ДЗЕТА ФУНКЦИИ

Дзета функция Эйлера–Римана

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

p пробегает все положительные простые числа. Можно также написать

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \prod_M (1 - |\mathbb{Z} : M|^{-s})^{-1},$$

M пробегает все максимальные идеалы кольца $\mathbb{Z}$.
Определение. *Для коммутативного кольца A определим*

$$\zeta_A(s) = \prod_M (1 - |A : M|^{-s})^{-1},$$

M пробегает все максимальные идеалы A. Конечно, в общей ситуации $|A : M|$ может быть бесконечным.

Определение. *Если A – область целостности, то размерность $dim(A)$ равна степени трансцендентности A (степени трансцендентности плюс 1) поля частных A над $\mathbb{F}_p$ (соотв. над $\mathbb{Q}$) если характеристика A равна p (соотв. 0). Для произвольного кольца $dim(A)$ – супремум $dim(A/P)$, p пробегает минимальные простые идеалы A. Кольцо A называется конечно порожденным, если $dim(A) < \infty$.*

Можно показать, что $dim(A)$ равна супремуму длин строго возрастающих цепей простых идеалов A.

Примеры: $\mathbb{Z}$, кольцо целых алгебраического поля чисел, $\mathbb{F}_q$ (но, видимо, не $\mathbb{F}_1$); если $dim(A) < \infty$, то $dim(A[X_1, \ldots, X_n]/I) < \infty$. Кольца последнего типа называются *конечно порожденными над A*.

Предложение 1. *Пусть A подкольцо поля K и L – поле частных A. Если K конечно порождено над A, то $|K : L| < \infty$ и $L = A[a^{-1}]$ для некоторого $a \in A$.*

Доказательство. Используем НН-Лемму: если R, S – подкольца поля K и S конечно порождено над R, то S - целое расширение $R[a^{-1}, X_1, \ldots, X_n]$, где X_1, $\ldots,, X_n$ – подходящие алгебраически независимые элементы S над полем частных R, a – подходящий элемент $R\backslash\{0\}$. Значит, K цел над $C = A[a^{-1}, X_1, \ldots, X_n]$. Последнее кольцо – поле, так как для $c \in C \setminus \{0\}$, $c^{-1} \in K$ и значит $c^{-m} + b_{m-1}c^{-m+1} + \cdots + b_0 = 0$ для $b_i \in C$, умножая на c^{m-1} получаем $c^{-1} \in C[c] = C$. Так как $X_1, \ldots, X_n$ алгебраически независимы над L и C – поле, получаем $n = 0$ и $L = A[a^{-1}]$. K конечно порожден и цел над L, поэтому стандартные свойства целостности* влекут конечность степени K/L.

Предложение 2. *Если $dim(A) < \infty$, то $|A : M| < \infty$ для любого максимального идеала M кольца A.*

Доказательство. Поле $K = A/M$ конечно порождено над $\mathbb{Z}$. Если $char(K) = 0$, Предложение 1 влечет $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}[a^{-1}]$, противоречие. Значит, K имеет характеристику p, и Предложение 1 влечет K – конечное расширение $\mathbb{F}_p$.

---

* здесь и далее см., например, раздел 2 *www.maths.nott.ac.uk/personal/ibf/aln/aln.pdf*

Предложение 3. *Если A – область целостности, то бесконечное произведение $\zeta_A(s)$ сходится абсолютно в полуплоскости $\Re(s) > dim(A)$ и сходится равномерно на $\Re(s) > dim(A) + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Индукция по $n = dim(A)$. Если $n = 0$, то A конечное поле, $A = \mathbb{F}_q$,

$$\zeta_{\mathbb{F}_q}(s) = \frac{1}{1 - q^{-s}},$$

– мероморфная функция с единственным полюсом в 0.

Индукционный переход. Предположим, что предложение уже известно для колец размерности $< r$.

