Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Физический факультет

Афанасьев В. Н.

Теория оптимального управления непрерывными динамическими системами

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Москва
Физический факультет, МГУ
2011

УДК 51.7 У т в е р ж д е н о
ББК 22.18 *РИС Ученого совета физического факультета*
А 94 *Московского государственного университета*

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук *В.М. Хаметов (МИЭМ)*
Доктор технических наук *В.Ф. Кротов (ИПУ РАН)*,

Афанасьев В.Н.
А 94 Оптимальные системы управления. Аналитическое конструирование: – М.: Изд-во физического факультета МГУ.
ISBN 5-94506-090-9

Книга посвящена систематическому изложению методов математического конструировании непрерывных систем управления. Термин «аналитическое конструирование», подразумевающий синтез оптимальных систем управления, основанный на минимизации функционала качества, был введен советским ученым Александром Михайловичем Летовым (1911-1974). Метод А.М. Летова разрабатывался вначале на основе применения классического вариационного исчисления. Однако в настоящее время термином «аналитическое конструирование» можно объединить все методы синтеза систем как детерминированных, так и стохастических с полной информацией о параметрах, состоянии и возмущениях, т.е. все методы, позволяющие применять аналитические методы для исследования разнообразных задач оптимального управления и оценивания.

Данное учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Физико-математические методы управления», однако изучению изложенного материала будет полезно студентам и аспирантам других факультетов, специализирующихся в области управления разнообразными системами.

Подготовлено на кафедре физико-математических методов управления.

ISBN 5-209-01680-3 ББК 22.18

Введение

Системы управления, которые будут рассматриваться в данной книге, относятся к классу динамических конечномерных непрерывных систем.

Сформулируем ряд определений, касающихся этого класса систем.

Определение В.1. Динамическая система Σ – понятие, состоящее из множеств T, X, Y и U, переменной x(t) и функции C, где

T - область определений системы,

X- пространство состояний системы,

Y - множество значений выходов системы,

U - пространство входов системы,

x(t) – состояние системы,

C – непрерывная функция.

Пусть t_0, t - элементы из T, причем $t_0 \le t$. Символ $u(t_0, t)$ будем использовать для обозначения сегмента (отрезка) u из U на множестве $[t_0, t]$. Если t - элемент T, u - элемент U и *x(t)* – элемент X, то $C(x(t), u(t), t)$ есть определенный элемент, который будем обозначать через $y(t)$, т.е.

$$y(t) = C(x(t), u(t), t), \tag{B.1}$$

называть выходом системы и $(u(t), y(t))$ образуют пару «вход - выход» системы.

Пусть имеется непрерывная относительно своих аргументов функция $\Phi(x(t), u(t), t)$ такая, что

$$x(t) = \Phi(x(t), u(t), t). \tag{B.2}$$

Функцию $\Phi(x(t), u(t), t)$ называют переходной функцией.

Уравнения (В.1) и (В.2) называют уравнениями выхода и состояния системы соответственно.

Определение В.2. Динамическую систему Σ называют конечномерной:

1. если пространство состояний X системы Σ является евклидовым пространством R^n, т.е. $X \in R^n$;
2. если множество значений выхода Y есть евклидово пространство R^m, $m \le n$, т.е. $Y \in R^m$.

Отсюда следует, что непрерывная функция C преобразует из X x U x T в евклидово пространство R^m. Число n, являющееся размерностью пространства X, называют порядком системы, а число m – размерностью выхода системы.

Определение В.3. Говорят, что система Σ непрерывна (по времени), если множество T представляет собой открытый интервал (T_1, T_2), который может быть равным всему R. Интервал (T_1, T_2) называют областью существования или интервалом определения системы.

Определение В.4. Динамическую систему Σ называют дифференциальной, если уравнения состояния и выхода системы имеют вид

$x(t) = \Phi(x(t), u(t), t)$,

где $\Phi(x(t), u(t), t)$ есть решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad \text{(B.3)}$$

с начальными условиями $x(t_0)$ и

$y(t) = C(x(t), u\{t\}, t)$.

Здесь $x \in R^n$, $u \in R^r$, $y \in R^m$.

Будем полагать, что функция $f(x(t), u(t), t)$ удовлетворяет условиям Липшица по первому аргументу, т.е. существует постоянная $L>0$ такая, что выполняются следующие условия:

$$|f(x(t), u(t), t) - f(z(t), v(t), t)| \le L(|x(t) - z(t)| + |u(t) - v(t)|),$$

$$|f_x(x(t), u(t), t) - f_z(z(t), u(t), t)| \le L(|x(t) - z(t)| + |u(t) - v(t)|).$$

Здесь $f_x(x(t), u(t), t)$ и $f_z(z(t), v(t), t)$ - производные функций $f(x(t), u(t), t)$ и $f(z(t), v(t), t)$ по $x(t)$ и $z(t)$ соответственно.

При этих условиях справедливы теоремы о локальном существовании, единственности и непрерывной зависимости на конечном интервале решения $x(x_0, t_0, t)$ уравнения (B.3) от начальных условий $x_0 \in R^n$ и $t_0 \in (T_1, T_2)$.

Определение B.5. Две динамические системы Σ_1 и Σ_2 называют эквивалентными, если существует невырожденная матрица P размерностью *nxn* из постоянных элементов, такая, что

$P^{-1}x(t) = z(t)$,

где $x(t)$ и $z(t)$ –переменные состояний систем Σ_1 и Σ_2 соответственно.

Понятие эквивалентности означает, что если рассматривать динамическую систему Σ_2, описываемую уравнениями вида

$$\frac{d}{dt}z(t) = P^{-1}f(Pz(t), u(t), t),$$

$$y(t) = C(Pz(t), u(t), t),$$

то траектории и выход системы будут теми же самыми, что и для системы Σ_1.

Отметим, что матрица P в общем случае может зависеть от *t*. Однако при каждом *t* эта матрица должна быть обратима.

Пусть S - группа преобразований. Напомним, что непустое множество S называют группой, если в S определена операция, ставившая в соответствие каждой паре элементов P_1, P_2, P_3 из S некоторый элемент P_1P_2 из S, так что выполнены следующие аксиомы:

1. для всех трех элементов $P_1, P_2, P_3 \in S$ верно равенство $(P_1 P_2) P_3 = P_1(P_2 P_3)$;
2. существует такой элемент $I \in S$, что $IP = PI$ для любого $P \in S$;
3. всякий элемент $P \in S$ имеет обратный $P^{-1} \in S$, для которого $PP^{-1} = P^{-1}P = I$.

Пусть заданы две системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t),$$
$$\frac{d}{dt}z(t) = B(t)z(t).$$

С группой S свяжем группу нестационарных преобразований

$$x(t) = P(t)z(t),\ P \in S.$$

Нетрудно видеть, что отображение P(t) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}P(t) = A(t)P(t) - P(t)B(t).$$

В теории управления важную роль играют некоторые структурные свойства систем. В частности, такие, как наблюдаемость, управляемость, устойчивость.

Пусть задана динамическая система (В.3)

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), u(t), t), \qquad (В.4)$$
$$y(t) = C(x(t), u(t), t).$$

Определение В.6. Наблюдаемость. Говорят, что состояние $x(t_0)$ наблюдаемо, если для заданного управления u существует время $t_1 \ge t_0$ такое, что знания $u(t_0, t_1)$ и выхода $y(t_0, t_1) = C(x(x_0, t_0, t_1), u(t_0, t_1), t_1)$ достаточно для определения $x(t_0)$. Отметим, что время t_1 может зависеть от u. Если каждое состояние $x(t_0)$ наблюдаемо в момент t_0, то говорят, что система наблюдаема при t_0. Если же каждое состояние $x(t)$ наблюдаемо в любой момент времени $t \in (T_1, T_2)$, то говорят, что система полностью наблюдаема.

Определение В.7. Управляемость. Если состояние $x_1 = 0$ достижимо из $x(t_0)$, т.е. существует такое $u(t) \in U$, где $t \in (T_1, T_2)$, которое переводит систему из состояния $x(t_0)$ в x_1, то говорят, что состояние $x(t_0)$ управляемо в момент t_0. Если каждое состояние $x(t)$ управляемо в момент $t \in (T_1, T_2)$, то система полностью управляема.

Определение В.8. Достижимость. Состояние x_1 называют достижимым, или доступным из исходного состояния x_0 в момент t_0 по отношению к множеству U, если существует элемент $u_1 \in U$ такой, что

$$\Phi(x_0, u_1(t_0, t_1), t_1) = x_1 \qquad (В.5)$$

для конечного $t_1 \ge t_0$.

Если через $A(x_0, u(t_0, t_1), t_1)$ обозначить множество из R^n, которое состоит из всех значений x_1, достижимых из исходного состояния x_0 в момент t_0 по отношению к множеству U в момент t_1, т.е.

$$A(x_0, u(t_0, t_1), t_1) = [x_1 : \text{\textit{существует}}\ u_1 \in U\ \text{\textit{такое,}}$$
$$\text{\textit{что}}\ \Phi(x_0, u(t_0, t_1), t_1)],$$

то $A(x_0,u(t_0,t),t_1)$ называют областью достижимости состояний в момент t_1.

Следует отметить, что, во-первых, из фактов наличия свойств управляемости, наблюдаемости и достижимости не вытекают какие-нибудь рекомендации по управлению состоянием или по наблюдению за состоянием системы. Во-вторых, наличие этих свойств является необходимым и достаточным для существования принципиальной возможности привести систему в любое состояние и наблюдать ее в любом состоянии. В-третьих, в общем случае наличие свойств (В.6), (В.7), (В.8) у системы может оказаться вообще ни как не связано с решением задач управления и наблюдения. Другими словами, выполнение указанных свойств у конкретной системы определяет лишь ее «потенциальные возможности».

При рассмотрении различных практических задач управления существенную роль играет теория устойчивости. Сам термин «устойчивость» имеет много значений. Приведем определение понятия устойчивости по А.М. Ляпунову.

Пусть непрерывная динамическая система описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t),t),\ x(t_0) = x_0. \qquad \text{(В.6)}$$

Обозначим через S_H шар радиуса Н с центром в начале координат в евклидовом пространстве R^n с нормой $\|x\| = \{x^T x\}^{1/2}$ (здесь Т – знак транспонирования). Область определения (существования), как и ранее, $T \in (T_1,T_2)$. Здесь T_1 есть $-\infty$ или заданное число, $T_2 = +\infty$.

Будем считать, что функция $f(x(t),t): R^n xT$ непрерывна и является липшицевой по аргументу x, т.е.

$$|f(x(t),t) - f(z(t),t)| \le L(|x(t) - z(t)|),\ L = const.$$

В теории устойчивости А.М. Ляпунова (1857 - 1918) исследуется на устойчивость одно решение. Пусть $z(z_0,t_{0,}t)$ – решение задачи (В.6), продолжимо до бесконечности, т.е. $z(t)$ существует на интервале $[t_0,+\infty)$ причем $z(t) \in S_H$ при $t_0 \le t < \infty$.

<u>Определение В.9.1.</u> Решение $x(x_0,t_{0,}t)$ задачи (В.6) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < H)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon,t_0)$>0 такое, что все решения $x(x_0,t_0,t)$ задачи (В.6) бесконечно продолжимы вправо, как только $|x(t_0) - z(t_0)| \le \delta(\varepsilon,t_0)$ и для таких решений справедливо неравенство

$$|x(x_0,t_0,t) - z(z_0,t_0,t)| \le \varepsilon,\ t_0 \le t < \infty,$$

т.е. ε - трубка решений *z(t)* содержит все решения *x(t)* задачи (В.6), которые в начальный момент t_0 отстояли от $z(t_0)$ не более чем на $\delta = \delta(\varepsilon,t_0)$.

Решения (В.6) *z(t)* и *x(t)* называют невозмущенным и возмущенным соответственно. Следует отметить, что рассматривается только одно устойчивое решение, а именно *z(t)*, а не все решения уравнения (В.6).

<u>Определение В.9.2.</u> Решение $x(t) \equiv 0$ называется равномерно устойчивым по $t_0 \in T$, если для любого ε $(0 < \varepsilon < H)$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от t_0, что $|x(x_0, t_0, t)| \le \varepsilon,\ t \ge t_0$, как только $|x_0| \le \delta(\varepsilon)$.

<u>Определение В.9.3.</u> Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (В.6) называется асимптотически устойчивым, если:

1. оно устойчиво по Ляпунову;
2. для всякого $t_0 \in T$ существует $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ такое, что $x(x_0, t_0, t) \to 0,\ t \to \infty$ при $|x(t_0)| \le \Delta(t_0)$.

Множество $\Omega(t_0) \subset R^n$ всех тех начальных условий $x(t_0)$, для которых $\lim_{t\to\infty} x(x_0, t_0, t) = 0$, называют областью притяжения тривиального решения в начальный момент t_0. Если $\Omega(t_0) = R^n$, то говорят, что решение $x(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво в целом (глобально асимптотически устойчиво).

Если выполняется только условие 2 из определения В.9.3, то говорят, что тривиальное решение является притягивающим (аттрактором). Из притяжения, вообще говоря, не следует устойчивость. Кроме случая скалярного обыкновенного дифференциального уравнения. Поэтому примеры, когда имеется притяжение, но нет устойчивости, можно построить только при $n \ge 2$ или для уравнений более общих, чем обыкновенные дифференциальные.

<u>Определение В.9.4.</u> Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (В.6) называется равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и для любого числа $\gamma > 0$ найдутся числа Δ_1 $(0 < \Delta_1 < H)$ и $T(\gamma)$ такие, что $|x(x_0, t_0, t)| \le \gamma$ при $t \ge t_0 + T(\gamma)$, $|x(t_0)| \le \Delta_1$.

В общем случае требования равномерной асимптотической устойчивости сильнее требований асимптотической устойчивости.

<u>Определение В.9.5.</u> Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (В.6) называется экспоненциально устойчивым, если всякое решение $x(t, t_0, x_0)$ этого уравнения удовлетворяет оценке

$$|x(x_0, t_0, t)| \le B|x(t_0)| \exp\{-a(t - t_0)\},\ B > 0,\ t \ge t_0,$$

$$|x(t_0)| \le H_1 < H.$$

Отметим, что для линейных дифференциальных уравнений экспоненциальная устойчивость эквивалентна равномерной асимптотической устойчивости.

Рассмотрим, наряду с системой (В.6) , систему с возмущением

$$\frac{d}{dt} z(t) = f(z, t) + \varphi(z, t),\ z(t_0) = z_0. \tag{В.7}$$

<u>Определение В.9.6.</u> Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (В.6) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для любого

$\varepsilon > 0$ и $t_0 \in T$ существует $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что при $|\varphi(z,t)| \le \delta$ и $|z(t_0)| \le \delta$ все решения уравнения (В.7) удовлетворяют условию $|z(t)| \le \varepsilon$.

Кроме приведенных определений устойчивости используются также и другие, как устойчивость по части переменных, на ограниченном интервале времени, абсолютная устойчивость, орбитальная устойчивость и другие.

Универсальным методом исследования устойчивости различных классов систем является второй метод Ляпунова.

Пусть $V(x,t)$ (функция Ляпунова) непрерывно дифференцируема по обоим аргументам $V(x,t): S_H xT \to R^n$ и удовлетворяет условию $V(0,t) = 0$.
Тогда

$$\frac{d}{dt}V(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)} f(x,t). \qquad \text{(В.8)}$$

Приведем формулировки основных теорем.

<u>Теорема 9. 1. (Первая теорема Ляпунова)</u>

Пусть существует функция Ляпунова $V(x,t)$ такая, что

$$\omega_1\{|x|\} \le V(x,t), \quad \frac{d}{dt}V(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)} f(x,t) \le 0.$$

Тогда тривиальное решение уравнения (В.6) устойчиво по Ляпунову.
Здесь $\omega_1\{|x|\}$ - скалярная неубывающая функция такая, что $\omega_1(0) = 0,\ \omega_1\{|x|\} > 0$ при $x \ne 0$.

Таким образом, функция $V(x,t)$ должна быть положительно определенной (везде возможно кроме *x*=0) ограниченной функцией состояния уравнения (В.6).

<u>Теорема 9.2. (К.П. Персидский)</u>

Если в дополнение к условиям теоремы 8.1 справедливо неравенство

$$V(x,t) \le w_2\{|x|\},$$

то тривиальное решение уравнения (В.6) равномерно устойчиво по начальному моменту t_0.

<u>Теорема 9. 3. (Вторая теорема Ляпунова)</u>

Пусть существует функция Ляпунова $V(x,t)$ такая, что

$$\omega_1\{|x|\} \le V(x,t) \le w_2\{|x|\}, \quad \frac{d}{dt}V(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)} f(x,t) \le -w_3\{|x|\}.$$

Тогда тривиальное решение уравнения (В.6) равномерно асимптотически устойчиво.

Понятия «наблюдаемость», «управляемость», «устойчивость» являются структурными (внутренними) свойствами системы, т.е. сохраняются при всех эквивалентных преобразованиях системы.

Существенным элементом формулировки задачи управления, наряду с построением математической модели объекта управления (В.4) и определения ограничений на фазовые траектории *x(t)* и управляющие воздействия *u(t),* является формирование цели управления, а также построения функционала, «измеряющего» эффективность управляющих воздействий.

Предположим, что векторы *x(t)* и *u(t)* могут изменяться в некоторых допустимых областях:

$$x(t) \in X,\ u(t) \in U. \qquad \text{(B.9)}$$

Рассмотрим типичные случаи задания ограничений на управляющие воздействия.

Предположим, что для каждого $t \in (T_1, T_2)$ задано подмножество $U_t \in R^r$ (обычно замкнутое, ограниченное и выпуклое или все R^r). Обозначим набор всех подмножеств U_t через Ξ, т.е.

$$\Xi = \{U_t : t \in (T_1, T_2)\}.$$

<u>Определение В.10.</u> U_t называют областью ограничений при *t* и Ξ множеством ограничений. Если *U* – множество всех ограниченных кусочнонепрерывных функций *u(t)* из *(T₁,T₂),* то говорят, что *U* есть множество или область управлений, удовлетворяющих ограничениям Ξ.

Пример В.10.1.

Пусть $U = \{[e_1u_1 + e_2u_2 + \ldots + e_ru_r] : |u_i| \le M_i\}$,

где M_i - заданные постоянные и $e_1, e_2, \ldots e_r$ - натуральный базис в R^r. При $M_1 = M_2 = \ldots = M_r = 1$ ограничивающим множеством является гиперкуб.

Пример В.10.2.

Пример ограничений, зависящих от времени:

$$U_i = \begin{matrix} u : |u_j| \le M_j,\ j = 1,2,\ldots,r \ \text{для}\ t \in (T_1, T), \\ u : |u_j| \le L_j,\ j = 1,2,\ldots,r \ \text{для}\ t \in (T, T_2). \end{matrix}$$

Здесь $T \in (T_1, T_2)$.

Пример В.10.3.

Ограничения на управление имеют вид:

$$U_i = \{u : \|u\| \le M\},$$

где *M* – заданное число, $\|u\|$ - евклидова норма. Ограничивающим множеством является гиперкуб.

Следует отметить, что в ряде случаев можно перейти к открытой области изменений управляющих воздействий. Эта операция состоит в замене вектора $u(t) \in U$ функцией другого вектора $v(t)$, не ограниченного. Геометрически эта операция отображает область U во все R^r.

Сформулируем задачу управления объектом

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), u\{t\}, t),\ x(t_0) = x_0. \qquad \text{(B.10)}$$

Пусть $L(x,u,t)$ – непрерывная действительная функция, заданная на $R^n \times R^r \times (T_1, T\ )$ и $K(x(T),T)$ – действительная функция на $R^n \times T$, где $T \in (T_1, T_2)$.

Будем считать подмножество $S \in R^n \times (T_1, T)$ - множество целей – заданным.

Элементами множества целей являются пары $(x(T),T)$, где $x(T) \in X,\ T \in (T_1, T_2),\ T > t_0$.

Сделаем следующие предположения:

1. Будем считать, что функции

$$f_i(x,u,t), \frac{\partial f_i(x,u,t)}{\partial x(t)}, \frac{\partial f_i(x,u,t)}{\partial u(t)}, \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial t}, i = 1,2,...,n, \tag{B.11}$$

а также функции

$$L(x,u,t), \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)}, \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}, \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial t} \tag{B.12}$$

непрерывны на $R^n \times R^r \times (T_1, T_2)$.

Отметим, что для ряда задач не требуется существования непрерывных частных производных *f(x,u,t)* и *L(x,u,t)* по *u(t)*.

2. Будем считать, что $S \in R^n \times (T_1, T_2)$ относится к одному из видов:

2.1) $S \in R^n \times T$, где $T \in (T_1, T_2)$;

2.2) $S \in \{x_1\} \times T$, где $T \in (T_1, T_2)$, x_1 - фиксированный элемент из R^n;

2.3) $S \in S_1 \times T$, где $S_1 \in R^q$, $1 \le q \le n-1$ - гладкое многообразие из R^n, $T \in (T_1, T_2)$;

2.4) $S = [g(t) : t \in (T_1, T_2)\}$, где *g(t)* – непрерывно дифференцируемая функция из (T_1, T_2) в R^n, т.е. *g(t)* – кривая в R^n с непрерывно вращающейся касательной;

2.5) *S* – гладкое *q+1* мерное многообразие функций $1 \le q \le n-1$ в $R^n \times (T_1, T_2)$, непрерывно дифференцируемых по *t.* Иначе говоря, имеется *n-q* функций $g_1(x,t), g_2(x,t),..., g_{n-q}(x,t)$ на $R^n \times (T_1, T_2)$ таких, что:

а) $S \in [(x,t) : \{g_1(x,t), g_2(x,t),..., g_{n-q}(x,t)\} = 0]$;

б) функции $g_i(x,t), \dfrac{\partial g\ \ (x,t)}{\partial x(t)}, \dfrac{\partial g_i(x,t)}{\partial t}$ непрерывны на $R^n \times (T_1, T_2)$ для *i=1,2,…,n-q;*

в) векторы $\dfrac{\partial g\ \ (x,t)}{\partial x(t)}$ *i=1,2,…,n-q* линейно независимы в каждой точке *S*.

3. Если $K(x(t),t)$ (функция конечной стоимости) - заданная действительная функция, определенная на $R^n \times (T_1, T_2)$, то будем считать, что:

3.1) если S имеет вид 2.1 или 2.3, то *K(x(T),T)= K(x(T))* и функции $K(x(T)), \dfrac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)}, \dfrac{\partial^2 K(x(T))}{\partial x^2(T)}$ непрерывны;

3.2) если S имеет вид 2.2, то $K(x(T),T) \equiv 0$;

3.3) если S имеет вид 2.4, то $K(x(T),T)= K(T)$ и функции

$K(T), \frac{\partial K(T)}{\partial T}, \frac{\partial^2 K(T)}{\partial T^2}$ непрерывны;

3.4) если S имеет вид 2.5, то функции

$$K(x(T),T)), \frac{\partial K(x(T),T)}{\partial x(T)}, \frac{\partial K^2(x(T),T)}{\partial x^2(T)},$$

$$\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T}, \frac{\partial K^2(x(T),T)}{\partial T^2}, \frac{\partial^2 K(x(T),T)}{\partial x(T)\partial T}$$

непрерывны.

Образуем функционал, оценивающий эффективность управления:

$$J(x,u) = K(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt \,. \qquad \text{(В.13)}$$

Этот функционал обычно называют функционалом Больца. Время окончания переходного процесса *T* может быть задано и может быть не задано. При незаданном верхнем пределе интегрирования функционала (В.13) время окончания переходного процесса *T* является дополнительным параметром, который следует определить в дополнение к управляющей функции *u(t)*.

При *L(x,u,t)=0* функционал (В.13) принимает вид:

$$J(x,u) = K(x(T),T)\,, \qquad \text{(В.14)}$$

и задачу выбора управляющей функции *u(t)*, минимизирующей его на объекте (В.10) при предположениях 1,2,3, называют задачей Майера.

Задачу минимизации функционала (В.13) при *K(x(T),T)=0* и $T = \infty$ называют обычно задачей Лагранжа.

Конкретизация выражений (В.10), условий (В.9), предположений 1,2,3 и вида функционала (В.13) порождает различные задачи математического конструирования систем управления.

<u>Определение В.11.</u> Задачей оптимального управления по отношению к множеству *S*, функционалу $J(x_0,t_0,u)$, множеству допустимых управлений U и начальному состоянию x_0 в момент t_0 является отыскание $u \in U$, минимизирующего функционал $J(u)$ на объекте (В.10).

Типы задач можно условно разделить на три группы. В каждой группе определяющей характеристикой могут быть способы задания функционала качества, ограничений вдоль траектории, краевые условия.

В заключение данного раздела отметим, что существование оптимального управления не является необходимым. Может оказаться, что область допустимых управлений *U* не содержит управлений, переводящих x_0 в *S*. Может также оказаться, что *U* содержит несколько оптимальных управлений.

Глава 1. Необходимые условия в задачах конструирования программных движений

§ 1.1. Постановка задачи

В настоящей главе будут рассматриваться задачи конструирования управлений, доставляющих минимум функционалу

$$J(x,u) = K(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt \qquad (1.1)$$

на объекте

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t),u(t),t), \; x(t_0) = x_0, \qquad (1.2)$$
$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^r$$

при отсутствии ограничений на управляющие воздействия, т.е. область управляющих воздействий открытая. Элементы функционала (1.1) $K(x(T)T)$ и $L(x,u,t)$ и объект (1.2) отвечают предположениям, сделанным во Введении.

§ 1.2. Задача со свободным правым концом и заданным временем окончания переходного процесса

Множество целей в данной задаче задается в виде 2.1 (Введение), т.е. $S \in R^n xT$, где $T \in (T_1, T_2)$. При этом $K(x(T),T) = K(x(T))$ и выполняется предположение 3.1 (Введение) относительно непрерывности этой функции штрафа, существовании первой и второй производных от нее по аргументу $x(t)$ и их непрерывности.

Функционал для рассматриваемой задачи принимает вид

$$J(x,u) = K(x(T)) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt. \qquad (1.3)$$

Образуем вспомогательный функционал $\overline{J}(x,u,t)$ прибавлением к выражению (1.3) системы дифференциальных уравнений (1.2), описывающих объект управления, с некоторым множителем (вспомогательной переменной) $\lambda(t)$:

$$\overline{J}(x,u) = K(x(T)) +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} \{L(x,u,t) + \lambda^T(t)[f(x,u,t) - \frac{d}{dt}x(t)]\}dt. \qquad (1.4)$$

Введем скалярную функцию $H(x,u,\lambda,t)$ (Гамильтониан):

$$H(x,u,\lambda,t) = L(x.u.t) + \lambda^T(t) f(x,u,t). \qquad (1.5)$$

Интегрируя по частям последнее слагаемое в правой части выражения (1.4) и учитывая (1.5), получим:

$$\overline{J}(x,u) = K(x(T)) + \lambda^T(t_0)x(t_0) - \lambda^T(T)x(T) +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} \{H(x,u,\lambda,t) + \left\{\frac{d}{dt}\lambda^T(t)\right\}x(t)\}dt. \qquad (1.6)$$

Найдем вариацию критерия качества $\overline{J}(x,u,t)$, вызванную вариациями по управлению *u(t)*:

$$\nabla\overline{J}(x,u) = \left\{ \frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)} - \lambda^T(T) \right\} \nabla x(T) + \lambda^T(t_0)\nabla x(t_0) +$$
$$+\int_{t_0}^{T} \left\{ \left[\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)} + \frac{d}{dt}\lambda^T(t) \right] \nabla x(t) + \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} \nabla u(t) \right\} dt\,. \tag{1.7}$$

Чтобы не определять непосредственно вариации $\nabla x(T)$, вызванные вариациями $\nabla u(t)$, и исключить влияние вариаций $\nabla x(t)$ и $\nabla x(T)$ на вариацию критерия $\nabla\overline{J}(x,u,t)$, выберем множитель $\lambda(t)$ таким образом, чтобы сомножители при $\nabla x(t)$ и $\nabla x(T)$ обращались в нуль. Тогда переменная $\lambda(t)$ будет определяться решением дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{ \frac{\partial H(x.u.\lambda,t)}{\partial x(t)} \right\}^T =$$
$$= -\left\{ \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)} \right\}^T \lambda(t) - \left\{ \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)} \right\}^T \tag{1.8}$$

с граничным условием:

$$\lambda(T) = \left\{ \frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)} \right\}^T. \tag{1.9}$$

При таком выборе вспомогательной переменной $\lambda(t)$ уравнение (1.6) принимает вид

$$\nabla\overline{J}(x,u) = \lambda^T(t_0)\nabla x(t_0) + \int_{t_0}^{T} \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} \nabla u(t)dt\,. \tag{1.10}$$

Выражение (1.10) называется первой вариацией критерия качества $\overline{J}(x,u,t)$.

Поскольку $\overline{J}(x,u) = J(x,u)$ на решениях системы (1.2), то $\nabla\overline{J}(x,u) = \nabla J(x,u)$. Если $J(x,u)$ достигает экстремума, то $\nabla J(x,u)$ должно быть равным нулю для произвольных $\nabla u(t)$. Учитывая, что в данной задаче $x(t_0) = x_0$ задано, т.е. $\nabla x(t_0) = 0$, необходимое условие стационарности критерия качества $J(x,u,t)$ можно записать в виде

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} = 0,\; t \in [t_0, T]. \tag{1.11}$$

Итак, необходимое условие минимума функционала (1.3) записывается в виде двухточечной краевой задачи (уравнения Эйлера - Лагранжа):

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,t)$$

n–дифференциальных уравнений;

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T \lambda(t) - \left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T$$

n–дифференциальных уравнений;

$x(t_0) = x_0$ $\quad n$ – условий на левом конце;

$\lambda(T) = \left\{\frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)}\right\}^T$ $\quad n$ – условий на правом конце,

где $u(t)$ определяется из условия

$$\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}^T \lambda(t) + \left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}^T = 0.$$

Система дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial \lambda(t)}\right\}^T,$$

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)}\right\}^T$$

называется канонической системой, связанной с основной задачей. Если $u(t)$ допустимое управление и $x(t)$ - соответствующая траектория, то говорят, что любое решение $\lambda(t)$ второго уравнения канонической системы соответствует $u(t)$ и $x(t)$. Иначе говоря, $\lambda(t)$ соответствует $u(t)$, если $\lambda(t)$ и $x(t)$ - решения канонической системы.

§ 1.3. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в заданный момент окончания переходного процесса

Предположим, что в задаче конструирования системы управления, рассмотренной в разделе 1.2, некоторые компоненты вектора состояния $x(t)$ должны принимать заранее заданные значения при *t=T*, т.е. целевая функция: $S = S_1 xT$, где S_1 - заданное подмножество R^q из R^n или $S_1 \in R^q xT,\ S_1 \subset S$.

Пусть $x_i(T)$ - задано, где $i = 1,2,...,q$. Тогда, учитывая предположения 2.2 и 3.2 (Введение), справедливо, что функция *K(x(T))* является функцией остальных $x_{q+1}(T), x_{q+2}(T),...,x_n(T)$, не заданных на правом конце координат состояния объекта, т.е.

$$K(x(T)) = K(x_{q+1}(T), x_{q+2}(T),...,x_n(T)). \tag{1.12}$$

Выводы, сделанные в разделе 1.2, справедливы вплоть до уравнений (1.8), (1.10) и уравнения для первой вариации вспомогательного функционала, который в данной задаче будет иметь вид:

$$\nabla \bar{J}(x,u) = \int_{t_0}^{T}\left[\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)} + \{\lambda^J(t)\}^T \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right]\nabla u(t)dt, \tag{1.13}$$

где $\lambda^J(t)$ является решением следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dt}\lambda^J(t) = -\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T \lambda^J(t) - \left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T, \tag{1.14}$$

$$\lambda^{J}{}_{j}(T)=\begin{cases}0, & j=1,2,...q,\\ \dfrac{\partial K(x(T))}{\partial x_j(T)} & j=q+1,...,n.\end{cases} \qquad (1.15)$$

В рассматриваемой задаче вариации по управлению $\nabla u(t)$ не являются полностью произвольными. Допустимые значения $\nabla u(t)$ не должны нарушать граничных условий $x_i(T)$ - задано, где $i=1,2,...,q$ или

$$\nabla x_i(T)=0,\ i=1,2,..q. \qquad (1.16)$$

Найдем приращения координаты $x_i(T)$ для $i=1,2,...,q$, соответствующее произвольной вариации $\nabla u(t)$. Для этого образуем вспомогательный функционал

$$J^*{}_i\,(x_i(T))=x_i(T),\ i=1,2,...,q. \qquad (1.17)$$

Вариации вспомогательного функционала (1.17), вызванные произвольными вариациями по управлению, легко найти, если сравнить функционал (1.19) с исходным функционалом, и использовать уже полученные результаты. Действительно, при $K(x(T))=x_i(T), L(x,u,t)=0$ из выражений (1.13), (1.14), (1.15) будем иметь

$$\nabla\overline{J}^*{}_i(x_i(T))=\nabla x_i(T)=\int_{t_0}^{T}\{\lambda^{i}(t)\}^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\nabla u(t)dt, \qquad (1.18)$$

где

$$\frac{d}{dt}\lambda^{i}(t)=-\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T\lambda^{i}(t), \qquad (1.19)$$

$$\lambda^{i}_{l}(t)=\begin{cases}0 & i\neq j,\\ 1 & i=j,\end{cases} \qquad j=1,2,...,n;\ i=1,2,...,q. \qquad (1.20)$$

Прибавим q выражений вида (1.18) с весовыми коэффициентами γ_i к выражению (1.13). В результате получим

$$\nabla\overline{J}(x,u)+\sum_{i=1}^{q}\gamma_i\nabla\overline{J}^*{}_i(x_i(t))=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}+[\lambda^{J}(t)+\sum_{i=1}^{q}\gamma_i\lambda^{i}(t)]^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}\nabla u(t)dt.$$

(1.21)

Выберем теперь $\nabla u(t)$ в виде:

$$\nabla u(t)=$$

$$=-k\left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}+[\lambda^{J}(t)+\sum_{t_0}^{q}\gamma_i\lambda^{i}(t)]^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}^T, \qquad (1.22)$$

где k – положительная скалярная величина. Тогда выражение (1.21) с учетом (1.22) принимает вид

$$\nabla \overline{J}(x,u)+\sum_{i=1}^{q}\gamma_i \nabla \overline{J}^*{}_i(x_i(t))=$$
$$=-k\int_{t_0}^{T}\left\| \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}+[\lambda^J(t)+\sum_{i=1}^{q}\gamma_i\lambda^i(t)]^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\|^2 dt. \qquad (1.23)$$

Это выражение строго отрицательно, если подынтегральное выражение не обращается тождественно в нуль на всем интервале интегрирования, т.е. условие стационарности критерия качества $J(x,u,t)$ определяется с точностью до γ_i следующим уравнением:

$$\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}+[\lambda^J(t)+\sum_{i=1}^{q}\gamma_i\lambda^i(t)]^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}=0\,. \qquad (1.24)$$

Для того чтобы найти значения γ_i, при которых вариации по управлению $\nabla u(t)$ удовлетворяют заданным ограничениям - $x_i(t)$ - задано для $1,2,...,q$, подставим (1.22) в (1.18). Получим:

$$\nabla \overline{J}^*{}_i(x_i(T))=\nabla x_i(T)=-k\int_{t_0}^{T}\{\lambda^i(t)\}^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}+\right.$$
$$\left.+[\lambda^J(t)+\sum_{j=1}^{q}\gamma_j\lambda^j(t)]^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}^T dt$$

или

$$\int_{t_0}^{T}\{\lambda^i(t)\}^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}+\{\lambda^J(t)\}^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}^T dt+$$
$$+\sum_{j=1}^{q}\gamma_j\int_{t_0}^{T}\{\lambda^i(t)\}^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}^T\lambda^j(t)dt=0\,. \qquad (1.25)$$

Введем обозначения. Пусть

$$g_i=\int_{t_0}^{T}\{\lambda^i(t)\}^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\left[\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}+\{\lambda^J(t)\}^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right]^T dt\,,$$

$$Q_{ij}=\int_{t_0}^{T}\{\lambda^i(t)\}^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}^T\lambda^j(t)dt=0\,.$$

Тогда (1.25) можно переписать в виде

$$g_i=-\sum_{j=1}^{q}\gamma_j Q_{ij}$$

или в векторной форме:

$$g=-Q\gamma\,.$$

Из последнего уравнения имеем

$$\gamma=-Q^{-1}g\,. \qquad (1.26)$$

Существование обратной матрицы Q^{-1} вытекает из предположения об управляемости объекта (1.2). Действительно, если матрица Q – вырожденная, т.е. не существует Q^{-1}, то это означает, что нельзя отыскать γ_i такие, при которых будут выполняться все заданные ограничения: $x_i(T)$ задано для $i = 1,2,...,q$ одновременно.

Введем в рассмотрение функцию $\lambda(t)$, определяемую соотношениями

$$\lambda(t) = \lambda^J(t) + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \lambda^i(t). \qquad (1.27)$$

Тогда из (1.14), (1.19) и (1.15), (1.20) будем иметь

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{ \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)} \right\}^T \qquad (1.28)$$

$$\lambda_j(T) = \begin{cases} \gamma_j & j = 1,2,...,q, \\ \dfrac{\partial K(x(T))}{\partial x_j(T)} & j = q+1,...,n, \end{cases} \qquad (1.29)$$

где $H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T(t) f(x,u,t)$. (1.30)

Условия стационарности (1.24) можно переписать в виде

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} = 0. \qquad (1.31)$$

Таким образом, необходимые условия минимума функционала (1.3) с объектом (1.2) при фиксированных значениях некоторых переменных состояния в заданный момент окончания переходного процесса сформулированы в виде двухточечной краевой задачи: *2n* – дифференциальных уравнений (1.2), (1.28) с *n* – краевыми условиями на левом конце (1.2) и *n* - краевыми условиями на правом конце (1.29), условием стационарности (1.31) и уравнением для определения весовых коэффициентов γ_i (1.26).

Рассмотрим задачу, в которой ограничения на конечное состояние объекта системы задается в виде функции, т.е.

$$\psi(x(T)) = 0, \quad \psi \in R^q. \qquad (1.32)$$

Это соответствует функции цели *S*, определенной во Введении предположениями 2.3, и функции конечного штрафа *K(x(T))*, определенной предположениями 3.3.

Образуем вспомогательный функционал добавлением к (1.3) q - мерного вектора $\psi(x(T)) = 0$ с весовыми коэффициентами γ и системы дифференциальных уравнений (1.2) с весовыми коэффициентами $\lambda(t)$. Будем иметь:

$$\bar{J}(x,u) = K(x(T)) + \gamma^T \psi(T) +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} \{L(x,u,t) + \lambda^T(t)[f(x,u,t) - \frac{d}{dt}x(t)]\}dt.$$

Введем обозначения:

$$\Psi(x(T)) = K(x(T)) + \gamma^T \psi(x(T)), \qquad (1.33)$$

$$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T(T) f(x,u,t). \qquad (1.34)$$

Тогда необходимые условия стационарности *J(x,u,t)* имеют вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,t)$$

n – дифференциальных уравнений;

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T \lambda(t) - \left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T$$

n – дифференциальных уравнений;

$$x(t_0) = x_0 \qquad n \text{ – условий на левом конце;} \tag{1.35}$$

$$\lambda(T) = \left\{\frac{\partial \Psi(x(T))}{\partial x(T)}\right\}^T \tag{1.36}$$

n – условий на правом конце;

$$\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}^T \lambda(t) + \left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}^T = 0 \tag{1.37}$$

m – уравнений;

$$\psi(x(T)) = 0 \tag{1.38}$$

q – условий.

Условие стационарности (1.37) определяет *m* – мерный вектор $u(t)$. Система дифференциальных условий (1.35) с краевыми условиями (1.35), (1.36) определяет двухточечную краевую задачу с *q* параметрами γ_i, которые должны быть найденными так, чтобы удовлетворялись *q* условий (1.38).

§ 1.4. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в неопределенный момент окончания переходного процесса

Функции цели *S* и функции штрафа *K* в данной задаче относятся к предположениям, сделанным во Введении, а именно – 2.4, 2.5 и 3.4. Функционал качества имеет вид

$$J(x,u) = K(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt\,, \tag{1.39}$$

где время окончания переходного процесса целесообразно считать некоторым параметром, который должен быть выбран в дополнение к управляющему воздействию *u(t)* таким образом, чтобы минимизировать функционал (1.39) и удовлетворять заданным ограничениям.

Пусть в рассматриваемой задаче заданы $x_i(T)$ - задано, где $i = 1,2,...,q$. Тогда, как и в предыдущей задаче, функция штрафа *K* будет являться функцией незаданных параметров:

$$K(x(T),T) = K(x_{q+1}(T), x_{q+2}(T),...,x_n(T),T)\,. \tag{1.40}$$

Образуем вспомогательный функционал добавлением к (1.39) системы дифференциальных уравнений (1.2) с весовыми коэффициентами

$$\begin{aligned}\bar{J}(x,u) &= K(x(T),T) + \\ &+ \int_{t_0}^{T} \{L(x,u,t) + \{\lambda^J(t)\}^T(t)[f(x,u,t) - \frac{d}{dt}x(t)]\}dt.\end{aligned} \tag{1.41}$$

Приращения $d\bar{J}(x,u)$, вызванные вариациями по управлению *u(t)* и приращениями конечного времени *T*, имеют вид

$$
\begin{aligned}
&d\bar{J}(x,u)=\{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T}+L(x,u,T)\}dT+\frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)}dx(T)-\\
&-(\lambda^{J}(T))^{T}\}\nabla x(T)+(\lambda^{J}(t_0))^{T}\nabla x(t_0)+\\
&+\int_{t_0}^{T}\{[\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)}+(\lambda^{J})^{T}\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}+(\frac{d}{dt}\lambda^{J}(t))^{T}]\nabla x(t)+\\
&+[\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}+(\lambda^{J}(t))^{T}\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}]\nabla u(t)\}dt.
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

Здесь $\nabla x(t)$ - вариации вектора *x(t)* при фиксированном значении времени окончания переходного процесса *T*.

Полное приращение *dx(t),* вызванное вариациями по управлению и времени окончания переходного процесса с точностью до членов второго порядка малости, можно записать:

$$dx(T)=\nabla x(T)+\frac{d}{dT}x(T)\,dT. \tag{1.43}$$

Подставляя $\nabla x(T)$, найденное из (1.43) в (1.42), будем иметь

$$
\begin{aligned}
&d\bar{J}(x,u)\\
&=\left\{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T}+L(x,u,T)\}dT+(\lambda^{J}(T))^{T}f(x,u,T)\right\}dT+\\
&+\left\{\frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)}dx(T)-(\lambda^{J}(T))^{T}\right\}dx(T)+(\lambda^{J}(t_0))^{T}\nabla x(t_0)+\\
&+\int_{t_0}^{T}\left\{\left[\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)}+(\lambda^{J}(t))^{T}\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}+\left(\frac{d}{dt}\lambda^{J}(t)\right)^{T}\right]\nabla x(t)+\right.\\
&\left.+\left[\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}+(\lambda^{J}(t))^{T}\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right]\nabla u(t)\right\}dt.
\end{aligned}
\tag{1.44}
$$

Выберем $\frac{d}{dt}\lambda^{J}(t)$ и $\lambda^{J}(t)$ так, чтобы устранить влияние $\nabla x(t)$ и $dx(T)$ на вариации функционала (1.44). Таким образом, $\lambda^{J}(t)$ будет являться решением дифференциального уравнения с краевым условием, заданным на правом конце:

$$\frac{d}{dt}\lambda^{J}(t)=-\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^{T}\lambda^{J}(t)-\left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^{T}, \tag{1.45}$$

$$\lambda_j^{J}(T)=\begin{cases}0, & j=1,2,\ldots q,\\[2ex] \dfrac{\partial K(x(T),T)}{\partial x_j(T)} & j=q+1,\ldots,n.\end{cases} \tag{1.46}$$

При таком выборе $\lambda^J(t)$ выражение (1.44) принимает вид

$$d\overline{J}(x,u) = \left\{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T} + L(x,u,T) + (\lambda^J(T))^T f(x,u,T)\right\} dT +$$
$$+\int_{t_0}^{T} \left[\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)} + (\lambda^J(t))^T \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right] \nabla u(t)\, dt. \qquad (1.47)$$

где величина $\nabla x(t_0) = 0$, так как $x(t_0) = x_0$ задано.

Как и в предыдущем разделе 1.3, в рассматриваемой задаче вариации $\nabla u(t)$ и dT не являются полностью произвольными. Допустимые значения $\nabla u(t)$ и dT не должны нарушать ограничения: $x_i(T)$ - задано для $i = 1,2,...,q$ или

$$dx_i(T) = 0,\ i = 1,2,...,q. \qquad (1.48)$$

Найдем приращения $dx_i(T), i = 1,2,...,q$, вызванные произвольными вариациями по управлению $\nabla u(t)$ в момент $T + dT$. Для этого образуем вспомогательный функционал:

$$J^*_i\ (x_i(T)) = x_i(T),\ i = 1,2,...,q\ . \qquad (1.49)$$

Приращения вспомогательного функционала (1.49), вызванные только вариациями по управлению $\nabla u(t)$, нетрудно найти, если в выражениях (1.45) – (1.47) положить $K(x(T),T) = x_i(T),\ L(x,u,t) = 0,\ \lambda^J(t) = \lambda^i\{t\}$. Тогда, учитывая, что $dx_i(T)$ есть результат воздействия вариаций по управлению $\nabla u(t)$ и $dx_i(T) = 0,\ i = 1,2,...,q,$ так как $x_i(T) -$ задано для $i = 1,2,...,q$:

$$d\overline{J}_i^{\,*}(x_i(T)) = dx_i(T) = \{(\lambda^i(T))^T f(x,u,T)\} dT +$$
$$+\int_{t_0}^{T} (\lambda^i(t))^T \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)} \nabla u(t)\} dt, \qquad (1.50)$$

где
$$\frac{d}{dt}\lambda^i(t) = -\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T \lambda^i(t)\ . \qquad (1.51)$$

Краевые условия для уравнения (1.51) определяются соотношениями:

$$\lambda^i_j(T) = \begin{cases} 0,\ i \neq j & i = 1,2,...n, \\ 1,\ i = j & j = 1,2,...,q. \end{cases} \qquad (1.52)$$

Прибавим q выражений вида (1.50) с весовыми коэффициентами γ_i к выражению (1.47), в результате получим

$$d\overline{J}(x,u) + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i d\overline{J}^{\,*}{}_i(x_i(t)) = \{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T} + L(x,u,T) +$$
$$[\lambda^J(T) + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \lambda^i(T)]^T f(x,u,T)\} dT + \qquad (1.53)$$
$$+\int_{t_0}^{T} \left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)} + [\lambda^J(t) + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \lambda^i(t)]^T \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\} \nabla u(t) dt.$$

Определим вариации dT и $\nabla u(t)$ с точностью до параметров $\gamma_i, i = 1,...,q$ в виде

$$dT = -k_1\{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T} + L(x,u,T) + \\ +[\lambda^J(T) + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i\lambda^i(T)]^T f(x,u,T)\}, \qquad (1.54)$$

$$\nabla u(t) = -k_2\left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)} + [\lambda^J(t) + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i\lambda^i(t)]^T \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}^T, \qquad (1.55)$$

где k_1, k_2 - положительные скалярные величины.

Тогда выражение (1.53) с учетом (1.54) и (1.55) будет иметь вид

$$d\overline{J}(x,u) + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i d\overline{J}_i^*(x_i(t)) = \\ = -k_1\{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T} + L(x,u,T) + \\ +[\lambda^J(T) + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i\lambda^i(T)]^T f(x,u,T)\}^2 - \\ - k_2\int_{t_0}^{T}\left\|\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)} + [\lambda^J(t) + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i\lambda^i(t)]^T \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\|^2 dt. \qquad (1.56)$$

Это выражение строго отрицательно, если квадратичные формы не равны нулю, т.е. условия стационарности критерия качества $J(x,u)$ определяются с точностью до параметров $\gamma_i, i = 1,...,q$ следующими уравнениями:

$$\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T} + L(x,u,T) + \\ +[\lambda^J(T) + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i\lambda^i(T)]^T f(x,u,T) = 0, \qquad (1.57)$$

$$\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)} + [\lambda^J(t) + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i\lambda^i(t)]^T \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)} = 0. \qquad (1.58)$$

Для того чтобы найти значения $\gamma_i, i = 1,...,q$, при которых вариации по управлению $\nabla u(t)$ и времени окончания переходного процесса dT удовлетворяют заданным ограничениям на правом конце ($x_i(T), i = 1,...,q$ - задано), подставим (1.54) и (1.55) в (1.50). Получим:

$$d\overline{J}^*_i(x_i(T)) = dx_i(T) = \\ = -k_1[\lambda^i(T)]^T f(x,u,T)\left\{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T} + L(x,u,T) + \\ +[\lambda^J(T) + \sum_{j=1}^{q}\gamma_j\lambda^j(T)]^T f(x,u,T)\right\} - \\ - k_2\int_{t_0}^{T}[\lambda^i(t)]^T \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)} + \sum_{j=1}^{q}\gamma_j\lambda^j(t)]^T \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\}^T dt = 0$$

или, произведя перегруппировку,

$$
\begin{aligned}
&k_1[\lambda^i(T)]^T f(x,u,T)\{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T}+\\
&+L(x,u,T)+[\lambda^J(T)]^T f(x,u,T)\}+\\
&+k_2\int_{t_0}^{T}[\lambda^i(t)]^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}+\\
&+[\lambda^J(t)]^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\}^T dt+\\
&+\sum_{i=1}^{q}\gamma_j k_1[\lambda^i(T)]^T f(x,u,T)f(x,u,T)^T\lambda^j(T)+\\
&+k_2\int_{t_0}^{T}[\lambda^i(t)]^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\}^T\lambda^j(t)d\text{t}\}=0.
\end{aligned}
\tag{1.59}
$$

Введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
&r_i=\\
&=[\lambda^i(T)]^T f(x,u,T)\left\{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T}+L(x,u,T)+[\lambda^J(T)]^T f(x,u,T)\right\},\\
&g_i=\int_{t_0}^{T}[\lambda^i(t)]^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}+[\lambda^J(t)]^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}^T dt,\\
&S_{ij}=[\lambda^i(T)]^T f(x,u,T)f(x,u,T)^T\lambda^j(T),\\
&Q_{ij}=\int_{t_0}^{T}[\lambda^i(t)]^T\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}\right\}^T\lambda^j(t)dt.
\end{aligned}
$$

Тогда выражение (1.59) можно переписать в виде

$$k_1 r_i+k_2 g_i+\sum_{j=1}^{q}\gamma_j[k_1 Q_{ij}+k_2 S_{ij}]=0$$

или в векторной форме:

$$k_1 r+k_2 g+[k_1 S+k_2 Q]\gamma=0,$$

откуда

$$\gamma=-[k_1 S+k_2 Q]^{-1}[k_1 r+k_2 g]. \tag{1.60}$$

Существование обратной матрицы $[k_1 S+k_2 Q]^{-1}$ вытекает из предположения об управляемости системы.

Введем в рассмотрение функцию $\lambda(t)$, определенную соотношением:

$$\lambda(t)=\lambda^J(t)+\sum_{i=1}^{q}\gamma_i\lambda^i(t). \tag{1.61}$$

Тогда из (1.45), (1.51) и (1.46), (1.52) будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=-\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)}\right\}^T, \tag{1.62}$$

$$\lambda_j(T) = \begin{cases} \gamma_j & j = 1,\dots,q, \\ \dfrac{\partial K(x(T),T)}{\partial x_j(T)}, & j = q+1,\dots,n, \end{cases} \tag{1.63}$$

где

$$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T(t) f(x,u,t). \tag{1.64}$$

Условия стационарности (1.57), (1.58) с учетом введенных обозначений можно переписать в виде

$$\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T} + H(x,u,\lambda,T) = 0, \tag{1.65}$$

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} = 0. \tag{1.66}$$

Таким образом, необходимые условия минимума функционала (1.39) с объектом (1.2) при фиксированных значениях некоторых переменных состояния в неопределенный момент окончания переходного процесса сформулированы в виде двухточечной краевой задачи и условия выбора коэффициентов γ (1.60).

Уравнение (1.65) можно получить следующим образом. Найдем приращение функционала качества $J(x,u)$, вызванное вариациями времени окончания переходного процесса. При малых вариациях dT будет справедливо соотношение

$$dJ_{|\,t=T}(x,u) = \{\frac{\partial J(x,u)}{\partial T} + \frac{\partial J(x,u)}{\partial x(T)} f(x,u,T)\}dT,$$

откуда

$$dJ(x,u)_{|\,t=T} =$$

$$= \left\{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T} + \frac{\partial K(x(T),T)}{\partial x(T)} f(x,u,T) + L(x,u,T)\right\} dT.$$

Учитывая (1.45) и (1.51), а также (1.64), будем иметь

$$dJ(x,u)_{|\,t=T} = \left\{\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T} + H(x,u,\lambda,T)\right\} dT.$$

Так как $dT \neq 0$, то из последнего соотношения следует, что

$$\frac{\partial K(x(T),T)}{\partial T} + H(x,u,\lambda,T) = 0. \tag{1.67}$$

Уравнение (1.65) или (1.67) можно использовать для определения времени окончания переходного процесса.

