ Тавтология
2. $\vdash \Box(p \to (q \to (p \,\&\, q)))$ Обобщение: 1

Вывод

Пример

Вывод общезначимой формулы $(\Box p \,\&\, \Box q) \to \Box(p \,\&\, q)$:

1. $\vdash p \to (q \to (p \,\&\, q))$ Тавтология
2. $\vdash \Box(p \to (q \to (p \,\&\, q)))$ Обобщение: 1
3. $\vdash \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ Аксиома K

Вывод

Пример

Вывод общезначимой формулы $(\Box p \,\&\, \Box q) \to \Box(p \,\&\, q)$:

1. $\vdash p \to (q \to (p \,\&\, q))$ Тавтология
2. $\vdash \Box(p \to (q \to (p \,\&\, q)))$ Обобщение: 1
3. $\vdash \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ Аксиома K
4. $\vdash \Box(p \to (q \to (p \,\&\, q))) \to (\Box p \to \Box(q \to (p \,\&\, q)))$
   Подстановка: 3

Вывод

Пример

Вывод общезначимой формулы $(\Box p \,\&\, \Box q) \to \Box(p \,\&\, q)$:

1. $\vdash p \to (q \to (p \,\&\, q))$ Тавтология
2. $\vdash \Box(p \to (q \to (p \,\&\, q)))$ Обобщение: 1
3. $\vdash \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ Аксиома K
4. $\vdash \Box(p \to (q \to (p \,\&\, q))) \to (\Box p \to \Box(q \to (p \,\&\, q)))$
   Подстановка: 3
5. $\vdash \Box p \to \Box(q \to (p \,\&\, q))$ Modus ponens: 2, 4

Вывод

Пример

Вывод общезначимой формулы $(\Box p \,\&\, \Box q) \to \Box(p \,\&\, q)$:

1. $\vdash p \to (q \to (p \,\&\, q))$ Тавтология
2. $\vdash \Box(p \to (q \to (p \,\&\, q)))$ Обобщение: 1
3. $\vdash \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ Аксиома K
4. $\vdash \Box(p \to (q \to (p \,\&\, q))) \to (\Box p \to \Box(q \to (p \,\&\, q)))$
   Подстановка: 3
5. $\vdash \Box p \to \Box(q \to (p \,\&\, q))$ Modus ponens: 2, 4
6. $\vdash \Box(q \to (p \,\&\, q)) \to (\Box q \to \Box(p \,\&\, q))$ Подстановка: 3

Вывод

Пример

Вывод общезначимой формулы $(\Box p \,\&\, \Box q) \to \Box(p \,\&\, q)$:

1. $\vdash p \to (q \to (p \,\&\, q))$ Тавтология
2. $\vdash \Box(p \to (q \to (p \,\&\, q)))$ Обобщение: 1
3. $\vdash \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ Аксиома K
4. $\vdash \Box(p \to (q \to (p \,\&\, q))) \to (\Box p \to \Box(q \to (p \,\&\, q)))$ Подстановка: 3
5. $\vdash \Box p \to \Box(q \to (p \,\&\, q))$ Modus ponens: 2, 4
6. $\vdash \Box(q \to (p \,\&\, q)) \to (\Box q \to \Box(p \,\&\, q))$ Подстановка: 3
7. $\vdash \Box p \to (\Box q \to \Box(p \,\&\, q))$ Пропозициональная логика: 5, 6

Вывод

Пример

Вывод общезначимой формулы $(\Box p \,\&\, \Box q) \to \Box(p \,\&\, q)$:

1. $\vdash p \to (q \to (p \,\&\, q))$ Тавтология
2. $\vdash \Box(p \to (q \to (p \,\&\, q)))$ Обобщение: 1
3. $\vdash \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ Аксиома K
4. $\vdash \Box(p \to (q \to (p \,\&\, q))) \to (\Box p \to \Box(q \to (p \,\&\, q)))$ Подстановка: 3
5. $\vdash \Box p \to \Box(q \to (p \,\&\, q))$ Modus ponens: 2, 4
6. $\vdash \Box(q \to (p \,\&\, q)) \to (\Box q \to \Box(p \,\&\, q))$ Подстановка: 3
7. $\vdash \Box p \to (\Box q \to \Box(p \,\&\, q))$ Пропозициональная логика: 5, 6
8. $\vdash (\Box p \,\&\, \Box q) \to \Box(p \,\&\, q)$ Пропозициональная логика: 7

Некорректный вывод

Пример

Некорректный «вывод» необщезначимой формулы $p \to \Box p$:

1. p Предположение
2. $\Box p$ Обобщение: 1
3. $p \to \Box p$ Отмена предположения

Нельзя применять обобщение к предположениям: обобщение не сохраняет истинность.

