9.1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b, такие, что $a^2 + 3b^2$ делится на $a + 3b$.

Ответ: $(1, 1), (3, 1)$ и $(9, 1)$

20 баллов за все ответы с полным обоснованием (см. решение ниже), из которого следует, что других решений нет.

15: ответы с полным обоснованием, но с арифметическими ошибками, не изменяющими ход решения (например, из-за вычислительной ошибки изменился один из ответов).

10: все ответы с обоснованием, в котором имеются изолированные пробелы (например, некоторое несложное по сравнению с задачей утверждение явно сформулировано, но оставлено без доказательства).

5: существенный пробел в обосновании или потеря одного из ответов.

1: приведенные в изложении обоснования утверждения не позволяют полностью восстановить ход рассуждений или потеряно более одного ответа.

Заметим, что $a^2 - 9b^2 = (a + 3b)(a - 3b)$ делится на $a + 3b$, поэтому $12b^2 = (a^2 + 3b^2) - (a^2 - 9b^2)$ и $4a^2 = 3(a^2 + 3b^2) + (a^2 - 9b^2)$ делится на $a + 3b$. Значит, если бы $a + 3b$ делилось на простое число p, отличное от 2 и 3, то $12b^2$ и $4a^2$ делились бы на число p, взаимно простое с 12 и 4, значит a и b тоже делились бы на это число, что противоречило бы их взаимной простоте. Также, если бы $a + 3b$ делилось на 2^3, то $12b^2$ и $4a^2$ делились бы на 2^3, поэтому $3b^2$ и a^2 делились бы на 2, и a и b тоже делились бы на 2, что противоречило бы их взаимной простоте. Аналогично, если бы $a + 3b$ делилось на 3^2, то a и b делились бы 3, что противоречило бы их взаимной простоте.

Таким образом, $a + 3b$ не делится ни на какие простые числа кроме 2 и 3, а также не делится на 2^3 и 3^2, поэтому $a + 3b$ равно 1, 2, 3, 4, 6 или 12. Уравнение $a + 3b = 12$ имеет единственное решение, состоящее из взаимно простых натуральных чисел, $a = 9$, $b = 1$, и оно является решением задачи, так как в этом случае $a^2 + 3b^2 = 84 \vdots 12$. Уравнение $a + 3b = 6$ имеет единственное решение, состоящее из взаимно простых натуральных чисел, $a = 3$, $b = 1$, и оно является решением задачи, так как $a^2 + 3b^2 = 12 \vdots 6$. Аналогично, уравнение $a + 3b = 4$ дает ответ $a = b = 1$, а уравнения $a + 3b = 3$, $a + 3b = 2$ и $a + 3b = 1$ не имеют натуральных решений.

9.2. Найдите максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость 10 острых углов.

Ответ: 191

24 балла за верный ответ с полным обоснованием и примером.

22 баллов за верное доказательство оценки без явных указаний на то, как строить пример.

Пронумеруем углы, и для каждого числа k от 2 до 10 обозначим через b_k число лучей, отрезков и отдельных точек, по которым угол номер k пересекается с углами меньших номеров. Эти лучи, отрезки и точки пересечения разбивают угол номер k не более чем на $b_k + 1$ кусков, причем число кусков равно $b_k + 1$ в отсутствие лучей пересечения. Заметим, что, если углы с номерами меньше k разбивали плоскость на N частей, то каждый из не более чем $b_k + 1$ кусков угла номер k разбивает одну из этих частей на две, поэтому углы с номерами до k включительно разбивают плоскость не более чем на $N + b_k + 1$

частей. Применяя это рассуждение при всех k от 2 до 10, получаем, что все десять углов разбивают плоскость на не более чем $2+b_2+1+b_3+1+\ldots+b_{10}+1=11+b_2+\ldots+b_{10}$ частей.

Любые две угла пересекаются не больше, чем по четырем лучам, отрезкам или отдельным точкам (иначе какие-то две стороны углов пересекались бы по двум лучам, отрезкам или отдельным точкам), поэтому $b_2\leqslant 4$, $b_3\leqslant 8$, $b_4\leqslant 12,\ldots,b_{10}\leqslant 36$, и $11+b_2+b_3+\ldots+b_{10}\leqslant 191$. Эта оценка достигается, если каждые два из десяти углов пересекаются в четырех точках, и ни в какой точке не пересекаются три угла.