Ограничения на конечное состояние системы может задаваться в виде функций, т.е. в момент окончания переходного процесса состояние системы должно отвечать следующему уравнению:

$$\Psi(x(T),T) = 0, \;\; \Psi \in R^q. \tag{1.68}$$

Вспомогательный функционал качества, как и в разделе 1.3, можно записать в виде

$$\bar{J}(x,u) = K(x(T),T) + \gamma^T \Psi(x(T),T) +$$
$$+\int_{t_0}^{T} \{L(x,u,t) + \lambda^T(t)[f(x,u,t) - \frac{d}{dt}x(t)]\}dt.$$

Приращения вспомогательного критерия качества, вызванные вариациями по управлению $\nabla u(t)$ и времени окончания переходного процесса dT, имеют вид

$$d\bar{J}(x,u) =$$
$$= \{\frac{\partial \Phi(x,\gamma,T)}{\partial T} + L(x,u,T)\}dT + \frac{\partial \Phi(x,\gamma,T)}{\partial x(T)}dx(T) +$$
$$+\int_{t_0}^{T} \{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)}\nabla x(t) + \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)}\nabla u(t) - \tag{1.69}$$
$$-\lambda^T(t)\frac{d}{dt}x(t)\}dt,$$

где

$$\Phi(x,\gamma,T) = K(x(T),T) + \gamma^T \Psi(x(T),T), \tag{1.70}$$
$$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T(t)f(x,u,t). \tag{1.71}$$

Интегрируя по частям $\lambda^T(t)\dot{x}(t)$ и принимая во внимание, что

$$\nabla x(T) = dx(T) - \frac{d}{dT}x(T)dT,$$

получаем:

$$d\bar{J}(x,u) = \{\frac{\partial \Phi(x,\gamma,T)}{\partial T} + L(x,u,T) + \lambda^T(T)f(x,u,T)\}dT +$$
$$+\{\frac{\partial \Phi(x,\gamma,T)}{\partial x(T)} - \lambda^T(T)\}dx(T) + \lambda^T(t_0)\nabla x(t_0) + \tag{1.72}$$
$$+\int_{t_0}^{T} \{[\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)} + \frac{d}{dt}\lambda^T(t)]\nabla x(t) + \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)}\nabla u(t)\}dt.$$

Выберем функцию $\lambda(t)$ так, чтобы коэффициенты при $\nabla x(t), dx(T)$ и dT обращались в нуль. Будем иметь

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)}\right\}^T, \tag{1.73}$$

$$\lambda(T) = \left\{\frac{\partial \Phi(x,\gamma,T)}{\partial x(T)}\right\}^T, \tag{1.74}$$

$$\frac{\partial \Phi(x,\gamma,T)}{\partial T} + L(x,u,T) + \lambda^T(T)f(x,u,T) = 0. \tag{1.75}$$

Учитывая (1.73), а также

$$\frac{d\Phi(x,\gamma,T)}{dT} = \frac{\partial \Phi(x,\gamma,T)}{\partial T} + \frac{\partial \Phi(x,\gamma,T)}{\partial x(T)}\frac{dx(T)}{dT},$$

выражение (1.75) можно переписать в виде

$$\frac{d\Phi(x,\gamma,T)}{dT}+L(x,u,T)=0. \qquad (1.76)$$

В результате такого выбора $\lambda(t)$ выражение (1.72) можно переписать:

$$d\overline{J}(x,u)=\int_{t_0}^{T}\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)}\nabla u(t)\}dt, \qquad (1.77)$$

где $\nabla x(t_0)=0$, так как $x(t_0)$ - задано.

Для того, чтобы функционал $J(x,u)$ принимал стационарное значение, необходимо выполнение условия:

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda\ ,t)}{\partial u(t)}=0. \qquad (1.78)$$

Элементы вектора γ должны выбираться так, чтобы удовлетворялись ограничения (1.67), наложенные на состояние объекта в момент окончания переходного процесса.

В заключение данного раздела рассмотрим задачу с функционалом качества:

$$J=\int_{t_0}^{T}dt=T-t_0, \qquad (1.79)$$

которую обычно называют задачей быстродействия.

Функционал (1.79) нетрудно получить из функционала Больца, положив $K(x(T),T)\equiv 0,\ L(x,u,t)\equiv 1.$ Тогда необходимые условия минимума функционала (1.79) будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x,u,t)$$

n - дифференциальных уравнений,

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=-\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^{T}\lambda(t)$$

n – дифференциальных уравнений.

Краевые условия:

$$x(t_0)=x_0$$

n – условий на левом конце,

$$\lambda_j(T)=\begin{cases}\gamma_j, & j=1,...q\\ 0 & j=q+1,...n\end{cases}$$

n – условий на правом конце.

Оптимальное управление находится из уравнения

$$\lambda^{T}(t)\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}=0.$$

Отметим, что управление должно входить в правую часть уравнения объекта нелинейным образом.

Гамильтониан имеет вид

$$H(x,u,\lambda,t)=1+\lambda^{T}(t)f(x,u,t).$$

Уравнение, определяющее время переходного процесса, имеет вид:

$$1 + \lambda^T(T) f(x,u,T) = 0,$$

откуда:

$$\lambda^T(T) f(x,u,T) = -1$$

или

$$\sum_{i=1}^{q} \gamma_i f_i(x,u,T) = -1.$$

Из последнего выражения видно, что рассматриваемая задача с функционалом (1.79) имеет смысл, если задана хотя бы одна из фазовых координат при $t = T$.

§ 1.5. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния во внутренних точках траектории

В настоящем разделе рассмотрим задачу, в которой на траектории выделено несколько участков и на каждом из этих участков задается свой функционал качества, и на каждом из этих участков задаются некоторые переменные состояния. Кроме того, и сам объект от участка к участку может меняться. Другими словами, объект описывается в данной задаче следующим типом дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} x(t) = f^{(i)}(x,u,t), \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i = 1,...,N. \tag{1.80}$$

Заданы также многоточечные краевые условия

$$\begin{gathered} \Psi^{(j)}[x(t_0^-), x(t_0^+),..., x(t_N^-), x(t_N^+);\, t_0,...,t_N] = 0, \\ j = 0,...,N. \end{gathered} \tag{1.81}$$

Здесь $x(t_i^-)$ - значение вектора состояния перед $t = t_i$ (слева от t_i), а $x(t_i^+)$ - значение вектора состояния сразу после $t = t_i$ (справа от t_i).

Запишем функционал качества:

$$\begin{gathered} J(x,u) = K[x(t_0^-), x(t_0^+),..., x(t_N^-), x(^+_N); t_0,...,t_N] + \\ + \sum_{i=1}^{N} \int_{t_i^+}^{t_i^-} L^{(i)}(x,u,t)dt. \end{gathered} \tag{1.82}$$

Задача заключается в построении $u(t)$, доставляющего минимум функционалу (1.82) на объекте (1.80) при ограничениях (1.81).

Для получения необходимых условий минимума образуем вспомогательный функционал:

$$\begin{gathered} \overline{J}(x,u) = K[x(t_0^-), x(t_0^+),..., x(t_N^-), x(^+_N); t_0,...,t_N] + \\ + \sum_{j=1}^{N} [\gamma^{(j)}]^T \Psi^{(j)}[x(t_0^-), x(t_0^+),..., x(t_N^-), x(t_N^+)] + \\ + \sum_{i=1}^{N} \int_{t_i^+}^{t_i^-} \{L^{(i)}(x,u,t) + \lambda^T(t)[f^{(i)}(x,u,t) - \frac{d}{dt} x(t)]\} dt. \end{gathered} \tag{1.83}$$

Введем обозначения:

$$\Phi = K + [\gamma^{(j)}]^T \Psi^{(j)} \tag{1.84}$$

$$H^{(i)}(x,u,\lambda,t) = L^{(i)}(x,u,t) + \lambda^T(t) f^{(i)}(x,u,t). \tag{1.85}$$

Тогда первая вариация функционала (1.82) будет иметь вид

$$d\bar{J}(x,u)=\sum_{i=0}^{N}\{\frac{\partial\Phi}{\partial t_i}dt_i+\frac{\partial\Phi}{\partial x(t_i^-)}dx(t_i^-)+\frac{\partial\Phi}{\partial t_i^+}dx(t_i^+)\}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\{[H^{(i)}-\lambda^T\frac{d}{dt}x\}_{|t=t_i^-}]dt_i-[H^{(i)}-\lambda^T\frac{d}{dt}x]_{|t=t_{i-1}^+}dt_{i-1}\}- \tag{1.86}$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\lambda^T\nabla x\Big|_{t_{i-1}^+}^{t_i^-}+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_i^+}^{t_i^-}\{[\frac{\partial H^{(i)}}{\partial x}+\frac{d}{dt}\lambda^T(t)]\nabla x+\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}\nabla u\}dt.$$

Используя соотношения

$$dx(t_i^-)=\nabla x(t_i^-)+\dot{x}(t_i^-)dt_i\,,$$
$$dx(t_i^+)=\nabla x(t_i^+)+\dot{x}(t_i^+)dt_i\,, \tag{1.87}$$

исключим $\nabla x(t_i^-),\nabla x(t_i^+)$ из выражения (1.86):

$$d\bar{J}(x,u)=\sum_{i=0}^{N}[\frac{\partial\Phi}{\partial t_i}+H^{(i)}(t_i^-)-H^{(i+1)}(t_i^+)]dt_i+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}[\frac{\partial\Phi}{\partial x(t_i^-)}-\lambda^T(t_i^-)]dx(t_i^-)+\sum_{i=1}^{N}[\frac{\partial\Phi}{\partial x(t_i^+)}-\lambda^T(t_i^+)]dx(t_i^+)+ \tag{1.88}$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_i^+}^{t_i^-}\{[\frac{\partial H^{(i)}}{\partial x}+\frac{d}{dt}\lambda^T(t)]\nabla x+\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}\nabla u\}dt.$$

Отметим, что $H^{(0)}=H^{(N+1)}=0.$

Выберем $\lambda(t)$ так, чтобы удовлетворялись уравнения

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=-\left\{\frac{\partial H^{(i)}(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)}\right\}^T,$$
$$t_{i-1}^+<t<t_i^-,\qquad i=1,...,N, \tag{1.89}$$

$$\lambda(t_i^-)=\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x(t_i^-)}\right\}^T,\qquad i=1,...,N, \tag{1.90}$$

$$\lambda(t_i^+)=\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x(t_i^+)}\right\}^T,\qquad i=1,...,N. \tag{1.91}$$

Моменты t_i определяются из соотношения:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t_i}+H^{(i)}(t_i^-)-H^{(i)}(t_i^+)=0,\qquad i=1,...,N. \tag{1.92}$$

В задачах, в которых моменты t_i заданы, условия (1.92) не являются необходимыми, так как в этом случае $dt_i=0$ в уравнениях (1.88). Так же, если $x(t_0^+)$ задано, то $dx(t_0^+\}=0$ в (1.88) и уравнение (1.91) не является необходимым.

Множители $\gamma^{(j)}$ определяются так, чтобы удовлетворять ограничениям (1.81).

Отметим, что вариации $\nabla u(t)$ в уравнении для первой вариации

$$d\overline{J}(x,u)=\sum_{i=1}^{N}\int_{t_i^+}^{t_i^-}\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}\nabla u dt$$

не являются произвольными, а должны быть такими, чтобы (вместе с вариациями $dx(t_i^-), dx(t_i^+), dt_i$) не нарушать заданных граничных условий. Эти условия можно записать в виде

$$d\Psi^{(i)}=\sum_{i}^{N}[\frac{\partial\Psi^{(i)}}{\partial t_i}dt_i+\frac{\partial\Psi^{(i)}}{\partial x(t_i^-)}dx(t_i^-)+ \\ +\frac{\partial\Psi^{(i)}}{\partial x(t_i^+)}dx(t_i^+)]=0,\ i=1,...,N. \tag{1.93}$$

Уравнения (1.89)-(1.91) представляют собой многоточечную краевую задачу и вместе с условием стационарности функционала представляют собой необходимые условия Эйлера – Лагранжа. Условия (1.92) являются условиями трансверсальности.

§ 1.6. Задачи оптимизации при наличии ограничений на траекторию

1.6.1. Интегральные ограничения

В задачах, рассмотренных в предыдущих параграфах настоящей главы, ограничения накладывались в конечной точке траекторий. В этих задачах в конечный момент времени задавались функции от фазовых координат, а в начальный момент – значения всех фазовых координат. Добавим к этим ограничениям еще одно. Потребуем, чтобы некоторый интеграл вдоль оптимальной траектории принимал заранее заданное значение. Таким образом, пусть

$$x_{n+1}(T)=\int_{t_0}^{T}N(x,u,t)dt\,, \tag{1.94}$$

где N - заданная скалярная функция, $x_{n+1}(T)$ - заданное число.

Присоединим к исходной системе уравнений уравнение состояния

$$\frac{d}{dt}x_{n+1}(t)=N(x,u,t)dt \tag{1.95}$$

с граничными условиями

$$x_{n+1}(t_0)=0,\ x_{n+1}(T)-\textit{задано}\,. \tag{1.96}$$

Пусть μ множитель Лагранжа. Гамильтониан расширенной системы имеет вид

$$H(x,u,\lambda\ ,\mu\ ,t)=L(x,u,t)+\lambda^{\,T}(t)f(x,u,t)+\mu\ N(x,u,t)\,. \tag{1.97}$$

Необходимые условия оптимальности будут записываться в виде двухточечной краевой задачи

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,t),\\
&\frac{d}{dt}\lambda(t) =\\
&= -\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T \lambda(t) - \left\{\frac{\partial N(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T \mu(t) - \left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T,
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.98}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&x(t_0) = x_0,\\
&\lambda(T) = \left\{\frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)}\right\}^T,
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.99}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H(x,u,\lambda,\mu,t)}{\partial u(t)} =\\
&= \lambda^T(t)\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)} + \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)} + \mu\frac{\partial N(x,u,t)}{\partial u(t)} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.100}
$$

$$
\frac{d}{dt}\mu(t) = \frac{\partial N(x,u,t)}{\partial x_{n+1}(t)} = 0, \quad \text{откуда} \;\; \mu = const. \tag{1.101}
$$

Таким образом, в задачах с ограничениями типа (1.94) величина $N(x,u,t)$ присоединяется к гамильтониану исходной системы с постоянным множителем Лагранжа μ, который является коэффициентом чувствительности критерия качества $J(x,u)$ к изменению $x_{n+1}(t)$, т.е. $\mu = -\dfrac{\partial J(x,u)}{\partial x_{n+1}(t)}$.

1.6.2. Ограничения в виде равенства на управляющие переменные

К постановке задач об оптимальном управлении, рассматриваемых в данной главе, добавим дополнительное ограничение на управляющие воздействия в виде равенства

$$
C(u,t) = 0, \tag{1.102}
$$

где $u(t) \in R^r$, $r \geq 2$, $C(u,t)$ - скалярная функция. Условие $r \geq 2$ необходимо для того, чтобы задача поиска оптимального управления не была бы тривиальной (при $r = 1$ ограничение (1.102) полностью определяет функцию $u(t)$ и проблемы оптимизации не возникает).

Образуем гамильтониан

$$
\begin{aligned}
&H(x,u,\lambda,\mu,t) =\\
&= L(x,u,t) + \lambda^T(t) f(x,u,t) + \mu\, C(u,t).
\end{aligned}
\tag{1.103}
$$

Такая форма гамильтониана вносит изменения только в условие оптимальности

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H(x,u,\lambda,\mu,t)}{\partial u(t)} =\\
&= \lambda^T(t)\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)} + \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)} + \mu(t)\frac{\partial C(u,t)}{\partial u(t)} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.104}
$$

Это условие вместе с (1.103) определяет r компонент вектора управления $u(t)$ и скалярную функцию $\mu(t)$.

1.6.3. Ограничения в виде равенства на функции управления и фазовые координаты

К общей постановке задачи оптимизации добавим ограничения

$$C(x,u,t)=0, \tag{1.105}$$

причем для любого $u(t)$ должно выполняться условие: $\dfrac{\partial C(x,u,t)}{\partial u(t)} \neq 0$.

Образуем гамильтониан

$$H(x,u,\lambda,\mu,t)=L(x,u,t)+\lambda^T(t)f(x,u,t)+\mu\, C(x,u,t). \tag{1.106}$$

Условия оптимальности в этом случае имеют вид (1.104)

$$\begin{gathered}\frac{\partial H(x,u,\lambda,\mu,t)}{\partial u(t)}= \\ =\lambda^T(t)\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}+\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}+\mu(t)\frac{\partial C(x,u,t)}{\partial u(t)}=0,\end{gathered} \tag{1.107}$$

а уравнение Эйлера – Лагранжа должны быть модифицированы

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\lambda(t)= \\ =-\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T\lambda(t)-\left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T-\left\{\frac{\partial C(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T\mu(t).\end{gathered} \tag{1.108}$$

Необходимое условие (1.107) и ограничения (1.105) составляют систему $r+1$ уравнений с $r+1$ неизвестными величинами $u(t)$ и $\mu(t)$.

1.6.4. Ограничения в виде равенства на функции координат

Если функция, задающая ограничения, явно не зависит от управляющих воздействий, то в этом случае возникают дополнительные осложнения. Пусть задано ограничение

$$S(x,t)=0,\quad t\in[t_0,T]. \tag{1.109}$$

Тогда

$$\frac{dS(x,t)}{dt}=\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x(t)}f(x,u,t)=0\ . \tag{1.110}$$

Выражение (1.110) может оказаться либо явно зависящим от $u(t)$, либо снова не зависящим от $u(t)$. Если это выражение зависит от $u(t)$, то оно играет роль совместного ограничения на управляющие воздействия и фазовые переменные, аналогично равенству (1.105). Однако в отличие от задачи (*1.6.3*) следует либо исключить одну компоненту вектора $x(t)$, выразив ее с помощью (1.109) через остальные ($n-1$) компонент, либо присоединить (1.109) в качестве граничного условия в точках $t=t_0$ или $t=T$.

Если же выражение (1.110) не содержит явно $u(t)$, то его можно еще раз продифференцировать и подставить $\dfrac{d}{d}x(t)=f(x,u,t)$; эта процедура может повторяться до тех пор, пока полученное выражение не будет явно зависеть от $u(t)$. Если явная зависимость от $u(t)$ получается после q-кратного дифференцирования $S(x,t)$ по t, то соотношение (1.109) называют ограничением q-го порядка типа равенства, наложенным на фазовые переменные. В этом случае q-тая производная по времени $S(x,t)$ играет роль ограничения на управляющие и фазовые переменные, аналогично условию (1.105):

$$S^{(q)}(x,u,t)=0 \text{, где } S^{(q)}(x,u,t)=\frac{d^q S(x,t)}{dt^q}. \tag{1.111}$$

Кроме этого, в этой задаче необходимо либо исключить q компонент вектора $x(t)$, выразив их через остальные $(n-q)$ компонент этого вектора с помощью системы q уравнений

$$\begin{bmatrix} S(x,t) \\ S^{(1)}(x,t) \\ S^{(q)}(x,t) \end{bmatrix}=0, \tag{1.112}$$

либо рассматривать систему (1.112), как дополнительные граничные условия в точке $t=t_0$ (или $t=T$).

Можно использовать другой подход. Ограничения (1.109) можно прибавить к гамильтониану системы, как это делалось в задаче (*1.6.2*), т.е.

$$H(x,u,\lambda\ ,\mu\ ,t)=L(x,u,t)+\lambda^{\,T}(t)f(x,u,t)+\mu\ S(x,t). \tag{1.113}$$

Тогда, каноническая система будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t)=f(x,u,t),\\ &\frac{d}{dt}\lambda(t)=-\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T\lambda\ (t)-\left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T-\left\{\frac{\partial S(x,t)}{\partial x(t)}\right\}^T\mu\ (t), \end{aligned}\right\} \tag{1.114}$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} &x(t_0)=x_0,\\ &\lambda\ (T)=\left\{\frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)}\right\}^T, \end{aligned}\right\} \tag{1.115}$$

и условием стационарности гамильтониана

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda\ ,\mu\ ,t)}{\partial u(t)}=\lambda^{\,T}(t)\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(t)}+\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(t)}=0. \tag{1.116}$$

Необходимые условия (1.114) –(1.116) отличны от выведенных выше, но являются эквивалентными.

1.6.5. Ограничения, заданные во внутренних точках траектории.

Пусть в некоторой точке t_1 ($t_0<t_1<T$) введено дополнительное требование в виде ограничения

$$N(x(t_1),t_1)=0, \tag{1.117}$$

где $N(x(t_1),t_1)$ - вектор функция размерности q. Таким образом, вместо двухточечной краевой задачи в данном случае имеется с трехточечная граничная задача.

Соотношение (1.117) представляет собой граничное условие для части траектории от $t = t_0$ до $t = t_1$. Пусть t_1^- момент времени непосредственно перед t_1 (слева от t_1), а t_1^+- момент времени сразу после t_1 (справа от t_1). Тогда функцию влияния $\lambda(t)$ и гамильтониан в точке t_1^+ можно интерпретировать следующим образом:

$$\lambda(t_1^+) = -\left\{\frac{\partial J(x,u)}{\partial x(t_1)}\right\}^T, \tag{1.118}$$

$$H(x,u,\lambda,t_1^+) = -\frac{\partial J(x,u)}{\partial t_1}. \tag{1.119}$$

В точке же t_1^- выражения (1.118) и (1.119) имеют вид

$$\lambda(t_1^-) = \lambda(t_1^+) + \pi^T\left\{\frac{\partial N(x(t_1),t_1)}{\partial x(t_1)}\right\}^T, \tag{1.120}$$

$$\begin{aligned} &H(x,u,\lambda,t_1^-) = \\ &= H(x,u,\lambda,t_1^+) - \pi^T\left\{\frac{\partial N(x(t_1),t_1)}{\partial t_1}\right\}^T. \end{aligned} \tag{1.121}$$

Здесь π - qмерный вектор постоянных множителей Лагранжа, определяемый так, чтобы удовлетворялось qусловий (1.117). Как видно, из соотношений (1.118-1.119) и (1.120-1.121) следует разрывность функция влияния $\lambda(t)$ и гамильтониан $H(x,u,\lambda,t)$ в точке $t = t_1$. При этом переменные состояния остаются непрерывными в этой точке, т.е. $x(t_1^-) = x(t_1^+)$.

Все изложенное можно перенести на общий случай, когда задаются условия в нескольких внутренних точках траектории. Однако получить решение такой много точечной краевой задачи достаточно сложно.

§ 1.7. Некоторые замечания

Заметим, что полная производная гамильтониана по времени вдоль оптимальной траектории равна частной производной гамильтониана по времени:

$$\begin{aligned} &\frac{dH(x,u,\lambda,t)}{dt} = \\ &= \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial t} + \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)}\frac{dx(t)}{dt} + \\ &+ \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial \lambda(t)}\frac{d\lambda(t)}{dt} + \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)}\frac{du(t)}{dt} = \\ &= \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

на основании уравнений Эйлера – Лагранжа. Это означает, что если гамильтониан от t явно не зависит, то гамильтониан постоянен вдоль оптимальной траектории (точнее вдоль траектории, на которой выполняются необходимые условия оптимальности).

Постановка задачи для всех рассматриваемых в данной главе случаев выглядит следующим образом:

- задан управляемый объект

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,t); \tag{1.122}$$

- задан функционал качества

$$J(x,u) = K(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt. \tag{1.123}$$

Предполагается, что t_0 и $x(t_0) = x_0$ - начальное время и начальное состояние – заданы. Гамильтониан задачи имеет вид:

$$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T(t)f(x,u,t). \tag{1.124}$$

Необходимые условия оптимальности описываются соотношениями

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}x(t) = \left\{ \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial \lambda(t)} \right\}^T, \\ \frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{ \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)} \right\}^T, \end{gathered} \tag{1.125}$$

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} = 0. \tag{1.126}$$

Краевые условия на правом конце для переменной $\lambda(t)$ и поведение гамильтониана на оптимальной траектории зависят от объекта, вида задаваемой области конечных значений состояния системы и задания (или незадания) времени переходного процесса.

Результаты, полученные в данной главе, представляют собой набор необходимых условий оптимальности. В действительности эти условия являются необходимыми условиями локальной оптимальности.

Рассмотрим каждое из составляющих необходимых условий оптимальности.

1. Первое уравнение (для $x(t)$) канонической системы (1.125) есть в точности исходная система уравнений, описывающая объект управления, которая не зависит от дополнительной переменной $\lambda(t)$. Второе уравнение (для $\lambda(t)$) канонической системы (1.126) описывает движение нормали к гиперплоскости вдоль оптимальной траектории. Уравнение имеет множество решений, каждое из которых описывает движение соответствующей нормали к гиперплоскости вдоль оптимальной траектории. Каноническая система имеет решения вдоль любой траектории системы, а не только для оптимального управления.

2. Первое свойство дополнительной переменной $\lambda(t)$ состоит в том, что оптимальное управление является точкой стационарности гамильтониана (1.124).

3. Формулировка необходимых условий (1.125), (1.126) не зависит от типа области S значений конечных состояний системы и от того, фиксировано или нет время окончания переходного процесса.

4. Необходимые условия оптимальности, сформулированные в виде поведения гамильтониана на оптимальной траектории, непосредственно зависят от того, является ли время окончания переходного процесса фиксированным или нет. Гамильтониан постоянен вдоль оптимальной траектории лишь в случае, когда система и функционал явно не зависят от времени.

Глава 2. Принцип максимума Понтрягина

§ 2.1. Постановка задачи

В главе 1 было показано, что оптимальное управление является точкой стационарности функции Гамильтона, т.е.

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} = 0,$$

при этом предполагалось, что на управление никаких ограничений не накладывается, а функции $f(x,u,t)$ и $L(x,u,t)$ обладают соответствующими свойствами дифференцируемости по *u(t)*. В практических задачах множество управлений чаще всего имеет существенные ограничения. Для таких задач необходимые условия в том виде, как они были установлены в главе 1, естественно, непригодны.

Дальнейшим расширением вариационного метода является «Принцип максимума» Л.С. Понтрягина, согласно которому оптимальное управление должно доставлять функции Гамильтона максимальное значение. Принцип максимума Понтрягина требует относительно слабых предположений о дифференцируемости и очень хорошо подходит для решения задач с ограничениями, а также позволяет легко учитывать различные множества конечных состояний.

Пусть управляемый объект описывается нелинейным векторным уравнением:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,t),\ \ x(t_0) = x_0\,;\ x \in R^n,\ u \in R^r, \tag{2.1}$$

где функция $f(x,u,t)$ непрерывна по аргументам вместе с функцией $\partial f(x,u,t)/\partial x(t)$. Допустимым управлением назовем кусочно-непрерывную функцию *u(t)*, принимающую значения из заданного пространства:

$$u(t) \in U,\ t \in [t_0, T]. \tag{2.2}$$

Каждому допустимому управлению $u(t) \in U,\ t \in [t_0, T]$ соответствует некоторое решение $x(t),\ t \in [t_0, T]$ уравнения (2.1) (допустимая траектория).

Качество переходного процесса будем оценивать с помощью функционала:

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt, \tag{2.3}$$

где *L(x,u,t)* – скалярная функция вместе с производными по *x(t)* непрерывная по совокупности переменных.

Для доказательства необходимых условий оптимальности переформулируем постановку задачи. Добавим к фазовым координатам $x_1(t),\ldots,x_n(t)$, меняющихся по закону (2.1), еще одну координату $x_0(t)$, закон изменения которой задан в виде

$$\frac{d}{dt}x_0(t) = L(x,u,t). \tag{2.4}$$

Иначе говоря, будем рассматривать систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x_i(t) = f_i(x_1,...,x_n;u_1,...,u_r,t) = f_i(x,u,t), \\ &i = 0,1,...n;\ \ f_0(x,u,t) = L(x,u,t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

правая часть которых не зависит от переменной $x_0(t)$. В векторной форме система (3.5) будет записываться в виде

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t) = \bar{f}(x,u,t), \tag{2.6}$$

где $\bar{x}(t) \in R^{n+1}, \bar{f}^T(x,u,t) = (L(x,u,t); f^T(x,u,t))$.

Еще раз отметим, что правая часть вектора $\bar{f}(x,u,t)$ не зависит от координаты $x_0(t)$ вектора $\bar{x}(t)$.

Пусть $u(t) \in U$ переводит систему из $x(t_0)$ в $x(T)$, а $x(t)$ − соответствующее решение уравнения (2.1). Обозначим через $\bar{x}_0$ точку $(0, x(t_0))$, т.е. точку пространства $\bar{X}$, имеющую координаты $(0, x_1(t_0),...,x_n(t_0))$. Теперь решение уравнения (2.6), соответствующее управлению $u(t) \in U$, с начальными условиями $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ определено на всем отрезке $t \in [t_0, T]$ и относительно $x_0(t)$ имеет вид

$$x_0(t) = \int_{t_0}^{t} L(x,u,\tau)d\tau .$$

В частности, при $t=T$ получим

$$x_0(T) = \int_{t_0}^{T} L(x,u,\tau)d\tau = J(x,u),$$

т.е. решение $\bar{x}(t)$ уравнения (2.6) с начальными условиями $\bar{x}(t_0)$ проходит при $t=T$ через точку $\bar{x}^T(T) = (J(x,u)_T, x^T(T))$.

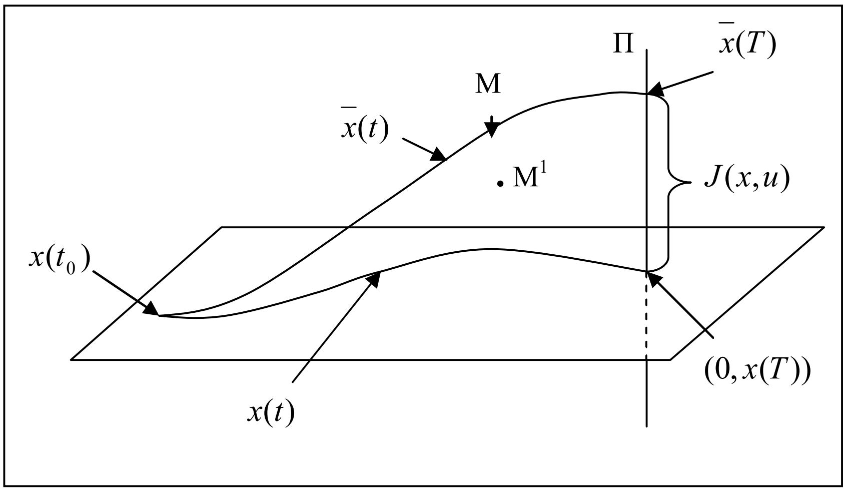

Рис. 2.1. Пространство $\bar{X}$

Проведем прямую П (рис.2.1), проходящую в пространстве $\bar{X}$ через точку $(0, x^T(T))$ параллельно оси $\bar{x}(t_0)$.

Можно сказать, что решение $\bar{x}(t)$ проходит в момент $t=T$ через точку, лежащую на прямой П и имеющую координату $x_0(T) = J(x,u)_T$, т.е. если *u(t)* – допустимое управление, которому соответствует решение $\bar{x}(t)$ уравнения (2.6) с начальным условием $\bar{x}(t_0) = (0, x(t_0))$, проходит в некоторый момент $t=T$ через точку $\bar{x}(T) \in \Pi$ с координатой $x_0(T) = J(x,u)_T$, то управление $u(t) \in U$ переводит (в пространстве *X*) фазовую точку из положения $x(t_0)$ в положение *x(T),* причем функционал (2.3) принимает минимальное значение $J(x,u)_T$.

Теперь сформулируем задачу в следующем виде. В $(n+1)$- мерном пространстве $\bar{X}$ даны точка $\bar{x}^T(t_0) = (0, x_0^T)$ и прямая П, параллельная оси $\bar{x}_0$ и проходящая через точку $(0, x^T(T))$. Среди всех допустимых управлений $u(t) \in U$, обладающих тем свойством, что соответствующее решение $\bar{x}(t)$ уравнения (2.6) с начальными условиями $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ пересекает прямую П, найти такое, для которого точка пересечения с прямой П имеет наименьшую координату $x_0(T)$.

Заметим, что из определения оптимального управления, данного выше, следует, что если $\bar{x}_{opt}(t)$- оптимальная траектория, то не существует траекторий, которые порождают управления $u(t) \in U$, приводящие к меньшему значению критерия. Это справедливо для любой промежуточной точки М траектории $\bar{x}(t)$. В противном случае траектория, проходящая через точку M^1, лежащую ниже точки М оптимальной траектории (рис. 2.1), была бы «лучше» оптимальной. Таким образом, точки, лежащие ниже траектории $\bar{x}_{opt}(t)$, недостижимы.

Введенные условия (2.2) приводят к тому, что допустимые управления должны удовлетворять условию

$$u^*(t) = u^0(t) + \nabla u(t) \in U, \tag{2.7}$$

где $u^0(t)$ - оптимальное управление.

Центральным понятием, позволяющим построить необходимые условия минимума функционала (2.3) в задаче Л.С. Понтрягина, является понятие игольчатого варьирования управления (рис. 2.2). Игольчатым варьированием управления будем называть такое управление, при котором управление $u(t)$ претерпевает отдельные изменения $u^*(t) = v = const$ в точке $t = \tau$ в течение достаточно краткого промежутка времени $\delta t = \varepsilon l$:

$$u^*(t) = \begin{cases} v, \ \tau \le t \le \tau + \varepsilon l \\ u^0(t) \ \ t < \tau, \ \ t > \tau + \varepsilon l, \end{cases} \tag{2.8}$$

где τ - заданная точка непрерывности функции $u(t)$, l – заданное положительное число, ε - произвольное положительное число, $v \in U$.

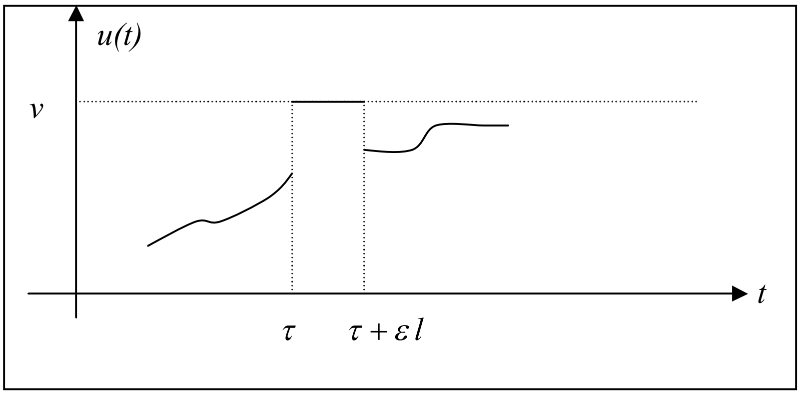

Рис. 2.2. Игольчатое варьирование управления

Рассмотрим влияние игольчатой вариации на движение системы.

Обозначим через $\overline{x}*(t)$ траекторию, содержащую управление $u*(t)$, и определим вариацию фазовой траектории

$$\nabla\overline{x}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\overline{x}*(t)-\overline{x}(t)}{\varepsilon} = \left(\frac{d\overline{x}*(t)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}, \qquad (2.9)$$

где $\overline{x}*(t)$ и $\overline{x}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt}\overline{x}*(t) = \overline{f}(x*,u*,t), \qquad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{x}(t) = \overline{f}(x,u,t), \qquad (2.11)$$

т.е. определяются решениями

$$\overline{x}*(t) = \overline{x}*(t_0) + \int_{t_0}^{t}\overline{f}(x*,u*,t)dt, \qquad (2.12)$$

$$\overline{x}(t) = \overline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\overline{f}(x,u,t)dt. \qquad (2.13)$$

Подставляя (2.12) и (2.13) в (2.9), получим

$$\nabla\overline{x}(t) = \nabla\overline{x}(t_0) + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left\{\overline{f}(x*,u*,t) - \overline{f}(x,u,t)\right\}dt,$$

где $\nabla\overline{x}*(t_0) = \overline{x}*(t_0) - \overline{x}(t_0)$.

Из определения $u*(t)$ видно, что для любого $t<\tau$

$$\overline{x}*(t) = \overline{x}(t)$$

и, следовательно,

$$\nabla\overline{x}(t) = 0 \text{ при } t\in[t_0,\tau). \qquad (2.14)$$

При $t \geq \tau$ получаем

$\nabla\overline{x}(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon l}\frac{1}{\varepsilon}\{\overline{f}(x*,u*,t) - \overline{f}(x,u,t)\}dt + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\tau+\varepsilon l}^{t}\frac{1}{\varepsilon}\{\overline{f}(x*,u,t) - \overline{f}(x,u,t)\}dt.$ Величины как векторные, так и скалярные, имеющие более высокий порядок малости (по ε), будем обозначать символом $0(\varepsilon)$, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 0(\varepsilon)/\varepsilon = 0$. При этом даже для обозначения различных величин более высокого порядка малости, чем ε, будем применять один и тот же символ $0(\varepsilon)$ (так что, например, $0(\varepsilon)+0(\varepsilon)=0(\varepsilon)$).

Используя теорему о конечных приращениях при непрерывности $\overline{f}(x,u,t)$ и $\partial\overline{f}(x,u,t)/\partial x(t)$ и тот факт, что при $t>\tau+\varepsilon l,\ u^*(t)=u(t)$, получим

$$\nabla\overline{x}(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\{l[\overline{f}(x,v,\tau)-\overline{f}(x,u,\tau)]+0(\varepsilon)/\varepsilon\}+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\tau+\varepsilon l}^{t}\left[\frac{\partial\overline{f}(x,u,t)}{\partial\overline{x}(t)}\ \frac{\overline{x}^*(t)-\overline{x}(t)}{\varepsilon}+\frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon}\right]dt,$$

или, после перехода к пределу,

$$\nabla\overline{x}(t)=l[\overline{f}(x,v,\tau)-\overline{f}(x,u,\tau)]+\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\partial\overline{f}(x,u,t)}{\partial\overline{x}(t)}\nabla\overline{x}(t)dt. \qquad (2.15)$$

Сравнивая (2.14) и (2.15), можно сделать вывод – функция $\nabla\overline{x}(t)$ разрывная. При $t_0\le t<\tau$ $\nabla\overline{x}(t)=0$, а при $t\ge\tau$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\nabla\overline{x}(t)=\left\{\frac{\partial\overline{f}(x,u,t)}{\partial\overline{x}(t)}\right\}\nabla\overline{x}(t) \qquad (2.16)$$

с краевым условием

$$\nabla\overline{x}(\tau)=l[\overline{f}(x,v,\tau)-\overline{f}(x,u,\tau)]. \qquad (2.17)$$

Введем сопряженную систему

$$\frac{d}{dt}\overline{p}(t)=-\left\{\frac{\partial\overline{f}(x,u,t)}{\partial\overline{x}(t)}\right\}^T\overline{p}(t). \qquad (2.18)$$

Поскольку уравнение в вариациях (2.16) является однородным, то скалярное произведение $M=\left\langle\overline{p}(t),\nabla\overline{x}(t)\right\rangle$ является постоянным, т.е.

$$M=\left\langle\overline{p}(t),\nabla\overline{x}(t)\right\rangle=const,\ \ \tau\le t\le T. \qquad (2.19)$$

В этом нетрудно убедиться, отыскав производную функции M по времени:

$$\frac{d}{dt}M=\left\langle\left\{\frac{d}{dt}\overline{p}(t)\right\},\nabla\overline{x}(t)\right\rangle+\left\langle\overline{p}(t),\left\{\frac{d}{dt}\nabla\overline{x}\right\}\right\rangle.$$

Учитывая (2.16) и (2.18), будем иметь

$$\frac{d}{dt}M=-\overline{p}^T(t)\frac{\partial\overline{f}(x/u/t)}{\partial\overline{x}(t)}\nabla\overline{x}(t)+\overline{p}^T(t)\frac{\partial\overline{f}(x/u/t)}{\partial\overline{x}(t)}\nabla\overline{x}(t)=0,$$

т.е. $M=\left\langle\overline{p}(t),\nabla\overline{x}(t)\right\rangle=const,\ \ \tau\le t\le T.$

Отметим, что уравнение (2.18) соответствует уравнению Эйлера – Лагранжа в вариационном исчислении.

Построим теперь введенную Л.С. Понтрягиным функцию

$$H(x,u,\overline{p},t)=\overline{p}^T(t)\overline{f}(x,u,t). \qquad (2.20)$$

Из выражения (2.20), принимая во внимание (2.6) и (2.18), найдем, что

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t)=\left\{\frac{\partial H(x,u,\bar{p},t)}{\partial \bar{p}(t)}\right\}^T,$$
$$\frac{d}{dt}\bar{p}(t)=-\left\{\frac{\partial H(x,u,\bar{p},t)}{\partial \bar{x}(t)}\right\}^T. \qquad (2.21)$$

Уравнения (2.21) образуют каноническую систему уравнений Гамильтона.

§ 2.2. Задача со свободным правым концом и заданным временем окончания переходного процесса

Управляемый объект описывается нелинейным векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x,u,t),\ x(t_0)=x_0,\ t\in[t_0,T], \qquad (2.22)$$

где $u(t)$ принадлежит множеству допустимых управлений $u(t)\in U$, время T – задано.

Скалярный критерий качества имеет вид

$$J(x,u)=\int_{t_0}^{T}L(x,u,t)dt. \qquad (2.23)$$

Пусть $u^0(t)\in U$ - оптимальное управление, а $x^0(t)$ - соответствующая оптимальная траектория. Из необходимого условия минимума функционала (2.23), состоящего в неотрицательности его первой вариации, получаем неравенство

$$\nabla J(x^0,u^0)=\nabla x_0^0(T)\ge 0. \qquad (2.24)$$

Дальнейший вывод принципа максимума состоит в том, что значение вариации функционала $\nabla\bar{x}_0^0(T)$ с помощью свойства (2.19) связывается с некоторым выражением, определяемым на траектории. Выберем значение вектор – функции $\bar{p}(t)$ на правом конце (при $t=T$) следующим образом:

$$p_0(T)=-1,\ p_i(T)=0\quad i=1,...,n. \qquad (2.25)$$

Будем рассматривать $\bar{p}(t)$ как решение уравнения (2.18) (или, что то же самое, как решение второго уравнения канонической системы (2.21)) при краевых условиях (2.25). Подставляя (2.25) в (2.19), получим

$$\left\langle \bar{p}^{\,0}(T),\nabla\bar{x}^{\,0}(T)\right\rangle=-\nabla x_0^0(T),$$

и необходимые условия (2.24) принимают вид

$$\left\langle \bar{p}^{\,0}(T),\nabla\bar{x}^{\,0}(T)\right\rangle\le 0. \qquad (2.26)$$

Поскольку скалярное произведение (2.19) на оптимальной траектории есть величина постоянная, то неравенство (2.26) должно выполняться при $t=\tau$:

$$\left\langle \bar{p}^{\,0}(\tau),\nabla\bar{x}^{\,0}(\tau)\right\rangle\le 0. \qquad (2.27)$$

Подставляя в (2.27) выражение (2.17) для $\nabla\bar{x}^{\,0}(\tau)$, будем иметь

$$\left\langle \bar{p}^{\,0}(\tau), \bar{f}(x^0, v, \tau) \right\rangle - \left\langle \bar{p}^{\,0}(\tau), \bar{f}(x^0, u^0, \tau) \right\rangle \le 0.$$

Учитывая (2.20), последнее выражение можно переписать в виде

$$H(x^0, u^0, \bar{p}^{\,0}, \tau) \ge H(x^0, v, \bar{p}^{\,0}, \tau) \qquad (2.28)$$

или

$$H(x^0, u^0, \bar{p}^{\,0}, \tau) = \max_{v \in U} H(x^0, v, \bar{p}^{\,0}, \tau)\,. \qquad (2.29)$$

Таким образом, если управление $u^0(t)$ и траектория $x^0(t)$ доставляют минимум функционалу (2.23), то существует такая непрерывная вектор-функция $\bar{p}^{\,T}(t) = \left\langle p_0(t), p_1(t), ..., p_n \right\rangle$, удовлетворяющая уравнению (2.18) и условию (2.25), что при $t \in [t_0, T]$ функция Понтрягина $H(x^0, u^0, \bar{p}^{\,0}, t)$ (2.20) достигает максимума по всем $u(t) \in U$.

В задаче со свободным правым концом и заданным временем окончания переходного процесса условия трансверсальности (2.25) приводят к такой же структуре двухточечной краевой задачи, которая рассматривалась в разделе § 1.2. Однако, если в задаче Лагранжа управление находится при помощи условия стационарности

$$\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u(t)} = 0,$$

то в задаче Понтрягина управление отыскивается с помощью условия

$$H(x^0, u^0, \bar{p}^{\,0}, \tau) = \max_{v \in U} H(x^0, v, \bar{p}^{\,0}, \tau)\,.$$

Естественно, что в случае, когда U совпадает со всем пространством, а функция Понтрягина имеет один экстремум, который при этом является максимумом, оба условия дают одну и ту же функцию $u^0(t)$.

§ 2.3. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в заданный момент окончания переходного процесса

Доказательство принципа максимума Понтрягина для рассматриваемого случая усложняется тем, что неравенство, аналогичное (2.24), должно выполняться не для всех вариаций, а только для тех из них, которые не нарушают граничных условий.

Проведем ряд дополнительных построений для общего случая, когда значения некоторых переменных фиксированы, а время окончания переходного процесса не фиксировано.

Найдем множество концевых вариаций, получающихся вследствие воздействия нескольких игольчатых вариаций управления и вариаций времени окончания переходного процесса.

Определим вначале концевую вариацию $d\bar{x}(T)$, получаемую при воздействии одной игольчатой вариации управления и варьировании времени окончания переходного процесса:

$$d\bar{x}(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\bar{x}^*(T + \varepsilon\, dT) - \bar{x}(T)}{\varepsilon},$$

где dT - произвольное положительное или отрицательное число. Учитывая, что

$$\bar{x}*(T+\varepsilon\, dT)=\bar{x}*(T)+\bar{f}(x,u,T)\varepsilon\, dT+0(\varepsilon),$$

получим

$$d\bar{x}(T)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\bar{x}*(T)-\bar{x}(T)+\varepsilon\,\bar{f}(x,u,T)dT}{\varepsilon}+\frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)=$$

$$=\nabla\bar{x}(T)+\bar{f}(x,u,T)dT.$$

Содержательный смысл концевой вариации $d\bar{x}(T)$ такой же, как и полной вариации $dx(T)$ из раздела § 1.4.

Рассмотрим теперь результат воздействия игольчатого варьирования на нескольких отрезках траектории, т.е. результат воздействия управления:

$$u*(t)=\begin{cases} v_k, & если\ t\in[\tau_k\,,\ \tau_k+\varepsilon\, l_k],\\ u^0(t), & если\ t\notin[\tau_k\,,\ \tau_k+\varepsilon\, l_k],\end{cases}\qquad k=1,...,q. \tag{2.30}$$

Обозначим через $\nabla\bar{x}_k(t)$ вариацию фазовой траектории, получающейся при независимом воздействии одной игольчатой вариации $\nabla u_k(t)$. Вариация $\nabla\bar{x}_k(t)$ зависит от выбора параметров v_k, τ_k, l_k, определяющих игольчатую вариацию $\nabla u_k(t)$. Для нас будет интересна зависимость $\nabla\bar{x}_k(t)$ только от l_k:

$$\nabla\bar{x}_k(t)=\nabla\bar{x}_k(t,l_k)\,. \tag{2.31}$$

Поскольку дифференциальное уравнение (2.16), решением которого является $\nabla\bar{x}_k(t)$, линейное, а в начальные условия (2.17) параметр l_k входит как множитель, то выражение (2.31) можно переписать в виде

$$\nabla\bar{x}_k(t)=l_k\nabla\bar{x}_k(t,1)\,,$$

где $\nabla\bar{x}_k(t,1)$ - вариация фазовой траектории, соответствующая игольчатому варьированию с параметрами $v_k, \tau_k, l_k=1$.

Обозначим через $\nabla\bar{x}_\Sigma$ суммарную вариацию, получающуюся при управлении (2.30). На основании линейности управлений (2.16) суммарная вариация $\nabla\bar{x}_\Sigma(t)$ равна сумме вариаций

$$\nabla\bar{x}_\Sigma(t)=\sum_{k=1}^{q}\nabla\bar{x}_k(t)=\sum_{k=1}^{q}l_k\,\nabla\overline{x_k}(t,1)\,.$$

Полная вариация $d\bar{x}(T)$, вызванная воздействием управления (2.30) и вариацией времени окончания переходного процесса, будет иметь вид

$$d\bar{x}(T)=\sum_{k=1}^{q}l_k\,\nabla\bar{x}_k(T,1)+\bar{f}(x^0,u^0,T)dT\,. \tag{2.32}$$

Совокупность векторов $d\bar{x}(T)$ образует множество *К*, которое является выпуклым конусом. (Множество *К* называется выпуклым конусом, если: 1) для любой точки *М* множества *К*, отличной от вершины *Р*, радиус *РМ* целиком содержится в этом множестве; 2) отрезок M_1M_2, соединяющий произвольные точки M_1 и M_2 множества, принадлежит этому множеству). Конус *К* называют конусом концевых вариаций.

Дадим геометрическую интерпретацию множеству концевых вариаций (2.32). В *(n+1)* - мерном фазовом пространстве $\overline{X}$ переменных $x_0, x_1, ..., x_n$ будем рассматривать множество *К*, состоящее из точек

$$K : \left\{ \overline{x}(T) + d\overline{x}(T) \right\}, \tag{2.33}$$

иначе говоря, будем откладывать от концевой точки $\overline{x}(T)$ векторы концевых вариаций (2.32), получающиеся при всевозможных выборах $q, v_k, \tau_k, l_k,\ k = 1,...,q,\ dT$.

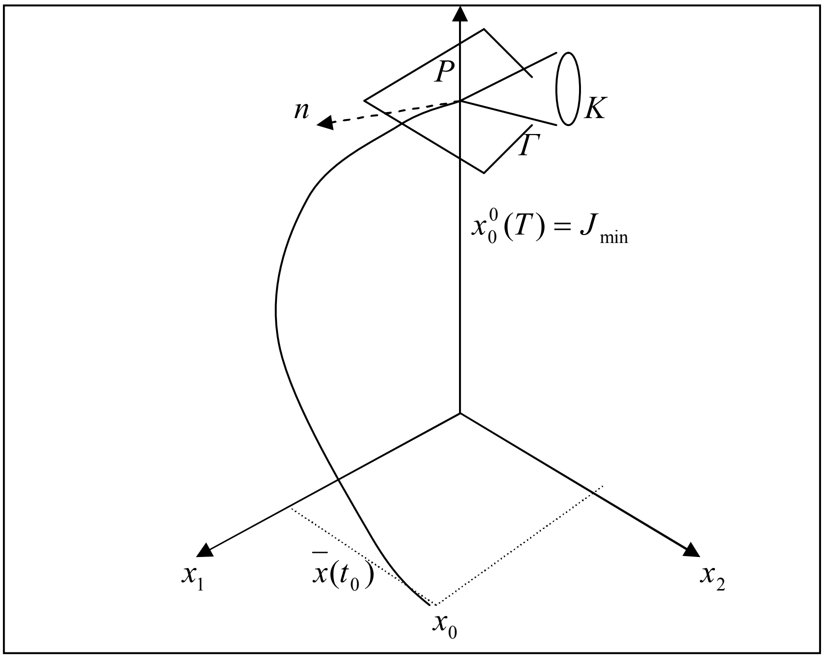

Рис. 2.3. Конус концевых вариаций

Покажем, что *К* – выпуклый конус. Если $d\overline{x}(T)$ - концевая вариация, то и $\alpha\, d\overline{x}(T)$, $\alpha > 0$, является концевой вариацией. Чтобы убедиться в этом, достаточно, согласно (2.32), ввести обозначения:

$$l_k^1 = \alpha\ l_k,\ dT_1 = \alpha\ dT .$$

Следовательно, вместе с каждой точкой $\left\{ \overline{x}(T) + \alpha\ d\overline{x}(T) \right\}$ множество *К* содержит и луч $\overline{x}(T) + \alpha\ d\overline{x}(T),\quad \alpha > 0$, т.е. множество К имеет вершину в точке $\overline{x}(T)$.

Так как точки, расположенные ниже оптимальной траектории, недостижимы, то множество *К* не может заполнить все пространство. Из этого следует, что *К* – конус.