Другие нормальные логики

Пример (K4)

$$\mathbf{K4} = \mathbf{K} + \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$$

Логика **K4** непротиворечива и полна относительно класса всех транзитивных фреймов

- т.е. содержит в точности все формулы, общезначимые на классе транзитивных фреймов.

Другие нормальные логики

Пример (K4)

$$\mathbf{K4} = \mathbf{K} + \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$$

Логика **K4** непротиворечива и полна относительно класса всех транзитивных фреймов

- т.е. содержит в точности все формулы, общезначимые на классе транзитивных фреймов.

- Любое множество модальных формул Γ можно добавить в качестве аксиом к логике **K**.
- В некоторых случаях полученную систему $\mathbf{K}\Gamma$ можно охарактеризовать в терминах фреймов.

Локальные следствия

Формула ϕ является локальным синтаксическим следствием множества формул Σ в логике **K4** ($\Sigma \vdash_{\mathbf{K4}} \phi$), если существует конечное подмножество $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \subseteq \Sigma$, такое что $\vdash_{\mathbf{K4}} \sigma_1 \& \ldots \& \sigma_n \to \phi$.

Можно доказать, что

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{K4}} \phi \Longleftrightarrow \Sigma \Vdash_{\mathsf{Tran}} \phi$$

Нормальные модальные логики

Определение

Нормальная модальная логика Λ — множество формул, включающее

- все тавтологии,
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$,
- $\Diamond p \equiv \neg\Box\neg p$

и замкнутое относительно правил modus ponens, подстановки и обобщения.

$\mathbf{K}$ — наименьшая нормальная модальная логика.

Нормальные модальные логики

Определение

Нормальная модальная логика Λ — множество формул, включающее

- все тавтологии,
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$,
- $\Diamond p \equiv \neg\Box\neg p$

и замкнутое относительно правил modus ponens, подстановки и обобщения.

$\mathbf{K}$ — наименьшая нормальная модальная логика.

Утверждение

Если F — класс фреймов, то Λ_{F} — нормальная модальная логика.

Примеры

Продемонстрируйте вывод формулы в логике **K**:

- $\Box p \to \Box(p \vee q)$

Примеры

Продемонстрируйте вывод формулы в логике **K**:

- $\Box p \to \Box(p \vee q)$
- $\Box(p \mathbin{\&} q) \to \Box p$

Примеры

Продемонстрируйте вывод формулы в логике $\mathbf{K}$:

- $\Box p \to \Box(p \vee q)$
- $\Box(p \,\&\, q) \to \Box p$
- $(\Box\neg p \vee \Box q) \to \Box(p \to q)$

Зазеркальная логика

Реймонд Смаллиан «Алиса в Стране Смекалки»

1. Если зазеркальный логик убежден в чем-то, то он убежден, что он в этом не убежден.
2. Если некоторое утверждение истинно, то зазеркальный логик убежден, что он убежден в его истинности.
3. Если зазеркальный логик в чем-то убежден, он не может быть убежден в противоположном.
4. Относительно любого утверждения зазеркальный логик убежден либо в его истинности, либо в истинности противоположного утверждения.

Допустим, зазеркальный логик убежден, что Король спит или Королева спит. Следует ли из этого, что он убежден, что Королева спит?

Зазеркальная логика

Решение

Запишем условия, используя модальный оператор B — ‘убежден’:

1. $Bp \to B\neg Bp$
2. $p \to BBp$
3. $Bp \to \neg B\neg p$
4. $Bp \vee B\neg p$

Обозначим за k утверждение о том, что Король спит, а за q — утверждение о том, что Королева спит.