Утверждение. Если A – такое кольцо, то тогда $\zeta_{A[X]}(s) = \zeta_A(s-1)$ на $\Re(s) > dim(A)$. Проверка. Если $dim(A) = 0$, то $A = \mathbb{F}_q$ и максимальные идеалы $\mathbb{F}_q[X]$ порождаются неприводимыми многочленами f с главным коэффициентом 1, следовательно

$$\zeta_{\mathbb{F}_q[X]}(s) = \prod_f (1 - q^{-sdeg(f)})^{-1} = \prod_f \Big(\sum_{m \geqslant 0} q^{-msdeg(f)} \Big) = \sum_p q^{-sdeg(p)},$$

p пробегает все многочлены со старшим коэффициентом 1. Их количество степени m равно q^m, значит $\zeta_{\mathbb{F}_q[X]}(s) = \sum_{m \geqslant 0} q^m q^{-sm} = \frac{1}{1-q^{1-s}} = \zeta_{\mathbb{F}_q}(s-1)$. В общем случае для любого максимального идеала M' кольца $A[X]$ кольцо $A/M' \cap A$ – подкольцо конечного поля $A[X]/M'$, значит поле; тем самым имеем сюрьекцию π из максимальных идеалов $Specm(A[X])$ кольца $A[X]$ в максимальные идеалы $Specm(A)$. Слой $\pi^{-1}(M)$ состоит из максимальных идеалов $A/M\,[X]$, получаем

$$\zeta_{A[X]}(s) = \prod_{M \in Specm(A)} \prod_{M' \in \pi^{-1}(M)} (1 - |A[X] : M'|^{-s})^{-1} = \prod_{M \in Specm(A)} \zeta_{A/M\,[X]}(s).$$

Так как A/M – конечное поле, то

$$\prod_{M \in Specm(A)} \zeta_{A/M\,[X]}(s) = \prod_{M \in Specm(A)} \zeta_{A/M}(s-1) = \prod_{M \in Specm(A)} (1 - |A : M|^{1-s})^{-1} = \zeta_A(s-1).$$

Теперь завершим индукционный переход. Так как A конечно порождено над своим простым подкольцом, НН-Лемма влечет: (а) если $char(A) = 0$, то A цело над $B = \mathbb{Z}[a^{-1}, a_1, \ldots, a_{r-1}]$ для ненулевого целого a и алг. независимых a_i над $\mathbb{Z}$; положим $A' = A[a^{-1}]$; (б) если $char(A) = p > 0$, то $A' = A$ цело над $B = \mathbb{F}_p[a_1, \ldots, a_r]$, где a_i алгебраически независимы над $\mathbb{F}_p$. Стандартные свойства целостности показывают, что A' как B-модуль порождается l элементами, $l < \infty$, и естественное отображение $\pi\colon Specm(A') \to Specm(B)$ – на.

Для максимального идеала M кольца B кольцо $C = A'/A'M$ является алгеброй ранга $\leqslant l$ над B/M. Если M_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, – различные максимальные идеалы C, по Китайской Остаточной Лемме $C/\cap M_i \simeq \oplus C/M_i$, поэтому $k \leqslant l$. Тем самым, $v_M = |\pi^{-1}(M)| = |Specm(C)| \leqslant l$.

Рассмотрим два случая. (а) Пусть $char(A) = 0$. Отображение $M \mapsto MA'$ индуцирует биекцию $\{M \in Specm(A), a \notin M\} \to Specm(A')$, сохраняющую индексы. Разложим $a = \pm \prod_{i=1}^{v} p_i^{k_i}$, тогда $\{M \in Specm(A), a \in M\}$ – обьединение непересекающихся $Specm(A/p_iA)$. Значит, $\zeta_A(s) = \zeta_{A[a^{-1}]}(s) \prod_{i=1}^{v} \zeta_{A/p_iA}(s)$. Но $dim(A/p_iA) < dim(A)$, так что остаточно разобраться со сходимостью $\zeta_{A'}(s)$. Имеем

$$\zeta_{A'}(s) = \prod_{M \in Specm(B)} \prod_{M' \in \pi^{-1}(M)} (1 - |A' : M'|^{-s})^{-1}.$$