Для того чтобы сделать заключение о выпуклости конуса *К*, рассмотрим две произвольные вариации $d\overline{x}_1(T)$ и $d\overline{x}_2(T)$, и пусть α - произвольное неотрицательное число $0 \le \alpha \le 1$. Тогда

$$\alpha[\bar{x}(T)+d\bar{x}_1(T)]+(1-\alpha)[\bar{x}(T)+d\bar{x}_2(T)]=$$
$$=\bar{x}(T)+\alpha[\sum_{k_1}^{q_1} l_{k_1}\nabla\bar{x}_{k_1}(T,1)+\bar{f}(x^0,u^0T)dT_1]+$$
$$+(1-\alpha)[\sum_{k_2}^{q_2} l_{k2}\nabla\bar{x}_{k2}(T,1)+\bar{f}(x^0,u^0T)dT_2].$$

Обозначив

$$l_k^1=\alpha\, l_{k_1},\; l_k^2=(1-\alpha)l_{k_2},\; dT=\alpha\, dT_1+(1-\alpha)dT_2,$$
$$\nabla\bar{x}_\Sigma(T)=\sum_{k_1}^{q_1} l_k^1\,\nabla\bar{x}_k(T,1)+\sum_{k_2}^{q_2} l_k^2\,\nabla\bar{x}_k(T,1),$$

получим

$$\begin{aligned}&\alpha[\bar{x}(T)+d\bar{x}_1(T)]+(1-\alpha)[\bar{x}(T)+d\bar{x}_2(T)]=\\&=\bar{x}(T)+\nabla\bar{x}_\Sigma(T)+\bar{f}(x^0,u^0,T)dT.\end{aligned}\qquad(2.34)$$

Так как $\bar{x}(T)$ - вершина конуса, а вид второго и третьего слагаемого (2.34) такой же, как и (2.32), то отрезок, соединяющий вариации $d\bar{x}_1(T)$ и $d\bar{x}_2(T)$, входит в конус концевых вариаций. Иными словами, вместе с двумя точками $\bar{x}(T)+d\bar{x}_1(T)$ и $\bar{x}(T)+d\bar{x}_2(T)$ конус *К* содержит отрезок (2.34), соединяющий эти точки, т.е. *К* – выпуклый конус. Поэтому через вершину *Р* (рис. 2.3) можно провести гиперплоскость *Г* таким образом, что конус будет расположен в одном из полупространств (в общем случае возможно существование нескольких гиперплоскостей *Г*). Проведем теперь через точку *Р* «направленную вниз» нормаль *n* к гиперплоскости *Г*. Для любого вектора $d\bar{x}(T)\in K$ будет справедливо

$$\left\langle n, d\bar{x}(T)\right\rangle \le 0.\qquad(2.35)$$

Используя это соотношение, выведем принцип максимума Понтрягина.

Вернемся к постановке задачи. Пусть граничные условия системы

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x,u,t),\quad x\in R^n,\; u\in R^r$$

имеют вид

$$\begin{aligned}&x(t_0)=x_0,\\&\Psi_i(x(T))=0,\; i=1,\dots,k,\; k\le n,\\&t_0,\, T-\text{задано},\end{aligned}\qquad(2.36)$$

причем функции $\Psi_i(x(T))$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы, а якобиан $\left\|\partial\Psi_i(x(T)/\partial x(T)\right\|$ имеет свой максимальный ранг *k* (в этом случае говорят, что правый конец принадлежит *(n-k)* - мерному гладкому многообразию).

Концевые вариации $d\bar{x}(T)$ не должны нарушать граничных условий (3.36), т.е. должно выполняться соотношение

$$\left\langle \frac{\partial\Psi_i(x(T))}{\partial x(T)},\, dx(T)\right\rangle=0,\; i=1,\dots,k.\qquad(2.37)$$

В качестве конечного значения вектор - функции $\bar{p}(T)$ выберем вектор $n^T = (n_{0,} n_1,...,n_n)$, т.е.

$$\bar{p}(T) = n. \tag{2.38}$$

Поскольку вектор $\bar{p}(T)$ выбран в виде (2.38), то для любых $dx(T)$, удовлетворяющих проварьированным граничным условиям (2.37), должно выполняться равенство

$$\langle p(T), dx(T) \rangle = 0. \tag{2.39}$$

Используя выражения (2.37) и (2.39), получим условия трансверсальности в таком виде, как это уже было получено в разделе § 1.4. Для этого умножим каждое уравнение (2.37) на γ_i, сложим полученные выражения, а затем результат вычтем из уравнения (2.39). Тогда получим

$$\sum_{j=1}^{n} \left[p_j(T) - \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \frac{\partial \Psi_i(x(T))}{\partial x_j(T)} \right] dx_j(T) = 0. \tag{2.40}$$

Из выражения (2.40) получаем, что

$$p_j(T) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \frac{\partial \Psi_i(x(T))}{\partial x_j(T)}, \ \ j = 1,...,n. \tag{2.41}$$

Так как, по предположению, якобиан $\left\| \partial \Psi_i(x(T)) / \partial x(T \right\|$ имеет свой максимальный ранг *k*, то, приравнивая к нулю соответствующие *k* коэффициентов в (2.40), можно получить систему с ненулевым детерминантом, определяющую множители $\gamma_1,...,\gamma_k$ по $\Psi_i(x(T))$ однозначно.

Остальные *n-k* условий в (2.40) равны нулю в силу независимости оставшихся вариаций.

В силу выбора $\bar{p}(T) = n$ (2.38) неравенство (2.35) можно переписать в виде

$$\left\langle \bar{p}(T),\ d\bar{x}(T) \right\rangle \le 0. \tag{2.42}$$

Поскольку в настоящем разделе рассматривается задача с фиксированным временем окончания переходного процесса, то *dT=0* и $d\bar{x}(T) = \nabla \bar{x}(T)$, так что неравенство (2.42) можно переписать в виде

$$\left\langle \bar{p}(T),\ \nabla \bar{x}(T) \right\rangle \le 0. \tag{2.43}$$

Согласно (2.19) выражение $\left\langle \bar{p}(t),\ \nabla \bar{x}(t) \right\rangle = const$ для $\tau \le t \le T$. Этот факт позволяет осуществить перенос неравенства (2.43) из конечного времени *t=T* в момент времени $t = \tau$, при котором осуществлялось игольчатое варьирование:

$$\left\langle \bar{p}(T),\ \nabla \bar{x}(T) \right\rangle = \left\langle \bar{p}(\tau),\ \nabla \bar{x}(\tau) \right\rangle \le 0. \tag{2.44}$$

Подставляя в (2.44) выражение (2.17) для $\nabla \bar{x}(\tau)$ при $x^0(\tau),\ u^0(\tau)$, получим неравенство

$$\left\langle \bar{p}^{\,0}(\tau), \bar{f}(x^0, v, \tau) \right\rangle - \left\langle \bar{p}^{\,0}(\tau), \bar{f}(x^0, u^0, \tau) \right\rangle \le 0,$$

которое, используя функцию Понтрягина (2.20), можно переписать в виде

$$H(x^0, v, \overline{p}, \tau) \le H(x^0, u^0, \overline{p}, \tau),$$

или окончательно

$$H(x^0, u^0, \overline{p}, \tau)) = \max_{v \in U} H(x^0, v, \overline{p}, \tau). \qquad (2.45)$$

Таким образом, если управление $u^0(t)$ и траектория $x^0(t)$ доставляют минимум функционалу (2.23) при уравнениях связи (2.22) и краевых условиях (2.36), то существует такая ненулевая непрерывная вектор - функция $\overline{p}^T(t) = (p_0, p_1, ..., p_n),\ p_0 \le 0$, удовлетворяющая условиям трансверсальности (2.41), что при каждом $t \in [t_0, T]$ функция Понтрягина достигает при оптимальном управлении $u^0(t)$ максимума по всем $u(t) \in U$.

Отметим, что при свободном правом конце условия трансверсальности (2.41) дают

$$p_j(T) = 0,\ j = 1, ..., n,$$

что совпадает с результатами предыдущего параграфа.

§ 2.4. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в неопределенный момент окончания переходного процесса

Управляемый объект описывается нелинейным векторным дифференциальным уравнением вида (2.1)

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x, u, t),\ x \in R^n,\ ,u \in R^r \qquad (2.46)$$

с граничными условиями

$$x(t_0) = x_0,$$
$$\Psi_i(x(T), T) = 0,\ i = 1, ..., k,\ k \le n, \qquad (2.47)$$
$$t_0 - \textit{задано.}$$

Требуется отыскать управление $u(t) \in U$, доставляющее минимум функционалу

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{T} L(x, u, t) dt. \qquad (2.48)$$

Положив сначала *dT=0* и повторяя рассуждения раздела § 2.3, получим, что необходимые условия рассматриваемой задачи содержат в себе все необходимые условия, установленные для задачи с заданными значениями некоторых переменных состояния в заданный момент окончания переходного процесса (§ 2.3). Далее вернемся к неравенству (2.35) $\left\langle n, d\overline{x}(T) \right\rangle \le 0$.

Рассмотрим концевую вариацию $d\overline{x}(T)$ (2.32) при $l_k = 0\ k = 1, ..., q$ (игольчатые вариации отсутствуют), и при $dT \ne 0$ будем иметь

$$d\overline{x}(T) = \overline{f}(x^0, u^0, T) dT. \qquad (2.49)$$

Подставляя (2.49) в (2.42), получим

$$\left\langle \overline{p}(T), \overline{f}(x^0, u^0, T) dT \right\rangle \le 0. \qquad (2.50)$$

Поскольку по условию dT может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то соотношение (2.49) выполняется при единственном условии

$$\left\langle \overline{p}(T), \overline{f}(x^0, u^0, T) \right\rangle = 0, \tag{2.51}$$

т.е. в конечный момент $t=T$ функция Понтрягина должна быть равной нулю

$$H(x^0, u^0, \overline{p}, T) = 0. \tag{2.52}$$

Таким образом, в том случае, когда рассматриваются задачи с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в неопределенный момент времени окончания переходного процесса, к необходимым условиям, полученным в предыдущем разделе (§ 2.3), добавляется необходимое условие трансверсальности (2.52).

Для частного случая, когда объект и функционал качества не зависят в явном виде от времени t, т.е. объект описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x, u), \ \ x \in R^n, \ u \in R^r$$

и функционал имеет вид

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{T} L(x, u) dt,$$

функция Понтрягина не зависит от времени и его полная производная по t имеет вид

$$\frac{dH(x, u, \overline{p})}{dt} = \frac{\partial H(x, u, \overline{p})}{\partial \overline{x}(t)} \dot{\overline{x}}(t) + \frac{\partial H(x, u, \overline{p})}{\partial \overline{p}(t)} \dot{\overline{p}}(t) + \frac{\partial H(x, u, \overline{p})}{\partial u(t)} \dot{u}(t).$$

Учитывая тот факт, что первые два слагаемых образуют каноническую систему, связанную с основной задачей, это выражение можно переписать:

$$\frac{dH(x, u, \overline{p})}{dt} = \frac{\partial H(x, u, \overline{p})}{\partial u(t)} \frac{du(t)}{dt}.$$

Внутри множества U необходимое условие максимума H состоит в том, чтобы $dH(x, u, \overline{p}) / du(t) = 0$. Отсюда следует равенство $dH(x, u, \overline{p}) / dt = 0.$ Если максимум H (минимума функционала J) достигается только на замыкании области допустимых управлений, то равенство $\partial H(x, u, \overline{p}) / \partial u(t) = 0$ не будет выполняться. В этих случаях, как правило, ***u(t)*** является постоянным, следовательно, $du / dt = 0$ и опять $dH(x, u, \overline{p}) / dt = 0$. Если одно из двух этих условий не удовлетворяется, то можно показать, что векторы $\partial H(x, u, \overline{p}) / \partial u(t)$ и $du(t) / dt$ взаимно ортогональны и, следовательно, полная производная $dH(x, u, \overline{p}) / dt = 0$.

Таким образом,

$$\max_{u \in U} H(x, u, \overline{p}) = 0, \ t \in [t_0, T]. \tag{2.53}$$

Покажем несколько иным способом, что функция $H(x, u, \overline{p})$ постоянна на интервале $[t_0, T]$. Для этого воспользуемся дополнительным предположением, что множество точек, в которых $u^0(t)$ непрерывно, обладает свойством: если $\hat{t} \in [t_0, T]$- точка, в которой $u^0(t)$ - непрерывно, то $u^*(t)$ непрерывно для всех $t \in [t_0, t^*]$, достаточно близких к $\hat{t}$. Это предположение справедливо, если *u*(t)* имеет конечное число разрывов.

Пусть *t₁* и *t₂* - элементы из $[t_0, T]$, причем *t₁* > *t₂* и функция $u^0(t)$ непрерывна на интервале $[t_1, t_2]$. Покажем, что функция $H(x^0, u^0, \overline{p}^{\,0})$ постоянна на этом интервале. Так как $x^0, u^0, \overline{p}^{\,0}$ непрерывны на этом интервале, то множества

$$\left\{x^0(t) : t \in [t_1, t_2]\right\}, \left\{p(t) : [t_1, t_2]\right\}, \left\{u^0(t) : [t_1, t_2]\right\}$$

ограничены и, следовательно, имеет соответствующие компактные замыкания X_1, P_1, U_1. Функция $H(x, u, \overline{p})$ непрерывна на компактном множестве X_1, P_1, U_1 и имеет, в силу сделанных предположений, непрерывные частные производные по $x(t), p(t)$ на этом компактном множестве.

Определим действительную функцию *m* от *x(t)* и *p(t),* приняв

$$m(x, p) = \sup_{u \in U} H(x, u, \overline{p}). \qquad (2.54)$$

Так как $u^0(t)$ непрерывно на интервале $[t_1, t_2]$, то из соотношения (2.45) можно заключить, что

$$m(x^0, p^0) = H(x^0, u^0, \overline{p}^{\,0}) \qquad (2.55)$$

для t из $[t_1, t_2]$, и поэтому функция $m(x^0, p^0)$ непрерывна. Предположим, что *t и t** - различные точки из $[t_1, t_2]$, тогда получим

$$m(x^0(t^*), p^0(t^*)) \geq H(x^0(t^*), u^0(t), \overline{p}^{\,0}(t^*)), \qquad (2.56)$$

и поэтому

$$\begin{aligned} &m(x^0(t^*), p^0(t^*)) - m(x^0(t), p^0(t)) \geq \\ &\geq H(x^0(t^*), u^0(t), \overline{p}^{\,0}(t^*)) - H(x^0(t), u^0(t), \overline{p}^{\,0}(t)). \end{aligned} \qquad (2.57)$$

Если *t**>t, то из неравенства (2.57) можно найти

$$\begin{aligned} &\frac{m(x^0(t^*), p^0(t^*))}{t^* - t} \geq \\ &\geq \frac{H(x^0(t^*), u^0(t), \overline{p}^{\,0}(t^*)) - H(x^0(t), u^0(t), \overline{p}^{\,0}(t))}{t^* - t}. \end{aligned}$$

Так как производные $\dot{x}^0(t),\ \dot{p}^0(t)$ существуют и $\partial H / \partial x, \partial H / \partial p$ непрерывны, то при $t^* \to t$ справа получается соотношение

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds} m[x^0(s), p^0(s)]_{t+} \geq \\ &\geq \frac{\partial H(x, u, \overline{p})}{\partial x(t)} \dot{x}(t) + \frac{\partial H(x, u, \overline{p})}{\partial p(t)} \dot{p}(t) = 0 \end{aligned} \qquad (2.58)$$

(так как $x^0(t), p^0(t)$ удовлетворяют каноническим уравнениям). Аналогично при $t^* \to t$ слева имеем

$$\frac{d}{ds}m[x^0(s), p^0(s)]_{t-} \geq$$
$$\geq \frac{\partial H(x,u,\overline{p})}{\partial x(t)}\dot{x}(t) + \frac{\partial H(x,u,\overline{p})}{\partial p(t)}\dot{p}(t) = 0. \qquad (2.59)$$

Поскольку $\partial H / \partial x,\ \partial H / \partial p$ непрерывны на $X_1 \times P_1 \times U_1$ и $x^0(t),\ p^0(t)$ существуют, то существуют и производные от $m[x^0(t), p^0(t)]$, и на основании выражений (2.58) и (2.59) можно заключить, что

$$\frac{d}{ds}m[x^0(s), p^0(s)] = 0\,. \qquad (2.60)$$

С помощью соотношений

$$H(x^0(T), u^0(T), \overline{p}^{\,0}(T)) = 0$$

и (3.55) найдем

$$H(x^0(t), u^0(t), \overline{p}^{\,0}(t)) = 0,\ \ t \in [t_0, T]. \qquad (2.61)$$

Таким образом, если управление $u^0(t)$ и траектория $x^0(t)$ доставляют минимум функционалу (2.48) при уравнениях связи (2.46), ограничениях на управление $u(t) \in U$ и краевых условиях (3.47), то существует такая непрерывная ненулевая функция $\overline{p}^{\,T}(t) = \langle p_0(t), p_1(t), ..., p_n(t)\rangle,\ p_0 \leq 0,$ удовлетворяющая сопряженной системе (3.18) и условиям трансверсальности (2.40) и (2.52), что при каждом $t \in [t_0, T]$ функция Понтрягина достигает максимума при оптимальном управлении $u^0(t) \in U.$

Для частного случая, когда объект и функционал качества не зависят в явном виде от времени, максимальное значение функции Понтрягина, принимаемое на оптимальной траектории, постоянно и равно нулю.

Рассмотрим случай, когда ограничения на правом конце задаются в виде функций, т.е. в момент окончания переходного процесса состояние системы должно отвечать следующему условию:

$$\Psi i(x(T), T) = 0,\ i = ,..., k,\ \ k \leq n+1. \qquad (2.62)$$

Вывод необходимых условий проведем с помощью редукции этой задачи к задаче, уже рассмотренной выше.

Введем обозначение

$$x_{n+1}(t) = t$$

и рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt}\overline{x}(t) = \overline{f}(x, u, x_{n+1}),\ \ \frac{d}{dt}x_{n+1}(t) = 1,$$
$$\frac{d}{dt}\overline{p}(t) = -\frac{\partial \overline{f}(x, u, x_{n+1})}{\partial \overline{x}(t)}\overline{p}(t),\ \ \frac{d}{dt}p_{n+1}(t) = -\sum_{j=1}^{n} p_i(t)\frac{\partial f_i(x, u, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}}. \qquad (2.63)$$

Условия на правом конце перепишем в виде

$$\Psi_i(x(T), x_{n+1}(T)) = 0,\ \ i = 1, ..., k.$$

В такой формулировке эта задача, с одной стороны, эквивалентна задаче уже рассмотренной выше, а с другой, является частным случаем задачи § 2.3 (частным - в силу того, что время окончания переходного процесса в явном виде не задано). Определим функцию Понтрягина для рассматриваемой задачи в виде

$$H = H(x, u, \overline{p}, x_{n+1}) + p_{n+1}$$

и выпишем необходимые условия оптимальности. Согласно (2.45) имеем

$$\begin{aligned}&\left\{H(x^0, u^0, \overline{p}, {}^0x_{n+1}) + p_{n+1}\right\} = \\ &= \max_{u \in U}[H(x^0, u^0, \overline{p}, {}^0x_{n+1}) + p_{n+1}].\end{aligned} \qquad (2.64)$$

Поскольку $p_{n+1}(\tau)$ не зависит от управления, то выражение (2.64) после обратной замены $t = x_{n+1}$ запишется в форме (2.45).

Условия трансверсальности (2.40) и (2.52) дают

$$\left\{H(x^0, u^0, \overline{p}, {}^0x_{n+1}) + p_{n+1}\right\}_{\tau} = 0,$$

$$p_{n+1}(T) = -H(x^0, u^0, \overline{p}\,{}^0\tau), \qquad (2.65)$$

$$p_j(T) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_j \frac{\partial \Psi_i(x(T), T)}{\partial x_j(T)}, \; j = 1, \ldots, n, \qquad (2.66)$$

$$p_{n+1}(T) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_j \frac{\partial \Psi_i(x(T), T)}{\partial T}. \qquad (2.67)$$

Сравнивая (2.65) и (2.67), можно записать

$$H(x^0, u^0, \overline{p}\,{}^0, T) = -\sum_{i=1}^{k} \gamma_j \frac{\partial \Psi_i(x(T), T)}{\partial x_j(T)}.$$

Таким образом, если управление $u^0(t)$ и траектория $x^0(t)$ доставляют минимум функционалу (2.48) при уравнениях связи (2.46), ограничениях на управление $u(t) \in U$ и краевых условиях (2.62), то существует такая непрерывная ненулевая функция $\overline{p}^{\,T}(t) = \langle p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t)\rangle, \; p_0 \le 0,$ удовлетворяющая сопряженной системе (2.18) и условиям трансверсальности (2.66) и (2.67), что при каждом $t \in [t_0, T]$ функция Понтрягина достигает максимума при оптимальном управлении $u^0(t) \in U$.

§ 2.5. Задача об оптимальном быстродействии

Сформулируем задачу об оптимальном быстродействии для подвижной области S_t. Дана система

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), t) + B(x(t), t)u(t), \; x \in R^n, \; u \in R^r. \qquad (2.68)$$

Предположим:

1) $f_i(x(t), t), \; b_{ij}(x(t), t), \; i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, r$ - элементы матриц f и B соответственно непрерывны относительно *x(t)* и *t* ;

2) $\dfrac{\partial f_i(x(t), t)}{\partial x_k(t)}, \dfrac{\partial f_i(x(t), t)}{\partial t}, \dfrac{\partial b_{ij}(x(t), t)}{\partial x_k(t)}, \dfrac{\partial b_{ij}(x(t), t)}{\partial t}$ непрерывны по *x(t)* и *t* для $i, k = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, r$.

Предположим, что компоненты вектора управления *u(t)* $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ ограничены по величине соотношением

$|u_j(t)| \le 1, \; j = 1, \ldots, r$ для любого *t* или $u(t) \in U$. (2.69)

Заданная гладкая область определена соотношением

$$\Psi(x(t),t) = 0, \tag{2.70}$$

где вектор $\Psi(x(t),t) = \left\langle \psi_1,...,\psi_q \right\rangle^T \in R^q$, $q \geq 1$.

Будем считать, что

1) $\psi_a(x,t), \dfrac{\partial \psi_a(x,t)}{\partial x(t)}, \dfrac{\partial \psi_a(x,t)}{\partial t}$, $a = 1,...,q$ непрерывны по *x(t)* и *t*;

2) векторы (градиенты) $\dfrac{\partial \psi_a(x,t)}{\partial x(t)}$ линейно независимы для всех $(x,t) \in S$.

Пусть t_0 - заданный начальный момент времени и $x(t_0)$ - заданное начальное состояние системы (2.68).

Функционал определим в виде

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} dt = T - t_0, \tag{2.71}$$

где T – свободно.

Задача заключается в нахождении такого *u(t),* которое

- удовлетворяет ограничениям (2.69);
- переводит $x(t_0)$ в область S;
- минимизирует функционал *J(u)* (2.71).

Гамильтониан системы имеет вид

$$\begin{aligned} &H(x,u,\lambda,t) = 1 + \lambda^T(t)[f(x,t) + B(x,t)u(t)] = \\ &= 1 + \lambda^T(t) f(x,t) + \lambda^T(t) B(x,t) u(t). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Векторы $x(t),\ \lambda(t) \in R^n$ образуют каноническую систему

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} x(t) = \left\{ \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial \lambda(t)} \right\}^T, \\ &\frac{d}{dt} \lambda(t) = -\left\{ \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)} \right\}^T. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Предположим, что $u^0(t)$ -управление оптимальное по быстродействию, выполняющее требования 1 и 2; $x^0(t)$ - оптимальная траектория и T^0 - минимальное время окончания переходного процесса $x(t_0) \to S$. По определению оптимальные величины должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} &\left| u_j^0(t) \right| \leq 1, \quad j = 1,...,r, \\ &x^0(t_0) = x(t_0), \\ &x^0(T^0) \in S. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Третье условие из (2.74) в силу (2.70) означает, что

$$\Psi(x^0, T^0) = 0. \tag{2.75}$$

Из принципа максимума (минимума) имеем

$$H(x^0, u^0, \lambda^0, t) = \min_{u \in U} H(x^0, u, \lambda^0, t), \ t \in [t_0, T] \tag{2.76}$$

или, эквивалентно,

$$H(x^0,u^0,\lambda^0,t) \le H(x^0,u,\lambda^0,t),\ u(t)\in U,\quad t\in[t_0,T]. \qquad (2.77)$$

Учитывая (2.68) и (2.72), последнее неравенство можно переписать:

$$\begin{aligned}
&1+[\lambda^0(t)]^T f(x^0,t)+[\lambda^0(t)]^T B(x^0,t)u^0(t)=\\
&=1+\sum_{i=1}^{n} f_i(x^0,t)\lambda_i^0(t)+\sum_{j=1}^{r} u_j^0(t)\left\{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t)\right\}\le \qquad (2.78)\\
&\le 1+\sum_{i=1}^{n} f_i(x^0,t)\lambda_i^0(t)+\sum_{j=1}^{r} u_j(t)\left\{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t)\right\}.
\end{aligned}$$

Так как первые члены с обеих сторон неравенства равны, то

$$\sum_{j=1}^{r} u_j^0(t)\left\{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t)\right\}\le \sum_{j=1}^{r} u_j(t)\left\{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t)\right\} \qquad (2.79)$$

для всех $u(t)\in U$, $t\in[t_0,T]$.

Введем обозначение

$$g_j^0(t)=\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t),\ j=1,...,r$$

или в векторной форме

$$g^0(t)=B^T(x^0,t)\lambda^0(t),\ \ g(t)\in R^r. \qquad (2.80)$$

При использовании функции $g^0(t)$ неравенство (2.79) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^{r} u_j^0(t)g_j^0(t)\le \sum_{j=1}^{r} u_j(t)g_j^0(t) \qquad (2.81)$$

для всех $\left|u_j(t)\right|\le 1,\ \ j=1,...,r$ и любого $t\in[t_0,T]$.

Уравнение (2.81) означает, что функция

$$\varphi(u(t))=\sum_{j=1}^{r} u_j(t)g_j^0(t)$$

достигает абсолютного минимума при

$$u_j(t)=u_j^0(t).$$

При этом справедливо соотношение

$$\min_{u\in U}\varphi(u(t))=\min_{u\in U}\sum_{j=1}^{r} u_j(t)g_j^0(t)=\sum_{j=1}^{r}\min_{|u_j(t)|\le 1} u_j(t)g_j^0(t). \qquad (2.82)$$

Замена местами *min* и знака $\sum$ возможна, так как функции $u_1(t),...,u_r(t)$ ограничены независимо друг от друга. Отметим, что

$$\min_{|u_j(t)|}\left\{u_j(t)g_j^0(t)\right\}=-\left|g_j^0(t)\right|. \qquad (2.83)$$

Управления $u_i^0(t)$ будут минимизировать функцию $u_j(t)g_j^0(t)$. Следовательно, в силу условия (2.82), управление $u_j^0(t)$ должно быть функциями $g_j^0(t)$ вида

$$\begin{aligned}
&u_j^0(t)=+1, \quad \text{если } g_j^0(t)<0;\\
&u_j^0(t)=-1, \quad \text{если } g_j^0(t)>0; \qquad (2.84)\\
&u_j^0(t)\ \text{неопределенно, если } g_j^0(t)=0.
\end{aligned}$$

Выражения (2.84) можно записать в виде

$$u_j^0(t) = -sign\left\{g_j^0(t)\right\} = \\ = -sign\left\{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t)\right\}, \ j=1,...,r, \ t\in[t_0,T]. \qquad (2.85)$$

Уравнение (2.85) показывает, что оптимальное по быстродействию управление $u^0(t)$ есть вполне определенная функция от $x^0(t), \lambda^0(t)$ и t, если аргумент *sign* не равен нулю. Однако при $g_j^0(t)=0$ величину $u_j^0(t)$ из уравнения (2.85) определить нельзя.

Выделим два случая: первый назовем нормальным, а второй – вырожденным.

Определение. Нормальная задача об оптимальном быстродействии.

Предположим, что на интервале *[t0,T]* имеется счетное количество точек $t_1, t_2, t_3, ...,$

таких, что $t_{aj}\in[t_0,T], \ a=1,2,3,...; \ j=1,...,r$

$$g_j^0(t) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t) = \begin{cases} 0 \ \textit{в том и только в том случае, если } t = t_{aj}; \\ \quad \textit{не равна нулю во всех других случаях.} \end{cases}$$

В этом случае задачу об оптимальном быстродействии называют нормальной.

На рис 2.4 показана функция $g_j^0(t)$ и соответствующее управление $u_j^0(t)$, найденное по уравнению (2.85). Функция $g_j^0(t)$ равна нулю только в изолированные моменты времени, и поэтому управление, оптимальное по быстродействию, есть кусочно-постоянная функция с переключениями. Если все функции $g_j^0(t)$ имеют такие же свойства, то задача управления будет нормальной.

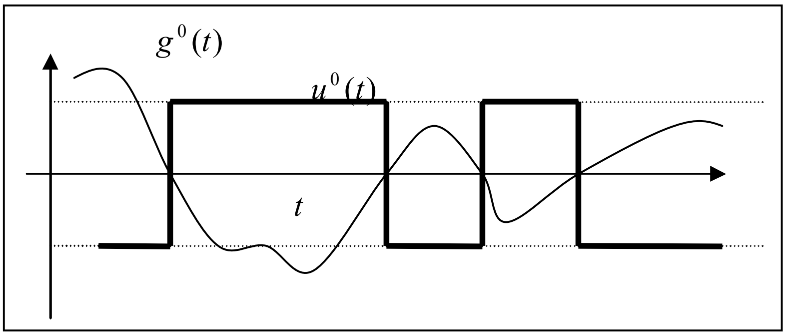

Рис. 2.4. Функция $g_j^0(t)$ полностью определяет управление $u_j^0(t)$

Определение. Вырожденная задача об оптимальном быстродействии.

Предположим, на интервале *[t0,T]* есть один (или более) подынтервал *[T1,T2]* из *[t0,T]* такой, что

$$g_j^0(t) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t) = 0, \ t\in[T_1,T_2].$$

Такую задачу называют вырожденной, а интервал *[T1,T2]* (или полуинтервал) – интервалом вырожденности.

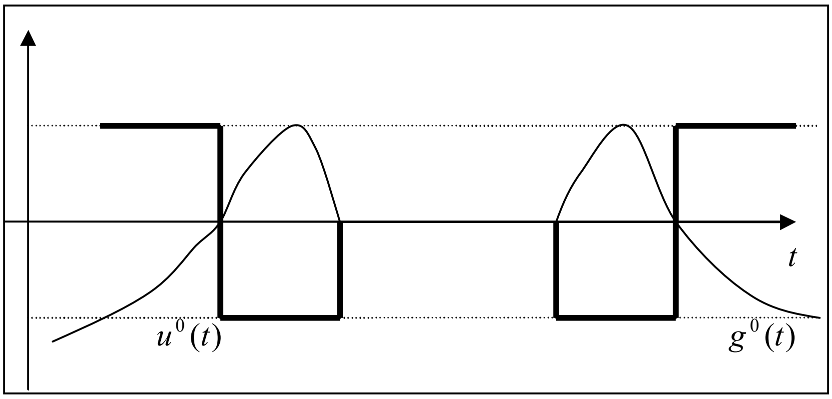

Рис. 2.5. Вырожденная задача об оптимальном быстродействии

Функция $g_j^0(t)$, показанная на рис. 2.5, равна нулю для всех $t \in [T_1, T_2]$ и поэтому соответствует вырожденной задаче. Таким образом, в случае вырожденной задачи существует, по крайней мере, один подынтервал времени, в течение которого уравнение (2.85) не определяет оптимального управления как функцию $x^0(t)$ от и $\lambda^0(t)$.

Последнее утверждение не означает, что оптимальное по быстродействию управление не существует или не может быть определено. Оно лишь означает, что необходимое условие (2.77) не дает определенного соотношения между $u^0(t), x^0(t), \lambda^0(t), t$. Вырожденные задачи будут рассматриваться в главе 6.

Из уравнения (2.85), которое можно записать в виде

$$u^0(t) = -SIGN[B^T(x^0, t)\lambda^0(t)], \qquad (2.86)$$

следует, что оптимальное по быстродействию управление для рассматриваемой задачи есть кусочно-постоянные (или релейные) функции времени. Это обстоятельство, вытекающее из необходимых условий оптимальности, позволяет ограничить поиск оптимальных управлений классом $\left|u_j(t)\right| = 1,\ j = 1,...,r.$

Еще раз отметим, что гамильтониан

$$H(x, u, \lambda, t) = 1 + \lambda^T(t)[f(x, t) + B(x, t)u(t)]$$

и дифференциальные уравнения, образующие каноническую систему

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left\{\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial \lambda(t)}\right\}^T,$$

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial x(t)}\right\}^T,$$

полностью определенную объектом (2.68) и функционалом (2.71) и, таким образом, не зависит от граничных условий при t_0 и области *S*. *H*-минимальное управление (2.86) функционально независимо от наложенных ограничений. Необходимые условия для гамильтониана и дополнительной переменной в конечный момент времени T^0 вместе с заданным начальным состоянием $x(t_0) = x_0$, условиями, задаваемыми на правом конце для дополнительной переменной

$$\lambda(T) = \sum_{k=1}^{q} \gamma_k \frac{\partial \Psi_k(x,T)}{\partial x(T)},$$

и уравнениями, определяющими область конечных значений системы (2.70), дают достаточно граничных условий для решения *2n* дифференциальных уравнений.

В общем случае управлений, при которых выполняются необходимые условия оптимальности, может быть несколько. Эти управления называются экстремальными. Каждое экстремальное управление дает траекторию, которая может быть оптимальной либо локально, либо глобально.

В силу этого отметим следующее:

1. Если оптимальное управление $u^0(t)$ существует и единственно и нет других локальных оптимальных управлений, то существует только одно экстремальное управление, которое и является оптимальным по быстродействию. Предположение об отсутствии других локальных оптимальных управлений превращает принцип минимума в необходимое и достаточное условие.
2. Если имеется m_1 различных оптимальных управлений и если есть m_2 управлений, оптимальных локально, но не являющихся оптимальными глобально, то всего будет $m_1 + m_2$ экстремальных управлений.
3. Из существования экстремальных управлений не вытекает необходимость существования глобально оптимального управления.
4. Если оптимальное по быстродействию управление существует, то его можно найти, вычислив время *T*, требуемое каждым из экстремальных управлений, и выбрать управление, минимизирующее *T*.

Для произвольных нелинейных систем и областей *S* в общем виде получить ответ на вопросы:

- существует ли управление, оптимальное по быстродействию?
- единственно ли оптимальное управление?
- является ли задача нормальной?
- не содержится ли дополнительной информации в необходимых условиях для данных объекта и области его конечных значений?

невозможно. Имеется, однако, ряд результатов, полученных при исследовании линейных систем, которые будут рассмотрены в главе 5.

§ 2.6. Задача на оптимум расхода ресурсов

Как и в предыдущем разделе, объект описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,t) + B(x,t)u(t),\ x(t) \in R^n,\ u(t) \in R^r. \tag{2.87}$$

Компоненты вектора управления $u_1,\ldots,u_r$ ограничены по величине $|u_j(t)| \le 1,\ j=1,\ldots,r,$ или в векторной форме: $u(t)\in U.$

Заданная гладкая область конечных значений состояния S определяется соотношением $\psi_l(x,t)=0,\ l=1,\ldots,n-k,\ k\ge 1$, или в векторной форме $\Psi(x,t)=0,\ \Psi\in R^{n-k}.$ Предположим, что область конечных значений удовлетворяет предположениям, сделанным в § 2.5.

Функционал качества задан в виде

$$J(u)=\int_{t_0}^{T}\left\{\sum_{j=1}^{r}c_j\,|u_j(t)|\right\}dt,\ c_j>0. \tag{2.88}$$

Таким образом, функционал (2.88) оценивает «стоимость» ресурсов, затрачиваемых на управление объектом (2.87).

Синтезируемое управление u(t) должно:

1. удовлетворять заданным ограничениям;
2. переводить систему из состояния $x(t_0)$ в область S;
3. минимизировать функционал (2.88):

если T не задано;

если T фиксировано.

Рассмотрим вначале случай 2.1 (T не задано). Образуем гамильтониан:

$$\begin{aligned}&H(x,u,\lambda,t)=\\&=\sum_{j=1}^{r}c_j\,|u_j(t)|+\lambda^T(t)f(x,t)+\lambda^T(t)B(x,t)u(t).\end{aligned} \tag{2.89}$$

Предположим, что управление $u^0(t)\in U$ оптимальное в смысле минимума функционала (2.88) и $x^0(t)$ – соответствующая ему траектория и $\hat{T}$ - первый момент времени, когда $x^0(\hat{T})\in S$. Отметим, что если T^0 – минимальное время прибытия состояния в область S, то $\hat{T}\ge T^0$.

Векторы $x(t),\lambda(t)$ образуют каноническую систему, связанную с основной задачей:

$$\frac{d}{dt}x(t)=\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial\lambda(t)}\right\}^T,$$

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=-\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)}\right\}^T,$$

или в координатной форме:

$$\dot{x}_k^0(t)=f_k(x^0,t)+\sum_{j=1}^{r}b_{kj}(x^0,t)u_j^0(t); \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}&\dot{\lambda}_k^0(t)=-\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial f_i(x^0,t)}{\partial x_k^0(t)}\right\}\lambda_k^0(t)-\\&-\sum_{j=1}^{r}u_j^0(t)\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k^0(t)}\right\}\lambda_k^0(t),\ k=1,\ldots,n..\end{aligned} \tag{2.91}$$

Из принципа минимума Понтрягина следует, что

$$H(x^0,u^0,\lambda^0,t)\le H(x^0,u,\lambda^0,t),\ u(t)\in U,\ t\in[t_0,T].$$

Учитывая это, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{r} c_j \left|u_j^0(t)\right| + \{\lambda^0(t)\}^T [f(x^0,t) + B(x^0,t)u^0(t)] \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{r} c_j \left|u_j^0(t)\right| + \{\lambda^0(t)\}^T [f(x^0,t) + B(x^0,t)u(t)],$$

которое дает соотношение

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{r} c_j \left|u_j^0(t)\right| + \sum_{j=1}^{r} u_j^0(t) \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t) \right\} \le \\
&\le \sum_{j=1}^{r} c_j \left|u_j(t)\right| + \sum_{j=1}^{r} u_j(t) \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t) \right\},\ u(t) \in U,\ t \in [t_0, T].
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Для задачи с заданным временем окончания переходного процесса и движущимся множеством целей принцип минимума определяет значение гамильтониана при $t = \hat{T}$:

$$H(x^0, u^0, \lambda^0, \hat{T}) = \sum_{i=1}^{n-k} \beta_i \frac{\partial \Psi_i(x^0, \hat{T})}{\partial \hat{T}}. \tag{2.93}$$

Кроме того, для этого типа задач краевое условие на правом конце для переменной $\lambda(t)$ имеет вид

$$\lambda^0(\hat{T}) = \sum_{i=1}^{n-k} \gamma_i \left\{ \frac{\partial \psi_i(x^0, \hat{T})}{\partial x(\hat{T})} \right\}. \tag{2.94}$$

В (2.92) и (2.93) β_i, γ_i *i-1,…,n-k* - некоторые постоянные.

Рассматриваемая задача имеет решение, когда заданное время окончания переходного процесса $\hat{T}$ больше или равно минимальному времени окончания переходного процесса T^0 (т.е. $\hat{T} \ge T^0$). Таким образом, если оптимальное по расходу ресурсов управление существует, то соответствующие траектории должны удовлетворять следующим условиям:

а) если T не задано, то необходимые условия выражаются соотношениями (2.90), (2.91), (2.92), (2.94);

б) если $\hat{T}$ задано, то необходимые условия выражаются соотношениями (2.90), (2.91), (2.92), (2.94), однако заданное время не может быть меньше, чем минимальное время, находимое в задаче о быстродействии при минимуме расхода ресурсов.

Как это уже делалось в § 2.5, используя выражение (2.92), получим уравнение, связывающее оптимальное по расходу ресурсов управление с траекторией системы, соответствующей $\lambda^0(t)$.

Определим функцию $q(t) \in R^r$ в виде

$$q^0(t) = B(x^0,t)\lambda^0(t). \tag{2.95}$$

Выражение (2.92) с учетом (2.95) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{r} c_j \left\{ \left|u_j^0(t)\right| + u_j^0(t)\frac{q_j^0(t)}{c_j} \right\} \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{r} c_j \left\{ \left|u_j(t)\right| + u_j(t)\frac{q_j^0(t)}{c_j} \right\},\ u(t)\in U,\ t\in[t_0,T]. \tag{2.96}$$

Выражение (2.96) означает, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left\{ \left|u_j^0(t)\right| + u_j^0(t)\frac{q_j^0(t)}{c_j} \right\} = \min_{u(t)\in U} \sum_{j=1}^{n} c_j \left\{ \left|u_j(t)\right| + u_j(t)\frac{q_j^0(t)}{c_j} \right\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_j \left\{ \min_{u(t)\in U} \left[\left|u_j(t)\right| + u_j(t)\frac{q_j^0(t)}{c_j} \right] \right\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\min_{\left|u_j(t)\right|\le 1} \left\{ \left|u_j(t)\right| + u_j(t)\frac{q_j^0(t)}{c_j} \right\} =$$
$$= \begin{cases} 0,\ \textit{если}\ \left|\dfrac{q_j^0(t)}{c_j}\right| < 1, \\ 1-\left|\dfrac{q_j^0(t)}{c_j}\right|,\ \textit{если}\ \left|\dfrac{q_j^0(t)}{c_j}\right| \ge 1. \end{cases} \tag{2.97}$$

Так как минимум имеет место при $u(t)=u^0(t)$, то находим, что $u^0_j(t)$ связано с $q^0_j(t)$ и, следовательно, с $x^0(t)$ и $\lambda^0(t)$ по (2.92) следующим образом:

$$\begin{aligned} &u_j(t) = 0, && \textit{если}\ -1 < \frac{q_j^0(t)}{c_j} < 1, \\ &u_j(t) = +1, && \textit{если}\ \frac{q_j^0(t)}{c_j} < -1, \\ &u_j(t) = -1, && \textit{если}\ \frac{q_j^0(t)}{c_j} > +1, \\ &0 < u_j(t) < 1, && \textit{если}\ \frac{q_j^0(t)}{c_j} = -1, \\ &-1 \le u_j(t) \le 0, && \textit{если}\ \frac{q_j^0(t)}{c_j} = +1. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Соотношения (2.98) в компактной форме записываются в виде

$$u_j^0(t) = -dez\left\{\frac{q_j^0(t)}{c_j}\right\} = -dez\left\{\frac{1}{c_j}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t)\right\} \tag{2.99}$$

или в векторной форме

$$u^0(t) = -DEZ\left\{C^{-1}B^T(x^0,t)\lambda^0(t)\right\}, \tag{2.100}$$

где

$$C=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_r \end{bmatrix}.$$

Из (2.98) видно, что если функция $\left|\dfrac{q_j^0(t)}{c_j}\right| \neq 1,$ то оптимальное по расходу ресурсов управление полностью определено, если же $\left|\dfrac{q_j^0(t)}{c_j}\right| = 1,$ то можно лишь угадать знак при управлении, само же оптимальное по расходу ресурсов управление найти нельзя. Это обстоятельство приводит к понятию нормальной и вырожденной задач на оптимум расхода ресурсов.

Определение. Нормальная задача на оптимум расхода ресурсов (рис.2.6).

Предположим, что на интервале *[t0,T],* когда время переходного процесса не задано, или на интервале $[t_0,\widehat{T}]$ при фиксированном времени имеется счетное множество моментов времени $\tau_1,....,\tau_\gamma \in [t,_0\, T]$ *или* $[t,_0\, \widehat{T}]$ таких, что

$$\left|\frac{q_j^0(t)}{c_j}\right| = \frac{1}{c_j}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t) = 1$$

в том случае, если $t=\tau_k,\ k=1,...,\gamma.$ Тогда задачу на оптимум расхода ресурсов будем называть нормальной. Моменты времени τ_k называют моментами переключений.

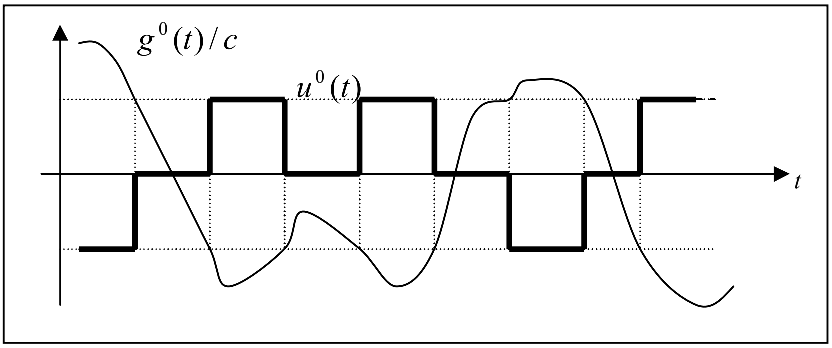

Рис. 2.6. Нормальная задача на оптимум расхода ресурсов

В этом случае оптимальное по расходу ресурсов управление есть кусочно-постоянная функция времени, а ее значения *+1* или *–1.*

Очевидно, что вырожденная задача возникает в том случае, если $\left|\dfrac{q_j^0(t)}{c_j}\right| = 1$ в течение конечного интервала времени.

Определение. Вырожденная задача на оптимум расхода ресурсов (рис.2.7).

Предположим, что на интервале $[t_0,T]$, когда время переходного процесса не задано, или на интервале $[t_0,\widehat{T}]$ при фиксированном времени имеется один (или более) подынтервал $[T_1,T_2]$ такой, что

$$\left|\frac{q_j^0(t)}{c_j}\right| = \left|\ \frac{1}{c_j}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x^0,t)\lambda_i^0(t)\ \right| = 1,\ t\in[T_1,T_2].$$

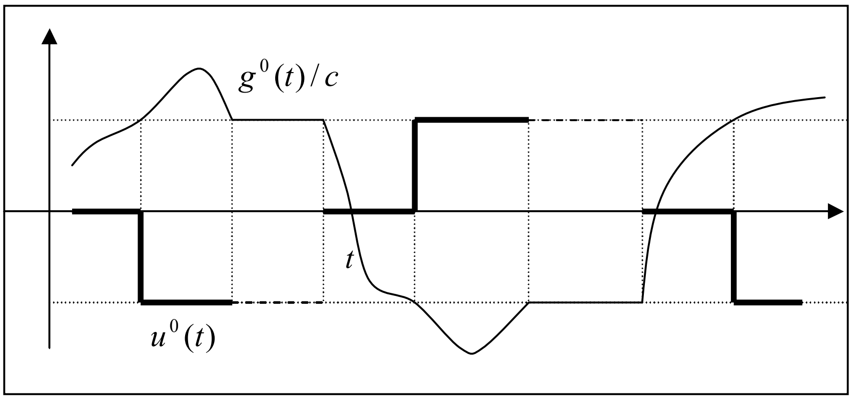

Рис. 2.7. Вырожденная задача на оптимум расхода ресурсов

Такую задачу называют вырожденной, а интервал $[t_0,T]$ интервалом вырожденности. Последнее не означает, что оптимального по расходу ресурсов управления не существует. Это лишь означает, что необходимое условие, выраженное в виде принципа минимума (максимума) Понтрягина, не позволяет установить однозначно соответствие между оптимальным по расходу ресурсов управлением с траекторией системы и дополнительной переменной $\lambda^0(t)$.

Таким образом, если задача нормальна, то оптимальное по расходу ресурсов управление определяется соотношением (2.100). Отметим, что экономия ресурсов происходит в периоды, когда $u^0(t)=0$.

§ 2.7. Некоторые замечания по принципу максимума

Принцип максимума представляет собой набор необходимых условий локальной оптимальности. Действительно, если предположить, что $\widehat{u}(t)$ - управление, переводящее начальную точку в множество S, то для всех $u(t)$, близких в смысле нормы

$$\|u(t)-\widehat{u}(t)\| = \sup_t \|u(t)-\widehat{u}(t)\| \le \varepsilon,\ \varepsilon > 0,$$

удовлетворяется соотношение

$$J(u) \ge J(\widehat{u}).$$

Полагая параметр ε достаточно малым, можно показать, что существует неположительная постоянная $\widehat{p}_0$ и функция $\widehat{p}(t)$, при которых различные условия принципа максимума будут удовлетворяться для $\widehat{p}_0, \widehat{p}(t), \widehat{u}(t)$ и траектории $\widehat{x}(t)$, соответствующей управлению $\widehat{u}(t)$.

Таким образом, принцип максимума по своей природе подобен условию локального минимума обычной функции, производная которой в точке минимума обращается в нуль. Рассмотрим каждое из необходимых условий, как это было сделано в разделе § 1.6.

1.Первое уравнение (для $\dot{x}(t)$) канонической системы (2.21) есть в точности наш исходный объект (2.1), который не зависит от дополнительной переменной $\overline{p}(t)$. Второе уравнение (для $\dot{p}(t)$) канонической системы (2.21) описывает движение нормали *n* к гиперплоскости вдоль оптимальной траектории (рис. 2.2). Уравнение имеет много решений, каждое из которых соответствует движению некоторой нормали к гиперплоскости вдоль оптимальной траектории. Каноническая система (2.21) имеет решение вдоль любой траектории системы, а не только для оптимального управления.

2.Первое свойство оптимальной дополнительной переменной $\overline{p}(t)$ состоит в том, что оптимальное управление должно максимизировать функцию Понтрягина. Эту максимизацию надо рассматривать следующим образом. В определенный момент времени, например $\hat{t} \in [t_0, T]$, три вполне определенных вектора $x^0(\hat{t}), u^0(\hat{t}), \overline{p}(\hat{t})$ и число $H(x^0, u^0, \overline{p}, \hat{t})$ больше или равно числу $H(x^0, v, \overline{p}, \hat{t})$, где *v* –любой элемент из области *U*. Этим было показано, что функция Понтрягина, как функция от *u(t),* имеет абсолютный максимум вдоль оптимальной траектории, независимо от характера области ограничений.

3.Максимизация функции Понтрягина может быть истолкована геометрически (рис. 2.2) как утверждение: все направления, в которых можно двигаться от заданной точки оптимальной траектории, лежат по другую сторону от гиперплоскости, определяемой дополнительными переменными.

4.Было показано, что функция Понтрягина максимизируется в точках непрерывности $u^0(t)$. Необходимое условие, определяемое в виде максимума функции Понтрягина, должно выполняться для всех точек, за исключением счетного множества точек на интервале $[t_0, T]$. Отметим, что точки, в которых функцию Понтрягина нельзя максимизировать, должны быть точками разрыва $u^0(t)$.

5.Формулировка необходимых условий, определяемых канонической системой и максимизацией функции Понтрягина на оптимальной траектории, не зависит от типа области *S* и от того, фиксировано время окончания переходного процесса или нет.

6.Необходимое условие, определяемое как поведение функции Понтрягина на оптимальной траектории, непосредственно зависит от того, задано время окончания переходного процесса или нет. Вывод равенства функции Понтрягина нулю в конечный момент времени следует из того, что конечное время не задано. Функция Понтрягина постоянна вдоль оптимальной траектории лишь в случае, когда система и функционал явно от времени не зависят.

7.Принцип максимума Понтрягина есть условие необходимое, но не достаточное в общем случае для сильной оптимальности. Это означает, что он дает множество, возможно, даже бесконечное, решений задачи. Выбор решения, удовлетворяющего принципу максимума из возможных подобных решений, обеспечивающего наименьшее значение функционала, связан не только с большими вычислительными затратами, но с риском получить ложные выводы, если не будут найдены все экстремали.

8.В последние годы принцип максимума Понтрягина получил широкое распространение в форме принципа минимума. Преимущества такого подхода состоят в его более тесной связи с вариационным исчислением, принципом Гамильтона в механике и динамическим программировании Беллмана.

При формулировке этого принципа используется вектор вспомогательных переменных $\overline{\lambda}(^T t) = \left\langle \lambda_0(t), \lambda^T(t) \right\rangle$, определяемый соотношением

$$\overline{\lambda}(t) = -\overline{p}(t),$$

где $\lambda_o(t) = -p_0(t),\ \lambda_0 \geq 0$ (обычно $\lambda_0 = 1$).

В этом случае гамильтониан и функция Понтрягина связаны соотношением

$$H(x, u, \overline{\lambda}, t) = -H(x, u, \overline{p}, t).$$

Если задача включает вырожденный случай, для которого $\lambda_0 = 0$, то необходимо использовать функцию Понтрягина и каноническую систему (2.21). Если же $\lambda_0 > 0$, то можно положить $\lambda_0 \equiv 1$.

Глава 3. Достаточные условия в задачах конструирования программных движений

§ 3.1. Постановка задачи

На основе ряда предположений относительно поведения функционала качества найдем некоторые достаточные условия оптимальности, которые дополняют необходимые условия, полученные в главах 1 и 2.

Результатом исследований данной главы будут:

- условие выпуклости (усиленное условие Лежандра – Клебша);
- условие нормальности;
- условие отсутствия сопряженных точек на траектории (условие Якоби).

Эти условия, совместно с необходимыми условиями, полученными в главах 1 и 2, образуют систему необходимых и достаточных условий, по крайней мере, локального минимума критерия $J(x,u)$.

§ 3.2. Переход к открытой области изменений управления

Предположим, что в случае, когда на управляющие воздействия наложены ограничения, область ограничений является параллелепипедом, у которого

либо $0 \le u_i(t) \le 1$, $i = 1,...,r$,

либо $a_i(x,t) \le u_i(t) \le b_i(x,t)$, $i = 1,...,r$.

В этом случае в соответствии с принципом максимума Понтрягина стационарная траектория часто содержит дуги, вдоль которых вектор управления принадлежит границе U. Используя операцию, предложенную Фрайесом де Вебеком [2], можно перейти к открытой области изменения управления. Эта операция состоит в замене вектора $u(t)$ функцией другого вектора $v(t)$, не ограниченного и, следовательно, свободно варьируемого. Геометрически эта операция отображает область U во все пространство R^r. Она описывается, например, следующими соотношениями:

$$u_i(t) = \frac{1}{2}[1 + \cos v_i(t)],\ i = 1,...,r,$$

или

$$u_i(t) = \frac{1}{2}[b(x,t) + a(x,t)] + \frac{1}{2}[b(x,t) - a(x,t)]\cos v_i(t),\ i = 1,...r,$$

где $v(t) \in R^r$.