Докажем, что это возможно. Например, выберем на полуокружности десять равных попарно непересекающихся дуг, и на каждой из них построим вписанный в окружность угол, биссектриса которого проходит через центр окружности. Так как углы вписаны и опираются на одинаковые дуги, то они равны, поэтому расстояние от центра окружности до их сторон одинаковое, поэтому их стороны касаются одной окружности с тем же центром, что и выбранная вначале. Так как через одну точку проходит не более двух касательных к окружности, то никакие три из построенных углов не пересекаются в одной точке. Так как концы любой стороны любого из углов лежат по разные стороны от любой стороны любого другого угла, то любые две стороны любых двух из этих углов пересекаются.

9.3. Докажите, что все положительные корни многочлена

$$x(x+1)(x+2)(x+3)-1$$

больше $\frac{1}{8}$.

16 баллов за обоснование монотонности и верную оценку значения в точке $1/8$, либо правильное вычисление корней и их сравнение с 0 и $1/8$.

12: то же, что **16**, с арифметической ошибкой, не изменяющей ход вычислений, или с утверждением о монотонности без его аккуратного обоснования.

8: доказательство без арифметических ошибок, неявно ссылающееся на монотонность, без ее аккуратного обоснования.

4: доказательство с недочетами, отличными от перечисленных для **10** (например, не сформулировано утверждение о монотонности).

Заметим, что функция $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)-1$ возрастает при положительных x: если $0<x_1<x_2$, то, перемножая неравенства $x_1+k<x_2+k$ по всем k от 0 до 3, получим $x_1(x_1+1)(x_1+2)(x_1+3)-1<x_2(x_2+1)(x_2+2)(x_2+3)-1$. Поэтому при положительном $x<\frac{1}{8}$ получим $f(x)<f(\frac{1}{8})=\frac{(8+1)\cdot(2\cdot8+1)\cdot(3\cdot8+1)}{8^4}-1=\frac{3825}{4096}-1<0$, поэтому никакое положительное число $x<\frac{1}{8}$ не является корнем f.

9.4. Каждая из четырех окружностей проходит через три вершины заданного параллелограмма с углом 45° и площадью 2. Найдите площадь четырехугольника, образованного центрами окружностей.

Ответ: 2

16 баллов за правильный ответ с полностью обоснованным решением.

12: то же, что **16**, при наличии неточности в обосновании или арифметической ошибки, не влияющей на ход решения.

8: то же, что **16**, при наличии неточности в обосновании и арифметической ошибки, не влияющей на ход решения.

4: решение с существенными пробелами в обосновании.

Так как центры окружностей лежат на серединных перпендикулярах к соответствующим сторонам параллелограмма, нужно найти площадь четырехугольника, образованного серединными перпендикулярами. Докажем, что этот четырехугольник равен исходному параллелограмму. Угол между серединными перпендикулярами является дополнительным к углу между соответствующими им сторонами, поэтому углы четырехугольника, образованного серединными перпендикулярами, дополнительны к углам $45°$ и $135°$ данного параллелограмма, то есть также равны $180° - 45° = 135°$ и $180° - 135° = 45°$ (в частности, искомый четырехугольник также является параллелограммом). Рассмотрим прямоугольный треугольник, образованный отрезком, соединяющим середины сторон AB и CD данного параллелограмма, серединным перпендикуляром к AB и прямой CD. По построению, катеты этого треугольника равны высотам параллелограмма $ABCD$ и искомого параллелограмма. Так как по условию острый угол этого треугольника равен $45°$, то катеты равны. Таким образом, углы и высоты параллелограмма $ABCD$ равны углам и высотам искомого параллелограмма, поэтому последний равен $ABCD$, в частности, его площадь также равна 2.

9.5. При каких значениях b, $b \neq 3$, объединение парабол $y = x^2$ и $y = (b-3)x^2 + bx + 2b - 4$ имеет ось или центр симметрии?

Ответ: 0, 2 или 4

20 баллов за полный разбор всех случаев и обоснование того, что других решений нет.

16: из правильных соображений получены все 3 ответа, но не доказано, что при $b = 2$ в самом деле есть центр симметрии, и не доказано, что наклонных осей симметрии нет.

10: то же, что **16**, но потерян один ответ.

5: дан только один ответ с обоснованием, что он подходит, или все ответы без обоснования.