Так как индекс M' не больше индекса M, получаем

$$\sum_{m\geqslant 0}\sum_{M\in Specm(B)}\sum_{M'\in\pi^{-1}(M)}|A':M'|^{-ms}\leqslant l\sum_{m\geqslant 0}\sum_{M\in Specm(B)}|B:M|^{-m\Re(s)}$$
$$\leqslant l\zeta_{\mathbb{Z}[a^{-1}]}(\Re(s)-r+1)\leqslant l\zeta_{\mathbb{Z}}(\Re(s)-r+1).$$

Заключаем, $\zeta_{A'}(s)$ и $\zeta_A(s)$ сходятся в области $Re(s)>dim(A)$ именно так, как надо.

(б) Если $char(A)=p$, то

$$\sum_{m\geqslant 0}\sum_{M\in Specm(B)}\sum_{M'\in\pi^{-1}(M)}|A:M'|^{-ms}\leqslant l\sum_{m\geqslant 0}\sum_{M\in Specm(B)}|B:M|^{-m\Re(s)}\leqslant l\zeta_B(\Re(s))$$
$$=l\zeta_{\mathbb{F}_q}(\Re(s)-r),$$

и опять $\zeta_A(S)$ сходится так, как надо в области $Re(s)>dim(A)$.

В частности, на $\Re(s)>r$

$$\zeta_{\mathbb{F}_q[X_1,\dots,X_r]}(s)=\frac{1}{1-q^{r-s}},\quad \zeta_{\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_{r-1}]}(s)=\zeta_{\mathbb{Z}}(s-r+1).$$

Определение. Для схемы X конечного типа над $Spec(\mathbb{Z})$

$$\zeta_X(s)=\prod_{x\in X_0}(1-|k(x)|^{-s})^{-1},$$

x пробегает замкнутые точки X, $k(x)$ – конечное поле вычетов x.

Если $X=Spec(A)$, то $\zeta_X(s)=\zeta_A(s)$. В частности,

$$\zeta_{\mathbb{A}^r_{\mathbb{F}_q}}(s)=\frac{1}{1-q^{r-s}},\quad \zeta_{\mathbb{A}^r_{\mathbb{Z}}}(s)=\zeta_{\mathbb{Z}}(s-r),$$

и более обще $\zeta_{\mathbb{A}^r_X}(s)=\zeta_X(s-r)$.

Если X – конечное обьединение открытых аффинных $X_i=Spec(A_i)$, A_i – области целостности, конечно порожденные над $\mathbb{Z}$, то

$$\zeta_X(s)=\frac{\prod_i\zeta_{X_i}(s)\prod_{i<j<k}\zeta_{X_i\cap X_j\cap X_k}(s)\dots}{\prod_{i<j}\zeta_{X_i\cap X_j}(s)\dots}.$$

В частности,

$$\zeta_{\mathbb{P}^r_{\mathbb{F}_q}}(s)=\prod_{i=0}^{r}\zeta_{\mathbb{A}^i_{\mathbb{F}_q}}(s)=\prod_{i=0}^{r}\zeta_{\mathbb{F}_q}(s-i),\quad \zeta_{\mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}}(s)=\prod_{i=0}^{r}\zeta_{\mathbb{Z}}(s-i),$$

и более обще $\zeta_{\mathbb{P}^r_X}(s)=\prod_{i=0}^r\zeta_X(s-i)$.

Если $\pi\colon X\to Y$ – морфизм и X_y – слой над y, то

$$\zeta_X(s)=\prod_{y\in Y_0}\zeta_{X_y}(s).$$

Например, для схемы Xнад $Spec(\mathbb{Z})$ эта формула выражает $\zeta_X(s)$ в виде бесконечного произведения дзета функций схем над конечными полями.