В общем случае, когда вектор $u(t)$ имеет некоторые неограниченные компоненты, рассматриваемая ограниченная область U соответствует проекции полной области в подпространство ограниченных управлений. В этом случае переход к открытой области изменений управляющих воздействий выполняется только для ограниченных управлений.

Переход к открытой области изменения управлений устраняет все ограничения на управление. Поэтому можно применять классическое вариационное исчисление, свободно варьируя управления.

Дальнейшее изложение материала в этой главе предполагает, что операция по переходу к открытой области управляющих воздействий, с использованием вышеизложенной методики, выполнена успешно.

§ 3.3. Управление с обратной связью в задаче с заданным временем окончания переходного процесса

Необходимые условия в рассматриваемой задаче записываются в виде

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,t),$$

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)}\right\}^T, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} = 0,$$

где $x(t_0) = x_0$, t_0, T - заданы,

$$\lambda(T) = -\left\{\ \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial(T)}\ \right\}^T,$$

$$\Phi(x(T)) = K(x(T)) + \gamma^T \Psi(x(T)),$$

$$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T(t) f(x,u,t).$$

Последнее уравнение в (3.1) предполагает, что ни одно ограниченное оптимальное управление не достигает своего предельного значения.

Расширенный функционал качества имеет вид

$$\bar{J}(x,u) =$$

$$= K(x(T)) + \gamma^T \Psi(x(T)) + \int_{t_0}^{T} \{H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T(t)\frac{d}{dt}x(t)\}dt. \tag{3.2}$$

Отклонения от оптимальной траектории, вызванные вариациями начальных состояний $\nabla x(t_0)$ и конечных условий $\nabla\Psi(x(T))$, будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\nabla x(t) = f_x(x,u,t)\nabla x(t) + f_u(x,u,t)\nabla u(t),$$

$$\frac{d}{dt}\nabla\lambda(t) = -H_{xx}(x,u,\lambda,t)\nabla x(t) -$$

$$- f_x^T(x,u,t)\nabla\lambda(t) - H_{xu}(x,u,\lambda,t)\nabla u(t),$$

$$H_{ux}(x,u,\lambda,t)\nabla x(t) + H_{uu}(x,u,\lambda,t)\nabla u(t) + f_u^T(x,u,t)\nabla\lambda(t) = 0,$$

где $\nabla x(t_0)$ и $\nabla\Psi(x(T))$ - заданы, (3.3)

$$\nabla\lambda(T) = \{K_{xx}(x(T)) + [\gamma^T \Psi_x(x(T))]_x\}\nabla x(T) + \Psi_x^T(x(T))d\gamma.$$

Здесь нижний индекс обозначает переменную, по которой производится дифференцирование, т.е., например,

$$H_{uu}(x,u,\lambda,t) = \frac{\partial^2 H(x,u,\lambda,t)}{\partial u^2(t)}.$$

Прежде чем начинать исследование поведения функционала (3.2), найдем уравнение для приращений управляющих воздействий.

Предположим, что матрица $H_{uu}(x,u,\lambda,t)$ невырождена для $t_0 \le t \le T$, можно разрешить третье уравнение из (3.3) относительно $\nabla u(t)$:

$$\nabla u(t) = \\ --H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)\left[H_{ux}(x,u,\lambda,t)\nabla x(t) + f_u^T(x,u,t)\nabla\lambda(t)\right]. \tag{3.4}$$

Подстановка выражения для $\nabla u(t)$ в уравнения, определяющие $\nabla \dot{x}(t)$ и $\nabla \dot{\lambda}(t)$, дает

$$\frac{d}{dt}\nabla x(t) = A(t)\nabla x(t) - B(t)\nabla\lambda(t), \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt}\nabla\lambda(t) = -A^T(t)\nabla\lambda(t) - C(t)\nabla x(t), \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned} &A(t) = f_x(x,u,t) - f_u(x,u,t)H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)H_{ux}(x,u,\lambda,t),\\ &B(t) = f_u(x,u,t)H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)f_u^T(x,u,t),\\ &C(t) = H_{xx}(x,u,\lambda,t) -\\ &- H_{xu}(x,u,\lambda,t)H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)H_{ux}(x,u,\lambda,t). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Будем искать $\nabla\lambda(t)$ и $\Psi(x(t)) = \Psi(x(T))$ в виде

$$\nabla\lambda(t) = S(t)\nabla x(t) + R(t)d\gamma\,, \tag{3.8}$$

$$\nabla\Psi(x(t)) = R^T(t)\nabla x(t) + Q(t)d\gamma, \tag{3.9}$$

здесь: $d\gamma$ и $\nabla\Psi(x(T))$ - векторы с постоянными бесконечно малыми компонентами;

S(t), R(t) и *Q(t)* матрицы.

Сравнивая уравнения (3.8) при $t=T$ и условия выбора $\nabla\lambda(T)$, определенное выражением (3.3), а также принимая во внимание, что $\nabla\Psi(x(t)) = \Psi_x(x(T))\nabla x(T))$, будем иметь

$$\begin{aligned} &S(T) = K_{xx}(x(T)) + [\gamma^{\,T}\Psi_x(x(T))]_x,\\ &R(T) = \Psi_x^T(x(T)),\\ &Q(T) = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Продифференцируем выражения (3.8) и (3.9) по времени, считая $d\gamma$ и $\nabla\Psi(x(T))$ постоянными величинами:

$$\frac{d}{dt}\nabla\lambda(t) = \dot{S}(t)\nabla x(t) + S(t)\nabla\dot{x}(t) + \dot{R}(t)d\gamma, \tag{3.11}$$

$$\frac{d}{dt}R^{\,T}(t)\nabla x(t) + R^T(t)\nabla\dot{x}(t) + \dot{Q}\,d\gamma = 0. \tag{3.12}$$

Уравнение (3.5) с учетом (3.8) будет выглядеть:

$$\frac{d}{dt}\nabla x(t) = [A(t) - B(t)S(t)]\nabla x(t) - B(t)R(t)d\gamma. \tag{3.13}$$

Приравнивая правые части уравнений (3.6) и (3.11) и учитывая (3.13), будем иметь

$$[\frac{d}{dt}S(t)+S(t)A(t)+A^T(t)S(t)-$$
$$-S(t)B(t)S(t)+C(t)]\nabla x(t)+ \qquad (3.14)$$
$$+[\frac{d}{dt}R(t)+A^T(t)R(t)-S(t)B(t)R(t)]d\gamma=0.$$

Аналогично, подставив (3.13) в (3.12), получим

$$\left[\frac{d}{dt}R(t)+A^T(t)R(t)-S(t)B(t)R(t)\right]\nabla x(t)+$$
$$+\left[\frac{d}{dt}Q(t)-R^T(t)B(t)R(t)\right]d\gamma=0. \qquad (3.15)$$

Если рассматривать (3.14) и (3.15) как тождества, справедливые при произвольных значениях $\nabla x(t)$ и $d\gamma$, то коэффициенты при $\nabla x(t)$ и $d\gamma$ должны обращаться в нуль, откуда:

$$\frac{d}{dt}S(t)+S(t)A(t)+A^T(t)S(t)-S(t)B(t)S(t)+C(t)=0,$$
$$\frac{d}{dt}R(t)+A^T(t)R(t)-S(t)B(t)R(t)=0, \qquad (3.16)$$
$$\frac{d}{dt}Q(t)-R^T(t)B(t)R(t)=0.$$

Соотношения (3.10) являются граничными условиями матричных уравнений (3.16).

Используя (3.8), перепишем (3.4) как функцию параметров $\nabla x(t)$ и $d\gamma$:

$$\nabla u(t)=$$
$$=-H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)\{[H_{ux}(x,u,\lambda,t)+f_u^T(x,u,t)S(t)]\nabla x(t)+ \qquad (3.17)$$
$$+f_u^T(x,u,t)R(t)d\gamma)\}.$$

Для того чтобы получить $\nabla u(t)$ как функцию $\nabla x(t)$ и $\nabla\Psi(x(t))$, обратимся к выражению (3.9). Предположив, что матрица *Q(t)* обратимая, будем иметь

$$d\gamma=Q^{-1}(t_0)[\nabla\Psi(x(T))-R(t_0)\nabla x(t_0)]. \qquad (3.18)$$

Таким образом, существование $d\gamma$ для всех значений $\nabla\Psi(x(t))$ связано с невырожденностью матрицы *Q(t)*.

Подставляя (3.18) в (3.17), получаем

$$\nabla u(t)=-H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)\{[H_{ux}(x,u,\lambda,t)+$$
$$+f_u^T(x,u,t)]\{S(t)-R(t)Q^{-1}(t)R^T(t)\}\nabla x(t)+ \qquad (3.19)$$
$$+f_u^T(x,u,t)R(t)Q^{-1}(t)\nabla\Psi(x(t))\}.$$

Это непрерывный закон управления с обратной связью, при котором критерий $J(x,u)$ достигает минимума и терминальные значения имеют требуемые малые отклонения $\nabla\Psi(x(T))$.

§ 3.4. Достаточные условия локального минимума при заданном времени окончания переходного процесса

Вторая вариация расширенного критерия качества (3.2), записанная с точностью до членов второго порядка (а все ограничения – с точностью до членов первого порядка) малости относительно $\nabla x(t)$ и $\nabla u(t)$, будет иметь вид:

$$\nabla^2 \overline{J}(x,u) = \frac{1}{2}\nabla x^T(t)[K_{xx}(x(T)) + \{\gamma^T \Psi_x(x(T))\}_x]\nabla x(t) +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} (\nabla x^T(t)\ \nabla u^T(t))\begin{pmatrix} H_{xx}(x,u,\lambda,t) & H_{xu}(x,u,\lambda,t) \\ H_{ux}(x,u,\lambda,t) & H_{uu}(x,u,\lambda,t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla x(t) \\ \nabla u(t)\end{pmatrix}dt \tag{3.20}$$

при выполнении условий (3.3).

Добавим к (3.20) следующее тождество:

$$[\nabla x^T(T)\Psi_x^T(T) - \nabla \Psi^T(x(T))]d\gamma + \qquad .$$
$$+\int_{t_0}^{T}\{d\gamma^T R^T(t)[f_x(x,u,t)\nabla x(t) + f_u(x,u,t)\nabla u(t) - \frac{d}{dt}\nabla x(t)] +$$
$$+\frac{1}{2}\nabla x^T(t)S(t)[f_x(x,u,t)\nabla x(t) + f_u(x,u,t)\nabla u(t) - \frac{d}{dt}\nabla x]\}dt \equiv 0,$$

в котором $d\gamma = const,\ R(t),\ S(t)$ определяются решениями уравнений (3.16) с краевыми условиями (3.10)

Интегрируя $d\gamma^T R^T(t)\left\{\frac{d}{dt}\nabla x(t)\right\}$ и $\nabla x^T(t)S(t)\left\{\frac{d}{dt}\nabla x(t)\right\}$ по частям, получим

$$\nabla^2 \overline{J}(x,u) = \frac{1}{2}\nabla x^T(T)[K_{xx}(T) + \{\gamma^T \Psi_x(x(T))\}_x - S(T)]\nabla x(T) +$$
$$+ d\gamma^T\{[\Psi_x(x(T)) - R^T(T)]\nabla x(T) - \nabla\Psi(T)\} +$$
$$+\frac{1}{2}\nabla x^T(t_0)S(t_0)\nabla x(t_0) + \nabla x^T(t_0)R(t_0)d\gamma +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\Bigg\{\ 2d\gamma^T\left[\frac{d}{dt}R^T(t) + R^T(t)f_x(x,u,t)\right]\nabla x(t) + \tag{3.21}$$
$$+2d\gamma^T R^T(t)f_u(x,u,t)\nabla u(t) +$$
$$+\nabla x^T(t)\left\{\frac{d}{dt}S(t)\right\}\nabla x(t) + 2[\nabla x^T(t)f_x(x,u,t) + \nabla u^T(t)S(t)\nabla x(t)] +$$
$$+(\nabla x^T(t)\ \nabla u^T(t))\begin{pmatrix} H_{xx}(x,u,\lambda,t) & H_{xu}(x,u,\lambda,t) \\ H_{ux}(x,u,\lambda,t) & H_{uu}(x,u,\lambda,t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla x(t) \\ \nabla u(t)\end{pmatrix}\Bigg\}dt.$$

Рассмотрим отдельно подынтегральное выражение более подробно:

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\{d\gamma^T\left[\frac{d}{dt}R^{\,T}(t)+R(t)f_x(x,u,t)\right]\nabla x(t)+$$

$$+\nabla x^T(t)\left[\frac{d}{dt}R^{\,T}(t)+f_x^T(x,u,t)R(t)\right]d\gamma+$$

$$+d\gamma^T R^T(t)f_u(x,u,t)\nabla u(t)+\nabla u^T(t)f_u^T(x,u,t)R(t)d\gamma+$$

$$+\nabla u^T(t)H_{uu}(x,u,\lambda,t)\nabla u(t)+\nabla x^T(t)[\frac{d}{dt}S(t)+S(t)f_x(x,u,t)+$$

$$+f_x^T(x,u,t)S(t)+H_{xx}(x,u,\lambda,t)\nabla x(t)+$$

$$+\nabla x^T(t)[H_{xu}(x,u,\lambda,t)+S(t)f_u(x,u,t)]\nabla u(t)+$$

$$+\nabla u^T(t)[H_{ux}(x,u,\lambda,t)+f_u^T(x,u,t)S(t)]\nabla x(t)\}dt$$

или (с учетом (3.17))

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\{\nabla x^T(t)\left[\frac{d}{dt}S(t)+S(t)f_x(x,u,t)+f_x^T(x,u,t)S(t)-\right.$$

$$-\{H_{xu}(x,u,\lambda,t)+S(t)f_u(t)\}H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)\{H_{ux}(x,u,\lambda,t)+$$

$$\left.+H_{xx}(x,u,\lambda,t)\}\right]\nabla x(t)+\nabla x^T(t)\left[\frac{d}{dt}R(t)+f_x^T(x,u,t)R(t)-\right.$$

$$-\{H_{xu}(x,u,\lambda,t)+$$

$$\left.+S(t)f_u^T(x,u,t)\}H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)f_u^T(x,u,t)R(t)\right]d\gamma+$$

$$+d\gamma\left[\frac{d}{dt}R^{\,T}(t)+R(t)f_x(x,u,t)-\right.$$

$$-R(t)f_u(x,u,t)H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)\{H_{ux}(x,u,\lambda,t)+$$

$$\left.+f_u(x,u,t)S(t)\}\right]\nabla x(t)+$$

$$+d\gamma^T R(t)f_u(x,u,t)H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)f_u^T(x,u,t)R(t)d\gamma\,.$$

Выберем матрицы *S(t), R(t)* так, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{d}{dt}S(t)+S(t)f_x(x,u,t)+f_x^T(x,u,t)S(t)-$$

$$-\{H_{xu}(x,u,\lambda,t)+$$

$$+S(t)f_u(t)\}H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)\{H_{ux}(x,u,\lambda,t)+H_{xx}(x,u,\lambda,t)\}=0, \quad (3.22)$$

$$S(T)=K_{xx}(x(T))+\{\gamma^T\Psi(x(T))\}_x\,,$$

$$\frac{d}{dt}R(t)+f_x^T(x,u,t)R(t)-$$

$$-\{H_{xu}(x,u,\lambda,t)+S(t)f_u^T(x,u,t)\}H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)f_u^T(x,u,t)R(t)]=0, \qquad (3.23)$$

$$R(T)=\Psi_x(x(T)),$$

а матрицу Q(t) определим следующим соотношением:

$$\frac{d}{dt}Q(t)=R^T(t)f_u(x,u,t)H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)f_u^T(x,u,t)R(t)=0\,, \qquad (3.24)$$

$$Q(T)=0\,.$$

Нетрудно заметить, что полученные уравнения для матриц *S(t), R(t)* и *Q(t)* полностью совпадают с уравнениями (3.16), в которых параметры *A(t), B(t)* и *C(t)* определяются соотношениями (3.7).

Выражение для второй вариации функционала качества (3.21), с учетом полученных результатов, можно переписать в виде:

$$\nabla^2 \overline{J}(x,t) = \frac{1}{2}\nabla x^T(t_0)S(t_0)\nabla x(t_0) + \nabla x^T(t_0)R(t_0)d\gamma(t_0) +$$
$$+\frac{1}{2}d\gamma^T(t_0)Q(t_0)d\gamma(t_0) - \nabla\Psi^T(x(T))d\gamma(T) +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\|H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)\{H_{ux}(x,u,\lambda,t) + f_x(x,u,t)S(t)\}d\gamma + \nabla u(t)\right\|_{H_{uu}}^2 dt.$$

Здесь индекс H_{uu} означает вес нормы, записанный под интегралом.

Принимая во внимание (3.9) и (3.18) (выражения для $\nabla\Psi(x(T))$ и $d\gamma$), получаем

$$\nabla^2 \overline{J}(x,t) = \frac{1}{2}\{\nabla x^T(t_0)[S(t_0) - R(t_0)Q^{-1}(t_0)R^T(t_0)]\nabla x(t_0) -$$
$$-\frac{1}{2}\nabla\Psi^T(x(T))Q^{-1}(t_0)\nabla\Psi(x(T)) + \nabla\Psi^T(x(T))Q^{-1}(t_0)R(t_0)\nabla x(t_0) + \qquad (3.25)$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\|H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)\{H_{ux}(x,u,\lambda,t) + f_x(x,u,t)S(t)\}d\gamma + \nabla u(t)\right\|_{H_{uu}}^2 dt.$$

Если сравнить две одинаковые траектории с одинаковыми краевыми условиями, т.е. при $\nabla x(t_0) = 0$ и $\nabla\Psi(T) = 0$, то $\nabla^2\overline{J}(x,u)>0$ для всех $\nabla u(t)$, за исключением тех, при которых подынтегральное выражение (3.25) обращается в нуль, т.е. за исключением $\nabla u(t)$, определяемых для всех $t\in[t_0,T]$ выражением:

$$\nabla u(t) = -H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)\{H_{ux}(x,u,\lambda,t) + f_u^T(x,u,t)[S(t) - R(t)Q^{-1}(t)R^T(t)]\}\nabla x(t) \qquad (3.26)$$

при выполнении условий:

1. $H_{uu}(x,u,\lambda,t)>0$, т.е. матрица $H_{uu}(x,u,\lambda,t)$ положительно определена при $t_0 \le t \le T$ <u>(условие выпуклости или условие Лежандра - Клебша);</u>

2. так как $\dot{Q}(t) = R^T(t)B(t)R(t)$ положительно определена для $t_0 \le t \le T$, а *Q(T)=0*, то $Q(t)\le 0$. Другими словами, *Q(t)* отрицательно определена при $t_0 \le t \le T$ <u>(условие нормальности);</u>

3. матрица $[S(t) - R(t)Q^{-1}(t)R^T(t)]$ ограничена при $t_0 \le t \le T$ (<u>условие отсутствия сопряженных точек на траектории или условие Якоби</u>).

Само условие Лежандра – Клебша является ослабленным условием для минимума функционала $J(x,u)$. Если $H(x,u,\lambda,t)$ - гладкая функция и ограничения на управление отсутствуют, то должны выполняться условия

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} = 0, \quad \frac{\partial^2 H(x,u,\lambda,t)}{\partial u^2(t)} \geq 0 .$$

Что касается условия нормальности, то уравнение (3.18) можно интерпретировать следующим образом: малые изменения $\nabla\Psi(x(t))$ могут быть получены при малых изменениях $d\gamma$ только в случае невырожденности матрицы *Q(t)* на интервале $t_0 \leq t \leq T$. Если $H_{uu}(x,u,\lambda,t)$>0, то из (3.24) следует, что $\frac{d}{dt}Q(t) \geq 0$. Поскольку $Q(T) = 0$, то, следовательно, $Q(t) \leq 0$.

Если $[S(t) - R(t)Q^{-1}(t)R^T(t)] \to \infty$ в точке $t = t^1$, где $t_0 \leq t^1 \leq T$, то необходимо, чтобы некоторая линейная комбинация $\nabla x(t^1)$ была равна нулю. Это означает, что система допустимых возмущений имеет размерность меньше, чем n (где n – число переменных состояния системы). Следовательно, поверхность постоянных значений J^0 в окрестности точки $t = t^1$ имеет излом (разрыв в частных производных), поскольку $\partial^2 J^0(x,u) / \partial x^2(t) \to \infty$ при $t = t^1$. Если траектории продолжить от $t = t^1$ в сторону $t < t^1$, то они уже не будут минимизирующими. Следует отметить, что если $S(t) \to \infty$, то это еще не обязательно означает, что $[S(t) - R(t)Q^{-1}(t)R^T(t)] \to \infty$.

Если матрица $Q(t)$ является вырожденной, то задача оптимизации (3.1) называется *анормальной*, что означает, что в этом случае не существует соседних минимальных решений.

Таким образом, условия 1, 2, 3 вместе с условиями (3.1) образуют необходимые и достаточные условия, по крайней мере, минимума функционала $J(x,u)$.

§ 3.5. Достаточные условия локального минимума при незаданном времени окончания переходного процесса

В задачах оптимизации времени окончания переходного процесса T необходимые условия (3.1) дополняются условиями (§ 1.4)

$$\frac{\partial \Phi(x(T),T)}{\partial T} + H(x,u,\lambda,T) = 0 \text{ или}$$

$$\Omega(x(T),T) = \frac{\partial \Phi(x,(T),T)}{\partial T} + L(x,u,T) = 0, \qquad (3.27)$$

где $\Phi(x(T),T) = K(x(T),T) + \gamma^T \Psi(x(T),T)$.

Скалярное уравнение (3.27) определяет дополнительную неизвестную величину T.

Линеаризация необходимых условий (а именно, уравнения относительно $\lambda(T), \Psi(x(T)T), \Omega(x(T),T)$) должна учитывать наличие вариации (возмущений) dT по времени окончания процесса T:

$$d\lambda(T)=\frac{\partial}{\partial x(T)}\left\{\frac{\partial\Phi(x(T),T)}{\partial x(T)}\right\}^{T}dx(T)+$$
$$+\left\{\frac{\partial\Psi(x(T),T)}{\partial x(T)}\right\}^{T}d\gamma+\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{\partial\Phi(x(T),T)}{\partial x(T)}\right\}^{T}dT, \tag{3.28}$$
$$d\Psi(x(T),T)=\frac{\partial\Psi(x(T),T)}{\partial x(T)}dx(T)+\frac{\partial\Psi(x(T),T)}{\partial T}dT, \tag{3.29}$$
$$\frac{\partial\Omega(x(T),T)}{\partial x(T)}dx(T)+d\gamma^{T}\frac{\partial\Psi(x(T),T)}{\partial T}+\frac{\partial\Omega(x(T),T)}{\partial T}dT=0. \tag{3.30}$$
Так как для дальнейших выкладок потребуются величины $\nabla\lambda(T)$ и $\nabla x(t)$, то подставим
$$d\lambda(T)=\nabla\lambda(T)+\dot{\lambda}(T)dT,$$
$$dx(T)=\nabla x(T)+\dot{x}(T)dT \tag{3.31}$$
в уравнение (3.28). В результате будем иметь
$$\nabla\lambda(T)=\frac{\partial^2\Phi(x(T),T)}{\partial x^2(T)}dx+\{\frac{\partial\Psi(x(T),T)}{\partial x(T)}\}^{T}d\gamma+$$
$$+[\frac{\partial}{\partial T}\{\frac{\partial\Phi(x(T),T)}{\partial x(T)}\}^{T}-\dot{\lambda}(T)]dT. \tag{3.32}$$
С помощью уравнений (3.1) можно установить, что
$$\frac{d}{dT}\{\frac{\partial\Phi(x(T),T)}{\partial x(T)}\}^{T}-\dot{\lambda}(T)=\frac{\partial\Omega(x(T),T)}{\partial x(T)}. \tag{3.33}$$
Подставив (3.33) в уравнения (3.32), (3.31) и (3.30) и учитывая, что
$$\frac{d\Omega(x(T),T)}{dT}=\frac{\partial\Omega(x(T),T)}{\partial T}+\frac{\partial\Omega(x(T),T)}{\partial x(T)}f(x,u,T),$$
$$\frac{d\Psi(x(T),T)}{dT}=\frac{\Psi(x(T),T)}{\partial T}+\frac{\Psi(x(T),T)}{\partial x(T)}f(x,u,T),$$
образуем следующее матричное уравнение:
$$\begin{pmatrix}\nabla\lambda(T)\\ d\Psi(x(T),T)\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\Phi(x(T),T}{\partial x^2(T)} & \frac{\partial\Psi(x(T),T)}{\partial x(T)} & \frac{\partial\Omega(x(T),T)}{\partial x(T)}\\ \frac{\partial\Psi(x(T),T)}{\partial x(T)} & 0 & \frac{\partial\Psi(x(T),T)}{\partial T}\\ \frac{\partial\Omega(x(T),T)}{\partial x(T)} & \frac{\partial\Psi(x(T),T)}{\partial T} & \frac{\partial\Omega(x(T),T)}{\partial T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla x(T)\\ d\gamma\\ dT\end{pmatrix} \tag{3.34}$$
Уравнения (3.3) и (3.34) описывают линейную двухточечную краевую задачу для экстремалей при малых изменениях начальных условий $\nabla x(t_0)$ и/или малых изменениях терминальных $d\Psi(x(T),T)$ условий. Эти изменения вызывают малые приращения $\nabla x(T)$, $d\gamma$ и dT.

Отметим, что матрица коэффициентов уравнения (3.34) симметричная. Это обстоятельство дает возможным сделать следующую запись:

$$\begin{pmatrix} \nabla\lambda(t) \\ d\Psi \\ d\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(t) & R(t) & m(t) \\ R^T(t) & Q(t) & n(t) \\ m^T(t) & n^T(t) & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla x(t) \\ d\gamma \\ dT \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Продифференцируем (3.35) по времени, считая, что $d\Psi, d\gamma, dT$ - постоянные величины, а $d\Omega = 0$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\nabla\lambda(t) \\ 0 \\ 0 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}S(t) & \frac{d}{dt}R(t) & \frac{d}{dt}m(t) \\ \frac{d}{dt}R^T(t) & \frac{d}{dt}Q(t) & \frac{d}{dt}n(t) \\ \frac{d}{dt}m^T(t) & \frac{d}{dt}n^T(t) & \frac{d}{dt}a^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla x(t) \\ d\gamma \\ dT \end{pmatrix} + \tag{3.36}$$

$$+\begin{pmatrix} S(t) \\ R^T(t) \\ m^t(t) \end{pmatrix} \left\{ \frac{d}{dt}\nabla x(t) \right\}.$$

Линеаризованные уравнения (3.5), (3.6), (3.7) считаются справедливыми и в данном случае, поэтому можно подставить выражения для $\nabla\dot{\lambda}(t)$ и $\nabla\dot{x}(t)$ в (3.36), используя при этом верхнюю строчку уравнения (3.35) для исключения $\nabla\lambda(t)$. В результате получим

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}S + SA + A^T - SBS + C & \frac{d}{dt}R + (A^T - SB)R & \frac{d}{dt}m + (A^T - SB)m \\ \frac{d}{dt}R^T + R^T(A - BS) & \frac{d}{dt}Q - R^T BR & \frac{d}{dt}n - R^T Bm \\ \frac{d}{dt}m^T + m^T(A - BS) & \frac{d}{dt}n^T - m^T BR & \frac{d}{dt}a - m^T Bm \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \nabla x(t) \\ d\gamma \\ dT \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Если матричное уравнение (3.37) должно быть тождеством (т.е. быть справедливым для любых $\nabla x(t)$, $d\gamma$, dT) и если уравнение (3.34) выполняется в точке $t=T$, то должны удовлетворяться следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}S(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t) - S(t)B(t)S(t) + C(t) = 0, \\ S(T) = \frac{\partial^2 \Phi(x(T),T)}{\partial x^2(T)}; \end{gathered} \tag{3.38}$$

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}R(t) + [A^T(t) - S(t)B(t)]R(t) = 0, \\ R(T) = \{\frac{\partial \Psi(x(T),T)}{\partial x(T)}\}^T; \end{gathered} \tag{3.39}$$

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}Q(t) - R^T(t)B(t)R(t) = 0, \\ Q(T) = 0; \end{gathered} \tag{3.40}$$

$$\frac{d}{dt}m(t)+[A^T-S(t)B(t)]m(t)=0,$$
$$m(T)=\{\frac{\partial\Omega(x(t),T)}{\partial x(T)}\}^T; \tag{3.41}$$

$$\frac{d}{dt}n(t)-R^T(t)B(t)m(t)=0,$$
$$n(T)=\frac{\partial\Psi(x(T).T)}{\partial T}; \tag{3.42}$$

$$\frac{d}{dt}\alpha(t)-m^T(t)B(t)m(t)=0,$$
$$\alpha(T)=\frac{\partial\Omega(x(T),T)}{\partial T}. \tag{3.43}$$

Уравнение (3.38) является матричным уравнением Риккати, уравнения (3.39) и (3.41) – линейными матричными уравнениями, а (3.40), (3.42) и (3.43) – просто квадратурами. Отметим, что уравнения (3.38) – (3.40) идентичны уравнениям (3.16).

Если интегрировать от T до t_0, то следует использовать уравнения второй и третьей строки выражения (3.35) при t_0 для определения $d\gamma$ и dT через $\nabla x(t_0)$ и $d\Psi(x(T),T)$:

$$d\gamma=\overline{Q}^{-1}[d\Psi(x(T),T)-\overline{R}^T\nabla x(t_0)], \tag{3.44}$$

$$dT=-[\frac{m^T(t_0)}{\alpha(t_0)}-\frac{n^T(t_0)}{\alpha(t_0)}\overline{Q}^{-1}(t_0)\overline{R}^T(t_0)]\nabla x(t_0)+$$
$$+\frac{n^T(t_0)}{\alpha(t_0)}\overline{Q}^{-1}(t_0)d\Psi(x(T),T), \tag{3.45}$$

здесь

$$\overline{Q}=Q-\frac{mn^T}{\alpha},\ \overline{R}=R-\frac{mn^T}{\alpha}. \tag{3.46}$$

Теперь можно определить $\nabla\lambda(t_0)$ из первой строки уравнения (3.38):

$$\nabla\lambda(t_0)=$$
$$=[\overline{S}(t_0)-\overline{R}(t_0)\overline{Q}^{-1}\overline{R}^T(t_0)]\nabla x(t_0)+\overline{R}(t_0)\overline{Q}^{-1}(t_0)d\Psi(x(T),T) \tag{3.47}$$

здесь

$$\overline{S}=S-\frac{mm^T}{\alpha}. \tag{3.48}$$

Зная начальные условия $\nabla x(t_0)$ и $\nabla\lambda(t_0)$, можно проинтегрировать один раз линеаризованные уравнения (3.5), (3.6) в прямом времени для определения соседнего оптимального решения.

Но если $\partial\Omega(x(T),T)/\partial T\neq 0$, то с помощью последней строки матричного уравнения (2.34) можно вычислить dT через $\nabla x(T)$ и $d\gamma$:

$$dT = \{\frac{\partial\Omega(x(T),T)}{\partial T}\}^{-1}[d\Omega(x(T),T) - \\ - \frac{\partial\Omega(x(T),T)}{\partial x(T)}\nabla x(T) - \{\frac{\partial\Psi(x(T),T)}{\partial T}\}^T d\gamma]. \qquad (3.49)$$

Подставив (3.49) в первые две строки выражения (3.34), получим

$$\begin{pmatrix} \nabla\lambda(T) \\ d\Psi(x(T),T) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \left\{\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}^T \left\{\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}^{-1} \frac{\partial\Omega}{\partial x} & \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right\}^T - \left\{\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}^T \left\{\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}^{-1} \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right\}^T \\ \frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial t}\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right\}^{-1} \frac{\partial\Omega}{\partial x} & -\frac{\partial\Psi}{\partial t}\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right\}^{-1} \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right\}^T \end{pmatrix} \times \qquad (3.50) \\ \times \begin{pmatrix} \nabla x(T) \\ d\gamma \end{pmatrix}.$$

Для произвольного момента времени уравнение (3.50) перепишем:

$$\begin{pmatrix} \nabla\lambda(T) \\ d\Psi(x(T),T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{S}(t) & \overline{R}(t) \\ \overline{R}^T(t) & \overline{Q}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla x(t) \\ d\gamma \end{pmatrix}. \qquad (3.51)$$

Нетрудно проверить, что $\overline{S}(t)$, $\overline{R}(t)$, $\overline{Q}(t)$ удовлетворяют тем же дифференциальным уравнениям, что и *S(t), R(t), Q(t),* а именно, уравнениям (3.38), (3.39), (3.40), но имеют иные терминальные граничные условия. Эти терминальные условия могут быть найдены с помощью матрицы, входящей в уравнение (3.50).

Существование соседних оптимальных (в смысле минимума критерия качества) траекторий при незаданном времени окончания переходного процесса зависит от выполнения трех условий, аналогичных условиям § 3.2, а именно:

1. $H_{uu}(x,u,\lambda,t) > 0$ для $t_0 \le t \le T$, (3.52)

2. $\overline{Q}(t) < 0,\ \alpha(t) < 0,$ для $t_0 \le t \le T$, (3.53)

3. Матрица $\overline{S}(t) - \overline{R}(t)\overline{Q}^{-1}(t)\overline{R}^T(t)$
ограничена при $t_0 \le t \le T$. (3.54)

Условие (3.52) называют условием выпуклости, условие (3.53) – условием нормальности, условие (3.54) – условием отсутствия сопряженных точек.

Достаточным условием слабого локального минимума функционала $J(x,u)$ (т.е. справедливого при малых вариациях $\nabla x(t), \nabla u(t), dT$) является выполнение необходимых условий первого прядка (3.1), (3.26) и условий второго порядка (3.52), (3.53), (3.54). Необходимыми условиями второго прядка для минимума являются ослабленные условия (3.52) и (3.54):

1. $H_{uu}(x,u,\lambda,t) \ge 0,\ t_0 \le t \le T$, (3.55)

2. $\overline{Q}(t) \le 0,\ \alpha(t) \le 0,$ для $t_0 \le t \le T$, (3.56)

3. Матрица $\overline{S}(t) - \overline{R}(t)\overline{Q}^{-1}(t)\overline{R}^T(t)$

ограничена при $t_0 \le t \le T$. (3.57)

Если подставить выражения для $\nabla\lambda(t)$ из (3.47) в (3.4), т.е. в

$\nabla u(t) = -H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)[H_{ux}(x,u,\lambda,t)\nabla x(t) + f_u^T(x,u,t)\nabla\lambda(t)],$

то получится закон управления с обратной связью для соседней оптимальной траектории:

$$\begin{aligned}\nabla u(t) = -H_{uu}^{-1}(x,u,\lambda,t)\{[H_{ux}(x,u,\lambda,t) +\\ + f_u^T(x,u,t)[\overline{S}(t) - \overline{R}(t)\overline{Q}^{-1}(t)\overline{R}^T(t)]\nabla x(t) +\\ + f_u^T(x,u,t)\overline{R}(t)\overline{Q}^{-1}(t)d\Psi(x(T),T)\},\end{aligned} \tag{3.58}$$

причем это выражение совпадает с (3.17).

Предсказать время окончания переходного процесса можно с помощью соотношения

$$\begin{aligned}dT = -\left[\frac{m^T(t)}{\alpha(t)} - \frac{n^T(t)}{\alpha(t)}\overline{Q}^{-1}(t)\overline{R}^T(t)\right]\nabla x(t) -\\ - \frac{n^T(t)}{\alpha(t)}\overline{Q}^{-1}(t)d\Psi(x(T),T).\end{aligned} \tag{3.59}$$

§ 3.6. Уравнения для функционала качества

Найдем уравнение, описывающее поведение функционала вдоль оптимальной траектории, в предположении, что этот функционал достаточно гладок.

Пусть (x_0,t_0) – исходная пара и $u(t) \in U$ - допустимое управление (возможно не оптимальное), переводящее (x_0,t_0) в заданную область S точку $(x(T),T)$ (например, $\Psi(x(T),T) = 0$) и поэтому:

$$J(x,u,t) = \Phi(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,\tau)d\tau \tag{3.60}$$

есть вполне определенное число для $t \in [t_0,T]$.

Если считать, что $J(x,t)$- непрерывно дифференцируемая функция на $\Sigma \subset R^n \times (T_1,T_2)$, удовлетворяющая условиям:

1. $(x(t),t) \subset \Sigma$ для $t \in [t_0,T]$, (3.61)
2. $J(x,t) = J(x,u,t)$ для $t \in [t_0,T]$, (3.62)

то можно получить следующую зависимость:

$$\begin{aligned}\frac{dJ(x,t)}{dt} =\\ + \frac{\partial J(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial J(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)} f(x,u,t).\end{aligned} \tag{3.63}$$

С другой стороны

$$\frac{dJ(x,t)}{dt} = -L(x,u,t). \tag{3.64}$$

Сравнивая правые части (3.63) и (3.64), получаем

$$\frac{\partial J(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}f(x,u,t)=-L(x,u,t)$$

или, эквивалентно,

$$\frac{\partial J(x,t)}{\partial t}+L(x,u,t)+\frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}f(x,u,t)=0. \qquad (3.65)$$

Так как гамильтониан имеет вид

$$H(x,u,\lambda,t)=L(x,u,t)+\lambda^T(t)f(x,u,t),$$

то для $t\in[t_0,T]$ имеем

$$\frac{\partial J(x,t)}{\partial t}+H(x,u,\frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)},t)=0. \qquad (3.66)$$

Отметим, что

1. $J(x,t)$ может и не существовать;

2. если и можно найти $J(x,t)$, то нет гарантии, что функция времени $\partial J(x,t)/x(t)$ - градиент $J(x,t)$, вычисленный в точке *(x(t),t)*, есть дополнительный вектор $\lambda(t)$, соответствующий *u(t)* и *x(t),* т.е. нет уверенности, что существует зависимость

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}\right\}=-\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)}. \qquad (3.67)$$

Пусть $(x(t),t)\in X$, где X – область, содержащая *S*. Обозначим минимум (наибольшую нижнюю границу) функции $J(x,t)$ через $J^0(x,t)$:

$$J^0(x,t)=\min_{u\in U}J(x,u,t). \qquad (3.68)$$

Управление $u(t)\in U$, при котором достигается $\min J(x,u,t)$, обозначим через $u^0(t)$.

Таким образом, $u^0(t)\in U$ - допустимое и в силу (3.68) оптимальное управление.

Предположим также:

1. $(x^0(t),t)\in X$ для $t\in[t_0,T]$;

2. $J^0(x,t)$ непрерывно дифференцируема на *X*.

В силу оптимальности $u^0(t)\in U$ можно записать, что:

$$\frac{\partial J^0(x^0,t)}{\partial t}+H(x^0,u^0,\frac{\partial J^0(x^0,t)}{\partial x^0(t)},t)=0 \qquad (3.69)$$

для $t\in[t_0,T]$. Таким образом, при предположениях 1 и 2 уравнение (3.69) является дополнительным необходимым условием оптимальности.

Из условия, что на поверхности $\Psi(x(T),T)=0$ функционал

$$J^0(x,T)=K(x(T),T)+\gamma^T\Psi(x(T),T) \qquad (3.70)$$

следует существование вектора γ, удовлетворяющего следующему соотношению:

$$\frac{\partial J^0(x,T)}{\partial x(T)} = \\ = \frac{\partial K(x(T),T)}{\partial x(T)} + \gamma^T \frac{\partial \Psi(x(T),T)}{\partial x(T)} = \lambda^T(T). \tag{3.71}$$

Уравнение (3.69) с краевым условием (3.70), которое выполняется для $(x(T),T) \in S$), называется уравнением Гамильтона – Якоби.

Покажем, что при некоторых предположениях относительно управляющих воздействий, справедлива зависимость (3.67).

Пусть $u(t) = u(x,t)$, т.е. управление есть функция состояния объекта управления и $\lambda(t) = \left\{\frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}\right\}^T$. Тогда

$$H(x,u,\frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)},t) = L(x,u,t) + \left\{\frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}\right\} f(x,u,t) \tag{3.72}$$

и

$$\frac{d}{dt}\lambda^T(t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)} \tag{3.73}$$

Продифференцируем выражение (3.65) по *x(t)*. Будем иметь

$$\frac{\partial^2 J(x,t)}{\partial t \partial x(t)} + \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)} + \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(x,t)}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x(t)} + f^T(x,u,t)\frac{\partial^2 J(x,t)}{\partial x^2(t)} + \\ + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}\left[\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)} + \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(x,t)}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x(t)}\right] = \\ = \frac{\partial^2 J(x,t)}{\partial t \partial x(t)} + \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)} + f^T(x,u,t)\frac{\partial^2 J(x,t)}{\partial x^2(t)} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)} + \\ + \left[\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u(x,t)} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x(t)}\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u(x,t)}\right]\frac{\partial u(x,t)}{\partial x(t)} = 0. \tag{3.74}$$

Согласно (3.72) выражение в квадратных скобках при $\partial u(x,t)/\ \partial x(t)$ на оптимальной траектории обращается в нуль. Используя (3.74), преобразуем (3.73) к виду

$$\frac{d}{dt}\lambda^T(t) = -\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)} - \lambda^T(t)\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}. \tag{3.75}$$

Кроме того, условие (3.71) определяет значение $\lambda(T)$. Отметим, что уравнение (3.75) совместно с уравнением (3.72) образует систему уравнений Эйлера – Лагранжа.

Таким образом, если имеется допустимое управление $u(t)$ и при этом:

1. *u(t)* переводит $(x(t_0),t_0)$ в *S*;
2. если траектория *x(t)*, соответствующая *u(t)*, то $(x(t),t) \in X$ для всех $t \in [t_0,T]$;
3. $u(t)$ удовлетворяет соотношению $u(t) = u(x,t)$ для всех $t \in [t_0,T]$, где $u(x,t)$ является решением уравнения Гамильтона - Якоби, то $u(t)$

есть оптимальное управление к множеству допустимых управлений, производящих траектории, которые целиком расположены в X .

§ 3.7. Обсуждение вариационного метода

Результаты, полученные в первых двух главах, основанные на обращении в нуль первой вариации минимизируемого функционала, дают для относительной оптимальности необходимые, но недостаточные условия. Эти условия допускают более широкое множество решений или траекторий, называемых «стационарными», которые соответствуют не только искомым локальным минимумам, но также локальным максимумам и седловым точкам в функциональном пространстве. Известные в настоящее время теоремы существования неприложимы к основной массе практических задач. Правда, иногда физические соображения позволяют установить существование минимума так, что если необходимые условия допускают единственное решение, то это решение будет действительно оптимальным. К сожалению, в большом числе важных практических случаев единственность не имеет места или же не может быть легко проверена из-за трудоемкости многократного численного интегрирования сложной системы уравнений, описывающих задачу.

По этой причине оптимальность вычисленного решения или решений не может быть гарантирована. Можно найти все решения, удовлетворяющие необходимым условиям, сравнить их и то из них, для которого функционал имеет наименьшее значение, считать оптимальным. Однако этот метод, кроме больших вычислительных затрат, которые он может вызвать, связан с риском получить ложные выводы, если не будут найдены все экстремали.

Метод, гарантирующий одной из экстремалей характер относительного минимума, основывается на исследовании второй вариации классического вариационного исчисления. Исключая один редкий случай, когда вторая вариация равна нулю, при выполнении некоторых других довольно мало ограничивающих условий этот метод вместе с результатами первой и второй главы образуют необходимые и достаточные условия сильной оптимальности. Однако они опираются на два ограничительных предположения, которые делаю их неприменимыми в большинстве практических задач, а именно:

- нет ограничений на управляющие воздействия;
- управления являются непрерывными.

Однако можно освободиться от этих предположений, введя управления так, как это показано в § 3.2.

Кроме исследований второй вариации функционала, в настоящей главе получено уравнение Гамильтона – Якоби, которое является дополнительным необходимым условием оптимальности.

Отметим, что уравнение Гамильтона – Якоби, являющееся уравнением в частных производных, в ряде случаев довольно трудно решать (а иногда и невозможно). Конкретное решение может представлять собой лишь функционал вдоль данной траектории, а не на всей области *X*. По этой причине уравнение Гамильтона – Якоби чаще всего используется для проверки оптимальности управления.

Если функционал $J(x,u,t)$ гладкий, то уравнение

$$\frac{\partial J(x,u,t)}{\partial t} + H(x,u,\frac{\partial J(x,u,t)}{\partial x^0(t)},t) = 0 \qquad (3.76)$$

описывает поведение функционала вдоль траектории *x(t)* данной системы. Таким образом, независимо от того, какое управление *u(t)* приводит к области *S*, функционал должен удовлетворять уравнению (3.76).

Глава 4. Динамическое программирование

§ 4.1. Постановка задачи

Необходимые условия оптимальности, рассмотренные в главах 1 и 3, были основаны на рассмотрении отдельных траекторий. Однако эволюционные процессы можно изучать на множестве траекторий. Излагаемый в настоящей главе метод динамического программирования как раз и основан на изучении всего множества оптимальных траекторий.

Почти одновременно с опубликованием принципа максимума Понтрягина американским ученым Р. Беллманом был разработан метод динамического программирования. Метод был разработан для исследования систем оптимального управления значительно более широкого класса, чем систем, описываемых дифференциальными уравнениями, и он применим поэтому не только к оптимальным задачам, но и к весьма широкому кругу технических и экономических задач, в которых связи между координатами, управлениями и критериями оптимальности могут задаваться как в виде уравнений весьма произвольного вида, так и в виде экспериментально определенных графиков или таблиц численных данных.

При обосновании метода динамического программирования предполагается, что функционал, выражающий критерий оптимальности, является дифференцируемой функцией фазовых координат. В этом случае метод динамического программирования приводит к уравнению в частных производных (уравнение Гамильтона – Якоби - Беллмана), с помощью которого нетрудно получить принцип максимума (минимума) Понтрягина.

Так как в ряде задач, решаемых методом динамического программирования, эти условия не выполнялись, то это давало основание считать, что метод динамического программирования скорее представляет собой хороший эвристический прием, чем математическое решение задачи.

В основу динамического программирования положен принцип оптимальности. Согласно этому принципу оптимальное управление определяется конечной целью управления и состоянием системы в рассматриваемый момент времени, независимо от того, каким образом система пришла в это состояние, т.е. оптимальное управление не зависит от предыстории системы. Это означает, что для любой оптимальной траектории каждый участок, связывающий любую промежуточную точку этой траектории с конечной, также является оптимальной траекторией.

Пусть задача управления выглядит следующим образом. Задан динамический объект и функционал качества

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,t),\ x(t_0) = x_0,\ t \in [t_0,T],\\ x \in R^n,\ u \in R^r, u(t) \in U,\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$J(x,u) = K(x(T)) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt \to \inf_{u(t)\in U} \tag{4.2}$$

§ 4.2. Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана

Введем скалярную функцию $V(x,t)$, называемую функцией Беллмана, которая определяется следующим образом. Пусть движение системы (4.1) происходит на отрезке $[t_0,T]$, на котором определены точки s и τ : $t_0 \le \tau \le s \le T$ и начальное состояние для интервала $[\tau,T]$ в точке τ есть $x(\tau)$. Для системы (4.1) с начальным условием $x(\tau)$ рассмотрим задачу о минимизации функционала:

$$K(x(T)) + \int_\tau^T L(x,u,t)dt \to \inf_{u\in U} . \tag{4.3}$$

Функцией Беллмана $V(x,s)$ называется функция, равная инфинуму (точная нижняя граница) функционала (4.3) на решения системы (4.1) по всевозможным допустимым управлениям, т.е.

$$V(x(s),T) = \inf_{u\in U}\left\{K(x(T)) + \int_s^T L(x,u,t)dt\right\}. \tag{4.4}$$

На основании принципа оптимальности будем иметь

$$\begin{aligned} V(x(\tau),T) &= \inf_{u\in U}\left\{K(x(T)) + \int_\tau^T L(x,u,t)dt\right\} = \\ &= \inf_{u\in U\, t\in[\tau,s]}\ \inf_{u\in U\, t\in[s,T]}\left\{\int_\tau^s L(x,u,t)dt + K(x(T)) + \int_s^T L(x,u,t)dt\right\} = \\ &= \inf_{u\in U\, t\in[\tau,T]}\left\{\int_\tau^s L(x,u,t)dt + V(x(s),T)\right\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Перепишем (4.5) в виде

$$\inf_{u\in U\, t\in[\tau,T]}\left\{\int_\tau^s L(x,u,t)dt + V(x(s),T) - V(x(\tau),T)\right\} = 0. \tag{4.6}$$

Предположим, что функция Беллмана непрерывно дифференцируема по совокупности переменных. Тогда при малых $s-\tau=\gamma$ с точностью до малых более высокого порядка относительно γ получим:

$$V(x(s),T) - V(x(\tau),T) = \frac{dV(x(t),T)}{dt}\gamma . \tag{4.7}$$

Учитывая, что

$$\frac{dV(x(t),T)}{dt} = \frac{\partial V(x(t),T)}{\partial t} + \frac{\partial V(x(t),T)}{\partial x(t)} f(x,u,t),$$

разделив обе части равенства (4.6) на γ и перейдя к пределу, при $\tau \to s+0$, получим уравнение:

$$\inf_{u\in U}\left\{\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)} f(x,u,t) + L(x,u,t)\right\} = 0,\ t\in[t_0,T]. \tag{4.8}$$

Согласно определению (4.4) имеем

$$V(x,T) = K(x(T)). \tag{4.9}$$

Уравнение (4.8) с краевым условием (4.9) называют уравнением Беллмана.

Нетрудно заметить, что в случае, когда область изменений управляющих воздействий открытая, а в качестве функции Беллмана выбран функционал качества системы, уравнение (4.8) с краевыми условиями (4.9) является не чем иным, как уравнением Гамильтона – Якоби.

В том случае, когда в качестве функции Беллмана выбран функционал качества при допустимом оптимальном управлении и соответствующей этому управлению траектории, выражение (4.8) можно переписать в виде

$$-\frac{\partial J^0(x,t)}{\partial t} = \\ = \inf_{u\in U}\left\{\frac{\partial J^0(x,t)}{\partial x(t)} f(x,u,t) + L(x,u,t)\right\}, \quad t\in[t_0,T]\,. \tag{4.10}$$

Функционал $J^0(x,t)$ называют иногда функцией оптимального качества, а уравнение (4.10) - уравнением Гамильтона – Якоби – Беллмана.

§ 4.3. Связь метода динамического программирования с принципом максимума (минимума) Л.С. Понтрягина

Принцип минимума Понтрягина можно вывести из дифференциального уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана. Метод динамического программирования позволяет при ряде предположений свести задачу синтеза оптимального управления к решению задачи Коши (4.8), (4.9). Предположим, что существует единственное решение задачи $V(x,t)$ с непрерывными производными $V_t(x,t),\ V_x(x,t),\ V_{tx}(x,t),\ V_{xx}(x,t)$ и допустимое управление $u^0(x,t)$, удовлетворяющее равенству

$$\inf_{u(t)\in U}\left[L(x,u,t)+\frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)} f(x,u,t)\right]= \\ = L(x,u^0,t)+\frac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)} f(x,u^0,t). \tag{4.11}$$

Введем функцию $\widetilde{\lambda}^T(t)=\langle\lambda_0,\lambda_1(t),...,\lambda_n(t)\rangle$, где $\lambda_0=1,\ \lambda^T(t)=\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial x(t)}$. Тогда гамильтониан будет иметь вид

$$H(x,u,\widetilde{\lambda},t)=\widetilde{\lambda}^T(t)\widetilde{f}(x,u,t),$$

где $\widetilde{f}^T(x,u,t)=\big\langle L(x,u,t), f^T(x,u,t)\big\rangle$.

Соответствующая оптимальному управлению траектория системы ранее обозначалась $x^0(t)$. Из равенства (4.11) вытекает соотношение

$$H(x^0,u^0,\widetilde{\lambda},t)=\min_{u(t)\in U} H(x^0,u,\widetilde{\lambda},t). \tag{4.12}$$

Введем дополнительную переменную $\widetilde{p}(t)$, связанную с $\widetilde{\lambda}(t)$ соотношением $\widetilde{p}(t)=-\widetilde{\lambda}(t)$. Тогда

$$H(x^0,u^0,\widetilde{p},t)=\min_{u(t)\in U}[-H(x^0,u,\widetilde{\lambda},t)]=\max_{u(t)\in U} H(x^0,u,\widetilde{p},t).$$

§ 4.4. Численное решение уравнений динамического программирования

Уравнение (4.8) с краевыми условиями (4.9) не всегда можно решить аналитически. Поэтому применяют численное решение в виде многошагового процесса. Само решение, полученное с использованием вычислительной техники, будет приближенным. Исходные уравнения вида

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u),\ t \in [t_0, T], x(t_0) = x_0,\ x(T) = x_T,\\ &x \in R^n,\ u \in R^r, u(t) \in U\end{aligned} \tag{4.13}$$

заменяют конечно-разностными уравнениями:

$$\begin{aligned}&\nabla x_k = f(x_{k-1}, u_k)\nabla t,\\ &x_k = x_{k-1} + \nabla x_k,\\ &x_0 = x(t_0),\ x_N = x(T),\\ &u_k = u_{k-1} + \nabla u_k,\ \nabla t = (T - t_0)/N,\end{aligned} \tag{4.14}$$

где $k=1,2,\ldots,N;$ N – число принятых расчетных интервалов (шагов).

