

Задача II

Подъем из $\text{char } p$ в $\text{char } 0$

Пусть A — кольцо $\text{char } 0$, с дискретным нормированием ранга 1 и полем вычетов k $\text{char } p > 0$.

Предположим $|k:k^p| = p^r$, $r < \infty$.

(а) Показав, что существуют $a_1, \dots, a_r \in k$ такие что $\{a_1^{i_1} \dots a_r^{i_r} : 0 \leq i_1, \dots, i_r < p^n - 1\}$ являются базисом k над k^{p^n} для любого $n \geq 0$. Зафиксируем подъемы $\alpha_i \in A : \bar{\alpha}_i = a_i$.

(б) Определим отображение $\ell_n: k \rightarrow A/p^n A$:
возьмем $c \in k$, запишем его в виде

$$c = \sum_{0 \leq i_1, \dots, i_r < p^n} a_1^{i_1} \dots a_r^{i_r} b_{i_1, \dots, i_r}^{p^n} \quad \text{с подходящими } b_{i_1, \dots, i_r} \in k,$$

тогда $\ell_n(c) = \sum \alpha_1^{i_1} \dots \alpha_r^{i_r} \beta_{i_1, \dots, i_r}^{p^n}$ где $\beta_{i_1, \dots, i_r}$ — произв. элемент A такой что $\bar{\beta}_{i_1, \dots, i_r} = b_{i_1, \dots, i_r}$.

Доказать, что ℓ_n корректно определено, т.е. не зависит от выбора подъемов $\beta \dots$ для $b \dots$.

(с) Описать $\ell_n: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p/p^n \mathbb{Z}_p$, $\ell_n: \mathbb{F}_p((t)) \rightarrow \mathbb{Z}_p\{t\}/p^n$

(д) Показать, что образ подкольца k относительно ℓ_n — подкольцо $A/p^n A$.

Зафиксируем простой элемент π в A .

(e) Определим отображение

$$L_n: \underbrace{k \oplus \dots \oplus k}_{n \text{ раз}} \rightarrow A / p^n A, \\ (c_1, \dots, c_n) \mapsto \sum_{i=1}^n l_n(c_i) \pi^{i-1} + p^n A$$

(f) Пусть теперь y - неприводимая кривая на арифметической поверхности S , $\mathcal{O}_y$ - пополнение локального кольца S в y относительно M_y -адической топологии, $k(y) = \mathcal{O}_y / M_y$ поле вычетов. Предположим, что $\text{char}(\mathcal{O}_y) = 0$, $\text{char}(k(y)) = p$ и пусть t_y - простой элемент $\mathcal{O}_y$.

Для каждой замкнутой точки x кривой y пусть $y(x)$ - множество всех локальных ветвей y в x . Для каждой $z \in y(x)$ пусть $\mathcal{O}_{x,z}$ - кольцо целых ранга 1 двумерного лок. поля $F_{x,z}$, $\mathcal{O}_{x,z} \supset \mathcal{O}_x$, так что $\mathcal{O}_{x,z}$ - пополнение $\mathcal{O}_x$ относительно простого идеала P_z , соответствующего z .

Положим $A = \prod_{x \in y} \prod_{z \in y(x)} \mathcal{O}_{x,z}$. Это - дискретно нормированное ранга 1 кольцо с простым элементом t_y (канон. образ $t_y \in \mathcal{O}_{x,z}$) и полем вычетов $E = \prod_{x \in y} \prod_{z \in y(x)} E_{x,z}$, где $E_{x,z}$ - пополнение $k(y)$ относительно дискр. нормирования, соотв. z .

Определим $A_y := \{ \alpha \in A : \alpha + t_y^n A \in L_n(A_{k(y)}) \forall n \}$,

где $A_{k(y)}$ - кольцо аделей $k(y)$, рассматриваемое как подкольцо E , $L_n: E^{\oplus n} \rightarrow A / p^n A$. Доказать,

что A_y - кольцо, полное относит. дискр. нормир. ранга 1, с простым элементом t_y и кольцом вычетов $A_{k(y)}$.