Следствие. *$\zeta_X(s)$ сходится абсолютно в полуплоскости $\Re(s)>dim(X)$ и сходится равномерно на $\Re(s)>dim(X)+\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$.*

Доказательство. Осталось проверить следующее свойство: если Z, O – замкнутая/открытая подсхема схемы $X=Spec(A)$, то $\zeta_{Z\cap O}(s)$ сходится так как надо на

$\Re(s) > dim(A)$. Так как $\zeta_{Z\cap O}(s) = \zeta_Z(s)/\zeta_{Z\cap(X-O)}(s)$, достаточно проверить для $\zeta_Z(s)$. Индукция по $dim(Z)$. Пусть $Z = Spec(A/I)$ для идеала I кольца A, тогда $\zeta_Z(s) = \zeta_{A/I}(s)$ и $dim(A/I) < dim(A)$, если $I \neq 0$.

Дзета функцию схемы X конечного типа над $\mathbb{F}_q$ можно записать и вот так

$$\zeta_X(s) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|X_m|\, q^{-sm}}{m}\right),$$

где $X_m = X(\mathbb{F}_{q^m})$. Для проверки удобна формула $|X_m| = \sum_{f|m} f|x \in X_0 : k(x) = \mathbb{F}_{q^f}|$.

Результаты в характеристике p для схемы X, $dim(X) = n$

– $\zeta_X(s)$ – рациональная функция от q^{-s} – элементарное доказательство Дворка, см. книжку Н. Коблица, например. В частности, она мероморфно продолжается на $\mathbb{C}$.

– в полуплоскости $\Re(s) > n - 1/2$ все полюса $\zeta_X(s)$ – полюса порядка m в точках s: $q^s = q^n$, m – количество неприводимых компонент X.

– с использованием аналогов топологических идей, доказались следующие свойства: функциональное уравнение (Гротендик, Делинь) вида

$$a^s \zeta_X(s) = a^{n-s}\zeta_X(n-s).$$

Следовательно, все полюса и нули $\zeta_X(s)$ лежат в полосе $\Re(s) \in [0, n]$.

– обобщенная гипотеза Римана в положительной характеристике (Артин, Шмид, Хассе, Вейль, Гротендик, Делинь): все нули, соотв. полюса $\zeta_X(s)$, $\Re(s) \in (0, n)$, лежат на прямых $Re(s) = a$, $a + n/2 + 1/2 \in \mathbb{Z}$, соотв. $a + n/2 \in \mathbb{Z}$.

– гипотеза Берча–Свиннертона-Дайера–Тэйта: если X – проективная гладкая поверхность, то порядок полюса и вычет $\zeta_X(s)$ в 1 описывается геометрическими инвариантами X. Например, порядок полюса в 1 для дзета функции эллиптической кривой E над глобальным полем k (т.е. полем функций кривой над конечным полем) равен рангу $E(k)$. Известно в немногих случаях.

Результаты (отсутствие) в характеристике 0 *для схемы X, $dim(X) = n > 1$*

– $\zeta_X(s)$ продолжается мероморфно на полуплоскость $\Re(s) > n - 1/2$, где все ее полюса – полюс порядка m в n, m – количество неприводимых компонент X.

– мероморфное продолжение на $\mathbb{C}$: известно лишь в немногих нетривиальных случаях (для эллиптических кривых над $\mathbb{Q}$ и вполне вещественными полями).

– функциональное уравнение вида

$$A(s)\zeta_X(s) = A(n-s)\zeta_X(n-s),$$

где $A(s)$ – произведение a^s и возможно нескольких сдвинутых гамма факторов: известно в немногих нетривиальных случаях, например эллиптических кривых над $\mathbb{Q}$.

– обобщенная гипотеза Римана: все нули, соотв. полюса $\zeta_X(s)$, $\Re(s) \in (0, n)$, лежат на прямых $Re(s) = a$, $a + n/2 + 1/2 \in \mathbb{Z}$, соотв. $a + n/2 \in \mathbb{Z}$. Неизвестно ни для одной X!

– гипотеза Берча–Свиннертона-Дайера–Тэйта: описание полюса и вычета $\zeta_X(s)$ в 1, X – эллиптическая кривая над числовым полем: известна лишь в некоторых специальных нетривиальных случаях при наличии дополнительных структур, например, круговых или комплексного умножения.