Функционал качества для данной задачи записывается в виде

$$J(x,u) = \sum_{k=1}^{N} L_k(x_{k-1}, u_k)\nabla t. \tag{4.15}$$

На каждом из временных интервалов управление u_k сохраняет неизменное значение, принятое в начале интервала. Если найденные значения управлений на каждом интервале $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_N^0$ такие, что $u_k^0 \in U,\ x_k \in X$, при этом обеспечен минимум функционалу (4.15) и $x_0 = x(t_0), x_N = x(T)$, то полученное управление является оптимальным.

При численном решении задачи оптимизации участки процесса рассматриваются в последовательности, обратной их номеру, т.е. от конца процесса к началу.

Рассмотрим начало последнего участка процесса, т.е. момент времени $t_{N-1} = (N-1)\nabla t$. Этому моменту соответствует значение координаты x_{N-1}. Согласно принципу оптимальности необходимо, чтобы было выбрано оптимальное управление на последнем интервале u_N, переводящее объект из состояния x_{N-1} в состояние x_N. Выбор значений u_N влияет лишь на последний член суммы (4.15):

$$J(x,u) = L_N(x_{N-1}, u_N)\nabla t. \tag{4.16}$$

Выберем такое u_N, при котором будет обеспечен минимум (4.16). При этом на основании (4.4) получим

$$V_N(x_{N-1}) = \min_{u_N \in U}[L_N(x_{N-1}, u_N)]\nabla t. \tag{4.17}$$

В результате на первом шаге назад (последнем интервале) определим значения $V_N(x_{N-1}),\ x_{N-1}(t_{N-1}),\ u_N^0(x_{N-1})$, которые записываются в подготовленную таблицу или в запоминающее устройство компьютера. Далее переходим к предпоследнему интервалу $N-2$ (второму шагу назад), т.е. рассмотрим момент времени $t_{N-2} = (N-2)\nabla t$. Этому интервалу соответствуют значения координат x_{N-2}. Выберем оптимальное значение u^0_{N-1} из условия минимума двух последних членов суммы (4.16) с учетом того, что u^0_N уже известно. При этом

$$
\begin{aligned}
&J_N + J_{N-1} = L_N(x_{N-1}, u_N)\nabla t + L_{N-1}(x_{N-2}, u_{N-1})\nabla t,\\
&V_{N-1}(x_{N-2}) = \min_{u \in U}\left[L_{N-1}(x_{N-2}, u^0_{N-1})\nabla t + V_N(x_{N-1})\right].
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Так как согласно (4.15)

$$x_{N-1} = x_{N-2} + \nabla x_{N-1} = x_{N-2} + f(x_{N-2}, u^0_{N-1})\nabla t\,,$$

то вместо (4.18) запишем

$$
\begin{aligned}
&V_{N-1}(x_{N-2}) =\\
&= \min_{u_{N-1} \in U}\left\{L_{N-1}(x_{N-2}, u^0_{N-1})\nabla t + V_N[x_{N-1}(x_{N-2}, u^0_{N-1})]\right\}.
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

На предпоследнем этапе получены значения $V_{N-1}(x_{N-2}),\, x_{N-2}(t_{N-2}),\, u^0_{N-1}(x_{N-2})$, которые записываются в подготовленную таблицу или в запоминающее устройство компьютера.

Таким образом, все расчеты проводятся аналогично указанным «шаг за шагом назад», начиная с последнего интервала и кончая первым интервалом *(k=1),* по следующим рекуррентным соотношениям:

$$V_k(x_{k-1}) = \min_{u_{k-1} \in U}\left\{L_k(x_{k-1}, u^0_k)\nabla t + V_{k+1}[x_k(x_{k-1}, u^0_k)]\right\}. \tag{4.20}$$

В результате получим значения $u^0_k(x_{k-1}),\, x_k(t_k)$, по которым можно построить приближенную оптимальную траекторию $x^0(t)$ и найти приближенное оптимальное управление $u^0(t)$. Таким образом, в результате решения задачи численным методом получим квазиоптимальное управление. При таком расчете учитываются ограничения, наложенные на траекторию и управляющие воздействия.

§ 4.5. Некоторые замечания относительно применения метода динамического программирования

Если решение исходной задачи оптимального управления существует, а функция Беллмана $V(x,t)$ непрерывно дифференцируема по совокупности переменных, то справедливо соотношение (4.8), (4.9). Используя это соотношение, можно найти оптимальное управление $u^0(t) \in U$.

Обычно непосредственное точное решение уравнения Беллмана связано с серьезными затруднениями, и для решения применяются численные методы.

Если управление $u \in U$, реализующее инфинум, существует, то оно является функцией времени t и фазовой координаты $x(t)$, т.е. $u=u(x,t)$. Таким образом, с помощью метода динамического программирования может быть построено управление с обратной связью.

Однако при этом необходимо иметь в виду следующее:

1. В заданном множестве допустимых управлений U не всегда существует такое, при котором достигается инфинум в (4.4).

2. Функция Беллмана *V(x,t)* может и не обладать той гладкостью, которая была использована при получении уравнения (4.8).
3. Если функция Беллмана *V(x,t)* удовлетворяет уравнению (4.8), то отсюда не следует, что управление, при котором достигается инфинум, является оптимальным.
4. Оптимальное решение, полученное с помощью выражения (4.8), может оказаться не единственным. В этом случае требуются дополнительные исследования.

Вместе с тем при соответствующем выборе функции Беллмана метод динамического программирования приводит к решению задачи о синтезе управляющих воздействий при соответствующих ограничениях.

Метод динамического программирования позволяет свести задачу оптимального управления к исследованию задачи Коши для нелинейного уравнения в частных производных. В то же время с помощью принципа максимума Понтрягина решение задачи управления сводится к изучению краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, что, вообще говоря, представляется более простым.

Глава 5. Оптимальное управление линейными объектами

§ 5.1. Постановка задачи

Многие объекты управления могут достаточно точно описываться линейными динамическими моделями. Путем разумного выбора квадратичных критериев качества и квадратичных ограничений в этом случае удается синтезировать весьма удачные управляющие устройства с линейной обратной связью.

В настоящей главе будут рассматриваться управляемые динамические системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ &y(t) = C(t)x(t), \end{aligned} \tag{5.1}$$

здесь: $x(t) \in R^n$ - состояние системы; $u(t) \in R^r$ - управляющий вход системы; $y(t) \in R^m$ - выход системы. Таким образом, матрицы *A(t), B(t), C(t)* имеют соответствующие размерности: *n* x *n*, *n* x *r*, *m* x *n*. Предположим, что $0 < m \le r \le n$ и на управление не наложено каких-либо ограничений.

Определим назначение системы с физической точки зрения. Пусть $z(t) \in R^m$ - «желаемый» выход системы. Требуется отыскать такое управление *u(t)*, при котором ошибка системы

$$e(t) = z(t) - y(t) \tag{5.2}$$

была бы «малой».

Так как управление *u(t)* в рассматриваемой задаче не ограничено, то для того чтобы избежать больших усилий в контуре управления и большого расхода энергии, можно ввести в критерий качества соответствующее требование, учитывающее эти факты.

Часто бывает важно сделать «малой» ошибку в конечный момент переходного процесса.

Перевод этих физических требований в форму того или иного математического функционала зависит от многих причин. В данной главе будет рассматриваться частный класс критериев качества, имеющих следующий вид:

$$\begin{aligned} &J(x,u) = \\ &= \frac{1}{2}e^T(T)Fe(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{e^T(t)Q(t)e(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right\}dt, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где *F, Q(t)* – положительно полуопределенные матрицы размерностью *m* x *m*; *R(t)* – положительно определенная матрица размерностью *r* x *r*.

Рассмотрим каждый член функционала (5.3). Начнем с $e^T(t)Q(t)e(t)$. Очевидно, так как матрица *Q(t)* положительно полуопределенная, то этот член неотрицателен при любом *e(t)* и равен нулю при *e(t)=0*. Так как $e^T(t)Q(t)e(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}(t)e_i(t)e_j(t)$, где $q_{ij}(t)$ – элемент матрицы *Q(t),* а $e_i(t)$ и $e_j(t)$ –

компоненты вектора *e(t),* то большие ошибки оцениваются «дороже», чем малые.

Рассмотрим член $u^T(t)R(t)u(t)$. Так как *R(t)*- положительно определенная матрица, то этот член положителен при любых $u(t) \neq 0$ и «наказывает» систему за большие управляющие воздействия сильнее, чем за малые.

Наконец, $e^T(T)Fe(T)$. Этот член часто называют стоимостью конечного состояния. Его цель – гарантировать «малость» ошибки в конечный момент времени переходного процесса.

Критерий качества (5.3) удобен математически, и его минимизация приводит к тому, что оптимальные системы оказываются линейными.

В данной главе будут рассматриваться следующие задачи. Дана линейная динамическая управляемая система (5.1) и функционал (5.3). Требуется найти оптимальное управление, т.е. управление, под воздействием которого система (5.1) двигается таким образом, чтобы минимизировать функционал (5.3). Поиск решений будет производиться для задач с открытой областью изменений управляющих воздействий и задач, управляющие воздействия в которых принадлежат заданному множеству.

Для задач, в которых какие - либо ограничения на управления не накладываются, можно сформулировать некоторые очевидные результаты. Прежде всего, если *Q(t)=F=0* и время окончания переходного процесса *T* не задано, то оптимальное управление *u(t)=0*. Чтобы исключить этот тривиальный случай, следует принять, что для задач без ограничений на управление и с незаданным временем переходного процесса матрицы *Q(t)* и *F* одновременно не могут быть нулевыми.

§ 5.2. Задача со свободным правым концом и заданным временем окончания переходного процесса

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему с переменными параметрами

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

и функционал

$$\begin{aligned} &J(x,u) = \\ &== \frac{1}{2}x^T(T)Fx(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right\}dt. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Требуется найти достаточно экономичное управление, которое удерживало бы систему вблизи нуля. Будем считать, что управление *u(t)* не ограничено, время *T* задано, матрицы *Q(t)* и *F* положительно полуопределены, матрица *R(t)* положительно определена.

Предположим, что для любых начальных условий $x(t_0)$ оптимальное управление существует. Построим гамильтониан

$$H(x,u,\lambda,t) =$$
$$= \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) + \qquad (5.6)$$
$$+ \lambda^T(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t)].$$

Дополнительный вектор $\lambda(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)}\right\}^T = -Q(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t) \qquad (5.7)$$

$$\lambda(T) = Fx(T). \qquad (5.8)$$

Вдоль оптимальной траектории должно быть

$$\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)}\right\}^T = R(t)u(t) + B^T(t)\lambda(t) = 0,$$

откуда

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t). \qquad (5.9)$$

Предположение относительно положительной определенности матрицы $R(t)$ при любом $t \in [t_0, T]$ гарантирует существование $R^{-1}(t)$ при $t \in [t_0, T]$.

Оптимальное управление должно минимизировать гамильтониан $H(x,u,\lambda,t)$. Для того чтобы экстремальное управление (5.9) доставляло гамильтониану минимум, матрица $\partial^2 H(x,u,\lambda,t)/\partial u^2(t)$ размера *m* x *m* должна быть положительно определена. Нетрудно заметить, что для рассматриваемой задачи

$$\partial^2 H(x,u,\lambda,t)/\partial u^2(t) = R(t). \qquad (5.10)$$

Следовательно, поскольку *R(t)* выбирается положительно определенной, управление *u(t),* определяемое уравнением (5.9), минимизирует гамильтониан $H(x,u,\lambda,t)$.

Полученные уравнения (5.7) и (5.8) совместно с дифференциальными уравнениями, описывающими линейную динамическую систему (5.4), образуют двухточечную краевую задачу.

Подставив (5.9) в (5.4), получим

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t). \qquad (5.11)$$

Уравнения (5.7) и (5.11) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}\lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}, \qquad (5.12)$$

где $x(t_0) = x_0$, $\lambda(T) = Fx(T)$ - краевые условия.

Пусть $\Omega(t,t_0)$ - фундаментальная матрица решений системы (5.12) размера *2n*x*2n*. Если $\lambda(t_0)$ - начальное значение дополнительной переменной, то решение уравнения (5.12) может быть получено в форме Коши:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \Omega(t,t_0)\begin{bmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, при $t=T$ должно быть

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ \lambda(T) \end{bmatrix} = \Omega(T,t)\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

Разделим фундаментальную матрицу решений $\Omega(T,t)$ размером *2n* х *2n* на четыре блока размером *n* х *n*:

$$\Omega(T,t) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(T,t) & \Omega_{12}(T,t) \\ \Omega_{21}(T,t) & \Omega_{22}(T,t) \end{bmatrix}. \tag{5.14}$$

Тогда уравнение (5.13) с учетом (5.14) можно записать в виде

$$x(T) = \Omega_{11}(T,t)x(t) + \Omega_{12}(T,t)\lambda(t)\,, \tag{5.15}$$

$$\lambda(T) = \Omega_{21}(T,t)x(t) + \Omega_{22}(T,t)\lambda(t) = Fx(T)\ . \tag{5.16}$$

Из уравнений (5.15), (5.16) после алгебраических преобразований можно получить

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \\ &= \{\Omega_{22}(T,t) - F\Omega_{12}(T,t)\}^{-1}\{F\Omega_{11}(T,t) - \Omega_{21}(T,t)\}x(t)\end{aligned} \tag{5.17}$$

при условии, что обратная матрица существует. Рассмотрим выражение (5.17) при $t=T$. Известно, что $\Omega(T,T) = \mathrm{I}$, и поэтому справедливы соотношения $\Omega_{11}(T,T) = \mathrm{I}$, $\Omega_{22}(T,T) = \mathrm{I}$, $\Omega_{12}(T,T) = 0$, $\Omega_{21}(T,T) = 0$. С учетом этого выражение (5.17) при $t=T$ принимает вид

$$\lambda(T) = Fx(T),$$

т.е. получено уравнение (5.16). Следовательно, уравнение (5.17) справедливо при $t=T$. Можно показать, что обратная матрица $[\Omega_{22}(T,t) - F\Omega_{12}(T,t)]^{-1}$ существует при любом $t \in [t_0, T]$.

Выражение (5.17) можно переписать в виде

$$\lambda(t) = K(t)x(t), \tag{5.18}$$

где

$$K(t) = \{\Omega_{22}(T,t) - F\Omega_{12}(T,t)\}^{-1}\{F\Omega_{11}(T,t) - \Omega_{21}(T,t)\}\,. \tag{5.19}$$

В общем случае, когда система (5.4) нестационарна, получить аналитическое выражение для фундаментальной матрицы $\Omega(t,t_0)$ невозможно. Следовательно, невозможно найти в общем случае *K(t),* используя уравнение (5.19).

Для того чтобы найти дополнительные свойства матрицы *K(t),* продифференцируем соотношение (5.18):

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = \left\{\frac{d}{dt}K(t)\right\}x(t) + K(t)\frac{d}{dt}x(t)\,. \tag{5.20}$$

С другой стороны, $\frac{d}{dt}\lambda(t)$ определяется соотношением (5.7). Приравнивая (5.20) и (5.7), а также подставляя значения $\dot{\lambda}(t)$ и $\dot{x}(t)$, после алгебраических преобразований получим

$$\left\{\frac{d}{dt}K(t)+K(t)A(t)+A^T(t)K(t)-\right.$$
$$\left.-K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)+Q(t)\right\}x(t)=0,\ t\in[t_0,T]. \tag{5.21}$$

Так как уравнение (5.21) должно выполняться при любом начальном состоянии $x(t_0)$, а $x(t)$ есть решение однородного уравнения (5.4), то уравнение (5.21) должно быть справедливым при любом значении $x(t)$. Это означает, что матрица $K(t)$ должна удовлетворять матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}K(t)+K(t)A(t)+A^T(t)K(t)-$$
$$-K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)+Q(t)=0. \tag{5.22}$$

Найдем граничные условия для уравнения (5.22). При $t=T$ уравнение (5.18) имеет вид

$$\lambda(T)=K(T)x(T). \tag{5.23}$$

С другой стороны, $\lambda(T)$ было определено соотношением (5.8). Приравнивая (5.8) и (5.23), получим

$$[K(T)-F]x(T)=0$$

при любом $x(T)$ (которое не задано) и, следовательно,

$$K(T)=F. \tag{5.24}$$

Уравнение (5.24) определяет граничные условия уравнения Риккати (5.22), и поэтому согласно теореме существования и единственности решения уравнения Риккати $K(t)$ существует и единственно.

Матрица $K(t)$ – симметричная матрица. Для того чтобы это показать, протранспонируем уравнение (5.22):

$$\left[\frac{d}{dt}K(t)\right]^T+K^T(t)A(t)+A^T(t)K^T(t)-$$
$$-K^T(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K^T(t)+Q(t)=0,$$

поскольку матрицы $R(t)$ и $Q(t)$ симметричные.

Но для любой матрицы справедливо

$$\left[\frac{d}{dt}K(t)\right]^T=\frac{d}{dt}K^T(t).$$

Поэтому $K(t)$ и $K^T(t)$ являются решением одного и того же уравнения. При $t=T$ имеем

$$K(T)=K^T(T)=F,$$

так как $F=F^T$ (матрица F симметричная по условию задачи).

Итак, $K(T)$ и $K^T(T)$ есть решение одного и того же дифференциального уравнения при одинаковых граничных условиях. Из единственности решений дифференциальных уравнений следует, что $K(T)=K^T(T)$, т.е. матрица $K(T)$ симметричная.

Отметим, что уравнение Риккати имеет два решения. Вопрос о выборе значения матрицы $K(t)$, при котором управление $u(t)$ минимизирует функционал качества, будет рассмотрен ниже.

Оптимальное управление, учитывая полученные результаты, существует, единственно и определяется уравнением

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t), \qquad (5.25)$$

где $K(t)$ – симметричная матрица, являющаяся решением дифференциального уравнения типа Риккати (5.22) с граничным условием (5.24).

Состояние оптимальной системы есть решение линейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\right]x(t), \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned} \qquad (5.26)$$

Покажем теперь, что экстремальное управление (5.25) является по крайней мере локальным минимумом критерия качества $J(x,u)$. Напомним, что если матрица

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 H(x,u,\lambda,t)}{\partial x^2(t)} & \dfrac{\partial^2 H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)\partial u(t)} \\ \dfrac{\partial^2 H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)\partial x(t)} & \dfrac{\partial^2 H(x,u,\lambda,t)}{\partial u^2(t)} \end{bmatrix} \qquad (5.27)$$

положительно определена, то управление, при котором $\partial H(x,u,\lambda,t)/\partial u(t) = 0$, должно быть оптимальным, хотя бы локально.

Из уравнения, определяющего гамильтониан в рассматриваемой задаче (5.6), получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)} = Q(t)x(t) + \lambda^T(t)A(t); \\ &\frac{\partial^2 H(x,u,\lambda,t)}{\partial x^2(t)} = Q(t); \\ &\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} = R(t)u(t) + \lambda^T(t)B(t); \\ &\frac{\partial^2 H(x,u,\lambda,t)}{\partial u^2(t)} = R(t); \\ &\frac{\partial^2 H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)\partial u(t)} = 0. \end{aligned} \qquad (5.28)$$

Подставляя (5.28) в (5.27), получим матрицу

$$\begin{bmatrix} Q(t) & 0 \\ 0 & R(t) \end{bmatrix}. \qquad (5.29)$$

Так как матрица $R(t)$ положительно определена, а матрица $Q(t)$ положительно полуопределена, то матрица (5.29) тоже положительно полуопределена. Однако, так как высшие производные $H(x,u,\lambda,t)$ по $u(t)$ равны нулю, то для данной задачи предположение о положительной полуопределенности матрицы (5.29) является достаточно сильным, чтобы гарантировать, что управление (5.25) минимизирует критерий качества, по крайней мере локально.

Найдем значение функционала качества, принимаемое при оптимальном управлении и соответствующей ему оптимальной траектории. Для этого в подынтегральную часть функционала качества (5.5) добавим выражение $\frac{d}{dt}[x^T(t)K(t)x(t)]$, компенсировав вне интеграла выражением $x^T(t_0)K(t_0)x(t_0) - x^T(T)K(T)x(T)$. Принимая во внимание, что $K(T) = F$, и учитывая уравнение (5.22), получим

$$J^0(x,u) = \frac{1}{2}x^T(t_0)K(t_0)x(t_0). \qquad (5.30)$$

Таким образом, оптимальное (минимальное) значение функционала зависит как от начального состояния объекта $x(t_0)$, так и от его структурно – параметрической характеристики, сосредоточенной в полученном выражении значения матрицы $K(t_0)$.

Доказывая положительную определенность матрицы $K(t)$, допустим, что при $t=t_1<T$ матрица $K(t)$ не является положительно определенной. Тогда существует $x(t_1)$ такое, что $\frac{1}{2}x^T(t_1)K(t_1)x(t_1) \le 0$. При этом, очевидно, нарушается положение: если $u(t) \ne 0$,то J(x,u)>0, которое следует из положительной полуопределенности матриц F и $Q(t)$ и положительной определенности матрицы $R(t)$. Поэтому матрица $K(t)$ должна быть положительно определенной.

Покажем, что $J^0(x,u)$ является решением дифференциального уравнения в частных производных Гамильтона – Якоби и что оно удовлетворяет граничным условиям.

Заметим, что при $t=T$ уравнение (5.30) запишется в виде

$$J^0(x,T) = \frac{1}{2}x^T(T)Fx(T). \qquad (5.31)$$

Уравнение Гамильтона – Якоби для системы (5.4) и функционала (5.5) имеет вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}J^0(x(t),t) + \\ &+\min_{u(t)}\left\{\frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial J^0(x(t),t)}{\partial x(t)}\right)[A(t)x(t) + B(t)u(t)]\right\} = 0.\end{aligned} \qquad (5.32)$$

Стоящее в скобках выражение минимизируется управлением

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\left\{\frac{\partial J^0(x(t),t)}{\partial x(t)}\right\}^T. \qquad (5.33)$$

Подставляя соотношение (5.33) в уравнение (5.32), получим

$$\frac{\partial J^0(x(t),t)}{\partial t}+\frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial J^0(x(t),t)}{\partial x(t)}\right\}B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\left\{\frac{\partial J^0(x(t),t)}{\partial x(t)}\right\}^T+$$
$$+\left\{\frac{\partial J^0(x(t),t)}{\partial x(t)}\right\}A(t)x(t)- \tag{5.34}$$
$$-\left\{\frac{\partial J^0(x(t),t)}{\partial x(t)}\right\}B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\left\{\frac{\partial J^0(x(t),t)}{\partial x(t)}\right\}^T=0.$$

Но если $J^0(x(t),t)=\frac{1}{2}x^T(t)K(t)x(t)$, то

$$\frac{\partial J^0(x(t),t)}{\partial t}=\frac{1}{2}x^T(t)\left\{\frac{d}{dt}K(t)\right\}x(t) \text{ и } \frac{\partial J^0(x(t),t)}{\partial x(t)}=K(t)x(t).$$

С учетом последнего уравнение (5.34) принимает вид

$$x^T(t)\Big[\frac{d}{dt}K(t)+K(t)A(t)+A^T(t)K(t)-$$
$$-K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)+Q(t)\Big]x(t)=0. \tag{5.35}$$

Таким образом, *K(t)* удовлетворяет решению уравнения Риккати (5.22).

Заметим, что функция $J^0(x(t),t)=\frac{1}{2}x^T(t)K(t)x(t)$ является решением уравнения Гамильтона – Якоби при любых $x(t)\in R^n$, $t\in[t_0,T]$. При $t=t_0$ дает оптимальное значение критерия качества

$$J^0(x,u)=\frac{1}{2}x^T(t_0)K(t_0)x(t_0),$$

что совпадает с полученными ранее результатами.

Отметим, что оптимальная система с обратной связью, полученная в данном разделе, линейна, но имеет переменные параметры. Это справедливо и в том случае, когда матрицы *A(t), B(t), Q(t), R(t)* не зависят от времени, а интервал $[t_0,T]$ конечен.

Предположим, что указанные матрицы не зависят от времени (постоянные на всем интервале управления системой), матрица $F=0$ и интервал управления $T=\infty$. Таким образом, задача формулируется в следующем виде. Дан объект

$$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+Bu(t),$$
$$x(t_0)=x_0 \tag{5.36}$$

и задан функционал качества

$$J(x,u)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left\{x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)\right\}dt, \tag{5.37}$$

где матрицы Q и R положительно определены.

Требуется построить управление, минимизирующее функционал (5.37) на объекте (5.36) при условии, что на управление не наложены ограничения.

Очевидно, что матрица *K(t)* будет являться решением уравнения Риккати, которое должно удовлетворять граничному условию *K(T)=0*.

Оптимальное управление существует, единственно и определяется уравнением

$$u(t) = -R^{-1}B^T \hat{K}\, x(t), \tag{5.38}$$

где $\hat{K}$ - постоянная положительно определенная матрица размера n x n, являющаяся решением нелинейного матричного алгебраического уравнения:

$$\hat{K} A + A^T \hat{K} - \hat{K}BR^{-1}B^T \hat{K} + Q = 0\ . \tag{5.39}$$

Можно показать, что из предположения об управляемости системы (5.36) и из *F=0* следует существование $\lim\limits_{T\to\infty} K(T)$, его единственность, а также равенство

$$\lim_{T\to\infty} K(T) = \hat{K},$$

где $\hat{K}$ - положительно определенная матрица, являющаяся решением алгебраического уравнения (5.39).

Оптимальная траектория определяется решением линейного инвариантного однородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = \left[A - BR^{-1}B^T\hat{K}\right]x(t), \\ &x(t_0) = x_0\,. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Минимальное значение функционала качества равно

$$J^0(x,u) = \frac{1}{2}x^T(t_0)\hat{K}x(t_0). \tag{5.41}$$

Отметим, что собственные значения матрицы $G = A - BR^{-1}B^T\hat{K}$ должны иметь отрицательные действительные части и поэтому оптимальная система (5.40) устойчива. Только в этом случае значение функционала качества (5.41) будет принимать конечное значение.

§ 5.3. Задача о регуляторе выхода

Рассмотрим задачу о регуляторе выхода. Пусть наблюдаемый и управляемый объект описывается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ &x(t_0) = x_0\,, \\ &y(t) = C(t)x(t). \end{aligned} \tag{5.42}$$

Здесь $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^r$, $y(t) \in R^m$, $0 < m \le r \le n$.

Пусть задан функционал качества

$$\begin{aligned} &J(x,u) = \\ &= \frac{1}{2}y^T(T)Fy(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{y^T(t)Q(t)y(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right\}dt, \end{aligned} \tag{5.43}$$

где матрицы *F* и *Q(t)* положительно полуопределенные, матрица *R(t)* положительно определена, *u(t)* не ограничено, время окончания переходного *T* процесса задано.

Требуется построить управление, доставляющее минимум функционалу (5.43) на объекте (5.42).

Подставим выражение для y(t) в функционал (5.43). Будем иметь

$$J(x,u)= \\ =\frac{1}{2}x^T(T)\Phi(T)x(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x^T(t)\mathrm{P}(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)\right\}dt, \tag{5.44}$$

где

$$\Phi(T)=C^T(T)FC(T),\ \mathrm{P}(t)=C^T(T)Q(t)C(T). \tag{5.45}$$

Так как матрицы *F* и *Q(t)* симметричные, то и матрицы *Ф(T)* и *P(t)* симметричные. Если система наблюдаема, то матрица *C(t)* не может быть равной нулю ни при каком $t\in[t_0,T]$.

Используя результаты, полученные в предыдущем параграфе (§ 5.2), можно заключить, что оптимальное управление существует, единственно и определяется соотношением

$$u(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t), \tag{5.46}$$

где $K(T)$ – положительно определенная матрица размера n x n есть решение уравнения Риккати:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}K(t)+K(t)A(t)+A^T(t)K(t)-\\&-K(t)B(t)R^{-1}(t)B(t)K(t)+C^T(t)Q(t)C(t)=0,\\&K(T)=C^T(T)FC(T).\end{aligned} \tag{5.47}$$

Оптимальная траектория есть решение уравнения

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t)=[A(t)-B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]x(t),\\&x(t_0)=x_0.\end{aligned} \tag{5.48}$$

Значение функционала качества при оптимальном управлении и соответствующей этому управлению траектории будет иметь вид

$$J^0(x,u)=\frac{1}{2}x^T(t_0)K(t_0)x(t_0).$$

Отметим, что оптимальное управление есть функция состояния объекта, а не его выхода (измеряемых координат), даже если функционал качества является функцией выхода.

В стационарном случае, когда система управления описывается уравнением

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+Bu(t),\\&x(t_0)=x_0,\\&y(t)=Cx(t),\end{aligned} \tag{5.49}$$

функционал имеет вид

$$J(x,u)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left\{y^T(t)Qy(t)+u^T(t)Ru(t)\right\}dt\,, \tag{5.50}$$

где матрицы Q и R – положительно определенные, оптимальное управление определяется соотношением

$$u(t)=-R^{-1}B^T\hat{K}\,x(t)\,. \tag{5.51}$$

Положительно определенная симметричная матрица $\hat{K}$ является решением алгебраического уравнения

$$\hat{K}A+A^T\hat{K}-\hat{K}BR^{-1}B^T\hat{K}+C^TQC=0\,. \tag{5.52}$$

§ 5.4. Задача слежения

Пусть задана линейная наблюдаемая и управляемая система

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\\&x(t_0)=x_0,\\&y(t)=C(t)x(t).\end{aligned} \tag{5.53}$$

Пусть вектор $z(t)$ - желаемый выход системы, причем размерности вектора $z(t)$ и вектора выхода $y(t)$ одинаковы, т.е. $z(t),\ y(t)\in R^m$.

Задача заключается в том, чтобы отыскать управление, минимизирующее функционал качества

$$\begin{aligned}&J(e,u)=\\&=\frac{1}{2}e^T(T)Fe(T)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{e^T(t)Q(t)e(t)+u^T(t)R(t)u(t)\right\}dt,\end{aligned} \tag{5.54}$$

где матрицы F и $Q(t)$ положительно полуопределены, матрица $R(t)$ – положительно определена, $u(t)$ – не ограничено, T – задано,

$$e(t)=z(t)-y(t). \tag{5.55}$$

Подставляя (5.55) в (5.54), выразим $J(e,u)=J(x,z,u)$. Гамильтониан для задачи слежения запишется в виде

$$\begin{aligned}&H(x,z,u,\lambda,t)=\frac{1}{2}\{z(t)-C(t)x(t)\}^TQ(t)\{z(t)-C(t)x(t)\}+\\&+\frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t+\lambda^T(t)\left[A(t)x(t+B(t)u(t)\right]\end{aligned} \tag{5.56}$$

Из условия $\partial H(x,z,u,\lambda,t)/\partial u(t)=0$ получим

$$u(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t). \tag{5.57}$$

Так как $R(t)$ положительно определена, то управление (5.57) минимизирует гамильтониан (5.56).

Условие $\frac{d}{dt}\lambda(t)=-\{\partial H(x,z,u,\lambda,t)/\partial x(t)\}^T$ дает

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=-C^T(t)Q(t)C(t)x(t)-A^T(t)\lambda(t)+C^T(t)Q(t)z(t)\,. \tag{5.58}$$

Из уравнений (5.53) и (5.57) получим

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t). \tag{5.59}$$

Уравнения (5.58) и (5.59) объединим в каноническую систему

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}\lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -C^T(t)Q(t)C(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ C^T(t)Q(t) \end{bmatrix} z(t),\end{gathered} \tag{5.60}$$

краевые условия *2n* линейных дифференциальных уравнений (5.60) заданы при $t=t_0$ $x(t_0) = x_0$ и определяются при $t=T$ из условия

$$\lambda(T) = \left\{ \frac{1}{2} \partial e^T(T)Fe(T) / \partial x(T) \right\}^T, \tag{5.61}$$

т.е.

$$\lambda(T) = C^T(T)FC(T)x(T) - C^T(T)Fz(T). \tag{5.62}$$

Пусть $\Omega(t,t_0)$ фундаментальная матрица решений системы (5.60). Тогда

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ \lambda(T) \end{bmatrix} = \Omega(T,t) \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \int_t^T \Omega(T,\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ C^T(\tau)Q(\tau) \end{bmatrix} z(\tau)d\tau. \tag{5.63}$$

Так же, как в § 5.2, разделив матрицу $\Omega(t,t_0)$ на четыре блока, получим

$$\begin{gathered} x(T) = \Omega_{11}(T,t)x(t) + \Omega_{12}(T,t)\lambda(t) + \\ + \int_t^T \Omega_{12}(T,\tau)C^T(\tau)Q(\tau)z(\tau)d\tau, \end{gathered} \tag{5.64}$$

$$\begin{gathered} \lambda(T) = \Omega_{21}(T,t)x(t) + \Omega_{22}(T,t)\lambda(t) + \\ + \int_t^T \Omega_{22}(T,\tau)C^T(\tau)Q(\tau)z(\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{5.65}$$

С другой стороны, $\lambda(T)$ определяется выражением (5.62). Подставляя в (5.62) уравнение (5.64) и приравнивая правые части полученного выражения и уравнения (5.65), после алгебраических преобразований будем иметь

$$\begin{gathered} \lambda(t) = \\ = \left[\Omega_{22}(T,t) - C^T(T)FC(T)\Omega_{12}(T,t)\right]^{-1} \{[C^T(T)FC(T)\Omega_{11}(T,t) - \\ - \Omega_{21}(T,t)]x(t) + \\ + \int_t^T \left[C^T(T)FC(T)\Omega_{12}(T,\tau) - \Omega_{22}(T,\tau)\ \right] C^T(\tau)Q(\tau)z(\tau)d\tau - \\ - -C^T(T)Fz(T)\}, \end{gathered} \tag{5.66}$$

или

$$\lambda\ (t) = K(t)x(t) - g(t), \tag{5.67}$$

где

$$\begin{gathered} K(t) = \left[\Omega_{22}(T,t) - C^T(T)FC(T)\Omega_{12}(T,t)\right]^{-1} \times \\ \times \left\{\left[C^T(T)FC(T)\Omega_{11}(T,t) - \Omega_{21}(T,t)\ \right],\right. \end{gathered}$$

$$g(t) = \left[\Omega_{22}(T,t) - C^T(T)FC(T)\Omega_{12}(T,t)\right]^{-1} \times$$
$$\times\left\{ \int_t^T \left[C^T(T)FC(T)\Omega_{12}(T,\tau) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \Omega_{22}(T,\tau) \right] C^T(\tau)Q(\tau)z(\tau)d\tau - C^T(T)Fz(T) \right\}.$$

Установим свойства матрицы *K(t)* и вектора *g(t)*. Для этого продифференцируем выражение (5.67)

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = \frac{d}{dt}K(t)x(t) + K(t)\frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}g(t). \tag{5.68}$$

Подставляя в (5.68) выражение для $\dot{x}(t)$ (5.59) и учитывая (5.67), получим

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = \left[\frac{d}{dt}K(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\right]x(t) +$$
$$+ K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t) - \frac{d}{dt}g(t).$$

С другой стороны, $\frac{d}{dt}\lambda(t)$ определено было ранее выражением (5.58). Приравнивая полученное выражение к (5.58), будем иметь

$$\left[\frac{d}{dt}K(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + \right.$$
$$\left. + C^T(t)Q(t)C(t)\right]x(t) - \left\{\frac{d}{dt}g(t) - [K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t) - \right. \tag{5.69}$$
$$\left. - A^T(t)]g(t) + C^T(t)Q(t)z(t)\right\} = 0.$$

Поскольку оптимальное управление существует, то уравнение (5.69) должно выполняться при любых $x(t), z(t), t \in [t_0, T]$. Следовательно:

1) матрица *K(t)* размера *n* х *n* удовлетворяет матричному уравнению типа Риккати:

$$\frac{d}{dt}K(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t) -$$
$$- K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + C^T(t)Q(t)C(t) = 0, \tag{5.70}$$

2) n – мерный вектор - столбец g(t) должен удовлетворять векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}g(t) - [K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) - A^T(t)]g(t) +$$
$$+ C^T(t)Q(t)z(t) = 0. \tag{5.71}$$

Граничные условия получим следующим образом. Из уравнения (5.67) получаем

$$\lambda(T) = K(T)x(T) - g(T). \tag{5.72}$$

Приравнивая (5.62) и (5.72), получим

$$[K(T) - C^T(T)FC(T)]x(T) - [g(T) - C^T(T)Fz(T)] = 0. \tag{5.73}$$

Так как уравнение (5.73) должно выполняться при любых *x(T)* и *z(T),* то

$$K(T) = C^T(T)FC(T), \tag{5.74}$$

$$g(T) = C^T(T)Fz(T). \tag{5.75}$$

Таким образом, граничные условия дифференциальных уравнений (5.70) и (5.71) полностью определены в заданный конечный момент времени *T*.

Оптимальное управление, учитывая полученные результаты, существует, единственно и определяется уравнением

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)[g(t) - K(t)x(t)], \tag{5.76}$$

где *K(t)* – действительная, симметричная, положительно определенная матрица есть решение матричного дифференциального уравнения типа Риккати (5.70) с граничными условиями (5.74) и вектор - столбец *g(t)* – решение линейного векторного дифференциального уравнения (5.71) с граничными условиями (5.75).

Оптимальная траектория, начинающаяся из исходного состояния $x(t_0) = x_0$, есть решение дифференциального уравнения

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}x(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]x(t) + \\ + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t).\end{gathered} \tag{5.77}$$

Иногда желаемый выход системы представляют как решение некоторого вполне определенного дифференциального уравнения, например,

$$\frac{d}{dt}z(t) = G(t)z(t),\ z(t_0) = z_0. \tag{5.78}$$

Задачу построения управления, доставляющего минимум функционалу (5.54) на решения системы (5.53) с желаемым выходом (5.78), обычно называют задачей вывода и сопровождения объекта по желаемой траектории.

Найдем свойства вектор - столбца *g(t),* положив

$$g(t) = K_1(t)z(t). \tag{5.79}$$

Продифференцировав (5.79), будем иметь

$$\frac{d}{dt}g(t) - \left[\frac{d}{dt}K_1(t) + K_1(t)G(t)\right]z(t) = 0. \tag{5.80}$$

Из уравнений (5.71) и (5.80) получим

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}K_1(t) + K_1(t)G(t) + A^T(t)K_1(t) - \\ - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K_1(t) + C^T(t)Q(t) = 0.\end{gathered} \tag{5.81}$$

Краевое условие для дифференциального уравнения (5.81) получим, рассмотрев (5.79) при *t=T* и сравнив полученное с условием (5.75). Будем иметь

$$K_1(T) = C^T(T)F. \tag{5.82}$$

Оптимальное управление в рассматриваемом случае имеет вид

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)[K_1(t)z(t) - K(t)x(t)],$$

где матрица $K_1(t)$ определяется решением матричного линейного дифференциального уравнения (5.81) с краевым условием (5.82).

Оптимальная траектория, начинающаяся из исходного состояния $x(t_0) = x_0$, есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)[K(t)x(t) - K_1(t)z(t)].$$

В заключение данного параграфа рассмотрим задачу слежения для линейных инвариантных во времени систем. В этом случае матрицы *A, B, C, G* постоянны и известны, время окончания переходного процесса неограниченно возрастает, матрицы *Q* и *R* постоянны и положительно определены. Все результаты будут приближенными и справедливыми лишь для очень больших значений времени окончания переходного процесса *T*.

Уравнения (5.53) и (5.78) будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = Gz(t),\ z(t_0) = z_0.$$

Запишем функционал качества

$$J(e,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{e^T(t)Q(t)e(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right\}dt,$$

где *u(t)* – не ограничено, *T* – задано,

$$e(t) = z(t) - y(t).$$

Оптимальное управление для рассматриваемой задачи имеет вид

$$u(t) = R^{-1}B^T[\hat{K}_1 z(t) - \hat{K}x(t)],$$

где матрицы $\hat{K}$ и $\hat{K}_1$ являются решениями алгебраических уравнений

$$\hat{K}A + A^T\hat{K} - \hat{K}BR^{-1}B^T\hat{K} + C^TQC = 0,$$

$$\hat{K}_1 G + [A^T - \hat{K}BR^{-1}B^T]\hat{K}_1 + C^TQ = 0.$$

§ 5.5. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в заданный момент окончания переходного процесса

Сформулируем задачу § 5.2 следующим образом: найти управление, минимизирующее критерий

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right\}dt \qquad (5.83)$$

на объекте

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (5.84)$$

при терминальных ограничениях

$$x(t_0) = x_0,\quad x_i(T) = 0\ \ i = 1,...,q. \qquad (5.85)$$

Здесь *Q(t), R(t)* – положительно определенные симметричные матрицы, моменты t_0, *T* –заданы.

Условия (5.85) могут быть присоединены к функционалу (5.83) с весовыми коэффициентами $\gamma^T = (\gamma_1, ..., \gamma_q)$.

$$\bar{J}(x,u) = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \, x_i(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \{x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\} dt \, .$$

Уравнения Эйлера – Лагранжа для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -Q(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t), \tag{5.86}$$

$$\lambda_j(T) = \begin{cases} \gamma_j, \; j = 1,...,q, \\ 0, \; j = q+1,...,n, \end{cases} \tag{5.87}$$

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t). \tag{5.88}$$

Таким образом, получена двухточечная задача, которая будет решаться методом, уже применявшимся ранее. Для этого требуется постулировать, что граничные условия $\{x_1(T),...,x_q(T)\}$ являются линейными функциями начальных условий *x(t₀)* и множителей $\{\gamma_1,...,\gamma_q\}$, т.е.

$$\psi = K(t_0)x(t_0) + S(t_0)\gamma, \tag{5.89}$$

где

$$\psi^T = \{x_1(T),...,x_q(T)\}, \tag{5.90}$$

$$\gamma^T = \{\lambda_1(T),...,\lambda_q(T)\}. \tag{5.91}$$

Дополнительная переменная $\lambda(t_0)$ также является линейной функцией от $x(t_0)$ и множителей $\{\gamma_1,...,\gamma_q\}$, т.е.

$$\lambda(t_0) = L(t_0)x(t_0) + M(t_0)\gamma \, . \tag{5.92}$$

Для любого момента $t \in [t_0, T]$ уравнения (5.89) и (5.92) могут быть записаны в виде

$$\psi = K(t)x(t) + S(t)\gamma, \tag{5.93}$$

$$\lambda(t) = L(t)x(t) + M(t)\gamma \, . \tag{5.94}$$

Так как эти соотношения должны быть справедливыми при $t=T$, очевидно, должны иметь место соотношения

$$L(T)=0, \tag{5.95}$$

$$K_{ji}(T) = M_{ij}(T) = \left\{\frac{\partial \psi_j(T)}{\partial x_i(T)}\right\} = \begin{cases} 1 \; при \; i = j, \; i = 1,...,n, \\ 0 \; при \; i \neq j, \; j = 1,...,q, \end{cases} \tag{5.96}$$

$$S(T) = 0 \, . \tag{5.97}$$

Продифференцируем выражение (5.94) и, принимая во внимание (5.84), (5.88), (5.86), получим

$$\Big[\frac{d}{dt}L(t) + L(t)A(t) + A^T(t)L(t) -$$

$$- L(t)B(t)R^{-}(t)B^T(t)L(t) + Q(t) \;\Big] x(t) +$$

$$+ \left\{\frac{d}{dt}M + [A^T(t) - L(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)]M(t) \;\right\}\gamma = 0.$$

Это уравнение должно удовлетворяться при любых значениях $x(t)$ и γ. Поэтому справедливо

$$\frac{d}{dt}L(t) + L(t)A(t) + A^T(t)L(t) -$$
$$- L(t)B(t)R^{-}(t)B^T(t)L(t) + Q(t) = 0, \qquad (5.98)$$
$$L(T) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}M + [A^T(t) - L(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)]M(t) = 0,$$
$$M(T) = \left\{\frac{\partial\psi(T)}{\partial x(T)}\right\}^T. \qquad (5.99)$$

Продифференцировав (5.93) и принимая во внимание, что $\psi(T) = const, \gamma = const$, получим

$$\{\frac{d}{dt}K(t) + K(t)[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)L(t)]\}x(t) +$$
$$+ \{\frac{d}{dt}S(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)M(t)\}\gamma = 0.$$

Это уравнение должно удовлетворяться при любых значениях $x(t)$ и γ. Поэтому справедливо

$$\frac{d}{dt}K(t) + K(t)[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)L(t)] = 0, \qquad (5.100)$$

$$\frac{d}{dt}S(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)M(t) = 0. \qquad (5.101)$$

Сравнивая уравнения (5.99) и (5.100), а также принимая во внимание краевые условия (5.96), можно сделать вывод, что

$$K(t) \equiv M^T(t).$$

(5.102)

Поэтому уравнение (5.101) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}S(t) - M^T(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)M(t) = 0,$$
$$S(T) = 0. \qquad (5.103)$$

Отметим, что $S(t) \le 0$, поскольку $\dot{S}(t) \ge 0$ и $S(T) = 0$.

При некотором значении начального момента времени $t_0=t$ матрица $S(t_0)$ оказывается невырожденной и тогда уравнение (5.93) можно разрешить относительно γ:

$$\gamma = S^{-1}(t_0)[\psi - K(t_0)x(t_0)].$$

(5.104)

Если же матрица $S(t_0)$ оказывается вырожденной, то задача оптимизации (5.83) – (5.85) называется анормальной, что, в частности означает, что в этом случае не существует минимальных решений.

Если же задача не является анормальной, то значения γ из (5.104) можно использовать для получения краевых условий для уравнения (5.86) на левом конце. В результате подстановки (5.104) в (5.92), получим

$$\lambda(t_0) =$$
$$= [L(t_0) - M(t_0)S^{-1}(t_0)K(t_0)]x(t_0) + M(t_0)S^{-1}(t_0)\psi. \tag{5.105}$$

Зная начальные условия, решение уравнения (5.86) можно найти в форме Коши.

Учитывая полученные результаты, можно построить управление по принципу обратной связи:

$$u(t) =$$
$$= -R^{-1}(t)B^T(t)\left\{[L(t) - M(t)S^{-1}(t)M^T(t)]x(t) + M(t)S^{-1}(t)\psi\right\}. \tag{5.106}$$

Управление (5.106) зависит в явном виде от заданных терминальных значений вектора состояния.

§ 5.6. Задача об оптимальном быстродействии при ограничениях на управляющие воздействия

Пусть управляемый линейный динамический объект с постоянными параметрами описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$x(t_0) = x_0, \qquad x(t) \in R^n,\ u(t) \in R^r. \tag{5.107}$$

Управление *u(t)* ограничено по величине

$$|u_j(t)| \le 1,\ \ j = 1,\dots,r. \tag{5.108}$$

Требуется найти управление $u^0(t)$, переводящее объект из $x(t_0)$ в 0 за минимальное время. Таким образом, функционал для рассматриваемой задачи синтеза управления имеет вид

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{T} dt = T - t_0. \tag{5.109}$$

Предположение об управляемости объекта (5.106) гарантирует существование управления $u^0(t)$, переводящее объект из $x(t_0)$ в начало координат. Так, при $t=T^0$ должно быть $x(T^0)=0$ и $u(t)=0$ для любого $t>T^0$, при этом будет $x(t)=0$ для любого $t>T^0$.

Сформулируем необходимые условия оптимальности. Составим гамильтониан

$$H(x,u,\lambda) = 1 + \lambda^T(t)[Ax(t) + Bu(t)]. \tag{5.110}$$

Каноническая система будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial \lambda(t)}\right\}^T,$$
$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial x(t)}\right\}^T = -A^T\lambda(t) \tag{5.111}$$

с граничными условиями $x(t_0) = x_0$, $x(T^0) = 0$.

Учитывая результаты, изложенные в главе 3 (§ 3.5), управление определяется соотношением

$$u(t) = -SIGN[q(t)] = -SIGN[B^T \lambda(t)], \tag{5.112}$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} u_j(t) &= -sign[q_j(t)] = -sign[\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\,\lambda_i(t)] = \\ &= -sign[b_j\,\lambda(t)],\;\; j = 1,\ldots,r, \end{aligned} \tag{5.113}$$

где $b_j - j$ строка матрицы B.

Так как гамильтониан не зависит в явном виде от времени, а время окончания переходного процесса не задано, то справедливо следующее:

$$H(x,u,\lambda) = 1 + \lambda^T(t)[Ax(t) + Bu(t)] = 0, \tag{5.114}$$

для всех $t \in [t_0, T]$.

Исследуем свойства оптимального по быстродействию управления. Рассмотрим второе уравнение канонической системы относительно переменной $\lambda(t)$:

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -A^T \lambda(t). \tag{5.115}$$

Отметим, что уравнение (5.115) однородное, с постоянными параметрами, сопряжено с первым уравнением канонической системы (5.111) и не зависит от *x(t)* и *u(t.)*.

Необходимые условия оптимальности не содержат дополнительной информации ни относительно начального значения дополнительной переменной $\lambda(t_0)$, ни относительно конечного значения $\lambda(T)$. Тем не менее, можно установить некоторые свойства дополнительной переменной из уравнения (5.114). Нетрудно заметить, что $\lambda(t)$ не может быть нулевым вектором, т.е.

$$\lambda(t) \neq 0,\; t \in [t_0, T]. \tag{5.116}$$

Действительно, предположим $\lambda(t)=0$. Тогда уравнение (5.114) приводит к противоречию: $1=0$, а следовательно, справедливо (5.116).
Отметим также, что решить уравнение (5.115) в общем случае не представляется возможным.

Обозначим неизвестное ненулевое начальное значение дополнительной переменной через $\lambda_0 = \lambda(t_0)$. Тогда решение уравнения (5.115) будет иметь вид

$$\lambda(t) = \left[\exp\{-A^T t\}\right]\lambda(t_0). \tag{5.117}$$

Подставив (5.117) в (5.112), получим

$$u(t) = -SIGN\left[B^T \exp\left\{-A^T t\right\}\lambda(t_0)\right] \tag{5.118}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} u_j(t) &= -sign[q_j(t)] = \\ &= -sign[b_j^T \exp\left\{-A^T t\right\}\lambda(t_0)],\;\; j = 1,\ldots,r. \end{aligned} \tag{5.119}$$

Таким образом, если задача нормальная, то управление (5.119) однозначно определяется через начальное значение $\lambda(t_0)$. Найдем необходимое и достаточное условия нормальности рассматриваемой задачи.

Предположим, что существует интервал времени (T_1,T_2) такой, что для некоторого j на нем удовлетворяются соотношения

$$q_j(t) = b_j^T \exp\{-A^T t\}\lambda(t_0) = 0, \quad t \in [t_0, T]\ . \tag{5.120}$$

Следовательно, $\dot{q}_j(t) = 0,\ \ddot{q}_j(t) = 0, \ldots$ для любого $t \in [t_0, T]$, т.е. должны удовлетворяться соотношения

$$\left.\begin{aligned}
q_j(t) &= \left[\exp\{-At\}b_j\right]^T \lambda_0 = 0,\\
\dot{q}_j(t) &= \left[\exp\{-At\}Ab_j\right]^T \lambda_0 = 0,\\
\ddot{q}_j(t) &= \left[\exp\{-At\}A^2 b_j\right]^T \lambda_0 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overset{(n-1)}{q}_j(t) &= \left[\exp\{-At\}A^{n-1} b_j\right]^T \lambda_0 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5.121}$$

Пусть матрица G_j размера n x n определяется соотношением

$$G_j = \left[b_j \vdots\ Ab_j \vdots \cdots \vdots\ A^{n-1}b_j\ \right]. \tag{5.122}$$

Тогда уравнения (5.121) можно переписать в виде

$$G_j^T \exp\{-A^T t\}\lambda_0 = 0, \quad t \in [t_0, T]. \tag{5.123}$$

Так как матрица $\exp\{-A^T t\}$ невырожденная и $\lambda(t_0) \neq 0$, то для того, чтобы выполнялось (5.123), матрица G_j должна быть вырожденной, т.е.

$$\det G_j = 0. \tag{5.124}$$

Итак, из уравнения (5.120) следует (5.124), но уравнение (5.120) означает, что задача вырожденная. Поэтому, если задача вырожденная, то должно выполняться условие (5.124). Иначе говоря, выполнение условия (5.124) является необходимым условием вырожденности задачи управления. Если же $\det G_j \neq 0,\ j = 1,\ldots,r$, то задача не вырождена. Последнее утверждение совпадает с определением структурного свойства системы – управляемостью, т.е., если G – матрица размерностью n x nr, определяемая соотношением

$$G = \left[B \vdots AB \vdots A^2 B \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B\right],$$

меет ранг n, т.е. *рангG=n,* то система полностью управляема. Условие управляемости является необходимым и достаточным условием нормальности задачи.

Если линейная система управляема, то оптимальное по быстродействию управление единственно (если оно существует).