Заметим сначала, что

(1) кривая, симметричная графику функции $y = x^2$ относительно вертикальной прямой $x = c$, является графиком квадратичной функции $y = (2c - x)^2 = x^2 - 4cx + 4c^2$;

(2) кривая, симметричная графику функции $y = x^2$ относительно горизонтальной прямой $y = c$, является графиком квадратичной функции $y = -x^2 + 2c$;

(3) кривая, симметричная графику функции $y = x^2$ относительно точки (c, d), задается уравнением $2d - y = (2c - x)^2$, т.е. является графиком квадратичной функции $y = -x^2 + 4cx - 4c^2 + 2d$;

(4) кривая, симметричная графику функции $y = x^2$ относительно наклонной прямой, не является графиком квадратичной функции. В самом деле, если графики P и P_1 двух квадратичных функций симметричны друг другу относительно прямой L, то вертикальные оси парабол P и P_1 также симметричны друг другу относительно L.

Но две вертикальные прямые могут быть симметричны друг другу относительно прямой L лишь в том случае, когда L либо вертикальна, либо горизонтальна.

Обозначим теперь через P график функции $y = x^2$, а через P_1 — график функции $y = (b-3)x^2 + bx + 2b - 4$. Объединение парабол P и P_1 не может содержать параболу, отличную от P и P_1. Поэтому из утверждений (1)–(4) следует, что если объединение P и P_1 имеет ось или центр симметрии, то возможны лишь следующие случаи:

(a) P и P_1 имеют общую ось симметрии;

(b) P и P_1 симметричны друг другу относительно некоторой вертикальной (случай (b1)) либо горизонтальной (случай (b2)) оси;

(c) P и P_1 симметричны друг другу относительно некоторой точки.

Случай (a) реализуется тогда и только тогда, когда функция $y = (b-3)x^2 + bx + 2b - 4$ четна, что равносильно условию $b = 0$.

Из утверждения (1) следует, что случай (b1) реализуется тогда и только тогда, когда одновременно $b - 3 = 1$, $b = -4c$ и $2b - 4 = 4c^2$. Это равносильно тому, что $b = 4$ и $c = -1$.

Из утверждения (2) следует, что если случай (b2) реализуется, то должно быть одновременно $b - 3 = -1$ и $b = 0$, что невозможно.

Из утверждения (3) следует, что случай (c) реализуется тогда и только тогда, когда одновременно $b - 3 = -1$, $b = 4c$ и $2b - 4 = -4c^2 + 2d$. Это равносильно тому, что $b = 2$ и $c = d = 1/2$.

9.6. На плоскости отмечены восемь точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Может ли быть так, что более одной пятой всех выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках – параллелограммы?

Ответ: Да. Например, точки, изображенные на рисунке.

24, 20, 12, 6 или **2** балла соответственно в зависимости от того, сколько из следующих пяти достижений сделано в решении.

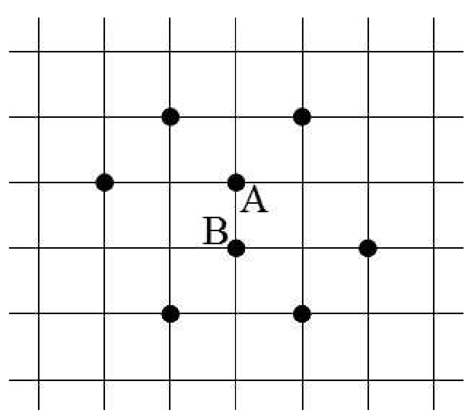
- правильный ответ с правильным рисунком примера.

- на рисунке указаны 12 параллелограммов.

- правильно подсчитано число четверок точек.

- замечено, что некоторые из них не соответствуют выпуклым четырехуголникам.

- правильно оценено число выпуклых четырехугольников.



Четыре точки из восьми нарисованных можно выбрать $C_8^4 = 70$ способами. Подсчитаем, сколько из этих четверок не являются вершинами выпуклого многоугольника – это происходит в случае, если одна из четырех точек лежит внутри треугольника, образованного остальными тремя. Несложно подсчитать, что существует ровно 11 троек точек, образующих треугольники, в которых лежит точка A (и столько же троек точек, образующих треугольники, в которых лежит точка B). Поэтому $11 + 11 = 22$ из 70 четверок точек не являются вершинами выпуклых четырехугольников, а оставшиеся $70 - 22 = 48$ являются.

Подсчитаем, сколько среди них параллелограммов. Среди отрезков, соединяющих нарисованные точки, несложно выбрать три группы по четыре отрезка и шесть групп по два отрезка, такие что отрезки в каждой группе попарно равны и параллельны. Поэтому среди отрезков, соединяющих нарисованные точки, есть $3 \cdot C_4^2 + 6 = 24$ пары равных и параллельных отрезков. Каждая из таких пар образует параллелограмм, а каждый параллелограмм содержит две такие пары, поэтому параллелограммов $24/2 = 12$, то есть четверть от числа выпуклых четырехугольников.