Нужно вывести

$$B(k \vee q) \to Bq$$

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ Аксиома 1

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ Аксиома 1
2. $Bp \to \neg B\neg p$ Аксиома 3

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ — Аксиома 1
2. $Bp \to \neg B\neg p$ — Аксиома 3
3. $B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp$ — Подстановка: 2

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ — Аксиома 1
2. $Bp \to \neg B\neg p$ — Аксиома 3
3. $B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp$ — Подстановка: 2
4. $p \to \neg\neg p$ — Тавтология

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ — Аксиома 1
2. $Bp \to \neg B\neg p$ — Аксиома 3
3. $B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp$ — Подстановка: 2
4. $p \to \neg\neg p$ — Тавтология
5. $B(p \to \neg\neg p)$ — Обобщение: 4

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ — Аксиома 1
2. $Bp \to \neg B\neg p$ — Аксиома 3
3. $B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp$ — Подстановка: 2
4. $p \to \neg\neg p$ — Тавтология
5. $B(p \to \neg\neg p)$ — Обобщение: 4
6. $B(Bp \to \neg\neg Bp)$ — Подстановка: 5

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ Аксиома 1
2. $Bp \to \neg B\neg p$ Аксиома 3
3. $B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp$ Подстановка: 2
4. $p \to \neg\neg p$ Тавтология
5. $B(p \to \neg\neg p)$ Обобщение: 4
6. $B(Bp \to \neg\neg Bp)$ Подстановка: 5
7. $B(p \to q) \to (Bp \to Bq)$ Аксиома K

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ — Аксиома 1
2. $Bp \to \neg B\neg p$ — Аксиома 3
3. $B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp$ — Подстановка: 2
4. $p \to \neg\neg p$ — Тавтология
5. $B(p \to \neg\neg p)$ — Обобщение: 4
6. $B(Bp \to \neg\neg Bp)$ — Подстановка: 5
7. $B(p \to q) \to (Bp \to Bq)$ — Аксиома K
8. $B(Bp \to \neg\neg Bp) \to (BBp \to B\neg\neg Bp)$ — Подстановка: 7

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ — Аксиома 1
2. $Bp \to \neg B\neg p$ — Аксиома 3
3. $B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp$ — Подстановка: 2
4. $p \to \neg\neg p$ — Тавтология
5. $B(p \to \neg\neg p)$ — Обобщение: 4
6. $B(Bp \to \neg\neg Bp)$ — Подстановка: 5
7. $B(p \to q) \to (Bp \to Bq)$ — Аксиома K
8. $B(Bp \to \neg\neg Bp) \to (BBp \to B\neg\neg Bp)$ — Подстановка: 7
9. $BBp \to B\neg\neg Bp$ — Modus ponens: 6, 8

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ — Аксиома 1
2. $Bp \to \neg B\neg p$ — Аксиома 3
3. $B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp$ — Подстановка: 2
4. $p \to \neg\neg p$ — Тавтология
5. $B(p \to \neg\neg p)$ — Обобщение: 4
6. $B(Bp \to \neg\neg Bp)$ — Подстановка: 5
7. $B(p \to q) \to (Bp \to Bq)$ — Аксиома K
8. $B(Bp \to \neg\neg Bp) \to (BBp \to B\neg\neg Bp)$ — Подстановка: 7
9. $BBp \to B\neg\neg Bp$ — Modus ponens: 6, 8
10. $(p \to \neg q) \to ((r \to q) \to (p \to \neg r))$ — Тавтология

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

8. $B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp$ — Подстановка: 2
9. $BBp \to B\neg\neg Bp$ — Modus ponens: 6, 8
10. $(p \to \neg q) \to ((r \to q) \to (p \to \neg r))$ — Тавтология

8. $B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp$ — Подстановка: 2
9. $BBp \to B\neg\neg Bp$ — Modus ponens: 6, 8
10. $(p \to \neg q) \to ((r \to q) \to (p \to \neg r))$ — Тавтология
11. $(B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp) \to$
    $((BBp \to B\neg\neg Bp) \to (B\neg Bp \to \neg BBp))$ — Подстановка: 10

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

8. $B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp$ — Подстановка: 2
9. $BBp \to B\neg\neg Bp$ — Modus ponens: 6, 8
10. $(p \to \neg q) \to ((r \to q) \to (p \to \neg r))$ — Тавтология
11. $(B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp) \to$
    $((BBp \to B\neg\neg Bp) \to (B\neg Bp \to \neg BBp))$ — Подстановка: 10
12. $(BBp \to B\neg\neg Bp) \to (B\neg Bp \to \neg BBp)$ — Modus ponens: 3, 11