Предположим, что $u_1(t)$ *и* $u_2(t)$ - два различных оптимальных по быстродействию управления, переводящих систему из $x(t_0)=x_0$ в 0 за одно и то же время T. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – две различные траектории, исходящие из $x(t_0)$ под воздействием соответствующих управлений $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Тогда

$$x_1(t) = e^{At}\left[x_0 + \int_{t_0}^{T} e^{-A\tau} B u_1(\tau) d\tau\right],$$

$$x_2(t) = e^{At}\left[x_0 + \int_{t_0}^{T} e^{-A\tau} B u_2(\tau) d\tau\right].$$

При $t=T$ должно быть $x_1(T) = x_2(T)$.
Так как $exp\{At\}$- матрица невырожденная, то

$$\int_{t_0}^{T} e^{-A\tau} Bu_1(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{T} e^{-A\tau} Bu_2(\tau)d\tau .$$

Отсюда $u_1(t) = u_2(t)$.

Как уже было показано ранее, оптимальное по быстродействию управление есть кусочно-постоянная функция, принимающая значения $+1$ или -1. Найдем верхнюю границу числа переключений.

Пусть собственные значения $\lambda_1,...,\lambda_n$ матрицы A объекта (5.107) – различные действительные числа и Λ - диагональная матрица этих собственных значений

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

связанная с матрицей A преобразованием подобия $\Lambda = P^{-1}AP.$ Тогда $e^{\Lambda t} = P^{-1}e^{At}P$ или $e^{-\Lambda t} = Pe^{-At}P^{-1}$ и выражение (5.119) можно переписать в виде

$$u_j(t) = -sign[\{P e^{-At} P^{-1} b_j\}^T \lambda(t_0)] = -sign\left[\sum_{k=1}^{n} \rho_{kj}\, e^{-\lambda_k t}\right].$$

Постоянные ρ_{kj} зависят от элементов матриц P и P^{-1}, от компонентов вектор - столбца b_{kj} и от компонентов вектор - столбца $\lambda(t_0)$. Очевидно, что число переключений равно числу нулей функции

$$g_j = \sum_{k=1}^{n} \rho_{kj} e^{-\lambda_k t}.$$

Эта функция есть сумма n экспонент. Нетрудно видеть, что число нулей суммы n экспоненциальных функций времени не должно превышать $n\text{-}1$.
Можно показать, что сформулированное выше относительно числа переключений справедливо и для случая, когда область цели может быть и не началом координат.

§ 5.7. Задача управления при неполной информации о состоянии объекта

Рассматривается объект, описываемый линейными дифференциальными уравнениями

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$
$$x(t_0) = x_0,$$
$$y(t) = C(t)x(t),$$

(5.125)

где $x \in R^n$, $y \in R^m$, $u \in R^r$, $m \le n.$

Предположим, что на управление не наложено ограничений.

Задан функционал качества

$$J(x,u)=\frac{1}{2}\| x(T)\|_F^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{\| x(t)\|_{Q(t)}^2+\| u(t)\|_{R(t)}^2\right\}dt.$$

(5.126)

Требуется синтезировать управление, минимизирующее функционал (5.126) на объекте (5.125). В такой постановке задачи управления, как уже говорилось раньше, есть функция состояния объекта *x(t),* а не его измеряемых координат *y(t).* Поэтому разумным и, наверное, единственным является предложение о построении оценки *x(t)* по измеряемой координате *y(t).* В данном разделе будут рассмотрены два метода построения такой оценки.

Полноразмерная оценка $\hat{x}(t)$

Из названия оценки следует, что если $x\in R^n$, то отыскиваться будет $\hat{x}(t)$ как функция от *y(t),* причем $\hat{x}\in R^n$. Введем в рассмотрение ошибку оценки

$$e(t)=x(t)-\hat{x}(t). \qquad (5.127)$$

Подставляя x(t), найденное из (5.127), в (5.126), исходный функционал можно представить в виде

$$J(x,u)=J_1(e)+J_2(\hat{x},u)+J_3(e,\hat{x}), \qquad (5.128)$$

где

$$J_1(e)=\frac{1}{2}\| e(T)\|_F^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{\| e(t)\|_{Q(t)}^2\right\}dt, \qquad (5.129)$$

$$J_2(\hat{x},u)=\frac{1}{2}\| \hat{x}(T)\|_F^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{\| \hat{x}(t)\|_{Q(t)}^2+\| u(t)\|_{R(t)}^2\right\}dt, \qquad (5.130)$$

$$J_3(e,\hat{x})=e^T(T)F\hat{x}(T)+\int_{t_0}^{T}e^T(t)Q(t)\hat{x}(t)\,dt. \qquad (5.131)$$

Пусть $L(t,\tau)$ - линейный оператор, преобразующий y(t) в $\hat{x}(t)$, т.е.

$$\hat{x}(t)=L(t,\tau)y(\tau). \qquad (5.132)$$

Так как $L(t,\tau)$ - линейный оператор, то верно следующее его представление:

$$L(t,\tau)=L^0(t,\tau)+\mu r(t,\tau), \qquad (5.133)$$

где $L^0(t,\tau)$ - оператор, при котором $\hat{x}(t)$ доставляет минимум функционалу (5.129),

$r(t,\tau)\in R$ - ненулевой оператор,

μ - весовой коэффициент.

Подставляя (5.132) в (5.129) с учетом (5.133), получим $J_1(e)=J_1(...\mu)$. Найдем условие, при котором $\hat{x}(t)$ минимизирует функционал (5.129), учитывая, что $L(t,\tau)=L^0(t,\tau)$ *при* $\mu=0$. Это условие выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial J_1(...\mu)}{\partial\mu}=0_{|\ \mu=0}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{ \left\| x(T)-\left[L^0(T,\tau)+\mu r(T,\tau)\right]y(\tau)\right\|_F^2 + \right.$$

$$\left. +\int_{t_0}^{T}\left\| x(t)-\left[L^0(t,\tau)+\mu r(t,\tau)\right]y(\tau)\right\|_{Q(t)}^2 dt \right\} = 0,\ при\ \mu = 0,$$

откуда, учитывая (5.132), получим необходимое условие минимума функционала (5.129)

$$e^T(T)F\hat{x}(T)+\int_{t_0}^{T} e^T(t)Q(t)\hat{x}(t)dt=0 .$$

(5.134)

Сравнивая (5.134) и (5.131), можно сделать вывод, что минимизация исходного функционала (5.126) может быть заменена минимизацией двух функционалов (5.129) и (5.130), так как при $J_1^0(e)=\min\limits_{\hat{x}} J_1(x-\hat{x})$ функционал $J_3(e,\hat{x})=0$. Таким образом,

$$J^0(x,u)=\min_e J_1(e)+\min_u J_2(\hat{x},u).$$

Будем искать $\hat{x}(t)$ как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=\Im(t)\hat{x}(t)+\Re(t)y(t)+B(t)u(t). \tag{5.135}$$

Продифференцировав (5.127) по времени и принимая во внимание (5.125) и (5.135), получим

$$\frac{d}{dt}e(t)=\left[A(t)-\Re(t)C(t)\right]x(t)-\Im(t)\hat{x}(t). \tag{5.136}$$

Выберем $\Im(e)$ в виде

$$\Im(t)=A(t)-\Re(t)C(t). \tag{5.137}$$

Тогда уравнение (5.136) принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}e(t)=[A(t)-\Re(t)C(t)]e(t),\\ &e(t_0)=x(t_0)-\hat{x}(t_0) \end{aligned} \tag{5.138}$$

и задача сводится к отысканию матрицы $\Re(t)$, при которой решение уравнения (5.138) обеспечивает минимум функционалу (5.129).

Произведем эквивалентное преобразование уравнения (5.138). Пусть

$$e(t)=P^{-1}(t)\varepsilon(t), \tag{5.139}$$

где квадратная матрица *P(t)* обратима для всех $t\in[t_0,T]$. Уравнение, решением которого является эта матрица, будет представлено ниже.

Пусть преобразованное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\varepsilon(t)=[A(t)-\Re(t)C(t)]^T\ \varepsilon(t),\\ &\varepsilon(t_0)=P(t_0)[x(t_0)-\hat{x}(t_0)]. \end{aligned} \tag{5.140}$$

Нетрудно видеть, что квадратная симметричная матрица $P(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}P(t)+P(t)[A(t)-\Re(t)C(t)]-[A(t)-\Re(t)C(t)]^T P(t)=0 .$$

Начальные условия для этого уравнения определяются начальными состояниями параметров матриц уравнения (5.140).

Введем обозначение

$$u_1(t)=\Re^T(t)\varepsilon(t). \tag{5.141}$$

Тогда уравнение (5.140) будет иметь вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\varepsilon(t)=A^T(t)\varepsilon(t)-C^T(t)u_1(t),\\ \varepsilon(t_0)=\varepsilon_0.\end{gathered} \tag{5.142}$$

Функционал качества (5.129) с учетом (5.139) принимает вид

$$J_1(\varepsilon)=\frac{1}{2}\|\varepsilon(T)\|_f^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{\|\varepsilon(t)\|_{q(t)}^2\right\}dt , \tag{5.143}$$

где $f=P^{-1}(T)FP^{-1}(T)$, $q(t)=P^{-1}(t)Q(t)P^{-1}(t)$.

Перепишем функционал (5.143) в виде

$$\begin{gathered}J_1(\varepsilon)=\frac{1}{2}\varepsilon^T(T)f\,\varepsilon(T)+\\ +\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{\varepsilon^T(t)Q_1(t)\varepsilon(t)+u_1^T(t)R_1(t)u_1(t)\right\}dt,\end{gathered} \tag{5.144}$$

где матрицы *$Q_1(t)$* и *$R_1(t)$* будут выбраны (назначены) так, чтобы выполнялось условие

$$\varepsilon^T(t)q(t)\varepsilon(t)=\varepsilon^T(t)Q_1(t)\varepsilon(t)+u^T(t)R_1(t)u(t) . \tag{5.145}$$

Таким образом, задача отыскания матрицы $\Re(t)$ сведена к задаче синтеза оптимального управления *$u_1(t)$* для объекта (5.142).

Учитывая результаты раздела § 5.2, имеем

$$u_1(t)=R_1^{-1}(t)C(t)S(t)\varepsilon(t) , \tag{5.146}$$

где *$S(t)$* – решение уравнения типа Риккати:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}S(t)+S(t)A^T(t)+A(t)S(t)-\\ -S(t)C^T(t)R_1^{-1}(t)C(t)S(t)+Q_1(t)=0,\\ S(T)=P^{-1}(T)FP^{-1}(T).\end{gathered} \tag{5.147}$$

Учитывая (5.145) и (5.146), получим условие выбора (назначения) матриц *$Q_1(t)$* и *$R_1(t)$*

$$P(t)Q(t)P(t)=Q_1(t)+S(t)C^T(t)R_1^{-1}(t)C(t)S(t) . \tag{5.148}$$

Так как матрица *$Q(t)$* известна из постановки задачи, то уравнение (5.147) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}S(t)+S(t)A^T(t)+A(t)S(t)-\\ -2S(t)C^T(t)R_1^{-1}(t)C(t)S(t)+Q(t)=0,\\ S(T)=P^{-1}(T)FP^{-1}(T).\end{gathered} \tag{5.149}$$

Сравнивая (5.141) и (5.146), получим условие выбора матрицы $\Re(t)$

$$\Re^T(t) = R_1^{-1}(t)C(t)S(t), \tag{5.150}$$

и уравнение (5.138) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}e(t) = [A(t) - S(t)C^T(t)R_1^{-1}(t)C(t)]e(t),\\ e(t_0) = e_0.\end{gathered} \tag{5.151}$$

Положительно определенная матрица $R_1(t)$ может быть назначена исходя из требований, предъявляемых к качеству переходного процесса в системе (5.151).

Уравнение наблюдателя будет иметь вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = [A(t) - \Re(t)C(t)]\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \Re(t)y(t),\\ \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0.\end{gathered} \tag{5.152}$$

При достаточно эффективном управлении (5.146) ошибка рассогласования, возникающая из-за неодинаковых начальных условий объекта и наблюдателя, незначительна и синтез управления следует производить на модели объекта

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\hat{x}_m(t) = A(t)\hat{x}_m(t) + B(t)u(t),\\ \hat{x}_m(t_0) = \hat{x}_0.\end{gathered} \tag{1.153}$$

Управление, синтезированное на модели (5.153), будет иметь вид

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)L(t)\hat{x}(t), \tag{5.154}$$

где матрица $L(t)$ является решением дифференциального уравнения типа Риккати:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}L(t) + L(t)A(t) + A^T(t)L(t) -\\ - L(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)L(t) + Q(t) = 0,\\ L(T) = F.\end{gathered} \tag{5.155}$$

Таким образом, при неполной информации о состоянии наблюдаемого и управляемого объекта необходимо построить наблюдатель вида (5.152) и регулятор вида (5.154). Матрицы *S(t)* и *L(t)* находятся как решения уравнений (1.149) и (1.155) соответственно до начала управления объектом.

Найдем условие устойчивого решения рассматриваемой задачи. Введем функцию Ляпунова

$$V(e,\hat{x}) = \begin{pmatrix} e^T(t) & \hat{x}^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) & 0 \\ 0 & L(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ \hat{x}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.156}$$

где матрицы $S(t)$ и $L(t)$ - положительно определенные матрицы, являющиеся решениями уравнений (5.149) и (5.155).

Тогда система будет устойчива по Ляпунову при выполнении следующего неравенства

$$\frac{d}{dt}V(e,\widehat{\mathrm{x}}) =$$
$$= -e^T(t)Q(t)e(t) - \widehat{x}^T(t)\left[Q(t) + L(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)L(t)\right]\widehat{x}(t) +$$
$$+ \widehat{x}^T(t)L(t)S(t)C^T(t)R_1^{-1}(t)C(t)e(t) +$$
$$+ e^T(t)C^T(t)R_1^{-1}(t)C(t)L(t)S(t)\widehat{x}(t) \le 0.$$

Это неравенство будет заведомо выполняться, если потребовать для любой пары $\widehat{x}(t)$ и $e(t)$ при $t \in [t_0, T]$ выполнения условия

$$\begin{pmatrix} -Q(t) & L(t)S(t)C^T(t)R_1^{-1}(t)C(t) \\ C^T(t)R_1^{-1}(t)C(t)L(t)S(t) & -Q(t) - L(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)L(t) \end{pmatrix} \le 0. \qquad (5.157)$$

Условие (5.157) может быть использовано для соответствующего выбора (назначения) матрицы $R_1(t)$.

<u>Наблюдатель минимальной сложности</u>

Этот наблюдатель называют достаточно часто наблюдателем Люенбергера. Объект описывается уравнениями (5.125). Введем в рассмотрение вектор $z(t)$ размерности n-m:

$$z(t)=T(t)x(t). \qquad (5.158)$$

Если бы матрица $T(t)$ была известна, то

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(t) \\ T(t) \end{pmatrix} x(t),$$

откуда

$$x(t) = \begin{pmatrix} C(t) \\ T(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \left(V(t) \vdots P(t)\right) \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \mathrm{P(t)z(t) + V(t)y(t).} \qquad (5.159)$$

Очевидно, что использовать уравнение (5.159) не представляется возможным, т.к. $z(t)$ не известно.

Будем искать оценку $z(t)$ как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\hat{z}(t) = D(t)\widehat{z}(t) + E(t)y(t) + G(t)u(t) \qquad (5.160)$$

и оценку процесса $x(t)$ в виде

$$\widehat{x}(t) = P(t)\widehat{z}(t) + V(t)y(t). \qquad (5.161)$$

Введем в рассмотрение ошибку $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \widehat{z}(t) - z(t) = \widehat{z}(t) - T(t)x(t). \qquad (5.162)$$

Продифференцировав (5.162) и учитывая (5.125) и (5.160), получим

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = D(t)\widehat{z}(t) + \left[E(t)C(t) - \frac{d}{dt}T(t) - T(t)A(t)\right]x(t) +$$
$$+\left[G(t) - T(t)B(t)\right]u(t). \qquad (5.163)$$

Учитывая (5.162) и назначив $G(t)$ в виде

$$G(t) = T(t)B(t), \qquad (5.164)$$

будем иметь из (5.162)

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = D(t)\varepsilon(t) + \\ + \left[D(t)T(t) + E(t)C(t) - \frac{d}{dt}T(t) - T(t)A(t) \right] x(t). \qquad (5.165)$$

Назначим матрицы *D(t)* и *E(t)* так, чтобы выполнялось условие

$$D(t)T(t) + E(t)C(t) - \frac{d}{dt}T(t) - T(t)A(t) = 0$$

или

$$D(t)T(t) - T(t)A(t) = \frac{d}{dt}T(t) - E(t)C(t). \qquad (5.166)$$

Матрицы *G(t), D(t), E(t)* называют параметрами Люенбергера.
Введем в рассмотрение *e(t)*:

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t). \qquad (5.167)$$

Тогда, учитывая (5.161), выражение (5.167) запишем в виде

$$e(t) = P(t)\hat{z}(t) + V(t)C(t)x(t) - x(t). \qquad (5.168)$$

Из (5.162) нетрудно получить

$$P(t)\hat{z}(t) = P(t)\varepsilon(t) + P(t)T(t)x(t). \qquad (5.169)$$

Подставляя (5.169) в (5.168), будем иметь

$$e(t) = P(t)\varepsilon(t) + [P(t)T(t) + V(t)C(t) - I_n]x(t),$$

где $P(t)T(t) + V(t)C(t)$ – единичная матрица размерностью n x n, т.е.

$$e(t) = P(t)\varepsilon(t). \qquad (5.170)$$

Из (5.159) имеем

$$\left(V(t) \vdots P(t)\right) = \begin{pmatrix} C(t) \\ T(t) \end{pmatrix}^{-1},$$

Откуда

$$\begin{pmatrix} C(t) \\ T(t) \end{pmatrix}\left(V(t) \vdots P(t)\right) = I_n = \\ = \begin{pmatrix} C(t)\ V(t) & C(t)\ P(t) \\ T(t)\ V(t) & T(t)\ P(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \qquad (5.171)$$

и

$$V(t)C(t) + P(t)T(t) - I_n = 0. \qquad (5.172)$$

Из (5.171) имеем

$$C(t)P(t) = 0,\ \ T(t)V(t) = 0, \\ C(t)V(t) = I_m,\ T(t)P(t) = I_{n-m}. \qquad (5.173)$$

Используя (5.172), (5.173), найдем матрицы *D(t)* и *E(t).* Умножив (5.166) справа на *P(t),* получим

$$D(t) = \left\{ \frac{d}{dt}T(t) \right\} P(t) + T(t)A(t)P(t). \qquad (5.174)$$

Умножив (5.166) справа на V(t), получим

$$E(t) = \left\{ \frac{d}{dt} T(t) \right\} V(t) + T(t) A(t) V(t) . \qquad (5.175)$$

Таким образом, если

1. $x(t_0)$ – известно, то $z(t_0)=T(t_0)x(t_0)$ и $\varepsilon(t) \equiv 0 \ \ \forall t \geq t_0$;
2. $x(t_0)$ – неизвестно полностью, т.е. $y(t_0)=C(t_0)x(t_0)$, то выбирается $\hat{z}(t_0)$, а $\hat{z}(t)$ является решением уравнения (5.160) с выбранным краевым условием и вычисленными матрицами $G(t)$, $D(t)$ и $E(t)$ по формулам (5.164), (5.174) и (5.175) соответственно. Естественно, до этого строятся и вычисляются матрицы $T(t)$ и $dT(t)/dt$, $V(t)$, $P(t)$. Оценка состояния x(t) строится по формуле (5.161).

Глава 6. Особые решения в задачах оптимального управления

§ 6.1. Постановка задачи

В ряде задач оптимизации встречаются участки экстремалей ($H_u=0$), на которых матрица H_{uu} оказывается вырожденной. На этих участках выполняется условие выпуклости $H_{uu} \geq 0$, но не выполняется усиленное условие $H_{uu} > 0$, т.е. матрица H_{uu} является только полуопределенной. Эти участки называются особыми. Для того чтобы установить, является ли особый участок оптимальным, необходимы дополнительные исследования.

В общем случае решение вырожденных задач более сложно, чем решение нормальных задач оптимизации. Трудности возникают из-за того, что необходимые условия не дают информации относительно связи $u^0(t)$ с $x^0(t)$ и $\lambda^0(t)$.

Достаточно часто особые участки встречаются в задачах, когда гамильтониан является линейной функцией по одной или нескольким переменным управляющего воздействия *u(t)*, но является нелинейной по одной или нескольким фазовым переменным состояния. *x(t).* В этом случае необходимые условия оптимальности - $H_u=0$ (для задач без ограничений на управления) или $H(x^0,u^0,\lambda^0,t) \leq H(x^0,u,\lambda^0,t)$ (задачи с ограничениями на управления) не позволяют определить управление вдоль особого участка как функцию фазовых и сопряженных переменных. Напомним, что задача вырождается (в случае наличия ограничений на управление), если аргумент *sign*/ / тождественно равен нулю на конечном интервале времени (§ 3.5, 3.6).

Для особых участков не разработаны условия, аналогичные условиям отсутствия сопряженных точек (§ 2.3), поэтому отсутствуют и достаточные условия оптимальности особых участков.

§ 6.2. Линейные динамические системы с квадратичным критерием качества

Рассмотрим задачу терминального управления линейным динамическим объектом

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(t_0) = x_0. \qquad (6.1)$$

Здесь $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^r$, на управление ограничений не наложено. Функционал имеет вид

$$J(x,u) = \frac{1}{2}x^T(T)Fx(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} x^T(t)Q(t)x(t)dt, \qquad (6.2)$$

где матрицы F и $Q(t)$ положительно полуопределены.

Выпишем гамильтониан

$$H(x,u,\lambda,t) = \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \lambda^T(t)\left[Ax(t) + Bu(t)\right] \qquad (6.3)$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -Q(t)x(t) - A^T\lambda(t), \qquad (6.4)$$

$$\lambda(T) = Fx(T). \qquad (6.5)$$

Как видим, гамильтониан (6.3) линеен относительно *u(t)* и необходимое условие оптимальности не дает информации относительно связи $u^0(t)$ с $x^0(t)$ и $\lambda^0(t)$:

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} = \lambda^T(t)B. \qquad (6.6)$$

Если *u(t)* ограничено, то минимум $H(x,u,\lambda,t)$ может достигаться на границе. В этом случае необходимые условия сводятся к тому, что для всех допустимых вариаций $\nabla u(t)$

$$\lambda^T(t)B\nabla u(t) \ge 0.$$

Однако может случиться, что найдутся интервалы времени, где функции *u(t),* значения которой не лежат на границах, соответствуют такие $\lambda(t)$, что

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} = \lambda^T(t)B = 0. \qquad (6.7)$$

Участки траектории, соответствующие этим интервалам, называются особыми. Максимум на этих интервалах может как достигаться, так и не достигаться. Гамильтониан при (6.7) принимает вид

$$H(x,u,\lambda,t) = \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \lambda^T(t)Ax(t), \qquad (6.8)$$

т.е. на особом участке гамильтониан не содержит управления (коэффициент при управлении равен нулю), поэтому условие экстремума (6.7) не позволяет определить управление вдоль особого участка как функцию $x^0(t)$ и $\lambda^0(t)$.

Если на управление не наложено ограничений, то с помощью управления, содержащего импульсы, систему (6.1) можно мгновенно перевести в любое другое состояние, в том числе и в состояние $x(T)=0$. Такое управление будет минимизировать функционал J(x), поскольку $J(x)=0$!

Такое управление следует отнести скорее к гипотетическому, чем к реально осуществимому, так как управление в виде дельта-функции требует не только неограниченных ресурсов регулятора, но и соответствующих физических характеристик объекта.

Чаще всего импульс в управлении можно использовать для перемещения системы на минимизирующий участок, двигаться по этому участку до тех пор, пока не будет достигнуто состояние, из которого другим импульсом система переводится в точку $x(t)=0$ или в состояние $x(T)$, при котором $x^T(T)Fx(T)=0$.

Отметим, что пока изложенное выше не дает непосредственной информации для определения как участков различных управлений, так и самого управления на особом участке.

Так как на всем интервале гамильтониан имеет вид (6.8), т.е. на всем особом участке коэффициент при управлении в гамильтониане (6.3) равен нулю, то на этом участке должно выполняться и условие

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)}\right\}^T = B^T \dot{\lambda}(t) \qquad (6.9)$$

или, с учетом (6.4),

$$B^T\left[Q(t)x(t) + A^T\lambda(t)\right] = 0. \qquad (6.10)$$

Отметим, что условие (6.10) является условием нахождения системы на особом участке. Однако и это условие не позволяет найти управление.

Повторяя вышеприведенные рассуждения, найдем

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)}\right\}^T = B^T\left[Q(t)\dot{x}(t) + A^T\dot{\lambda}(t)\right] = 0$$

или, учитывая (6.1) и (6.4), будем иметь

$$B^T\left[Q(t)Ax(t) + Q(t)Bu(t) - A^T Q(t) - A^T A^T\lambda(t)\right] = 0\,, \qquad (6.11)$$

откуда

$$u(t) = -\left[B^T Q(t)B\right]^{-1} B^T\left\{\left[Q(t)A - A^T Q(t)\right]x(t) - A^T A^T\lambda(t)\right\}. \qquad (6.12)$$

Управление (6.12) задает линейный закон управления на особом участке.

Отметим, что матрица $B^TQ(t)B$ должна быть невырожденной и, если это так, то эта матрица положительно определенная, что предопределяет выполнение достаточных условий достижения, по крайней мере, локального минимума функционала (6.2). Действительно, при положительно определенной матрице Q(t) выполняется обобщенное условие выпуклости (усиленное условие Лежандра - Клебша):

$$\frac{\partial}{\partial u(t)}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)}\right\}^T\right] = B^T Q(t)B \geq 0\,.$$

Стратегия управления заключается в том, что если не выполняется условие (6.10), то на объект (6.1) воздействуют импульсом до выполнения условия (6.10), затем включается управление (6.12), и в тот момент, когда вновь не будет выполняться условие (6.10), на объект следует подать импульсное воздействие и перевести состояние системы в $x^T(T)Fx(T)=0$.

Решение задачи импульсно-линейного управления можно реализовать в замкнутой форме:

$$u(t) = -\left[B^T Q(t)B\right]^{-1} B^T\left\{\left[Q(t)A - A^T Q(t)\right] - A^T A^T K(t)\right\}x(t),$$

где $K(t)$ – положительно определенная матрица, являющаяся решением уравнения типа Риккати:

$$\frac{d}{dt}K(t) + K(t)\left\{A - B\left[B^T Q(t)B\right]^{-1} B^T\left[Q(t)A - A^T Q(t)\right]\right\} + A^T K(t) +$$

$$+ K(t)B\left[B^T Q(t)B\right]^{-1} B^T A^T A^T K(t) + Q(t) = 0,$$

$$K(T) = F.$$

Условие, которое определяет нахождение системы на особом участке, записывается в следующем виде:

$$B^T\left[Q(t)+A^T K(t)\right]x(t)=0.$$

§ 6.3. Особые решения в задачах оптимизации нелинейных систем

Пусть объект описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x)+B(x)u(t),\ x(t)\in R^n,\ u(t)\in R^1,\ t\in[t_0,T]. \quad (6.13)$$

Заданы краевые условия:

$$x(t_0)=x_0,\ \Psi\left[x(T)\right]=0,\ \textit{где}\ \Psi\in R^q. \quad (6.14)$$

Требуется построить управление, минимизирующее функционал

$$J(x)=K\left[x(T)\right], \quad (6.15)$$

на объекте (6.13) при заданных ограничениях (6.14).

Предполагается также, что на управление ограничений не наложено, а вектор - столбцы *f(x)* и *B(x)* допускают дифференцирование по *x(t).*

Гамильтониан имеет вид

$$H(x,u,\lambda)=\lambda^T(t)\left[f(x)+B(x)u(t)\right]. \quad (6.16)$$

Необходимые условия стационарности решения включают соотношения

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial u(t)}=\lambda^T(t)B(x)=0\,, \quad (6.17)$$

где

$$\frac{d}{dt}\lambda^T(t)=-\lambda^T(t)\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x(t)}+\frac{\partial B(x)}{\partial x(t)}u(t)\right\}, \quad (6.18)$$

$$\lambda^T(T)=\left\{\frac{\partial K\left[x(T)\right]}{\partial x(T)}+\gamma^T\,\frac{\partial \Psi\left[x(T)\right]}{\partial x(T)}\right\}. \quad (6.19)$$

Управление $u(x,\lambda)$ непосредственно из (6.17) определить нельзя. Найдем полную производную по времени выражения (6.17):

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial u(t)}\right\}^T=$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{B^T(x)\lambda(t)\right\}=\dot{x}^T(t)\left\{\frac{\partial B(x)}{\partial x(t)}\right\}^T\lambda(t)+B^T(x)\,\dot{\lambda}(t)=0$$

или, учитывая (6.13) и (6.18), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial u(t)}\right\}^T=\frac{d}{dt}\left\{B^T(x)\lambda(t)\right\}=$$

$$=\left[f^T(x)\left\{\frac{\partial B(x)}{\partial x(t)}\right\}^T-B^T(x)\left\{\frac{\partial f(t)}{\partial x(t)}\right\}^T\right]\lambda(t)= \quad (6.20)$$

$$=g^T(x)\lambda(t)=0,$$

где

$$g^T(x)=\left\{\frac{\partial B(x)}{\partial x(t)}\right\}f(x)-\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x(t)}\right\}B(x).$$

Отметим, что полученное выражение вновь не содержит управления. Продифференцировав выражение (6.20) по t еще раз, получим

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial u(t)}\right\}=\frac{d^2}{dt^2}\left\{\lambda^T(t)B(x)\right\}=$$

$$=\lambda^T(t)\left[\left\{\frac{\partial g(x)}{\partial x(t)}\right\}f(x)-\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x(t)}\right\}g(x)\right]+$$

$$+\lambda^T(t)\left[\left\{\frac{\partial g(x)}{\partial x(t)}\right\}B(x)-\left\{\frac{\partial B(x)}{\partial x(t)}\right\}g(x)\right]u(t)=0.$$

Отсюда, если $\lambda^T(t)\left[\left\{\frac{\partial g(x)}{\partial x(t)}\right\}B(x)-\left\{\frac{\partial B(x)}{\partial x(t)}\right\}g(x)\right]\neq 0$, получаем

$$u(t)=\frac{\lambda^T(t)\left[\left\{\frac{\partial g(x)}{\partial x(t)}\right\}f(x)-\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x(t)}\right\}g(x)\right]}{\lambda^T(t)\left[\left\{\frac{\partial g(x)}{\partial x(t)}\right\}B(x)-\left\{\frac{\partial B(x)}{\partial x(t)}\right\}g(x)\right]} \qquad (6.21)$$

В том случае, если соотношения (6.17) и (6.20) выполнялись вначале (или в конце) особого участка, закон управления (6.21) реализует условие стационарности (6.17). Отметим, что особые участки (со скалярным управлением) для всех точек $2n$-мерного пространства (x,λ) невозможны. В силу (6.17), (6.20) они ограничены гиперповерхностью размерности $2n-2$, которая называется особой гиперповерхностью. Для стационарных систем с незаданным временем переходного процесса размерность особой гиперповерхности $2n-3$, поскольку гамильтониан равен нулю на всем интервале управления

$$H(x,u,\lambda)=\lambda^T(t)\left[f(x)+B(x)u(t)\right]=0$$

или с учетом (6.17)

$$H(x,u,\lambda)=\lambda^T(t)f(x)=0. \qquad (6.22)$$

Для стационарных систем со свободным временем и $n=3$ (6.17), (6.20) и (6.22) являются линейными по $\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \lambda_3(t)$. Это приводит к соотношению, определяющему особую гиперповерхность в пространстве фазовых координат.

Поиск особой экстремали можно осуществить несколько иным способом, используя аппарат скобок Пуассона.

Скобки Пуассона. *Пусть $v=v(x,p)$, $w=w(x,p)$ – две скалярные функции от n-вектора x и n-вектора p, по которым они непрерывны и имеется достаточное количество непрерывных производных.*

Скобкой Пуассона от этих двух функций называется выражение

$$\{v,w\}=\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]^T\frac{\partial w}{\partial p}-\left[\frac{\partial v}{\partial p}\right]^T\frac{\partial w}{\partial x}. \qquad (6.23)$$

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами:

$$\{v,w\} = -\{w,v\},$$
$$\{v,v\} = 0, \qquad (6.24)$$
$$\{v, w_1 + w_2\} = \{v, w_1\} + \{v, w_2\},$$

где w_1 и w_2 –функции того же типа, что и v,w,

$$\{u,\{v,w\}\} + \{v,\{w,u\}\} + \{w,\{u,v\}\} \equiv 0. \qquad (6.25)$$

Последнее выражение называется тождеством Якоби.

Пусть

S=S(x,p)

-некоторая гладкая функция переменных *x, p*. Полная производная по времени *dS/dt* вдоль траекторий *x(t), p(t,),* удовлетворяющих системам

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left\{\frac{\partial H(x,u,p)}{\partial p(t)}\right\}^T, \quad \frac{dp(t)}{dt} = -\left\{\frac{\partial H(x,u,p)}{\partial x(t)}\right\}^T, \qquad (6.26)$$
$$H(x,u,p) = p^T(t)\left[f(x) + B(x)u(t)\right],$$

с помощью скобок Пуассона записывается следующим образом:

$$\frac{dS(x,p)}{dt} = \{S,H\}. \qquad (6.27)$$

Здесь *H(x,u,p)* – функция Понтрягина, которую представим в виде

$$H(x,u,p) = H_0(x,p) + H_1(x,p)u(t),$$
$$H_0(x,p) = p^T(t)f(x), \quad H_1(x,p) = p^T(t)B(x). \qquad (6.28)$$

Если на управление не наложено ограничений, то вдоль траекторий *x(t), p(t),* где $t \in [t_0, T]$, соответствующих управлению *u(t),* выполняется тождество

$$\frac{dH(x,u,p)}{du(t)} = H_1(x,p) \equiv 0, \ t \in [t_0, T]. \qquad (6.29)$$

Поэтому на отрезке $[t_0,T]$ выполняется тождество

$$\frac{d}{dt}H_1(x,u) \equiv 0.$$

Используя формулу (6.27) и свойство (6.24), получим

$$\frac{d}{dt}H_1(x,p) = \{H_1, H\} = -\{H_0, H_1\} + \{H_1, H_1\}u(t). \qquad (6.30)$$

Коэффициент при *u(t)* в выражении (6.30) равен нулю тождественно по *x(t), p(t).* Следовательно, в производной $dH_1(x,p)/dt$ управление явно появиться не может. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}H_1(x,p) = -\{H_0, H_1\}.$$

Но в силу (6.29), (6.30) должно выполняться тождество

$$\frac{d^2}{dt^2}H_1(x,p) = -\frac{d}{dt}\{H_0, H_1\} \equiv 0,$$

которое с помощью (6.27) запишем в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}H_1(x,p) = -\{\{H_0, H_1\}, H\} =$$
$$= \{H_0, \{H_0, H_1\}\} + \{H_1, \{H_0, H_1\}\} u(t) \equiv 0. \tag{6.31}$$

Здесь коэффициент при *u(t)* не равен нулю. Поэтому для точек $t \in [t_0, T]$, где этот коэффициент не равен нулю, получаем

$$u(t) = -\frac{\{H_0, \{H_0, H_1\}\}}{\{H_1, \{H_0, H_1\}\}}. \tag{6.32}$$

Если коэффициент при управлении *u(t)* в (6.31) равен нулю на отрезке $\tau_1 \in [t_0, T]$, то формула (6.32) имеет смысл только на множестве $\tau_1 \notin [t_0, T]$. Для получения формулы особой экстремали на отрезке $\tau_1 \in [t_0, T]$ продолжим вычислять полные производные по времени от функции $H_1(x,p)$. При этом оказывается, что управление *u(t)* может появляться только в производных четного порядка $2k$, имеющих вид

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}H_1(x,p) = \{-1\}^{2k} \{\underbrace{H_0, \{H_0, \ldots \{H_0,}_{2k-1} H_1\} \ldots\}\}, H\} =$$
$$= \{\underbrace{H_0, \{H_0, \ldots \{H_0,}_{2k} H_1\} \ldots\}\} + \{H_1, \{\underbrace{H_0, \ldots \{H_0,}_{2k-1} H_1\} \ldots\}\} u(t) \equiv 0.$$

Таким образом, при последовательном вычислении полных производных по времени от функции $H_1(x,p)$ особое управление будет определяться выражением

$$u(t) = \frac{\{\overbrace{H_0, \{H_0 \ldots \{H_0,}^{2k} H_1\} \ldots \}\}}{\{H_1, \{\underbrace{H_0, \ldots \{H_0,}_{2k-1} H_1\} \ldots \}} \tag{6.33}$$

на множестве точек $t \in [t_0, T]$, на которых выражение

$$H_2 = \{H_1, \{\underbrace{H_0, \ldots \{H_0,}_{2k-1} H_1\} \ldots\}\},$$

подсчитанное вдоль особых траекторий *x(t)* и *p(t),* отлично от нуля.

Если вдоль особой экстремали выполняется следующее условие:

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u(t)} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H(x,u,p)}{\partial u(t)} = 0,$$

то необходимое условие существования оптимального управления, выраженное с применением функции Понтрягина, имеет вид

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u(t)} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H(x,u,p)}{\partial u(t)} \le 0. \tag{6.34}$$

Выражение (6.34) при использовании гамильтониана имеет вид

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u(t)} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial u(t)} \ge 0. \tag{6.35}$$

При рассмотрении сопряжения неособого участка с особым и наоборот можно получить дополнительное необходимое условие, по виду аналогичное (6.35).

Предположим, что оптимальная траектория *x(t)* попадает на особую поверхность в момент $t=t_2$. Тогда

$$H_u(x(t_2),u(t_2),\lambda(t_2))=0,\quad \dot{H}_u(x(t_2),u(t_2),\lambda(t_2))=0,$$

$$\ddot{H}_u(x(t_2),u(t_2),\lambda(t_2))=\lambda^T(t_2)\left[q_x(x)f(x)-f_x(x)q(x)\right]+$$
$$+\lambda^T(t_2)\left[q_x(x)B(x)-B_x(x)q(x)\right]u(t).$$

Для $t<t_2$ и малых моментов t_2-t величину $H_u(x(t_2),u(t_2),\lambda(t_2))$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$H_u(x(t_2),u(t_2),\lambda(t_2))=$$
$$=H_u(t_2)-\dot{H}_u(t_2)(t_2-t)+\frac{1}{2}\ddot{H}_u(t_2)(t_2-t)^2-\cdots=$$
$$=\frac{1}{2}\lambda^T(t_2)\left[q_x(x)f(x)-f_x(x)q(x)\right]+$$
$$+\lambda^T(t_2)\left[q_x(x)B(x)-B_x(x)q(x)\right]u(t_2)\}(t_2-t)-\cdots.$$

Так как в момент *t* траектория по определению не является особой, то *u(t)* равно своему предельному значению и $H_u(x(t),u(t),\lambda(t))\neq 0$. Если *u(t)* равно своему наибольшему значению u_{max} (тем самым $H_u(x(t),u(t),\lambda(t))<0$), то

$$\begin{aligned}&\lambda^T(t)\left[q_x(x)f(x)-f_x(x)q(x)\right]+\\&+\lambda^T(t)\left[q_x(x)B(x)-B_x(x)q(x)\right]u(t)<0.\end{aligned}\tag{6.36}$$

Аналогично, если *u(t)* равно своему наименьшему значению u_{min}, то

$$\begin{aligned}&\lambda^T(t)\left[q_x(x)f(x)-f_x(x)q(x)\right]+\\&+\lambda^T(t)\left[q_x(x)B(x)-B_x(x)q(x)\right]u(t)>0\end{aligned}.\tag{6.37}$$

Вычитая из первого неравенства второе, приходим к условию, необходимому для того, чтобы был возможен сход с обеих границ управления

$$\begin{aligned}&\lambda^T\left[q_x(x)B(x)-B_x(x)q(x)\right]=\\&=\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial u}\right]_{\substack{\text{в момент сопряжения}\\ \text{участков}}}\le 0\end{aligned}.\tag{6.38}$$

Для более высоких порядков условие (6.38) можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial u}\right]_{\substack{\text{в момент сопряжения}\\ \text{участков}}}\le 0.$$

В вырожденных задачах явление сопряжения довольно сложно. Форма соединения неособых и особых участков может носить характер «вибрации» с бесконечной частотой на особом участке, т.е. иметь бесконечное число точек переключения на конечном интервале времени. Возникающие при этом оптимальные управления называются *четыренг-режимами*.

Отметим, что условия существования особых управлений, приведенные выше, относятся к задачам управления объектами со скалярными управляющими воздействиями. Это не является серьезным ограничением, так как в векторном случае исследования следует производить по каждой компоненте вектора *u(t)*.

Глава 7. Дифференциальные игры

§ 7.1. Постановка задачи

Основной результат теории игр

Пусть $\varphi\,(u,v)$ - вещественная функция двух переменных $u, v \in R$, а U и V - выпуклые множества в R, где R - гильбертово пространство. Игра двух лиц с нулевой суммой и функцией платежа $\varphi\,(u,v)$, где один игрок выбирает стратегию из V и старается максимизировать $\varphi\,(u,v)$ (минимизировать $-\varphi\,(u,v)$), а второй выбирает стратегию U и старается минимизировать $\varphi\,(u,v)$, имеет цену <u>с</u>, если

$$\sup_{v\in V}\inf_{u\in U}\varphi\,(u,v) = c = \inf_{u\in U}\sup_{v\in V}\varphi\,(u,v)\,. \tag{7.1}$$

Если для некоторой пары (u^0,v^0)

$$\varphi\,(u^0,v^0) = c\,,$$

то (u^0,v^0) называют оптимальной парой стратегий. Если же, кроме того, выполняются неравенства

$$\varphi\,(u^0,v) \le \varphi\,(u^0,v^0) \le \varphi\,(u,v^0),\;\; u\in U,\, v\in V\,, \tag{7.2}$$

то $\varphi\,(u^0,v^0)$ - седловая точка.

Соотношение (7.1) выполняется, т.е. игра имеет цену, если:

- V и U - замкнутые в R, а V к тому же еще и ограничено;
- вещественная функция $\varphi\,(u,v)$, определенная для $v\in V$ и $u\in U$ такая, что
  1. $\varphi\,((1-\eta)u_1 + \eta u_2,\, v) \le (1-\eta)\varphi\,(u_1,v) + \eta\,\varphi\,(u_2,\, v)$,

  для всех $v\in V, u_1, u_2 \in U$ и $0\le\eta\le 1$ (т.е. функция $\varphi\,(u,v)$ выпуклая по u при любом фиксированном v);

  2. $\varphi\,(u,(1-\eta)v_1 + \eta v_2) \ge (1-\eta)\varphi\,(u,v_1) + \eta\,\varphi\,(u,\, v_2)$,

  для всех $u\in U, v_1, v_2 \in V$ и $0\le\eta\le 1$ (т.е. функция $\varphi\,(u,v)$ вогнута по v при любом фиксированном u);
- функция $\varphi\,(u,v)$ непрерывна по v при любом $u\in U$.

Это можно показать, освободившись вначале от тривиальной части

$$\inf_{u\in U}\varphi\,(u,v) \le \varphi\,(u,v) \le \sup_{v\in V}\varphi\,(u,v)$$

и, следовательно,

$$\sup_{v\in V}\inf_{u\in U}\varphi\,(u,v) \le \inf_{u\in U}\sup_{v\in V}\varphi\,(u,v)\,. \tag{7.3}$$

Далее, так как функция $\varphi\,(u,v)$ вогнута и непрерывна по $v\in V$ при любом фиксированном u, а множество V выпукло, замкнуто и ограничено, то

$$\sup_{v\in V}\varphi\,(u,v) < \infty\,.$$

Обозначим

$$\inf_{u\in U}\sup_{v\in V}\varphi\,(u,v) = c\,.$$

Предположим, что существует элемент $v^0\in V$, для которого

$$c \le \varphi\,(u,v^0) \text{ для всех } u\in U\,.$$

Отсюда следует, что

$$c \le \inf_{u \in U} \varphi\ (u, v^0),$$

или

$$c \le \sup_{v \in V}\ \inf_{u \in U} \varphi\ (u, v).$$

Последнее вместе с (7.3) образует соотношение (7.1).

Отметим, что если рассматриваемая функция $\varphi\,(u,v)$ непрерывна по каждой переменной и множество V ограничено, то существует оптимальная пара стратегий, обладающая свойством седловой точки, т.е. имеет место соотношение (7.2).

Дифференциальная игра

По сути дела *дифференциальная игра* – это игра, исход которой определяется поведением некоторой управляемой динамической системы. Например, в игре двух лиц могут участвовать «преследователь» и «преследуемый», а также динамическая система, описываемая уравнением

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x, u, v, t), \ \ x \in R^n,$$

причем начальное состояние $x(t_0)$ считается заданным. «Преследователь» должен выбирать управление $u(t)$, измеримое по Лебегу и удовлетворяющее заданным ограничениям. Предполагается, что $u(t) \in U$ почти всюду, U - замкнутое ограниченное множество в евклидовом пространстве R^r. Как и в предыдущих разделах книги, все такие управления будем называть допустимыми.

Аналогично «преследуемый» может выбирать управления $v(t)$, которые тоже должны быть измеримыми по Лебегу и должны удовлетворять заданным ограничениям $v(t) \in V$ почти всюду, V - замкнутое ограниченное множество в евклидовом пространстве R^p. Эти управления также будем называть допустимыми.

Считается, что игру можно завершить за время $T - t_0$, если независимо от того, какое управление выбрал преследуемый, у преследователя всегда найдется соответствующее управление, для которого $\|\pi\, x(T)\| \le d$, где π - оператор проектирования из R^n на R^k, а d - фиксированная неотрицательная постоянная. Очевидно, что в общем случае период управления $T - t_0$ должен зависеть от начального состояния $x(t_0)$. Как легко видеть, для того чтобы можно было завершить игру за время $T - t_0$, необходимо, чтобы

$$\sup_{v \in V} \inf_{u \in U} \|\pi\ x(T)\| \le d\,. \qquad (7.4)$$

Действительно, поскольку игра может быть завершена в этом случае независимо от выбора допустимого управления $v(t)$, при любом фиксированном $v(t_0, T)$ должно выполняться неравенство

$$\inf_{u \in U} \|\pi\ x(T)\| \le d\,,$$

а отсюда следует условие (7.4). Заметим, что условие (7.4) к тому же будет и достаточным, если для любого $v(t_0, T)$ найдется такое $u(t_0, T) \in U$, что

$$\|\pi \; x_u(T)\| = \inf_{u \in U} \|\pi \; x(T)\|.$$

Однако не столь ясны вопросы существования седловых точек (оптимальных стратегий) и перестановочности операций $\inf$ и $\sup$. Проблемы, возникающие при исследовании конкретных задач, будут продемонстрированы в следующем параграфе, в котором рассматриваются линейные игры с выпуклыми ограничениями.

§ 7.2. Дифференциальная игра как проблема оптимального управления

В более общем виде задача дифференциальной игры может быть сформулирована следующим образом:

дана динамическая система

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,v,t), \; x(t_0) = x_0, \tag{7.5}$$

граничные условия

$$\Psi[x(T),T] = 0, \tag{7.6}$$

критерий качества

$$J(x,u,v) = K(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,v,t)dt. \tag{7.7}$$

Требуется найти такие $u^0(t)$ и $v^0(t)$, чтобы

$$J(x,u^0,v,t) \le J(x,u^0,v^0,t) \le J(x,u,v^0,t). \tag{7.8}$$

Необходимые условия первого порядка нетрудно найти, используя материал первой главы. Однако эти условия определяют только условия стационарности, а не условия максимизации или минимизации функционала (7.7). Необходимые условия поставленной задачи имеют вид

$$H(x,u,v,\lambda,t) = L(x,u,v,t) + \lambda^T(t) f(x,u,v,t), \tag{7.9}$$

$$\Phi(x(T),T) = K(x(T),T) + \gamma^T \Psi(x(T),T),$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\left\{\frac{\partial H(x,u,v,\lambda,t)}{\partial x(t)}\right\}^T, \; \lambda(T) = \left\{\frac{\partial \Phi(x(T),T)}{\partial x(T)}\right\}, \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial H(x,u,v,\lambda,t)}{\partial u(t)} = 0, \; \frac{\partial H(x,u,v,\lambda,t)}{\partial v(t)} = 0, \tag{7.11}$$

или

$$H(x^0,u^0,v^0,\lambda,t) = \min_u \max_v H(x,u,v,\lambda,t). \tag{7.12}$$

В общем случае теоретико-игровая седловая точка, при которой выполняется (7.8), не существует, если не предполагается, что функция $H(x,u,v,\lambda,t)$ разделима, т.е., если в общем случае имеется следующее:

$$f(x,u,v,t) = f_1(x,u,t) + f_2(x,v,t),$$

$$L(x,u,v,t) = L_1(x,u,t) + L_2(x,v,t).$$

Однако следует отметить, что разделимость гамильтониана не означает разделимости функционала $J(x,u,v,t)$. Разделимость функционала проверить достаточно сложно и в большинстве случаев она не имеет места.

Таким образом, это означает, что стратегии, полученные из решения двухточечной краевой задачи, могут не удовлетворять условию седловой точки (7.8). В практических задачах управления (при расчете системы на «худший случай»), реализуемого с использованием минимаксного подхода, в общем случае точка минимакса не является седловой точкой, т.е. перестановочные операции *max* и *min* могут дать несовпадающие результаты. Однако минимакс обладает свойством, которым не обладает седло, а именно, если минимакс существует, то по определению функционал $J(x,u,v,t)$ гарантированно имеет максимум по $v(t)$ для каждого $u(t)$, а не только для оптимального управления, как это гарантируется определением седловой точки.

В обычной детерминированной задаче управления различий между разомкнутой и замкнутой схемами управления нет. В случае же игры ситуация иная. Это объясняется следующим образом. Пусть управления, реализованные по принципу обратной связи, описываются следующими выражениями:

$$u(t) = k_u(x,t),\ v(t) = k_v(x,t)\,. \tag{7.13}$$

Тогда второе неравенство (7.8) можно рассматривать двояко:

$$\min_u J\left[u(t), v^0(t)\right] = J\left[u^0(x_0,t_0,t), v^0(x_0)\right], \tag{7.14}$$

$$\min_u J\left[u(t), k_v(x,t)\right] = J\left[u^0(x_0,t_0,t), k_v(x,t)\right]. \tag{7.15}$$

С позиций игрока *U* соотношения (7.14) и (7.15) описывают две различные задачи обычного управления (не игры). Соотношение (7.15) представляет собой более сильный случай оптимальности. Оно означает, что $u^0(t)$ должно быть оптимальным, несмотря на действия игрока *V*, управление которого реализовано по принципу обратной связи и который может воспользоваться любым промахом (не оптимальным шагом) игрока U. Оптимальные управления, полученные по (7.14) и (7.15), будут разными.

Общая процедура решения задачи дифференциальных игр состоит в основном из двух этапов:

1. определить $u^0(t)$ и $v^0(t)$ либо решением двухточечной задачи (7.5) – (7.10) и (7.11) или (7.12), либо с помощью метода динамического программирования;
2. раздельно проверить неравенства (7.8) путем решения двух обычных задач управления с использованием $u^0(t)$ и $v^0(t)$ в разомкнутой и замкнутой форме.

Второй этап проверяет наличие седлового свойства, так как существование оптимальных управлений $u^0(t)$ и $v^0(t)$ еще не гарантирует достижения седловой точки. Проверочный этап приводит к различным необходимым условиям второго порядка. Эти условия имеют вид:

$$H^0_{uu} > 0,\ H^0_{vv} < 0,$$

или

$$H(x^0, u^0, v^0, \lambda, t) = \min_{u \in U} \max_{v \in V} H(x, u, v, \lambda, t),$$

отсутствует сопряженная точка для задачи

$$J(x^0, u^0, v^0) = \min_{u \in U} J(x, u, v^0),$$

где

$$v^0(t) = \begin{cases} v^0(x_0, t_0, t), \\ k_v(x, t), \end{cases} \tag{7.16}$$

отсутствует сопряженная точка для задачи

$$J(x^0, u^0, v^0) = \max_{v \in V} J(x, u^0, v),$$

где

$$u^0(t) = \begin{cases} u^0(x_0, t_0, t), \\ k_u(x, t). \end{cases} \tag{7.17}$$

Таким образом, чтобы установить наличие седловой точки, нужно показать, что в (7.16) и (7.17) управления $u^0(t)$ и $v^0(t)$ приводят к выполнению условия (7.8).

§ 7.3. Линейные игры преследования с квадратичным функционалом

Пусть имеются две динамические системы

$$\frac{d}{dt} x_p(t) = A_p(t) x_p(t) + B_p(t) u(t),\ \ x_p(t_0) - задано, \tag{7.18}$$

$$\frac{d}{dt} x_e(t) = A_e(t) x_e(t) + B_e(t) v(t),\ \ x_e(t_0) - задано, \tag{7.19}$$

здесь индексы *p* и е обозначают соответственно преследователя и преследуемого, матрицы A_p, A_e, B_p, B_e определяются обычным для линейных систем общего вида образом. При перехвате цели преследователь использует управление *u(t),* преследуемый, стремясь уйти от погони, использует управление *v(t).*

Цель игры заключается в минимизации конечного промаха преследователем и максимизацией этого промаха преследуемым. Сам промах определяется квадратичной формой

$$\left\| x_p(T) - x_e(T) \right\|^2_{Q^T Q}. \tag{7.20}$$

На управляющие воздействия *u(t)* и *v(t)* наложены ограничения вида

$$\int_{t_0}^{T} \left\| u(t) \right\|^2_{R^*_p} dt \le E_p, \tag{7.21}$$

$$\int_{t_0}^{T} \left\| v(t) \right\|^2_{R^*_e} dt \le E_e, \tag{7.22}$$

где R^*_p и R^*_e - положительно определенные матрицы, E_p и E_e - положительные числа.

Время окончания игры T фиксировано.

В случае конечной величины минимакса промаха в конце как преследователь, так и преследуемый будут использовать все имеющиеся в их распоряжении ресурсы, так что ограничения (7.21) и (7.22) будут равенствами. Добавление этих ограничений к критерию (7.20) образует функционал качества

$$J(x_p, x_e, u, v) = \\ = \frac{1}{2}\|x_p(T) - x_e(T)\|^2_{Q^TQ} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{\|u(t)\|^2_{R_p} - \|v(t)\|^2_{R_e}\right\}dt, \tag{7.23}$$

здесь $R_p = c_p R^*_p$ и $R_e = c_e R^*_e$, а c_p и c_e -положительные константы, которые определяются так, чтобы удовлетворить равенствам (7.21) и (7.22). Второе ограничение (7.22) стоит со знаком минус, так как преследуемый стремится максимизировать промах (7.20).

Пусть $\Phi_p(T,t)$ и $\Phi_e(T,t)$ - фундаментальные матрицы решений уравнений (7.18) и (7.19) соответственно. Тогда решения этих уравнений, полученные в форме Коши, будут

$$x_p(t) = \Phi_p(t,t_0)x_p(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi_p(t,\tau)B_p(\tau)u(\tau)d\tau \ ,$$

$$x_e(t) = \Phi_e(t,t_0)x_e(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi_e(t,\tau)B_e(\tau)v(\tau)d\tau \ .$$

Тогда

$$[x_p(t) - x_e(t)]_Q = [\Phi_p(t,t_0)x_p(t_0) - \Phi_e(t,t_0)x_e(t_0)]_Q + \\ + \int_{t_0}^{t}[\Phi_p(t,\tau)B_p(\tau)u(\tau) - \Phi_e(t,\tau)B_e(\tau)u(\tau)]_Q d\tau . \tag{7.24}$$

Введем обозначения. Пусть

$$z(t_0) = Q[\Phi_p(t,t_0)x_p(t_0) - \Phi_e(t,t_0)x_e(t_0)], \\ \Pi(\tau) = Q\Phi_p(t,\tau)B_p(\tau),\ \Gamma(\tau) = Q\Phi_e(t,\tau)B_e(\tau). \tag{7.25}$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{d}{dt}z(t) = \Pi(t)u(t) - \Gamma(t)v(t) . \tag{7.26}$$

Функционал, с учетом введенных обозначений, принимает вид

$$J(z,u,v) = \frac{1}{2}\|z(T)\|^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{\|u(t)\|^2_{R_p} - \|v(t)\|^2_{R_e}\right\}dt. \tag{7.27}$$

Образуем гамильтониан

$$H(z,u,v,\lambda,t) = \\ = \frac{1}{2}u^T(t)R_p u(t) - \frac{1}{2}v^T(t)R_e v(t) + \lambda^T(t)\left[\Pi(t)u(t) - \Gamma(t)v(t)\right]. \tag{7.28}$$

Необходимыми условиями стационарности решения задачи являются

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=0,\ \ т.е.\ \ \lambda(t)=const,$$
$$\lambda(T)=z(T)\ \ и\ \ \lambda(t)=z(T), \tag{7.29}$$
$$H_u(z,u,v,\lambda,t)=0\ \ или$$
$$u(t)=-R_p^{-1}\Pi^T(t)\lambda(t), \tag{7.30}$$
$$H_v(z,u,v,\lambda,t)=0\ \ или$$
$$v(t)=-R_e^{-1}\Gamma^T(t)\lambda(t). \tag{7.31}$$

Будем искать решение уравнения (7.29) в виде

$$\lambda(t)=S(t)z(t). \tag{7.32}$$

Тогда

$$u(t)=-R_p^{-1}\Pi(t)S(t)z(t),\ \ v(t)=-R_e^{-1}\Gamma(t)S(t)z(t) \tag{7.33}$$

и

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=\frac{d}{dt}S(t)z(t)+S(t)\dot{z}(t)=$$
$$=\frac{d}{dt}S(t)z(t)-S(t)\left[\Pi(t)R_p^{-1}\Pi^T(t)-\Gamma(t)R_e^{-1}\Gamma(t)\right]S(t)z(t)=0.$$

Так как последнее уравнение должно выполняться при любых *z(t),* которое является решением уравнения (7.26) с соответствующими краевыми условиями, то справедливо

$$\frac{d}{dt}S(t)-S(t)\left[\Pi(t)R_p^{-1}\Pi^T(t)-\Gamma(t)R_e^{-1}\Gamma(t)\right]S(t)=0. \tag{7.34}$$

Краевое условие для уравнения (7.34) можно получить, учитывая (7.29):

$$S(T)=I. \tag{7.35}$$

Здесь I –единичная матрица.

Умножив (7.34) слева и справа на $S^{-1}(t)$*),* получим

$$\frac{d}{dt}\left\{S^{-1}(t)\right\}=\left[\Pi(t)R_p^{-1}\Pi^T(t)-\Gamma(t)R_e^{-1}\Gamma^T(t)\right],\ S^{-1}(T)=I. \tag{7.36}$$

Интегрирование (7.36) дает

$$S^{-1}(t)=I+M_p(T,t)-M_e(T,t), \tag{7.37}$$

где

$$M_p(T,t)=\int_t^T\Pi(t)R_p^{-1}\Pi^T(t)dt,$$
$$M_e(T,t)=\int_t^T\Gamma(t)R_e^{-1}\Gamma^T(t)dt. \tag{7.38}$$

Уравнения (7.33) описывают стратегии с обратной связью для игроков U и V как функции текущего состояния. Для проверки условия седловой точки рассмотрим две вспомогательные задачи:

(Задача 1)

$$\max_{v(t)}\left\{\frac{1}{2}\|z(T)\|^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[\|u(t)\|^2_{R_p}-\|v(t)\|^2_{R_e}\right]dt\right\}$$

$$\text{при условии } \frac{d}{dt}z(t)=\Pi(t)u(t)-\Gamma(t)v(t)$$

$$\text{и } u(t)=-R_p^{-1}\Pi^T(t)S(t)z(t),$$

где S(t) определяется решением уравнения (7.34) с краевыми условиями (7.35);

(*Задача 2)*

$$\min_{u(t)}\left\{\frac{1}{2}\|z(T)\|^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[\|u(t)\|^2_{R_p}-\|v(t)\|^2_{R_e}\right]dt\right\}$$

$$\text{при условии } \frac{d}{dt}z(t)=\Pi(t)u(t)-\Gamma(t)v(t)$$

$$\text{и } v(t)=-R_e^{-1}\Gamma^T(t)S(t)z(t),$$

где S(t) определяется решением уравнения (7.34) с краевыми условиями (7.35).

После подстановки выражений $u(t)=-R_p^{-1}\Pi(t)S(t)z(t),\ v(t)=-R_e^{-1}\Gamma(t)S(t)z(t)$ в функционал качества задач (***Задача 1***) и (***Задача 2***) соответственно обе задачи сводятся к стандартным неигровым линейным задачам с квадратичным критерием качества.

Решая ***Задачу 1***, находим:

$$v(t)=-R_e^{-1}\Gamma(t)S_1(t)z(t),$$

где

$$\frac{d}{dt}S_1(t)-S_1(t)\Pi(t)R_p^{-1}\Pi^T S(t)-S(t)\Pi(t)R_p^{-1}\Pi^T S_1(t)+$$
$$+S_1(t)\Gamma(t)R_e^{-1}\Gamma^T S_1(t)+$$
$$+S(t)\Pi(t)R_p^{-1}\Pi^T S(t)=0,$$
$$S_1(T)=I.$$

Для ***Задача 2*** получаем, что

$$u(t)=-R_p^{-1}\Pi(t)S_2(t)z(t),$$

где

$$\frac{d}{dt}S_2(t)+S_2(t)\Gamma(t)R_e^{-1}\Gamma^T S(t)+S(t)\Gamma(t)R_2^{-1}\Gamma^T S_2(t)-$$
$$-S_2(t)\Pi(t)R_p^{-1}\Pi^T S_2(t)-$$
$$-S(t)\Gamma(t)R_e^{-1}\Gamma^T S(t)=0,$$
$$S_2(T)=I.$$

Отметим, что $S_1(t)\equiv S_2(t)\equiv S(t)$, поскольку $S_1(T)\equiv S_2(T)\equiv S(T)=I$.

Таким образом, стратегии с обратной связью (7.33) действительно соответствуют седловой точке задачи на минимакс.

Теперь проверим оптимальность решений при стратегии разомкнутого типа. Рассмотрим очередные две задачи:

(Задача 3)

$$\max_{v(t)}\left\{\frac{1}{2}\|z(T)\|^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[\|u(t)\|^2_{R_p}-\|v(t)\|^2_{R_e}\right]dt\right\}$$

при условии $\dot{z}(t)=\Pi(t)u(t)-\Gamma(t)v(t)$

и $u(t)=-R_p^{-1}\Pi^T(t)S(t_0)z(t_0)$ *– функции времени,*

(Задача 4)

$$\min_{u(t)}\left\{\frac{1}{2}\|z(T)\|^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[\|u(t)\|^2_{R_p}-\|v(t)\|^2_{R_e}\right]dt\right\}$$

при условии $\dot{z}(t)=\Pi(t)u(t)-\Gamma(t)v(t)$

и $v(t)=-R_e^{-1}\Gamma^T(t)S(t_0)z(t_0)$ *– функции времени.*

Задача 3 и ***Задача 4*** являются обычными линейными подзадачами на оптимум квадратичного критерия. Для ***Задачи 3*** решение будет иметь вид

$$v(t)=-R_e^{-1}\Gamma^T(t)\left[S_3(t)z(t)+a(t)\right],$$

где

$$\frac{d}{dt}S_3(t)+S_3(t)\Gamma(t)R_e^{-1}\Gamma^T(t)S_3(t)=0,\ \ S_3(T)=I,$$

$$\frac{d}{dt}a(t)+S_3(t)\Gamma(t)R_e^{-1}\Gamma^T(t)a(t)-$$
$$-S_3(t)\Pi(t)R_p^{-1}\Pi^T(t)S(t_0)z(t_0)=0,\ a(T)=0.$$

Для ***Задачи 4***

$$u(t)=-R_p^{-1}\Pi^T(t)\left[S_3(t)z(t)+b(t)\right],$$

где

$$\frac{d}{dt}S_4(t)-S_4(t)\Pi(t)R_p^{-1}\Pi^T(t)S_4(t)=0,\ \ S_4(T)=I,$$

$$\frac{d}{dt}b(t)-S_4(t)\Pi(t)R_p^{-1}\Pi^T(t)b(t)+$$
$$+S_4(t)\Gamma(t)R_e^{-1}\Gamma^T(t)S(t_0)z(t_0)=0,\ b(T)=0.$$

Отметим, что $S_3(t)\neq S_1(t)$ и $S_4(t)\neq S_2(t)$. Последние соотношения являются частными случаями уравнений (7.14) и (7.15). Опираясь на известные свойства решения уравнения Риккати, приходим к следующим утверждениям:

1. Если $S_1(t)=S_2(t)=S(t)$ конечна при $t\in[t_0,T]$, то стратегии с обратной связью (7.30) и (7.31) соответствуют седловой точке $J(z,u,v)$, при этом $J(z^0,u^0,v^0)=\frac{1}{2}z^T(t_0)S(t_0)z(t_0)$.
2. Стратегия разомкнутого типа $u^0(t)=-R_p^{-1}\Pi^T(t)S(t_0)z(t_0)$ оптимальна только в том случае, когда матрица *S₃(t)* остается конечной. Для достаточно больших интервалов управления $T-t_0$ при положительно

определенной матрице $\Gamma(\tau)R_e^{-1}\Gamma^T(\tau)$ $S_3(t)$ всегда будет стремиться к бесконечности.

3. Стратегия разомкнутого типа $v^0(t) = -R_e^{-1}\Gamma^T(t)S(t_0)z(t_0)$ всегда является оптимальной, поскольку всегда $S_4(t) < \infty$.

§ 7.4. Задача на минимум времени перехвата с ограничениями на управления

Заданы две системы со скалярными управлениями, на которые наложены ограничения

$$\frac{d}{dt}x_p(t) = A_p(t)x_p(t) + B_p(t)u(t),$$
$$x_p(t_0) - \textit{задано},\ |u(t)| \le 1, \tag{7.39}$$

$$\frac{d}{dt}x_e(t) = A_e(t)x_e(t) + B_e(t)v(t),$$
$$x_e(t_0) - \textit{задано},\ |v(t)| \le 1. \tag{7.40}$$

Система *P* (преследователь) стремится за минимальное время перехватить систему *E* (преследуемый), в то же время система *E* стремится максимизировать время перехвата. Пусть условием перехвата будет

$$Qx_p(T) = Qx_e(T), \tag{7.41}$$

где Q - вектор - строка. Это скалярное условие перехвата неявно определяет время окончания перехвата *T*. Так же, как и в § 7.3, введем соответствующие переменные и определим скалярную величину *z(t)*:

$$\frac{d}{dt}z(t) = n(t)u(t) - г(t)v(t). \tag{7.42}$$

Здесь

$$n(t) = Q\Phi_p(t,\tau)B_p(\tau), \quad г(t) = Q\Phi_e(t,\tau)B_e(\tau). \tag{7.43}$$

Расширенный функционал качества имеет вид

$$J = \gamma z(T) + \int_{t_0}^{T} dt,$$

где $z(t) = Q[x_p(T) - x_e(T)]$.

Выпишем гамильтониан

$$H(z,u,v,\lambda,t) = 1 + \lambda(t)\left[n(t)u(t) - г(t)v(t)\right].$$

Тогда необходимые условия стационарности принимают вид

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = 0, \quad \lambda(T) = \gamma, \tag{7.44}$$

$$H(z,u^0,v^0,\lambda,t) = \min_{|u(t)|\le 1} \max_{|v(t)|\le 1} H(z,u,v,\lambda,t),$$

откуда следует, что

$$u^0(t) = -sign\left[\gamma\, n(t)\right], \tag{7.45}$$

$$v^0(t) = -sign\left[\gamma\, г(t)\right]. \tag{7.46}$$

Управления (7.45) и (7.46) реализуют стратегию с обратной связью.

Учитывая, что для задачи быстродействия справедливо следующее

$$H(z,u^0,v^0,\lambda,T)=0,$$
получаем условие для определения знака коэффициента γ:

$$1=\gamma\left[n(T)-г(T)\right]. \qquad (7.47)$$

Так как для успешного завершения задачи перехвата эффективность действий преследователя, должна быть выше, чем у преследуемого, то *n(T)>г(T)*. Отсюда следует, что $\gamma>0$.

Подставляя (7.45) и (7.46) в (7.42), получим

$$\frac{d}{dt}z(t)=\gamma\left[-\left|\,n(t)\,\right|+\left|\,г(t)\,\right|\,\right]. \qquad (7.48)$$

Интегрируя (7.48) и учитывая, что *z(T)=0*, получаем

$$z(t_0,T)=sign\,\gamma\int_{t_0}^{T}\left\{\left|n(t)\right|-\left|г(t)\right|\right\}dt. \qquad (7.49)$$

Наименьшее значение *T*, которое удовлетворяет уравнению (7.49), называется возможным минимаксным временем перехвата. Поскольку каждый член уравнения (7.49) известен либо может быть вычислен, знак коэффициента γ известен, величину *T* можно определить сразу. Таким образом, для систем П и Г оптимальные стратегии управлений $u^0(t)$ и $v^0(t)$ могут быть найдены как функции $z(t_0)$.

Если необходим многомерный перехват, то для нахождения Т и знаков векторного коэффициента γ требуется решить не одно уравнение (7.49), а большее их число.

§ 7.5. Общие замечания к теории дифференциальных игр

Сделаем некоторые выводы об изложенных основных положениях теории дифференциальных игр.

1. Большинство задач дифференциальных игр имеет пространство значительно меньшее (один, два или три), чем задачи стандартного оптимального управления.
2. Введение противодействия управляющей переменной приводит к усложнению решения задачи. Прежде всего, в игровых задачах следует рассматривать стратегии с обратной связью.
3. Наличие противодействующего управления приводит к большому разнообразию в поведении систем, находящихся под действием минимаксного управления.
4. Методы, развитые в теории дифференциальных игр, широко применяются для решения задач управления объектами с неполной информацией о состоянии объекта, его параметрах и возмущающих воздействиях.
5. Достаточно мало результатов получено в настоящее время для решения задач командных дифференциальных игр.

Глава 8. Оптимальное оценивание состояния линейных стохастических систем

Основные результаты теории линейных стохастических систем могут быть сформулированы в «широком смысле» и в «узком смысле». В первом случае изучаются линейные операции над процессами, характеризуемыми только ковариационной функцией. Во втором случае процессы, предполагаются гауссовскими, но при этом допускаются нелинейные оценки и управление. Преимущество представления теории в «широком смысле» заключается в том, что она может быть полностью описана в рамках гильбертовых подпространств и винеровских интегралов, а для ее изложения требуются лишь некоторые сведения из теории меры, но совершенно не нужны интегралы Ито, стохастические исчисления, мартингалы и т.п. Многие из используемых при этом идей перенесены в теорию нелинейной фильтрации и управления. Таким образом, эта глава книги может рассматриваться как введение в разделы, в которых рассматриваются нелинейные стохастические системы.

§ 8.1. Геометрическая структура линейного оценивания

Пусть $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ - независимые случайные величины с $M[Y_i]=0,\ 0<DY_i=M[Y_i^2]<\infty,\ i=1,2,...,n,$

а X - случайная величина с нулевым средним и конечной дисперсией. *Линейная оценка* $\hat{X}$ случайной величины X по заданным $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ есть произвольная линейная комбинация

$$\widehat{X}=\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i\ , \tag{8.1}$$

а среднеквадратичная ошибка есть $M[\{X-\widehat{X}\}^2]$.

Выберем коэффициенты a_i так, чтобы минимизировать среднеквадратичную ошибку. Так как по условию случайные величины $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ независимы, т.е. $M[Y_i\,Y_j]=0$, то

$$M[\{X-\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i\}^2]=M[X^2]+\sum_{i=1}^{n} a_i^2\, M[Y_i^2]-2\sum_{i=1}^{n} a_i\, M[Y_i\, X].$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial a_i}M[\{X-\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i\}^2]=2a_i M[Y_i^2]-2M[Y_i\, X].$$

Следовательно, величина $M[\{X-\widehat{X}\}^2]$ минимизируется, если положить

$$a_i=\frac{M[Y_i X]}{M[Y_i^2]}. \tag{8.2}$$

и оценка, минимизирующая среднеквадратичную ошибку, будет определяться следующим выражением

$$\widehat{X}=\sum_{i=1}^{n}\frac{M[Y_i X]}{M[Y_i^2]}Y_i \tag{8.3}$$

или в векторной форме, в том случае, когда случайные величины некоррелированны и матрица $M[Y\,Y^T]$ несингулярная,

$$\widehat{X} = M[X\,Y^T]M[Y\,Y^T]^{-1}\,Y. \qquad (8.4)$$

Этот результат можно интерпретировать на геометрическом языке следующим образом. Пусть $\aleph$ - множество всех линейных комбинаций величин $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, т.е.

$$\aleph = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i + \beta_{n+1} X \,\middle|\, \beta = (\beta_1, ..., \beta_{n+1}) \in R^{n+1} \right\}.$$

Для $U, V \in \aleph$ определим *скалярное произведение*

$$(U, V) = M[UV]$$

и *норму*

$$\|U\| = \sqrt{(U, U)}.$$

Назовем U и V *ортогональными* $(U \perp V)$, если $(U, V) = 0$. Для $U_1, ..., U_k \in \aleph$ обозначим $\mathrm{L}(U_1, ..., U_k)$ подпространство, натянутое на $U_1, ..., U_k$:

$$\mathrm{L}(U_1, ..., U_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \beta_i U_i \,\middle|\, \beta \in R^k \right\}.$$

Будем говорить, что $(V \perp \mathrm{L}(U_1, ..., U_k))$, если $(V \perp U)$ для всех $U \in \mathrm{L}(U_1, ..., U_k)$. Пусть теперь $\widehat{X}$ - линейная оценка с наименьшей среднеквадратической ошибкой, задаваемая формулами (8.1) и (8.2).

8.1.1. Предложение. *Оценка $\widehat{X}$ определяется условиями:*

а) $\widehat{X} \in \mathrm{L}(Y_1, ..., Y_n)$;

б) $X - \widehat{X} \perp \mathrm{L}(Y_1, ..., Y_n)$.

Доказательство. Пусть $Z \in \mathrm{L}(Y_1, ..., Y_n)$. Тогда $Z = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i$ для некоторого $\beta \in R^n$. Ясно, что $X - Z \perp \mathrm{L}(Y_1, ..., Y_n)$, если и только если $X - Z \perp Y_i$ для всех $i = 1, ..., n$, что в свою очередь эквивалентно условию $(X, Y_i) \perp (Z, Y_i) = \beta_i (Y_i, Y_i)$, т.е. $\beta_i = \alpha_i$, $i = 1, ..., n$. Но тогда $Z = \widehat{X}$ и $X - \widehat{X} \perp \mathrm{L}(Y_1, ..., Y_n)$.

Величина $\widehat{X}$, удовлетворяющая условиям (а) и (б), называется *ортогональной проекцией X на* $\mathrm{L}(Y_1, ..., Y_n)$.

Случай ненулевого среднего

В случае, когда случайные величины X и $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, возможно, ненулевые средние $m_X, m_1, m_2, ..., m_n$ соответственно, то им отвечает аффинная оценка

$$\widehat{X} = \sum_{i=1}^{n} a_i \{Y_i - m_i\} + m_X \qquad (8.5)$$

и ошибка оценивания имеет вид

$$M\left(X - \widehat{X}\right)^2 = M\left(X^C - \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i^C\right)^2,$$

где X^C, Y_i^C - центрированные случайные величины:

$$X^C - m_X, \quad Y^C - m_Y.$$

Таким образом, задача сводится к случаю нулевого среднего и коэффициенты a_i могут быть определены в виде (8.2).

Таким образом, $M[\hat{X}] = M[X]$ и ошибка $X - \hat{X}$ всегда имеют нулевое среднее.

Рекуррентное оценивание

В случае, когда наблюдаемые случайные величины $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ представляют собой результаты измерений, проводимых последовательно во времени, оценка $\hat{X}$ процесса X является рекуррентной, если $\hat{X}_k$ получается в результате «модернизации» оценки $\hat{X}_{k-1}$, т.е. если $\hat{X}_k$ можно представить в виде

$$\hat{X}_k = f_k(\hat{X}_{k-1}, Y_k) . \tag{8.6}$$

Если такие функции $f_k(\hat{X}_{k-1}, Y_k)$ существуют, то (8.6) дает эффективную с вычислительной точки зрения оценку процедуру, так как нет необходимости запоминать все прошлые наблюдения. Требуются только текущая оценка и последнее наблюдение. Используя геометрическую интерпретацию, нетрудно понять, как можно осуществить рекуррентное оценивание. Пусть $L_K = \mathrm{L}(Y_1, ..., Y_n)$. Так как $L_{K-1} \subset L_K$, то всегда можно написать

$$\hat{X}_K = A_K + B_K , \tag{8.7}$$

где $A_K \in L_{K-1}$ и $B_K \perp L_{K-1}$. Если $E_K = X - \hat{X}_K$, то $X = E_K + \hat{X}_K = E_K + (A_K + B_K)$, причем $A_K \in L_{K-1}$ и $B_K + E_K \perp L_{K-1}$. Однако существует только одно такое разложение для X, это $X = E_{K-1} + \hat{X}_{K-1}$. Поэтому $A_K = \hat{X}_{K-1}$, а B_K является проекцией X на $L_K - L_{K-1}$ (ортогональное дополнение L_{K-1} в L_K). Если $L_K = L_{K-1}$, то $L_K - L_{K-1} = \{0\}$, и потому $B_K = 0$. В противном случае это подпространство одномерно, поскольку, если $\wp_K$ - оператор проектирования на L_K, то

$$L_K - L_{K-1} = \mathrm{L}(\tilde{Y}_K) , \tag{8.8}$$

где $\tilde{Y}_K = Y_K - \wp_{K-1} Y_K$.

Последовательность взаимно ортогональных случайных величин $(\tilde{Y}_K,\, k = 1,2,...)$ называется *обновляющей последовательностью*, а B_K - *обновляющей проекцией* X. Из (8.2) и (8.8) следует

$$B_K = \frac{(X, \tilde{Y}_K)}{(\tilde{Y}_K, \tilde{Y}_K)} \tilde{Y}_K .$$

Поэтому (8.7) принимает вид

$$\hat{X}_K = \hat{X}_{K-1} + \frac{(X, \tilde{Y}_K)}{(\tilde{Y}_K, \tilde{Y}_K)} (Y_K - \wp_{K-1} Y_K) . \tag{8.9}$$

Термин «обновление» выражает ту мысль, что проекция $(\tilde{Y}_K,\, k = 1,2,...)$ предоставляет «новую информацию», полученную в момент k.

Гауссовский случай

Случайный n-мерный вектор W имеет гауссовское распределение $N(m,Q)$, если логарифм его характеристической функции является квадратичной формой:

$$\Phi_W(u) = M[\exp(i\,u^T W)] = \exp\left(i\,m^T u - \frac{1}{2}u^T Q u\right), \qquad (8.10)$$

где $m = M[W],\ m \in R^n$, а $Q = M\left[(W-m)(W-m)^T\right]$- неотрицательно определенная матрица.

Из (8.10) вытекают следующие свойства:

а) Линейная комбинация независимых гауссовских случайных величин являются гауссовскими.

б) Любая неотрицательно определенная матрица Q является ковариационной матрицей некоторого гауссовского случайного вектора.

В задаче линейного оценивания X по наблюдениям $Y_1,...,Y_n$ используются только математические ожидания и ковариации. Поэтому без ограничения общности можно предполагать, что случайные величины являются гауссовскими, так как в противном случае их можно заменить гауссовскими случайными величинами $X^*, Y_1^*,...,Y_n^*$ с той же самой ковариационной матрицей. Однако в гауссовском случае получается наиболее сильный результат, заключающийся в том, что $\widehat{X}$ является также наилучшей *нелинейной* оценкой. Действительно, пусть $E = X - \widehat{X}$. Тогда $\widehat{X}$ и E являются ортогональными (т.е. некоррелированными) и гауссовскими в силу свойства (а). Поэтому они независимы. Вычислим условную характеристическую функцию X при заданном $Y = (Y_1,...,Y_n)$

$$\Phi_{X|Y}(u,Y) \equiv M\left[\exp(i\,u\,X \mid Y)\right] =$$

$$= M\left[\exp(i\,u\,(\widehat{X}+E) \mid Y)\right] = \exp(i\,u\,\widehat{X})\ M\left[\exp(i\,u\,E \mid Y)\right].$$

Так как $\widehat{X} = \mathrm{L}(Y_1,...,Y_n)$ и ошибка $E = X - \widehat{X}$ не зависят от Y, то

$$\Phi_{X|Y}(u,Y) = \exp(i\,u\,\widehat{X})\,M\left[\exp(i\,u\,E)\right].$$

Так как E имеет распределение $N(0,\sigma^2)$, где $\sigma^2 = D[E]$, то

$$\Phi_{X|Y}(u,Y) = \exp\left(i\,u\widehat{X} - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\right),$$

что является характеристической функцией распределения $N(\widehat{X},\sigma^2)$. Поэтому $\widehat{X}$ совпадает с условным средним случайной величины X:

$$\widehat{X} = M\left[X \mid Y\right].$$

Рассмотрим нахождение нелинейной функции $f(Y)$, которая минимизирует $M\left[(X - f(Y))^2\right]$. Пусть $g_{X|Y}(x,y)$ - условная плотность распределения X при заданном Y, а $g(y) > 0$- маргинальная плотность распределения Y. Тогда

$$M\left[(X - f(Y))^2\right] = \int_R g(y)\left\{\int_R [(x - f(y)]^2 g_{X|Y}(x;y)\,dx\right\}dy.$$

Так как $g(y) > 0$ для всех y, то последнее выражение достигает минимума, если при каждом y минимизируется подынтегральная функция в фигурных скобках

$$f(Y) = M\left[X \mid Y = y\right] = \int_R x\, g_{X|Y}(x,y)\, dx = \widehat{X}$$

Оценка $\widehat{X}$ в гауссовском случае является не только наилучшей *линейной* оценкой, но и наилучшей среди возможных оценок, поскольку она совпадает с условным средним. В общем же случае эта оценка не будет наилучшей *нелинейной* оценкой.

Для любого распределения выполняется неравенство

$$M\left[\left(X - M\left[X|Y\right]\right)^2\right] \le M\left[\left(X - \widehat{X}\right)^2\right],$$

которое в случае гауссовского распределения переходит в равенство. Это показывает, что гауссовское распределение является «наиболее» случайным в том смысле, что из всех возможных распределений для $\left(X, Y\right)$ с заданной ковариационной матрицей именно на гауссовском распределении максимизируется минимально достижимая ошибка оценивания.

§ 8.2. Оценивание в линейных динамических системах

При конструировании систем управления часто возникает задача определения оценки состояния системы, подверженной действиям случайных возмущений. Другими словами, требуется определить состояние системы управления в момент времени t на основе измерений ее фазовых координат на интервале времени $[t_0, t]$, производимых с ошибками. Такое выделение полезного сигнала при наличии случайных помех называется фильтрацией. К этой задаче примыкает задача предсказания наиболее вероятного состояния системы или значение полезного сигнала в момент времени $t_1 > t$, т.е. экстраполяция сигнала, а также задача сглаживания измерений при $t_1 < t$. Задачи, связанные с определением наилучшей оценки состояния системы, находящейся под воздействием неконтролируемых случайных, по неполным измерениям ее состояния, содержащим помехи, составляют основу статистической теории оптимальных систем.

За характеристику точности оценки оптимальной системы или ошибку фильтрации часто принимают математическое ожидание квадрата ошибки. Критерий минимума средней квадратический ошибки приводит к наиболее простым алгоритмам определения линейных оптимальных оценок.

В настоящем разделе будут рассматриваться гауссовские марковские процессы, с помощью которых можно довольно часто аппроксимировать многие динамические явления, как в природе, так и те, которые созданы руками человека.

Рассмотрим общую постановку задачи фильтрации. Пусть $x(t)$ гауссовский марковский случайный процесс, образованный решением линейной динамической системой, на входе которой действует гауссовский белый шум:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t), \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

где $x(t) \in R^n$ - вектор состояний; $x(t_0)$ - гауссовский вектор начального состояния системы; $w(t) \in R^r$ - вектор входа – гауссовский «белый» шум с $M[w(t)] = 0, M[w(t)w(\tau)] = W(t)\delta(t-\tau)$ статистически не связанный с начальным состоянием системы, т.е. $M[x(t_0)w^T(t)] = 0$. Здесь $W(t)$ - матрица интенсивностей «белого» шума, $\delta(t-\tau)$ - дельта-функция Дирака:

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ \ \tau \neq t, \\ \infty, \ \textit{если} \ \ \tau = t, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = 1.$$

Пусть $y(t)$ – наблюдаемый векторный сигнал, содержащий компоненты вектора полезного сигнала $x(t)$, аддитивно связанные с помехой $v(t)$:

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t). \tag{8.12}$$

Задача фильтрации заключается в том, чтобы по заданному $y(\tau)$ для $\tau \in [t_0, t]$ построить такую оценку $\hat{x}(t)$ полезного сигнала $x(t)$, которая доставляет минимум среднему квадрату ошибки

$$J(\varepsilon) = tr\, M[\varepsilon(t)\ \varepsilon^T(t)], \tag{8.13}$$

где tr - оператор «след матрицы»,

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t). \tag{8.14}$$

§ 8.3. Общее условие минимума средней квадратической ошибки. Уравнение Винера – Хопфа

Выведем общее условие минимума средней квадратической ошибки. Предположим, что $L(t)$ – линейный оператор системы, преобразующий $y(t)$ в $\hat{x}(t)$, причем $L \in R$. Тогда

$$\hat{x}(t) = L(t)y(t). \tag{8.15}$$

Определение 8.3.1. Оператор L называется линейным, если его область определения R является линейным подпространством и он линеен на R, т.е.

$$L(az + bs) = aLz + bLs.$$

Отметим, что множество значений линейного оператора также является линейным пространством.

В силу приведенных свойств линейных операторов, определим оператор $L^0(t) \in R$, при котором критерий качества (8.13) принимает минимальное значение. Обозначим

$$L(t) = L^0(t) + \mu r(t), \tag{8.16}$$

где μ - матрица переменных параметров, $r(t) \in R$ - произвольный ненулевой линейный оператор.

Если $L^0(t)$ есть искомый оператор, то при любых $\mu \neq 0$ происходит увеличение среднего квадрата ошибки и выражение (8.13) принимает минимальное значение лишь при $\mu = 0$. С другой стороны, если подставить (8.16) в (8.15) и затем в (8.14), то среднее значение квадрата ошибки становится функцией параметров матрицы μ и чтобы отыскать минимум (8.13) нужно $\partial J(\mu)/\partial\mu$ приравнять к нулю. Но как было отмечено, минимальное значение функционал (8.13) принимает при $\mu = 0$. Отсюда получается условие минимума критерия качества (8.13)

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{ tr\ M\left[\varepsilon(t)\ \varepsilon^T(t)\right]\right\} = 0 \ \ при \ \ \mu = 0 . \tag{8.17}$$

Выразим условие (8.17) в явном виде. Учитывая, что $\hat{x}(t) = \left[L(t) + \mu r(t)\right] y(t)$, выражение (8.17) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{ tr\ M\left[\varepsilon(t)\ \varepsilon^T(t)\right]\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{ tr\ M\left[\{x(t) - \hat{x}(t)\}\{x(t) - \hat{x}(t)\}^T\right]\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\ tr\ M\left[x(t)\ x^T(t)\right] - x(t)\{L^0(t)y(t)\}^T - \right.$$

$$- x(t)\{r(t)y(t)\}^T\mu^T -$$

$$- \{L^0(t)y(t)\}x^T(t) - \mu\{r(t)y(t)\}x^T(t) +$$

$$+ \mu\{r(t)y(t)\}\{L^0(t)y(t)\}^T +$$

$$+ \{L^0(t)y(t)\}\{r(t)y(t)\}^T\mu^T +$$

$$\left. + \mu\{r(t)y(t)\}\{r(t)y(t)\}^T\mu^T\ ]\ \right\} = 0 \ \ при \ \ \mu = 0.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial\mu} tr\,\mu\alpha\,\beta^T = \beta\alpha^T, \ \ \frac{\partial}{\partial\mu} tr\,\beta\,\alpha^T\mu^T = \beta\,\alpha^T,$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu} tr\ \mu\ z\mu^T{}_{при\ \mu=0} = 0,$$

последнее выражение можно переписать в виде

$$M[\{x(t) - L^0(\mathrm{t})y(t)\}\{r(t)y(t)\}^T] = 0, \ \ r(t) \in R . \tag{8.18}$$

Если ввести обозначения

$$K_{yy}(\tau,\eta) = M[y(\tau)y^T(\eta)], \ \ K_{xy}(t,\eta) = M[x(t)y^T(\eta)] ,$$

то уравнение (8.18) можно переписать в виде

$$\mathrm{r}(\eta)\left\{\mathrm{K}_{\mathrm{xy}}(t,\eta) - L^0(\tau)\mathrm{K}_{\mathrm{yy}}(t,\tau)\right\} = 0, \ \ r(\eta) \in R . \tag{8.19}$$

Условие (8.19) должно выполняться для оптимального оператора $L^0(\tau)$ и произвольного ненулевого оператора $r(\eta)$ из линейного пространства R. Выполнение равенства (8.19) для всех операторов $r(\eta) \in R$ необходимо и достаточно, если класс операторов R представляет собой линейное пространство. Уравнение (8.19) определяет оптимальный оператор, для которого мгновенное значение средней квадратической ошибки для каждого текущего момента времени t имеет наименьшее возможное значение. Это условие является общим условием, которому должен отвечать оптимальный оператор принадлежащий некоторому линейному пространству R, и носит название уравнения Винера – Хопфа в ортогональных проекциях.

Уравнение (8.19) может выполняться для всех операторов $r(\eta)$ только в том случае, если при любом $\eta \in T$, где $T-$ период, на котором распространяется действие линейных операторов рассмотренного класса (т.е. на область наблюдения случайного процесса $y(\eta)$) имеет равенство

$$K_{xy}(t,\eta) - L^0(\tau)K_{yy}(t,\tau) = 0 \ . \tag{8.20}$$

Условие (8.20) необходимое, но недостаточное для того, чтобы оператор $L(\tau)$ был бы оптимальным. Необходимо еще, чтобы уравнение (8.19) удовлетворялось для всех дифференциальных операторов $r(\eta)$, содержащихся в рассматриваемом классе R.

Поскольку внутри области T уравнение (8.19) удовлетворяется тождественно относительно η, то при любых $\eta \in T$ удовлетворяются и все уравнения, получаемые в результате дифференцирования уравнения (8.19) по η.

Однако, вследствие возможных разрывов производных функции $K_{yy}(t,\eta)$ при $\eta = t$, некоторые уравнения, полученные из (8.19) дифференцированием по η, могут и не удовлетворяться на границе области T. Поэтому условием выполнения равенства (8.20) для всех дифференциальных операторов $r(\eta)$ не является следствием уравнения (8.19) для значений η на границе области T и это условие следует добавить к условию (8.20).

Таким образом, для того чтобы оператор L был бы оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условию (8.20) и всем уравнениям, полученным их (8.19) путем применения всех допустимых операций по η при изменении τ в заданной области T.

Из этого условия следует, что допустимым дифференциальными операциями могут быть только такие, в результате двойного применения которых к функции $K_{yy}(t,\eta)$ по одному разу по отношению к каждому аргументу полученной функции, поочередно при $\eta = t$.

Как известно, линейная система может быть охарактеризована интегральным оператором, который через импульсные (весовые) переходные матрицы физически осуществимой системы выражается так

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = L^0(t)y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t,\tau)y(\tau)\, d\tau, \\ r(t)y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,\tau)y(\tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{8.21}$$

где $g(t,\tau)$, $h(t,\tau)$ - импульсные переходные матрицы. Необходимое и достаточное условие (8.19) минимума средней квадратической ошибки (2.13) с учетом (2.21) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t} h(t,\eta)\left\{ M[x(t)y^T(\eta)] - \int_{t_0}^{t} g(t,\tau)M[y(\tau)y^T(\eta)]\,d\tau \right\} d\eta = 0\,.$$

Это уравнение может удовлетворяться для произвольных ненулевых импульсных переходных матриц $h(t,\eta)$ только в том случае, если выражение в фигурных скобках тождественно равно нулю:

$$M[x(t)y^T(\eta)] - \int_{t_0}^{t} g(t,\tau)M[y(\tau)y^T(\eta)]\,d\tau = 0, \quad t_0 \le \eta \le t$$

или

$$K_{xy}(t,\eta) - \int_{t_0}^{t} g(t,\tau)K_{yy}(\tau,\eta)\,d\tau = 0, \quad t_0 \le \eta \le t\,. \tag{8.22}$$

Выражение (8.22) называется уравнением Винера – Хопфа в интегральной форме.

Полученное уравнение можно трактовать следующим образом: если на вход системы управления подается входное воздействие в виде корреляционной матрицы $K_{yy}(\tau,\eta) = M[y(\tau)y^T(\eta)]$ наблюдаемого процесса $y(t)$, то система управления оптимальна тогда и только тогда, когда ее реакция на это входное воздействие равно взаимно-корреляционной матрице $K_{xy}(t,\eta) = M[x(t)y^T(\eta)]$ полезного процесса $x(t)$ и входного процесса $y(t)$.

В общем случае решение уравнения (8.22) во временной области весьма затруднительно. Решение этого уравнения относительно импульсной переходной матрицы $g(t,\tau)$ неустойчиво к малым изменениям исходных данных, т.е. малые изменения данных в $K_{yy}(\tau,\eta) = M[y(\tau)y^T(\eta)]$ могут приводить к произвольно большим изменениям решения. Задачи подобного типа относятся к классу некорректно поставленных задач и для их решения применяются методы регуляризации.

Задача несколько упрощается для стационарного случая, когда для $g(t),\ K_y(\tau),\ K_{xy}(\tau)$ существует преобразование Лапласа.

Практически более простой алгоритм линейной фильтрации был получен, когда проблема фильтрации была рассмотрена во временной области с точки зрения концепции «состояний». Получающийся при этом линейный фильтр называется фильтром Калмана – Бьюси.

§ 8.4. Фильтр Калмана – Бьюси

Рассмотрим вопрос о нахождении наилучшего в смысле минимума средней квадратической ошибки линейного фильтра для сигнала, являющегося решением некоторого линейного дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t), \\ &x(t_0) = x_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{8.23}$$

Здесь $x(t) \in R^n$; x_0- гауссовский случайный вектор с нулевым математическим ожиданием, т.е. $M=[x(t_0)]=0$; $w(t)$ - «белый» шум, имеющий характеристики

$$M[w(t)]=0,\ M[w(t)\,w^T(\tau)]=W(t)\,\delta(t-\tau)\,. \qquad (8.24)$$

На интервале $[t_0,t]$ измеряется вектор $y(t)$, связанный с вектором $x(t)$ линейным матричным уравнением

$$y(t)=C(t)x(t)+v(t). \qquad (8.25)$$

Здесь $C(t)$ - матрица измерений; $y(t)\in R^m,\ m\le n$; $v(t)\in R^m$- гауссовский «белый» шум, имеющий характеристики

$$M[v(t)]=0,\ M[v(t)v^T(\tau)]=V(t)\delta(t-\tau)\,. \qquad (8.26)$$

Будем считать, что $x(t_0),\ w(t),\ v(t)$ не коррелированны между собой, т.е.

$$M[x(t_0)\,w^T(t)]=0,\ M[x(t_0)\,v^T(t)]=0,\ M[v(t)\,w^T(\tau)]=0\,.$$

Задача состоит в том, чтобы по заданному $y(\tau)$ для $\tau\in[t_0,t]$ построить оценку случайной функции $x(t)$ в виде решения линейного дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=F(t)\hat{x}(t)+K(t)y(t),\\&\hat{x}(t_0)=0\end{aligned}\right\}\quad \hat{x}(t)\in R^n \qquad (8.27)$$

такой, чтобы она минимизировала среднюю квадратическую ошибку

$$\varepsilon(t)=x(t)-\hat{x}(t)\,. \qquad (8.28)$$

Как было показано ранее, линейная оптимальная оценка в смысле минимума дисперсии ошибки удовлетворяет уравнению Винера – Хопфа (8.19). В силу того, что указанное условие должно выполняться для любых операторов $r(t)\in R$, то это условие должно выполняться и для элементарного оператора сдвига (запаздывания). В силу этого условие (8.19) перепишем в виде

$$M[\{x(t)-\hat{x}(t)\}\,y^T(\eta)]=0,\ \eta\in[t_0,t]\,. \qquad (8.29)$$

Продифференцируем уравнение (8.29) по аргументу t, получим

$$M\left[\left[\left\{\ \frac{d}{dt}x(t)-\frac{d}{dt}\hat{x}(t)\ \right\}y^T(\eta)\right]=0,\ \eta\in[t_0,t]\,. \qquad (8.30)$$

Подставляя в (2.29) выражения для $\frac{d}{dt}x(t)$ и $\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$, т.е. (8.23) и (8.27) соответственно, а также учитывая (8.25) и, учитывая, что $x(t_0),\ w(t),\ v(t)$ не коррелированны для всех $\eta\in[t_0,t]$, получим

$$\begin{aligned}&\left[A(t)-K(t)C(t)\right]M\left[x(t)y^T(\eta)\right]=\\&=F(t)M\left[\hat{x}(t)y^T(\eta)\right],\ \eta\in[t_0,t].\end{aligned}\ . \qquad (8.31)$$

Из уравнения (8.29) следует, что

$$M\left[x(t)y^T(\eta)\right]=M\left[\hat{x}(t)y^T(\eta)\right],\ \eta\in[t_0,t]\,. \qquad (8.32)$$

Уравнение (8.31) с учетом (8.32) можно переписать в виде

$$\left[A(t)-K(t)C(t)-F(t)\right]M\left[\hat{x}(t)y^T(\eta)\right]=0,\ \eta\in[t_0,t]\,. \qquad (8.33)$$

Пусть $\Phi(t,\tau)$ - фундаментальная матрица решений уравнения (8.27), тогда

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) K(\tau) y(\tau) d\tau \tag{8.34}$$

и

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = F(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) K(\tau) y(\tau) d\tau + K(t) y(t)\,. \tag{8.35}$$

Подставляя (8.34) в (8.33), получим

$$\int_{t_0}^{t} \left[A(t) - K(t)C(t) - F(t)\right] \Phi(t,\tau) K(\tau) M\left[y(\tau) y^T(\eta)\right] d\tau = 0\,. \tag{8.36}$$

Для того, чтобы выполнялось условие (8.36), необходимо, чтобы подынтегральное выражение равнялось нулю. Учитывая это обстоятельство, а также потребовав, чтобы $V(t)$ была бы положительно определенной, из (8.36) получаем

$$\left[A(t) - K(t)C(t) - F(t)\right] \Phi(t,\tau) K(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0, t]$$

откуда

$$F(t)\, \Phi(t,\tau) K(\tau) = \left[A(t) - K(t)C(t)\right] \Phi(t,\tau) K(\tau)\,. \tag{8.37}$$

Подставляя (8.37) в (8.35), получаем

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \left[A(t) - K(t)C(t)\right]\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) K(\tau) y(\tau) d\tau + K(t) y(t)$$

или

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \left[A(t) - K(t)C(t)\right] \hat{x}(t) + K(t) y(t)\,. \tag{8.38}$$

Приравнивая правые части уравнений (8.27) и (8.38), получаем

$$F(t) = A(t) - K(t)C(t)\,. \tag{8.39}$$

Найдем уравнение, решением которого будет ошибка фильтрации. Для этого из уравнения (8.23) вычтем уравнение (8.39). В результате получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \left[A(t) - K(t)C(t)\right] \varepsilon(t) + B(t) w(t) - K(t) v(t), \\ &\varepsilon(t_0) = x(t_0). \end{aligned}\right\} \tag{8.40}$$

Для того, чтобы полностью определить уравнение (8.38), необходимо отыскать матрицу $K(t)$, при которой оценка $\hat{x}(t)$ удовлетворяет уравнению Винера – Хопфа.

Подставим решение уравнения (8.40) в (8.29). Используя (8.25) и учитывая, что процессы $w(t)$, $v(t)$ не коррелированны, получим

$$M\left[\left\{\Phi(t,\eta)\,\varepsilon(\eta) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)[B(\tau) w(\tau) - K(\tau) v(\tau)]\, d\tau\right\} y^T(\eta)\right] = 0\,,$$

или

$$\Phi(t,\eta)M[\varepsilon(\eta)x^T(\eta)]\,C^T(\eta)-\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)K(\tau)V(\tau)\delta(\tau-\eta]\,d\tau=0.$$

Учитывая свойства дельта-функции, последнее выражение можно переписать в виде

$$\Phi(t,\eta)\left\{M[\varepsilon(\eta)x^T(\eta)]\,C^T(\eta)-K(\eta)V(\eta)\right\}=0,$$

откуда получим

$$M[\varepsilon(t)x^T(t)]\,C^T(t)=K(t)V(t), \qquad (8.41)$$

т.к. $\Phi(t,\eta)$ обратимая матрица.

Рассмотрим левую часть уравнения (8.41). Учитывая, что

$$M[\{x(t)-\hat{x}(t)\}\hat{x}^T(t)]=0, \qquad (8.42)$$

получаем

$$M\left[\varepsilon(t)x^T(t)\right]=M\left[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)\right]. \qquad (8.43)$$

Введем обозначение $P(t)=M\left[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)\right]$, т.е. $P(t)$ - дисперсионная матрица ошибок. Сравнивая (8.43) и (8.41), получаем

$$K(t)V(t)=P(t)C^T(t)$$

откуда, учитывая, что матрица $V(t)$ обратимая, получаем

$$K(t)=P(t)\,C^T(t)\,V^{-1}(t). \qquad (8.44)$$

Осталось отыскать уравнение, которое описывает динамику изменения дисперсионной матрицы $P(t)$. Учитывая (8.42), получим

$$\begin{aligned}P(t)&=M\left[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)\right]=\\&=M\left[x(t)x^T(t)\right]-M\left[\hat{x}(t)\hat{x}^T(t)\right]=X(t)-\hat{X}(t).\end{aligned} \qquad (8.45)$$

Используем результаты, полученные в § 8.1.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}X(t)=A(t)X(t)+X(t)A^T(t)+B(t)W(t)B^T(t),\\&X(t_0)=X_0.\end{aligned}\right\} \qquad (8.46)$$

Аналогично получаем

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{X}(t)=A(t)\hat{X}(t)+\hat{X}(t)A^T(t)+K(t)V(t)K^T(t),\\&\hat{X}(t_0)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (8.47)$$

Вычитая из (8.46) уравнение (8.47) и учитывая (8.44), получаем матричное уравнение типа Риккати, решение которого является дисперсионная матрица ошибок $P(t)$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}P(t)=A(t)P(t)+P(t)A^T(t)-\\&-P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)P(t)+B(t)W(t)B^T(t),\\&P(t_0)=X_0,\end{aligned}\right\} \qquad (8.48)$$

при этом учитывалось, что матрицы $P(t)$ и $V(t)$ симметричные.

В стационарном случае, когда матрицы A, B, C не зависят от времени и «белые» шумы $w(t), v(t)$ стационарны, дисперсионная матрица ошибок P после окончания переходных процессов, вызванных неадекватностью начальных условий полезного процесса и фильтра, становится постоянной. В силу этого, матрица K в установившемся состоянии является константой, поэтому оптимальный фильтр также является стационарным и задается уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = [A - KC]\hat{x}(t) + Ky(t), \\ &\hat{x}(t_0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.49}$$

которое во временной области эквивалентно фильтру Винера, определенного в частотной области решением интегрального уравнения Винера – Хопфа (8.21).

Матрица P определяется решением алгебраического уравнения

$$AP + PA^T - PC^T V^{-1} CP + BWB^T = 0. \tag{8.50}$$

Импульсная переходная матрица фильтра Винера в этом случае определяется выражением

$$g(t-\tau) = \left\{\exp\left[A - PC^T V^{-1} C\right](t-\tau)\right\} PC^T V^{-1}.$$

Полученный в данном параграфе линейный фильтр, который был 1961 году, описан Калманом и Бьюси дает наилучшую смещенную оценку в смысле минимума дисперсии ошибки, так как начальное состояние фильтра $\hat{x}(t_0) = 0$. Для того чтобы получить несмещенную оценку, следует учесть отличное от нуля начальное условие в уравнении (8.27). Для получения несмещенной оценки при начальных условиях $x(t_0) = x_0$, $M[x(t_0)] \neq 0$ начальные условия дифференциального уравнения, описывающие фильтр, должны быть $\hat{x}(t_0) = M[x(t_0)]$.

В общем случае полезный векторный процесс может порождаться не только белым шумом $w(t)$, но и некоторым детерминированным сигналом. Поэтому целесообразно обобщение на этот случай с учетом отличных от нуля начальных условий.

Так же и в случае формирования полезного сигнала $x(t)$ белым шумом $w(t)$ и детерминированным сигналом $u(t)$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t) + u(t), \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}\right\} \tag{8.51}$$

Наилучшая линейная несмещенная оценка процесса $x(t)$ по наблюдаемому процессу $y(t)$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t)$$

в смысле минимума средней квадратической ошибки, является решением дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\hat{x}(t) + K(t)y(t) + u(t), \\ &\hat{x}(t_0) = M[x(t_0)], \end{aligned}\right\} \tag{8.52}$$

где матрица $K(t)$ определяется выражением (8.44), в котором $P(t)$ является решением дифференциального уравнения типа Риккати (8.48) с начальным условием $P(t_0) = X_0 - m_x m_x^T$.

§ 8.5. Обобщенный линейный фильтр

В предыдущих разделах предполагалось, что «белый» шум $w(t)$, формирующий полезный процесс $x(t)$ и «белый» шум измерений $v(t)$ не коррелированны. Рассмотрим случай построения оптимального линейного фильтра для случая коррелированных гауссовых шумов $w(t)$ и $v(t)$.