8. $B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp$ — Подстановка: 2
9. $BBp \to B\neg\neg Bp$ — Modus ponens: 6, 8
10. $(p \to \neg q) \to ((r \to q) \to (p \to \neg r))$ — Тавтология
11. $(B\neg Bp \to \neg B\neg\neg Bp) \to$ $((BBp \to B\neg\neg Bp) \to (B\neg Bp \to \neg BBp))$ — Подстановка: 10
12. $(BBp \to B\neg\neg Bp) \to (B\neg Bp \to \neg BBp)$ — Modus ponens: 3, 11
13. $B\neg Bp \to \neg BBp$ — Modus ponens: 9, 12

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ — Аксиома 1

13. $B\neg Bp \to \neg BBp$ — Modus ponens: 9, 12

1. $Bp \to B\neg Bp$ — Аксиома 1
13. $B\neg Bp \to \neg BBp$ — Modus ponens: 9, 12
14. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ — Тавтология

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ — Аксиома 1
13. $B\neg Bp \to \neg BBp$ — Modus ponens: 9, 12
14. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ — Тавтология
15. $(Bp \to B\neg Bp) \to$
    $((B\neg Bp \to \neg BBp) \to (Bp \to \neg BBp))$ — Подстановка: 14

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ — Аксиома 1

13. $B\neg Bp \to \neg BBp$ — Modus ponens: 9, 12
14. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ — Тавтология
15. $(Bp \to B\neg Bp) \to$
    $((B\neg Bp \to \neg BBp) \to (Bp \to \neg BBp))$ — Подстановка: 14
16. $(B\neg Bp \to \neg BBp) \to (Bp \to \neg BBp)$ — Modus ponens: 1, 15

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

1. $Bp \to B\neg Bp$ — Аксиома 1

13. $B\neg Bp \to \neg BBp$ — Modus ponens: 9, 12

14. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ — Тавтология

15. $(Bp \to B\neg Bp) \to$
$((B\neg Bp \to \neg BBp) \to (Bp \to \neg BBp))$ — Подстановка: 14

16. $(B\neg Bp \to \neg BBp) \to (Bp \to \neg BBp)$ — Modus ponens: 1, 15

17. $Bp \to \neg BBp$ — Modus ponens: 13, 16

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

10. $(p \to \neg q) \to ((r \to q) \to (p \to \neg r))$ Тавтология
17. $Bp \to \neg BBp$ Modus ponens: 13, 16

10. $(p \to \neg q) \to ((r \to q) \to (p \to \neg r))$ — Тавтология
17. $Bp \to \neg BBp$ — Modus ponens: 13, 16
18. $p \to BBp$ — Аксиома 2

10. $(p \to \neg q) \to ((r \to q) \to (p \to \neg r))$ — Тавтология
17. $Bp \to \neg BBp$ — Modus ponens: 13, 16
18. $p \to BBp$ — Аксиома 2
19. $(Bp \to \neg BBp) \to$
    $((p \to BBp) \to (Bp \to \neg p))$ — Подстановка: 10

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

10. $(p \to \neg q) \to ((r \to q) \to (p \to \neg r))$ — Тавтология
17. $Bp \to \neg BBp$ — Modus ponens: 13, 16
18. $p \to BBp$ — Аксиома 2
19. $(Bp \to \neg BBp) \to$
    $((p \to BBp) \to (Bp \to \neg p))$ — Подстановка: 10
20. $(p \to BBp) \to (Bp \to \neg p)$ — Modus ponens: 17, 19

10. $(p \to \neg q) \to ((r \to q) \to (p \to \neg r))$ — Тавтология
17. $Bp \to \neg BBp$ — Modus ponens: 13, 16
18. $p \to BBp$ — Аксиома 2
19. $(Bp \to \neg BBp) \to$
    $((p \to BBp) \to (Bp \to \neg p))$ — Подстановка: 10
20. $(p \to BBp) \to (Bp \to \neg p)$ — Modus ponens: 17, 19
21. $Bp \to \neg p$ — Modus ponens: 18, 20

Все, в чем убежден зазеркальный логик, ложно.

Зазеркальная логика

Вывод $B(k \vee q) \to Bq$

Схема дальнейшего доказательства

1. $Bp \to \neg p$ — доказано
2. $B(k \vee q) \to \neg(k \vee q)$ — из (1)
3. $B(k \vee q) \to \neg q$ — из (2)
4. $p \to \neg Bp$ — из (1)
5. $Bp \vee B\neg p$ — аксиома
6. $p \to B\neg p$ — из (4) и (5)
7. $\neg q \to Bq$ — из (6)
8. $B(k \vee q) \to Bq$ — из (3) и (7)