Пусть теперь полезный сигнал $x(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t) + u(t), \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned}\right\} \quad x(t) \in R^n, \tag{8.53}$$

где $u(t)$ - детерминированный процесс; $M[w(t)] = 0$, $M[w(t)w^T(\tau)] = W(t)\delta(t-\tau)$, а измеряемый вектор определяется выражением

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad y(t) \in R^m, \; m \le n, \tag{8.54}$$

$M[v(t)] = 0$, $M[v(t)v^T(\tau)] = V(t)\delta(t-\tau)$, причем

$$M[w(t)v^T(\tau)] = \Pi(t)\delta(t-\tau). \tag{8.55}$$

Тогда задача фильтрации заключается в том, чтобы по заданному $y(\tau)$ для $\tau \in [t_0, t]$ построить оценку $\hat{x}(t)$ полезного процесса $x(t)$ в виде решения линейного дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = F(t)\hat{x}(t) + K(t)y(t) + u(t), \\ &\hat{x}(t_0) = M[x(t_0)], \end{aligned}\right\} \quad \hat{x}(t) \in R^n \tag{8.56}$$

такой, чтобы она минимизировала среднюю квадратическую ошибку $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Учитывая результаты предыдущего параграфа, назначим матрицу $F(t)$ в виде

$$F(t) = A(t) - K(t)C(t). \tag{8.57}$$

Тогда фильтр (8.56) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\hat{x}(t) + K(t)y(t) + u(t), \\ &\hat{x}(t_0) = M[x(t_0)]. \end{aligned}\right\} \tag{8.58}$$

Этот фильтр содержит в качестве неизвестного параметра матрицу $K(t)$, которую, естественно, следует выбирать из условия минимума средней квадратической ошибки $J(\varepsilon) = tr\,P(t) = tr\,M\left[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)\right]$, т.е.

$$\min_K J(\varepsilon) = \min_K tr\{P(t)\}. \tag{8.59}$$

Для решения этой задачи применим способ, основывающийся на вариационном принципе при локальном критерии качества в открытой области изменения параметров матрицы $K(t)$. Он состоит в том, что минимуму положительно определенной квадратичной формы по выбираемому параметру при фиксированном времени соответствует максимум по тому же параметру производной по времени с противоположным знаком от этой положительно определенной квадратичной формы, т.е.

$$\max_K \{-\frac{d}{dt} J(\varepsilon)\} = \max_K \{-tr\frac{d}{dt} P(t)\}. \tag{8.60}$$

Найдем выражение для производной дисперсионной матрицы $P(t)$. Для этого, вычитая (8.58) из (8.53), получим дифференциальное уравнение для ошибки фильтрации

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \left[A(t) - K(t)C(t)\right]\varepsilon(t) + B(t)w(t) - K(t)v(t), \\ &\varepsilon(t_0) = x(t_0) - \bar{x}(t_0). \end{aligned}\right\} \tag{8.61}$$

Здесь $\bar{x}(t_0) = M[x(t_0)]$.

Так как

$$\frac{d}{dt}P(t) = M\left[\varepsilon(t)\left\{\frac{d}{dt}\varepsilon(t)\right\}^T\right] + M\left[\left\{\frac{d}{dt}\varepsilon(t)\right\}\varepsilon^T(t)\right], \tag{8.62}$$

то, подставляя в (8.61) (8.62), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}P(t) = \left[A(t) - K(t)C(t)\right]P(t) + P(t)\left[A(t) - K(t)C(t)\right]^T + \\ &+ B(t)M\left[w(t)\,\varepsilon^T(t)\right] + M\left[\varepsilon(t)\,w^T(t)\right]B^T(t) - \\ &- K(t)M\left[v(t)\,\varepsilon^T(t)\right] - M\left[\varepsilon(t)\,v^T(t)\right]K^T(t), \\ &P(t_0) = X_0 - \bar{x}_0\bar{x}_{0\,x}^T. \end{aligned}\right\} \tag{8.63}$$

Пусть $\Phi(t,\tau)$ - фундаментальная матрица решений уравнения (8.61), тогда

$$\varepsilon(t) = \Phi(t,t_0)\,\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)[B(\tau)w(\tau) - K(\tau)v(\tau)]\,d\tau \tag{8.64}$$

Используя (8.59), найдем выражение для $M[\varepsilon(t)\,w^T(\tau)]$ и $M[\varepsilon(t)\,v^T(\tau)]$

$$\begin{aligned} &M[\varepsilon(t)\,w^T(\tau)] = \Phi(t,t_0)\,M[\varepsilon(t_0)\,w^T(\tau)] + \\ &+ \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\,M[B(\tau)w(\tau)w^T(\tau) - K(\tau)v(\tau)w^T(\tau)]\,d\tau = \\ &= \frac{1}{2}B(t)W(t) - \frac{1}{2}K(t)\Pi^T(t), \end{aligned}$$

так как начальные условия $\varepsilon(t_0)$ и «белый» шум $w(t)$ не коррелированны, т.е. $M[\varepsilon(t_0)\,w^T(t)] = 0$.

Аналогично имеем

$$M[\varepsilon(t)v^T(\tau)] = \varPhi(t,t_0)M[\varepsilon(t_0)v^T(\tau)] +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\varPhi(t,\tau)M[B(\tau)w(\tau)v^T(\tau) - K(\tau)v(\tau)v^T(\tau)]\,d\tau =$$
$$= \frac{1}{2}B(t)\varPi(t) - \frac{1}{2}K(t)V(t),$$
так как начальные условия $\varepsilon(t_0)$ и «белый» шум $v(t)$ не коррелированны, т.е. $M[\varepsilon(t_0)v^T(t)] = 0$.

Уравнение для дисперсионной матрицы, с учетом полученных результатов, принимает вид
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P(t) = \left[A(t) - K(t)C(t)\right]P(t) + P(t)\left[A(t) - K(t)C(t)\right]^T + \\
&B(t)W(t)B^T(t) + K(t)V(t)K^T(t) - \\
&- K(t)\varPi^T(t)B^T(t) - B(t)\varPi(t)K^T(t), \\
&P(t_0) = X_0 - \bar{x}_0\bar{x}_0^T.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.65)$$

Как следует из постановки задачи, при оптимизации параметров матрицы $K(t)$ ни каких ограничений на область их изменений не наложено. Следовательно, оптимальные значения этих параметров должны быть определены в открытой области их изменения, т.е. оптимальные значения параметров матрицы $K(t)$ являются стационарной точкой квадратичной формы $tr\left\{\frac{d}{dt}P(t)\right\}$ в пространстве этих параметров. Поэтому условие экстремума (8.60) можно переписать в виде
$$\frac{\partial}{\partial K(t)}\left[tr\left\{\frac{d}{dt}P(t)\right\}\right] = 0. \qquad (8.66)$$

Подставляя в (8.66) уравнение (8.65), определяющее производную дисперсионной матрицы ошибок, запишем полученное с учетом только членов, зависящих от матрицы $K(t)$
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial K(t)}tr\Big[-K(t)C(t)P(t) - P(t)C^T(t)K^T(t) + K(t)V(t)K^T(t) - \\
&-K(t)\varPi^T(t)B^T(t) - B(t)\varPi(t)K^T(t) \Big] = 0.
\end{aligned} \qquad (8.67)$$

Принимая во внимание соотношения для производных скалярных величин по матрице, приведенных в разделе § 8.2, из последнего уравнения получаем
$$-P(t)C^T(t) + K(t)V(t) - B(t)\varPi(t) = 0.$$
Откуда
$$K(t) = \left[P(t)C^T(t) + B(t)\varPi(t)\right]V^{-1}(t). \qquad (8.68)$$
Здесь, как и ранее, предполагалось, что матрица $V(t)$ обратимая.

Таким образом, наилучшая линейная оценка процесса $x(t)$ по наблюдаемому процессу $y(t)$ в смысле минимума средней квадратической ошибки, является решением дифференциального уравнения (8.58), где матрица $K(t)$ определяется выражением (8.68), в котором $P(t)$ является решением дифференциального уравнения типа Риккати

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}P(t) = \left[A(t) - B(t)\varPi)(t)V^{-1}(t)C(t)\right]P(t) + \\ &+ P(t)\left[A(t) - B(t)\varPi)(t)V^{-1}(t)C(t)\right]^T - \\ &\qquad - P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)P(t) + \\ &+ B(t)\left[W(t) - \varPi(t)V^{-1}(t)\varPi^T(t)\ \right]B^T(t), \\ &P(t_0) = X_0 - \bar{x}_0\bar{x}_0^T . \end{aligned}\right\} \tag{8.69}$$

Отметим, что рассмотренная в § 8.3 задача построения линейного фильтра является частной по отношению к данной задаче. Действительно, при $\varPi(t) = 0$, т.е. при отсутствии корреляции между шумами $w(t)$ и $v(t)$ выражения, определяющие матрицы $F(t), K(t)$ и $P(t)$ обобщенного фильтра и фильтра Калмана – Бьюси, совпадают.

§ 8.6. Фильтрация при «небелых» шумах

Практический интерес представляет собой обобщение задачи фильтрации для коррелированных во времени ошибок и измерений.
Пусть полезный процесс $x(t)$ является решением линейного дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t) + u(t), \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned}\right\} x(t) \in R^n \tag{8.70}$$

и измеряемый сигнал удовлетворяет уравнению

$$y(t) = C(t)x(t) + z(t),\ \ y(t) \in R^m,\ m \le n, \tag{8.71}$$

где $z(t)$ - помеха, представляющая собой гауссовский марковский процесс

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}z(t) = G(t)z(t) + Q(t)v(t), \\ &z(t_0) = z_0 . \end{aligned}\right\} z(t) \in R^m \tag{8.72}$$

Процессы $w(t)$ и $v(t)$ - «белые» некоррелированные шумы, причем

$$M[w(t)] = 0,\ M[v(t)] = 0,$$

$$M[w(t)w^T(\tau)] = W(t)\delta(t-\tau),$$

$$M[v(t)v^T(\tau)] = V(t)\delta(t-\tau).$$

«Белый» шум $v(t)$ будем считать некоррелированным с начальными условиями $x(t_0)$ и $z(t_0)$.

Продифференцировав выражение (8.71) по времени и подставляя вместо $\frac{d}{dt}x(t)$ и $\frac{d}{dt}z(t)$ их значения, определяемые соответственно уравнениями (8.70) и (8.72), получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}y(t)=\left[\frac{d}{dt}C(t)+C(t)A(t)\right]x(t)+G(t)z(t)+\\&+C(t)u(t)+C(t)B(t)w(t)+Q(t)v(t),\\&y(t_0)=C(t_0)x(t_0)+z(t_0).\end{aligned}\right\}\tag{8.73}$$

Используя полученную формулу, введем функцию

$$y^*(t)=\frac{d}{dt}y(t)-G(t)y(t)-C(t)u(t)\ .\tag{8.74}$$

Учитывая (8.73), будем иметь

$$\begin{aligned}y^*(t)&=\left[\frac{d}{dt}C(t)+C(t)A(t)-G(t)C(t)\right]x(t)+\\&+C(t)B(t)w(t)+Q(t)v(t).\end{aligned}\tag{8.75}$$

Введем обозначения

$$C^*(t)=\frac{d}{dt}C(t)+C(t)A(t)-G(t)C(t)\,,\tag{8.76}$$

$$s(t)=C(t)B(t)w(t)+Q(t)v(t).\tag{8.77}$$

Тогда выражение (8.75) примет вид

$$y^*(t)=C^*(t)x(t)+s(t),\tag{8.78}$$

где $s(t)$ - «белый» шум с симметричной положительно определенной матрицей интенсивностей, равной

$$S(t)=C(t)B(t)W(t)B^T(t)C^T(t)+Q(t)V(t)Q^T(t)\,.\tag{8.79}$$

Теперь исходная задача фильтрации может быть переформулирована: требуется построить наилучшую средне квадратичную оценку процесса $x(t)$ по наблюдениям $y^*(t)$, причем шумы $w(t)$ и $s(t)$ коррелированны

$$M[w(t)s^T(\tau)]=W(t)B^T(t)C^T(t)\delta(t-\tau)\,.\tag{8.80}$$

Применим результаты предыдущего параграфа к рассматриваемой задаче. Тогда оптимальная линейная оценка будет являться решением дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=A(t)\hat{x}(t)+K(t)[y^*(t)-C^*(t)\hat{x}(t)]+u(t),\\&\hat{x}(t_0)=\bar{x}_0,\end{aligned}\right\}\tag{8.81}$$

$$\hat{x}(t)\in R^n.$$

где матрица $K(t)$ определяется выражением

$$\begin{aligned}K(t)&=\left[P(t)\{C^*(t)\}^T+B(t)W(t)B^T(t)C^T(t)\right]\times\\&\times\left[C(t)B(t)W(t)B^T(t)C^T(t)+Q(t)V(t)Q^T(t)\right]^{-1}.\end{aligned}\tag{8.82}$$

В уравнение (8.80) входит функция $y^*(t)$, которая содержит производную по времени от измеряемой функции $y(t)$. Для того чтобы избежать необходимости отыскания производной $y(t)$, введем дополнительный вектор состояния $x^*(t)$, связанный с оценкой $\hat{x}(t)$ следующим образом:

$$\hat{x}(t)=x^*(t)+K(t)y(t)\,.\tag{8.83}$$

Продифференцируем соотношение (8.83) по времени и подставляя выражения для $\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$ и $\frac{d}{dt}y^*(t)$ в полученное уравнение, получим

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x^*(t) = [A(t) - K(t)C^*(t)]\hat{x}(t) - \\ &-[\frac{d}{dt}K(t) + K(t)G(t)]\,y(t) + [I - K(t)C(t)]u(t). \end{aligned} \tag{8.84}$$

Теперь вместо уравнения (8.81), определяющее оценку $\hat{x}(t)$, следует использовать уравнения (8.84) и (8.83), которые запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x^*(t) = [A(t) - K(t)C^*(t)]x^*(t) + \\ &+[A(t)K(t) - K(t)C^*(t)K(t) - \frac{d}{dt}K(t) - \\ &-K(t)G(t)]\,y(t) + \{I - K(t)C(t)]u(t), \\ &\ x^*(t_0) = \bar{x}_0 - K(t_0)y(t_0), \end{aligned}\right\} \tag{8.85}$$

В уравнение (8.81), определяющее матрицу $K(t)$, входит дисперсионная матрица $P(t)$. Найдем дифференциальное уравнение, решением которого является матрица $P(t)$. Для этого продифференцируем $P(t)$ по времени

$$\frac{d}{dt}P(t) = M\left[\left\{\frac{d}{dt}\varepsilon(t)\right\}\varepsilon^T(t)\right] + M\left[\varepsilon(t)\left\{\frac{d}{dt}\varepsilon(t)\right\}^T\right], \tag{8.86}$$

отыщем выражение для $\frac{d}{dt}\varepsilon(t)$ и подставим в (8.86).

Для отыскания выражения $\frac{d}{dt}\varepsilon(t)$ воспользуемся уравнениями (8.70) и (8.81). Получим

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = [A(t) - K(t)C^*(t)]\varepsilon(t) + B(t)w(t) - K(t)s(t)\,. \tag{8.87}$$

Подставляя (8.87) в (8.86), будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}P(t) = \\ &= [A(t) - K(t)C^*(t)]P(t) + P(t)[A(t) - K(t)C^*(t)]^T + \\ &\qquad + B(t)M[w(t)\varepsilon^T(t)] + M[\varepsilon(t)w^T(t)]B^T(t) - \\ &\qquad - K(t)M[s(t)\varepsilon^T(t)] - M[\varepsilon(t)s^T(t)]K^T(t). \end{aligned} \tag{8.88}$$

Пусть $\Phi(t,\tau)$ - фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения (8.87). Тогда, учитывая свойства дельта - функции, будем иметь

$$\begin{aligned} &M[\varepsilon(t)w^T(t)] = \\ &= \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)M[B(\tau)w(\tau)w^T(t) - K(\tau)s(\tau)w^T(t)]d\tau = \\ &= \frac{1}{2}\big[B(t) - K(t)C(t)B(t)\big]W(t), \end{aligned} \tag{8.89}$$

$$
\begin{aligned}
&M[\varepsilon(t)s^T(t)] = \\
&= \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) M[B(\tau)w(\tau)s^T(t) - K(\tau)s(\tau)s^T(t)]d\tau = \\
&= \frac{1}{2}\big[B(t) - K(t)C(t)B(t)\big]W(t)B^T(t)C^T(t) - \\
&- \frac{1}{2}K(t)Q(t)V(t)Q^T(t).
\end{aligned} \tag{8.90}
$$

Подставляя (8.89) и (8.90) и их транспонированные значения в (8.88), получим уравнение для дисперсионной матрицы ошибок

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P(t) = \\
&= [A(t) - K(t)C^*(t)]P(t) + P(t)[A(t) - K(t)C^*(t)]^T - \\
&- B(t)W(t)B^T(t)C^T(t)K^T(t) - K(t)C(t)B(t)W(t)B^T(t) + \\
&+ K(t)[Q(t)V(t)Q^T(t) + C(t)B(t)W(t)B^T C^T(t)]K^T(t) + \\
&+ B(t)W(t)B^T(t).
\end{aligned} \tag{8.91}
$$

Уравнение (8.85) преобразуем, подставив в него выражение (8.82). После приведения подобных членов получим уравнение для $P(t)$ в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P(t) = [A(t) - B(t)W(t)B^T(t)C^T(t)S^{-1}(t)]P(t) + \\
&+ P(t)[A(t^T - B(t)W(t)B^T(t)C^T(t)S^{-1}(t)]^T - \\
&- B(t)\left\{C^*(t)\right\}^T S^{-1}(t)C^*(t)P(t) + \\
&+ B(t)[W(t)B^T(t)C^T(t)S^{-1}(t)C(t)B(t)W(t) + W(t)]B^T(t)],
\end{aligned} \tag{8.92}
$$

где матрица $S(t)$ определяется соотношением (8.79).

Начальные условия для уравнения (8.92) можно получить из соотношения

$$
P(t_0) = X_0 - \widehat{X}_0. \tag{8.93}
$$

Итак, наилучшей линейной оценкой $\widehat{x}(t)$ процесса $x(t)$ по наблюдаемому сигналу $y(t)$ при «небелых» шумах (8.72) является решение дифференциального уравнения (8.85) и уравнения (8.83), где матрица $K(t)$ определяется соотношением (8.82). Дисперсионная матрица $P(t)$ является решением нелинейного дифференциального уравнения (8.92) с начальными условиями (8.93).

§ 8.7. Оптимальная фильтрация нелинейных динамических систем

Большая часть из встречающихся динамических систем и систем измерений являются нелинейными. Уравнениями оптимальных фильтров, полученных в разделах 8.3 – 8.5 для линейных систем, можно пользоваться в случае нелинейных систем с «белыми» шумами, если провести линеаризацию относительно номинальной траектории или если непрерывно (или от случая к случаю) проводить линеаризацию относительно текущих оценок начиная с априорной. Пусть динамическая система описывается векторным нелинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,w)\,. \qquad (8.94)$$

Здесь $x(t)\in R^n$ состояние системы, $u(t)\in R^r$ - управляющее воздействие, $w(t)\in R^m$ - возмущение, представленное случайным процессом.

В дополнении к системам, рассматриваемым в данной главе, которые действительно являются линейными, уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t) \qquad (8.95)$$

вида часто используются при рассмотрении малых отклонений величин $x,\ u,\ w$ от уравнении (8.94) около «номинальной траектории» $\langle \bar{x}(t),\ \bar{u}(t),\ \bar{w}(t)\rangle$. Здесь $\bar{w}(t)$ будет средним значением возмущения, т.е. $\bar{w}(t) = M[w(t)]$, а $\bar{x}(t)$ - желаемой траекторией состояния. Если функция $f(t,x,u,w)$ дифференцируема по всем аргументам, то, обозначая $\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ можно записать

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{u},\bar{w})\right)\tilde{x}(t) +$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x},\bar{u},\bar{w})\right)\tilde{u}(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial w}(\bar{x},\bar{u},\bar{w})\right)\tilde{w}(t) + o(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{w}).$$

Если $|\tilde{x}(t)|,\ |\tilde{u}(t)|,\ |\tilde{w}(t)|$ являются малыми, то последнее слагаемое также мало и может рассматриваться как дополнительное возмущение. Таким образом, можно прейти к уравнению (8.95), где $A(t), B(t,)\, G(t)$ теперь являются производными функции $f(t,x,u,w)$ по соответствующим переменным, вычисленным вдоль номинальной траектории.

Даже для линейного уравнения (8.95) трудно получить полезные результаты, не делая каких-либо предположений относительно случайного процесса $w(t)$. Поэтому, как и в предыдущих разделах настоящей главы, будем предполагать, что $w(t)$ - «белый» гауссовский шум.

Рассмотрим один из возможных фильтров для нелинейного непрерывного процесса, который «генерируется» решением нелинейного уравнения, возбуждаемого «белым» шумом

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x,t) + G(t)w(t). \qquad (8.96)$$

Здесь

$x\in R^n,\ M[w(t)] = \bar{w}(t),$

$M[\{w(t)-\bar{w}(t)\}\{w(\tau)-\bar{w}(\tau)\}^T] = W(t)\delta(t-\tau),$

$M[x(t_0)] = \bar{x}_0,\ M[\{x(t_0)-\bar{x}_0\}\{x(t_0)-\bar{x}_0\}^T] = X_0,$

$M[\{x(t_0)-\bar{x}_0\}\{w(t)-\bar{w}(t)\}^T] = 0.$

Процесс измерения описывается соотношением

$$y(t) = C(t,x) + v(t)\,, \qquad (8.97)$$

где $y \in R^m$, $m \le n$; $M[v(t)] - 0$, $M[v(t)v^T(\tau)] = V(t)\delta(t-\tau)$,
$M[\{x(t_0) - \bar{x}_0\}v^T(\tau)] = 0$, $M[\{w(t) - \bar{w}(t)\}v^T(\tau)] = 0$.

Нелинейности через функции $f(x,t)$ и $C(t,x)$ входят соответственно только в уравнения (8.96) и (8.97). Одним из возможных фильтров для рассматриваемой нелинейной системы является следующая очевидная модификация линейного фильтра из § 8.3:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = f(\hat{x},t) + G(t)\bar{w}(t) + \\ &+ P(t)\left\{\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right\}^T V^{-1}(t)\big[y(t) - C(\hat{x},t)\big], \\ &\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0, \end{aligned}\right\} \tag{8.98}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}P(t) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}P(t) + P(t)\left\{\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\}^T - \\ &- P(t)\left\{\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right\}^T V^{-1}(t)\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}P(t) + G(t)W(t)G^T(t), \\ &P(t_0) = X_0. \end{aligned}\right\}$$

Здесь частные производные $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial C(x,t)}{\partial x}$ могут вычисляться вдоль номинальной траектории или для большей точности их можно вычислять полагая $x(t) = \hat{x}(t)$. Однако в этом случае матрицу $P(t)$ заранее вычислить нельзя, так как она, согласно выбранной процедуре, зависит от текущей оценки $\hat{x}(t)$, следует вычислять в реальном времени.

§ 8.8. Оптимальное сглаживание и интерполяция для непрерывных процессов

Задача оптимального сглаживания для непрерывных процессов может быть поставлена как задача определения значений $x(t_0)$ и $w(t)$, которые минимизируют критерий качества

$$\begin{aligned} J(x_0, w) = &\frac{1}{2}\big[\hat{x}(t_0) - x(t_0)\big]^T P^{-1}(t_0)\big[\hat{x}(t_0) - x(t_0)\big] + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\Big\{ \big[w(t) - \bar{w}(t)\big]^T W^{-1}(t)\big[w(t) - \bar{w}(t)\big] + \\ &+ \big[y(t) - C(t)x(t)\big]^T V^{-1}(t)\big[y(t) - C(t)x(t)\big] \Big\}\, dt \end{aligned} \tag{8.99}$$

при ограничении

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t). \tag{8.100}$$

Это детерминированная задача оптимизации, к которой применимы стандартные методы оптимального управления. Гамильтониан в этой задаче имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left[w(t) - \overline{w}(t)\right]W^{-1}(t)\left[w(t) - \overline{w}(t)\right]^T +$$
$$+\frac{1}{2}\left[y(t) - C(t)x(t)\right]V^{-1}(t)\left[y(t) - C(t)x(t)\right]^T + \qquad (8.101)$$
$$+\lambda^T(t)\left[A(t)x(t) + B(t)w(t)\right].$$

Необходимые условия минимума функционала (2.99) при ограничении (8.100) записываются как уравнения Эйлера – Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left\{\frac{\partial H(x,\lambda,w,t)}{\partial\lambda(t)}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad x(t_0) = \hat{x}(t_0) - P(t_0)\lambda(t_0);$$
$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(x,\lambda,w,t)}{\partial x(t)}\right\}^T \quad \lambda(T) = 0; \qquad (8.102)$$
$$\frac{\partial H}{\partial w(t)} = 0.$$

Таким образом, учитывая, что

$$\frac{\partial H(x,\lambda,w,t)}{\partial w(t)} = \left[w(t) - \overline{w}(t)\right]W^{-1}(t) + \lambda^T(t)B(t) = 0,$$

откуда

$$w(t) = \overline{w}(t) - W(t)B(t)\lambda(t), \qquad 8.103)$$

необходимые условия минимума функционала (8.97) будут описываться двухточечной краевой задачей

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}\lambda(t) \end{bmatrix} =$$
$$+\begin{bmatrix} A(t) & -B(t)W(t)B^T(t) \\ -C^T(t)V^{-1}(t)C(t) & -A(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \qquad (8.104)$$
$$+\begin{bmatrix} B(t)\overline{w}(t) \\ C^T(t)V^{-1}(t)y(t) \end{bmatrix},$$
$$x(t_0) = \hat{x}(t_0) - P(t_0)\lambda(t_0), \quad \lambda(T) = 0. \qquad (8.105)$$

Обозначим решение двухточечной краевой задачи (8.103) – (8.104), которым являются сглаживающие оценки в непрерывном случае, через $\hat{x}(t/T)$ и $\hat{w}(t/T)$. Так как двухточечная краевая задача линейна, то решение можно получить либо методами, использующими переходные матрицы, либо методом прогонки. Остановимся на последнем, положим, что решение $x(t) = \hat{x}(t/T)$ может быть представлено в виде

$$x(t) = \hat{x}(t) - P(t)\lambda(t), \qquad (8.104)$$

где $\hat{x}(t)$и $P(t)$ подлежат определению. Дифференцируя (8.106) и учитывая (8.104), получаем

$$A(t)x(t) - B(t)W(t)B^T(t)\lambda(t) + B(t)\overline{w}(t) =$$
$$= \frac{d}{dt}\widehat{x}(t) - \frac{d}{dt}P(t)\lambda(t) -$$
$$- P(t)\left[- C^T(t)V^{-1}(t)C(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t) + C^T(t)V^{-1}(t)y(t)\right]$$

или

$$-\frac{d}{dt}\widehat{x}(t) + A(t)\widehat{x}(t) - P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)\widehat{x}(t) +$$
$$+ B(t)\overline{w}(t) + P(t)C^{-1}(t)V^{-1}(t)y(t) =$$
$$= \Big[\ -\frac{d}{dt}P(t) + A(t)P(t) + P(t)A^T(t) -$$
$$- -P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)P(t) + B(t)W(t)B^T(t)\ \Big]\lambda(t).$$

Таким образом, если потребовать, чтобы $\widehat{x}(t)$ и $P(t)$ удовлетворяли уравнениям фильтрации (§ 8.3)

$$\frac{d}{dt}\widehat{x}(t) = A(t)\widehat{x}(t) + P(t)C^T(t)V^{-1}(t)\left[y(t) - C(t)\widehat{x}(t)\right] - B(t)\overline{w}(t),$$
$$\widehat{x}(t_0) = \widehat{x}_0,$$
$$\frac{d}{dt}P(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)P(t) + \tag{8.107}$$
$$+ B(t)W(t)B^T(t),\ P(t_0) = P_0,$$

то тогда (8.106) становится тождеством. При $t = T$ будет выполняться тождество $\widehat{x}(t/T) = x(T) = \widehat{x}(T)$, Функцию $\lambda(t)$ можно вычислить, интегрируя «назад» (в обратном времени) (начиная с $t = T$) уравнение

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left[A(t) - P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)\right]\lambda(t) + \tag{8.108}$$
$$+ C^T(t)V^{-1}(t)\left[y(t) - C(t)\widehat{x}(t)\right],\ \lambda(T) = 0,$$

тогда как уравнения (8.107) интегрируются «вперед». Зная $\lambda(t)$ из формулы (8.103) можно найти $\widehat{w}(t/T)$, а из формулы (8.106) − $\widehat{x}(t/T)$.

Глава 9. Управление линейными стохастическими системами с квадратическим функционалом качества

Применение методов аналитического конструирования оптимальных управлений основано на определенных допущениях, основным из которых является выбор функционала критерия оптимума. В принципе функционал качества может быть выбран из довольно широкого класса. Однако известные решения задачи аналитического конструирования в замкнутой форме получаются только для квадратического функционала. Поэтому синтез на основе квадратических функционалов имеет широкое применение, кроме того, во многих практических задачах он соответствует их существу.

Квадратический критерий имеет еще одну замечательную особенность, допускающую возможность значительного упрощения синтеза оптимального управления в линейных системах при случайных возмущениях. Эта особенность состоит в справедливости так называемого «принципа стохастической эквивалентности» или теоремы разделения. Этот принцип позволяет применить результаты аналитического конструирования управления линейными объектами и методы построения оптимальных фильтров, так как задача аналитического конструирования управлений линейными объектами, подверженных случайным возмущениям, с квадратическим критерием качества сводится к двум последовательно решаемым задачам.

Таким образом, важным следствием теоремы разделения является возможность объединения результатов теории линейной фильтрации случайных сигналов и детерминированной теории оптимального управления при синтезе оптимальных систем.

§ 9.1. Системы с процессами типа «белого» шума

Рассмотрим задачу построения оптимального регулятора для линейной системы, возмущаемой гауссовским «белым» шумом, когда критерий качества является квадратичной формой, начальные условия случайны, но точно известно состояние системы. Представим управляемую систему следующей линейной моделью

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t),\\ &x_0 = x(t_0), \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$, $w \in R^n$; причем

$$\left.\begin{aligned} &M[w(t)] = 0,\ M[w(t)w^T(\tau)] = W(t)\delta(t-\tau);\\ &M[x(t_0)] = 0;\ M[x(t_0)x^T(t_0)] = X_0. \end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

Пусть критерий качества есть среднее по ансамблю от квадратичной формы

$$J(x,u) = \frac{1}{2}M\left[x^T(T)Fx(T) + \int_{t_0}^{T}\left\{x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right\}dt\right], \qquad (9.3)$$

где матрицы $F(t)$ и $Q(t)$ - положительно полуопределены,

матрица $R(t)$ - положительно определена,

время T - задано.

Требуется выбрать управление $u(t)$, которое минимизирует функционал (9.3).

Процесс $w(t)$ представляет собой случайное возмущение с нулевым средним и малым (по сравнению с характеристическими постоянными времени системы) временем корреляции. Таким образом, предсказать $w(t)$ при $\tau > t$, даже точно зная состояние для $\tau < t$, не представляется возможным. Поэтому, оптимальный регулятор эквивалентен детерминированному регулятору

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)S(t)x(t), \qquad (9.4)$$

где $S(t)$ определяется решением матричного дифференциального уравнения типа Риккати

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}S(t) = A(t)S(t) + S(t)A^T(t) - \\ &- S(t)B(t)R^{-1}(t)B(t)S(t) + Q(t), \\ &S(T) = F. \end{aligned}\right\} \qquad (9.5)$$

Найдем уравнения, определяющие поведение оптимальной системы в среднем. Уравнение (9.1) с учетом (9.4) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)\right]x(t) + w(t), \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.6)$$

Легко показать, что ковариация процесса $x(t)$ будет определяться уравнением

$$X(t) = M\left[x(t)x^T(t)\right],$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}X(t) = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)\right]X(t) + \\ &+ X(t)\left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)\right]^T + W(t), \\ &X(t_0) = X_0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.7)$$

Аналогично находится матрица ковариаций управления

$$U(t) = M\left[u(t)u^T(t)\right],$$

$$U(t) = R^{-1}(t)B^T(t)S(t)X(t)S(t)B(t)R^{-1}(t). \qquad (9.8)$$

Определим среднее значение критерия качества, который с учетом (9.4) можно переписать в виде

$$J(x,u)=\frac{1}{2}M\Bigg[\ x^T(T)Fx(T)+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left\{x^T(t)\{Q(t)+S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)\}x(t)\right\}dt\ \Bigg]$$

или

$$J(x,u)=\frac{1}{2}tr\Bigg\{\ FX(T)+$$

$$=+\int_{t_0}^{T}\left[\{Q(t)+S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t)\}X(t)\right]dt\ \Bigg\}, \qquad (9.9)$$

где tr - оператор «след матрицы».

В подынтегральное выражение функционала (9.9) добавим $\frac{d}{dt}\{S(t)X(t)\}$, компенсировав вне интеграла выражением $\{S(t_0)X(t_0)-S(T)X(T)\}$. Принимая во внимание, что $S(T)=F$, и, учитывая (9.6), получим

$$J(x,u)=\frac{1}{2}tr\left\{S(t_0)X(t_0)+\int_{t_0}^{T}S(t)W(t)dt\right\}. \qquad (9.10)$$

При $W(t)=0$ (шум отсутствует) значение критерия качества при оптимальном управлении будет

$$J(x,u)=\frac{1}{2}tr\{S(t_0)X(t_0)\}.$$

Таким образом, поскольку при неотрицательно определенных матрицах $S(t)$ и $W(t)$ величина $tr\int_{t_0}^{T}S(t)W(t)dt$ неотрицательна, наличие шума в системе ($W(t)\neq 0$) увеличивает значение критерия качества.

Рассмотрим статистически стационарный случай. Если управляемая система и шум в ней стационарны (матрицы A, B, W постоянны), матрицы Q, R положительно определены и содержат постоянные элементы, $T\to\infty$ ($F=0$), то регулятор может быть стационарным, т.е. может быть постоянной матрица $\widehat{S}$. Матрица ковариаций состояния также постоянна и определяется решением алгебраического уравнения

$$\left[A-BR^{-1}B^T\widehat{S}\right]X+X\left[A-BR^{-1}B^T\widehat{S}\right]^T+W=0.$$

Матрица ковариаций управления определяется

$$U=R^{-1}B^T\widehat{S}X\,\widehat{S}\,B\,R^{-1},$$

где матрица $\widehat{S}$ определяется решением алгебраического уравнения

$$\widehat{S}A+A\widehat{S}-\widehat{S}BR^{-1}B^T\widehat{S}+Q=0.$$

§ 9.2. Принцип стохастической эквивалентности

Пусть для $t \in [t_0, T]$ задана линейная модель системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t), \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

и совокупность измерений $y(t)$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t), \tag{9.12}$$

где $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^r, m \le n;$ $w(t), v(t)$ - «белые» гауссовские шумы, причем $M[w(t)] = 0,\ M[v(t)] = 0,$

$$M\left[\begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^T(\tau) & v^T(\tau) \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} W(t) & \Pi(t) \\ \Pi^T(t) & V(t) \end{pmatrix}\delta(t-\tau), \tag{9.13}$$

$x(t_0)$ - гауссовский случайный вектор с нулевым математическим ожиданием, независимый от $w(t)$ и $v(t)$, т.е.

$$\begin{aligned} &M[x(t_0)] = 0,\ M[w(t)x^T(t_0)] = 0,\ M[v(t)x^T(t_0)] = 0, \\ &M[x(t_0)x^T(t_0)] = X(t_0). \end{aligned} \tag{9.14}$$

Требуется найти такое управление $u(t)$, которое минимизирует функционал

$$\begin{aligned} J(x,u) = \frac{1}{2}M\Big[\ &x^T(T)Fx(T) + \\ &+\int_{t_0}^{T}\left\{\begin{pmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q(t) & N(t) \\ N^T(t) & R(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}\right\}dt\ \Big]. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Так как оптимальное управление есть функция состояния объекта, а не его измеряемых координат, то использовать функционала качества в том виде, как он записан в (9.15), не представляется возможным, так как $x(t)$ наблюдается по условию задачи в аддитивной связи с помехой типа «белого» шума $v(t)$.

Введем в рассмотрение оценку $(t) \in R^n$ процесса $x(t)$, построенную по измеряемому процессу $y(t)$, и ошибку оценивания $\varepsilon(t)$, определяемую выражением

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t). \tag{9.16}$$

Подставляя в (9.15) $x(t) = \varepsilon(t) + \hat{x}(t)$, представим функционал (9.16) в виде

$$J(x,u) = J_1(\varepsilon) + J_2(\hat{x},u) + J_3(\varepsilon,\hat{x},u), \tag{9.17}$$

где

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1}{2}M\left[\varepsilon^T(T)F\varepsilon(T) + \int_{t_0}^{T}\varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t)dt\right], \tag{9.18}$$

$$J_2(\hat{x},u)=\frac{1}{2}M\left[\ \hat{x}^T(T)F\hat{x}(T)+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{T}\left\{\begin{pmatrix}\hat{x}^T(t) & u^T(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q(t) & N(t)\\ N^T(t) & R(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}(t)\\ u(t)\end{pmatrix}\right\}dt\ \right],\tag{9.19}$$

$$J_3(\varepsilon,\hat{x},u)=M\left[\ \varepsilon^T(T)F\,\hat{x}(T)+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{T}\varepsilon^T(t)[Q(t)\,\hat{x}(t)+N(t)u(t)]dt\ \right].\tag{9.20}$$

Нетрудно видеть, что управление, синтезированное с использованием функционала (9.19), будет являться функцией оценки $\hat{x}(t)$, т.е. $u(t)=-G(t)\hat{x}(t)$, где матрица $G(t)$ будет найдена позже. Таким образом, функционал $J_3(\varepsilon,\hat{x},u)=J_3(\varepsilon,\hat{x})$ будет иметь вид

$$J_3(\varepsilon,\hat{x},u)=J_3(\varepsilon,\hat{x})=M\left[\varepsilon^T(T)F\,\hat{x}(T)+\int_{t_0}^{T}\varepsilon^T(t)[Q^*(t)]\,\hat{x}(t)dt\right],\tag{9.21}$$

где $Q^*(t)=Q(t)-N(t)\,G(t)$.

Равенство нулю функционала $J_3(\varepsilon,\hat{x})$, т.е. $J_3(\varepsilon,\hat{x})=0$, образует уравнение Винера – Хопфа, которое является в данном случае необходимым и достаточным условием минимума среднеквадратичной ошибки наблюдения, т.е. минимума функционала (9.18). В этом нетрудно убедиться, использовав методику поиска оптимального оператора фильтра, примененную в разделе
§ 8.3.

Таким образом, если удастся построить оптимальную оценку в смысле минимума функционала (9.18), то функционал $J_3(\varepsilon,\hat{x})$ обращается в нуль. В силу этого задача построения оптимального управления с позиций функционала (9.15) разбивается на две подзадачи:

1. построения оценки $\hat{x}(t)$ процесса $x(t)$ по наблюдениям $y(t)$, обеспечивающей минимум функционалу (9.18);
2. синтез оптимального управления с использованием функционала (9.19).

Это и есть «теорема разделения».

Задача, сформулированная в п.1, является типичной задачей фильтрации. Поэтому, учитывая результаты главы 8, оптимальный фильтр будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=A(t)\hat{x}(t)+B(t)u(t)+K(t)[y(t)-C(t)\hat{x}(t)],\\ &\hat{x}(t)=0,\end{aligned}\right\}\tag{9.22}$$

где

$$K(t)=\left\{P(t)C^T(t)+\Pi(t)\right\}V^{-1}(t),\tag{9.23}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P(t) = \\
&= [A(t) - \Pi(t)V^{-1}(t)C(t)]P(t) + P(t)[A(t) - \Pi(t)V^{-1}(t)C(t)]^T - \\
&- P(t)C^T(t)V^{-1}(t)C(t)P(t) + W(t) - \Pi(t)V^{-1}(t)\Pi^T(t), \\
&P(t_0) = X(t_0)\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.24)$$

Напомним, что $P(t) = M[\varepsilon(t)\,\varepsilon^T(t)]$ - дисперсионная матрица ошибок.

Приступим к решению задачи, сформулированной в п.2. Пусть

$$\xi(t) = y(t) - C(t)\hat{x}(t)$$

или, с учетом (9.16),

$$\xi(t) = C(t)\varepsilon(t) + v(t)\,. \qquad (9.25)$$

Найдем ковариацию процесса $\xi(t)$

$$\begin{aligned}
&M[\xi(t)\,\xi^T(t)] = C(t)P(t)C^T(t) + C(t)M[\varepsilon(t)\,v^T(t)] + \\
&+ M[v(t)\,\varepsilon^T(t)]C^T(t) + M[v(t)v^T(t)].
\end{aligned} \qquad (9.26)$$

Дифференциальное уравнение для ошибки можно найти, вычитая (9.22) из (9.11):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\,\varepsilon(t) + w(t) - K(t)v(t), \\
&\varepsilon(t_0) = x(t_0).
\end{aligned}\right\} \qquad (9.27)$$

Пусть $\Phi(t,\tau)$ - фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения (9.27). Тогда решение этого уравнения будет иметь вид

$$\varepsilon(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)[w(\tau) - K(\tau)v(\tau)]d\tau\,. \qquad (9.28)$$

Слагаемые $C(t)M[\varepsilon(t)\,v^T(t)]$ и $M[v(t)\,\varepsilon^T(t)]C^T(t)$ с учетом (9.28), (9.13) и (9.14) будут иметь вид

$$C(t)M[\varepsilon(t)\,v^T(t)] = \frac{1}{2}C(t)\{\Pi(t) - K(t)V(t)\}\,,$$

$$M[v(t)\varepsilon^T(t)]C^T(t) = \frac{1}{2}\{\Pi(t) - K(t)V(t)\}^T C^T(t)\,,$$

или, учитывая (9.23),

$$C(t)M[\varepsilon(t)\,v^T(t)] + M[v(t)\,\varepsilon^T(t)]\,C^T(t) = -C(t)P(t)C^T(t)\,.$$

Выражение (9.26) с учетом полученных результатов можно переписать в виде

$$M[\xi(t)\,\xi^T(t)] = M[v(t)v^T(t)]\,, \qquad (9.29)$$

т.е. в уравнении (9.22) воздействие $K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)]$ можно рассматривать как эквивалентный «белый» шум с нулевым средним и корреляционной матрицей $K(t)\,V(t)K^T(t)\delta(t-\tau)$.

Таким образом, оценка, полученная как решение уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\hat{x}_M(t) = A(t)\,\hat{x}_M(t) + B(t)u(t) + K(t)v(t), \\
&\hat{x}_M(t) = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (9.30)$$

статистически эквивалентна оценке, полученной как решение уравнения (9.22) и, в силу этого, уравнение (9.30) можно использовать при синтезе статистически оптимального управления $u(t)$.

Задача построения оптимального управления для системы вида (9.30), возбуждаемой процессом типа «белый» шум, с квадратичным критерием качества вида (9.19) рассмотрена в предыдущем разделе настоящей главы. Управление описывается следующим уравнением

$$u(t) = -R^{-1}(t)[B^T(t)L(t) + N^T(t)]\,\hat{x}(t), \qquad (9.31)$$

где положительно определенная матрица $L(t)$ является решением уравнения типа Риккати

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}L(t) + L(t)[A(t) - B(t)R^{-1}(t)N^T(t)] + \\ &+[A(t) - B(t)R^{-1}(t)N^T(t)]^T L(t) - \\ &-L(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)L(t) + Q(t) - N(t)R^{-1}(t)N^T(t) = 0, \\ &L(T) = F. \end{aligned}\right\} \qquad (9.32)$$

Управление (9.31), являясь оптимальным управлением для наблюдателя (9.22), в силу принципа статистической эквивалентности является и оптимальным для исходной системы (9.11).

Итак, в данном разделе рассмотрен довольно мощный метод аналитического конструирования регуляторов для систем, содержащих аддитивные «белые» шумы в уравнениях системы и измерении координат ее состояния. Этот метод заключается в создании наблюдателя, вырабатывающего оценку состояния системы и играющего роль ее модели. При этом получается, что размерность векторов состояний системы и наблюдателя одинаковы, т.е. модель системы должна быть адекватна в определенном смысле исходной системе.

При применении на практике методов, разработанных в общей теории оптимальных систем (в данном случае метода, который излагается в данном разделе), зачастую возникают значительные трудности из-за сложности объектов управления (многомерность, многосвязанность, наличие существенных нелинейностей), невозможность получения достаточной информации о состоянии объекта и т.д. При решении таких задач закономерен подход, заключающийся в построении «упрощенной» модели системы, синтезе управлений на этой модели и использование полученных управлений на реальном объекте. Эффективность управления в этом случае зависит в первую очередь от адекватности построенной модели процессам, протекающим в исходной системе. При этом предполагается исследование вопросов устойчивости замкнутой системы и точности управления.

§ 9.3. Поведение оптимальной управляемой системы в среднем

Найдем уравнения, определяющие поведение управляемой системы в среднем. Уравнения системы управления и наблюдателя с учетом (9.31) имеют вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t) = A(t) - B(t)R^{-1}(t)[B^T(t)L(t) + N^T(t)]\,\hat{x}(t) + w(t),\\ &x(t_0) = x_0\ ,\end{aligned}\right\} \qquad (9.33)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t), \qquad (9.34)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \{A(t) - B(t)R^{-1}(t)[B^T(t)L(t) + N^T(t)]\}\,\hat{x}(t) +\\ &+ B(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)]\ ,\\ &\hat{x}(t) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (9.35)$$

Рассмотрим выражение $X(t) = M[x(t)x^T(t)]$. Замечая, что $x(t) = \varepsilon(t) + \hat{x}(t)$, получим

$$X(t) = M[\{\varepsilon(t) + \hat{x}(t)\}\{\varepsilon(t) + \hat{x}(t)\}^T] =$$
$$= M[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)] + M[\hat{x}(t)\varepsilon^T(t)] + M[\varepsilon(t)\hat{x}^T(t)] + M[\hat{x}(t)\hat{x}^T(t)].$$

Или, учитывая, что в случае оптимальной оценки, $M[\varepsilon(t)\hat{x}^T(t)] = 0$, получим

$$X(t) = P(t) + \hat{X}(t), \qquad (9.36),$$

где $P(t) = M[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)],\quad \hat{X}(t) = M[\hat{x}(t)\hat{x}^T(t)]$.

Продифференцировав (9.36) по времени, получим

$$\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}P(t) + \frac{d}{dt}\hat{X}(t). \qquad (9.37)$$

Матрица $\frac{d}{dt}P(t)$ определяется уравнением (9.24). Найдем ковариационную матрицу $\frac{d}{dt}\hat{X}(t)$. Так как

$$\frac{d}{dt}\hat{X}(t) = M\left[\left(\frac{d}{dt}\hat{x}(t)\right)\ \hat{x}^T(t)\right] + M\left[\hat{x}(t)\left(\frac{d}{dt}\hat{x}(t)\right)^T\right], \qquad (9.38)$$

то, подставляя в (9.38), выражение для $\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$ (9.35) и учитывая (9.23), получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{X}(t) = M[A(t) - B(t)R^{-1}(t)\{B^T(t)L(t) - N^T(t)\}]\hat{X}(t) +\\ &+ \hat{X}(t)M[A(t) - B(t)R^{-1}(t)\{B^T(t)L(t) - N^T(t)\}]^T +\\ &+[P(t)C^T(t) + \Pi(t)]V^{-1}(t)[P(t)C^T(t) + \Pi(t)]^T,\\ &\hat{X}(t_0) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (9.39)$$

Линейное уравнение (9.39) позволит предсказать изменение во времени дисперсий фазовых координат и их смешанных моментов второго порядка. Дисперсионную матрицу управления можно получить, используя (9.31)

$$U(t) = R^{-1}(t)[B^T(t)L(t) + N^T(t)]\hat{X}(t)[B^T(t)L(t) + + N^T(t)]^T R^{-1}(t). \tag{9.40}$$

Определим среднее значение критерия качества. С помощью оператора «след матрицы» функционал (9.15), подставляя в него $x(t) = \varepsilon(t) + \hat{x}(t)$, $u(t) = -G(t)\hat{x}(t)$, где $G(t) = R^{-1}(t)[B^T(t)L(t) + N^T(t)]$ и, учитывая, что $M[\varepsilon(t)\hat{x}(t)] = 0$, можно переписать в виде

$$J(x,u) = \frac{1}{2} tr\left\{ FX(T) + \right.$$

$$\left. + \left\{ FX(T) + \int_{t_0}^{T} \left[\begin{pmatrix} Q(t) & N(t) \\ N^T(t) & R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}(t) & -\hat{X}(t)G^T(t) \\ -G(t)\hat{X}(t) & G(t)\hat{X}(t)G^T(t) \end{pmatrix} \right] dt \right\}.$$

К подынтегральному полученного выражения прибавим полный дифференциал $\frac{d}{dt}\{L(t)X(t)\}$ и компенсируем это слагаемыми $L(t_0)X(t_0) - L(T)X(T)$ вне интеграла. Принимая во внимание, что $L(T) = F$, получим

$$J(x,u) = \frac{1}{2} tr\left\{ L(t_0)X(t_0) + \right.$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \left[Q(t)\hat{X}(t) - N(t)G(t)\hat{X}(t) - \hat{X}(t)G^T(t)N^T(t) + \right. \tag{9.41}$$

$$\left. \left. + R(t)G(t)\hat{X}(t)G^T(t) + \left[\frac{d}{dt}L(t)\right]X(t) + L(t)\left[\frac{d}{dt}X(t)\right] \right] dt \right\}.$$

Подставляя теперь в (9.41) выражения для $\frac{d}{dt}L(t)$ и $\frac{d}{dt}\hat{X}(t)$, т.е. (9.32) и (9.39) с учетом (9.37) и сократив подобные члены, получим

$$J(x,u) = \frac{1}{2} tr\left\{ L(t_0)X(t_0) + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{T} \left[L(t)W(t) + G^T(t)R(t)G(t)P(t) \right] dt \right\}. \tag{9.42}$$

В детерминированном случае $W(t) = 0, P(t) = 0$ и поэтому $\hat{X}(t) = X(t)$, а $J(x,u) = \frac{1}{2} tr\,\{L(t_0)X(t_0)\}$. Поскольку в общем случае $tr\,\{L(t)W(t)\}$ и $tr\,\{G^T(t)R(t)G(t)P(t)\}$ положительны, то наличие шума в системе и измерениях приводит к увеличению значения критерия качества.

В стационарном случае, когда $A, B, C, W, V, \Pi, Q, R, N$ не зависят от времени, $F = 0$, время окончания переходного процесса не задано, управляемая система может достичь статистически стационарного состояния, иными словами $\frac{d}{dt}P=0$, $\frac{d}{dt}L=0$, т.е. матрицы P и L постоянны, а поэтому постоянна и матрица K.

Ковариационные матрицы вектора $X(t)$ и $U(t)$ можно получить, решив ниже следующие алгебраические уравнения:

$$L\left[A-BR^{-1}N^{T}\right]+\left[A-BR^{-1}N^{T}\right]^{T}L-LBR^{-1}B^{T}L+Q-NR^{-1}N^{T}=0,$$

$$\left[A-\Pi V^{-1}C\right]P+P\left[A-\Pi V^{-1}C\right]^{T}-PC^{T}V^{-1}CP+W-\Pi V^{-1}\Pi^{T}=0,$$

$$K=\left[PC^{T}+\Pi\right]V^{-1},$$

$$U=R^{-1}\left[PC^{T}+\Pi\right]V^{-1}\widehat{X}\,V^{-1}\left[PC^{T}+\Pi\right]^{T}R^{-1}.$$

Для отыскания ковариации управления следует отыскать $\hat{X}$, решив алгебраическое уравнение

$$\left[A-KC\right]\widehat{X}+\widehat{X}\left[A-KC\right]^{T}+KVK=0.$$

Ковариацию вектора состояния X можно найти, использовав соотношение (9.36)

$$X(t)=P(t)+\widehat{X}(t).$$

В заключение заметим, что вся в целом система управления устойчива, если устойчивы состояния равновесия $\frac{d}{dt}P=0$ и $\frac{d}{dt}L=0$. Этими условиями являются:

A) система (A,B) управляема, система (A,C) наблюдаема;

B) матрицы R и V - положительно определенные, матрицы Q и W - положительно полуопределенные.

Литература для дополнительного изучения

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.
2. Анрион Р. Теория второй вариации и ее приложения в оптимальном управлении. – М.: Наука, 1979.
3. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968.
4. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003.
5. Балакришнан А. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1974.
6. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967.
7. Белман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. – М.: Мир, 1974.
8. Бутковский А.Г. Структурная теория распределенных систем. – М.: Наука, 1977.
9. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1980.
10. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Наука, 1973.
12. Гайшун И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. – Минск.: Изд. Института математики НАН Беларуси.
13. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – М.: Наука, 1985.
14. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. – М.: Наука, 1970.
15. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975.
16. Квакернаак Ч., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
17. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость управляемых систем. – МИЭМ. М., 1987.
18. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973.
19. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. - М.: Наука, 1970.
20. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.
21. Летов А.М. Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969.
22. Летов А.М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. – М.: Наука, 1962.
23. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950.

24. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. - М.: Мир, 1978.
25. Моисеев Н.Е. Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975.
26. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1969.
27. Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. − М.: Высшая школа. 2009.
28. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987.
29. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980.
30. Справочник по теории автоматического управления (под ред. А.А. Красовского). – М.: Наука, 1987.
31. Табако А., Куо Б., Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука, 1975.
32. Теория автоматического регулирования (под ред. В.В. Солодовникова). – М.: Машиностроение, 1967.
33. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, 1981.
34. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1970.