НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ — ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ
РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ *“COMBINATORICS”* ДЛЯ СОВМЕСТНОЙ ПРОГРАММЫ НИУ–ВШЭ И НМУ “MATH IN MOSCOW”

1. Организационно-методический раздел

1.1. Цель курса Изучение основ комбинаторики, а именно

- методов работы с производящими функциями
- методов и результатов, основанных на явных взаимно однозначных соответствиях (объекты, перечисляемые числами Каталана, числами Бернулли–Эйлера, деревьями и т.п.)
- “рекурсивных” методов и основанных на них результатов
- “аналитических” методов (функция обращения Мебиуса, оценка скорости роста по радиусу сходимости, замена переменной в формуле для вычета) и полученных с их помощью результатов
- основных приложений комбинаторики (циклы Шуберта, решеточные модели матфизики).

1.2. Задачи курса Обучение методам решения комбинаторных задач, как математических, так и прикладных. Знакомство с основными разделами комбинаторики (т.е. с большими классами уже решенных задач). Выработка комбинаторной интуиции, позволяющей оценить применимость тех или иных методов для анализа сложных ситуаций. Подготовка слушателей к освоению более продвинутых математических курсов, таких как теория представлений, математическая физика и др. Выработка навыков самостоятельного анализа незнакомых комбинаторных ситуаций; подготовка к самостоятельному изучению литературы по комбинаторике и смежным областям математики.

1.3. Методическая новизна курса Несмотря на важность предмета, в России отсутствует методическая традиция преподавания комбинаторики. В большинстве ВУЗов, в том числе математических специальностей, предмет “Комбинаторика” отсутствует, и сведения по комбинаторике распределены между различными курсами, такими как математический анализ, функциональный анализ, алгебра и дискретная математика. (Исключение — программа “Math in Moscow”, где курс комбинаторики существует с самого основания.) Таким образом, само выделение комбинаторики в отдельный курс может рассматриваться как методическая инновация.

Курс делится на разделы в зависимости от применяемой техники: явные взаимно однозначные соответствия, рекурсия, “знакопеременные” методы (типа формулы Мебиуса), аналитическая техника. Особую роль играют первый раздел, где вводится ключевое для комбинаторики понятие производящей функции, и последний раздел, содержание которого — краткий обзор приложений.

1.4. Место курса в системе формируемых инновационных квалификаций Комбинаторика — своеобразная "точка сборки" всего курса математики. С одной стороны, при решении комбинаторных задач применяется весь арсенал приемов, накопленных разными разделами математики (и в этом смысле, чем более эрудирован студент, тем лучше он подготовлен к освоению предлагаемого курса). С другой стороны, сведения из комбинаторики и комбинаторная интуиция незаменимы при освоении более "продвинутых" частей математики, таких как алгебраическая геометрия, теория представлений, математическая физика. Таким образом, едва ли будет преувеличением сказать, что каждый студент-математик на определенном этапе обучения (на переходе от элементарных курсов к более профессиональным) должен пройти в той или иной форме курс комбинаторики.

2. Содержание курса

2.1. Новизна курса Как уже отмечалось, сама идея отдельного курса комбинаторики является новой в российской образовательной практике. Такой курс был осуществлен С.К.Ландо (ныне деканом факультета математики ВШЭ) в рамках программы "Math in Moscow" в самом конце 1990-х годов. Затем несколько раз этот курс читался Ю.М.Бурманом на основе книги С.К.Ландо "Lectures on Generating Functions"; курс постепенно дополнялся новыми разделами.

Настоящая заявка представляет собой основательно переработанный вариант этого курса.

2. Тематический план

название темы	количество часов		
	лек	упр	сам
Введение: биномиальные коэффициенты	2	2	2
Производящие функции	2	2	2
Линейная рекурсия	2	2	2
Числа Каталана	2	2	2
Числа Бернулли–Эйлера	2	2	2
Перестановки и разбиения	2	2	2
Деревья и бесконфликтные очереди	2	2	2
Грамматики с однозначным выводом	2	2	2
Формула обращения Мебиуса	2	2	2
Многочлен Татта и матричная теорема о деревьях	2	2	2
q-биномиальные коэффициенты	2	2	2
Пентагональная теорема и тождество Роджерса–Рамануджана	2	2	2
Клетки Шуберта	2	2	2
итого	26	26	26

III. Содержание программы

Введение: биномиальные коэффициенты.: Свойства биномиальных коэффициентов, доказываемые несколькими способами: прямая индукция, явная формула, биномиальная производящая функция.

Производящие функции.: "Переводы" с языка комбинаторных тождеств на язык производящих функций. Комбинаторные доказательства некоторых тождеств анализа.

Линейная рекурсия.: Последовательности, удовлетворяющие линейному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами. Примеры: числа Фибоначчи, случайные блуждания по прямой.

Числа Каталана: Объекты, перечисляемые числами Каталана: скобочные структуры, триангуляции многоугольников, пути Дика.

Числа Бернулли–Эйлера.: Треугольник Бернулли–Эйлера; перечисление типов морсовских функций на прямой.

Перестановки и разбиения.: Производящие функции для числа разбиений, числа ограниченных разбиений. Перестановки с данным числом инверсий и мейджор-индексом.

Деревья и бесконфликтные очереди.: Биекции между множествами деревьев и бесконфликтных очередей. Ограничения на подклассы монотонных деревьев и линейных деревьев.

Грамматики с однозначным выводом.: Понятие грамматики с однозначным выводом и производящая функция для числа слов в такой грамматике. Задание известных комбинаторных объектов грамматиками.

Формула обращения Мебиуса.: Частично упорядоченные множества. Формула обращения Мебиуса.

Многочлен Татта и матричная теорема о деревьях.: Многочлен Татта. Специализации многочлена Татта. Матричная теорема о деревьях.

q-биномиальные коэффициенты.: q-биномиальные коэффициенты, их производящая функция и основные свойства. Формула Коши. q-числа Фибоначчи.

Пентагональная теорема и тождество Роджерса–Рамануджана.: Пентагональная теорема Эйлера и рекуррентная формула для числа разбиений. Тождество Якоби. Тождество Роджерса–Рамануджана.

Клетки Шуберта.: Определение клеток Шуберта и координаты на них. Клетки Шуберта в грассманиане над конечным полем.

2.2. Рекомендуемые учебники

1) S.K.Lando, *Lectures on Generating Functions*, AMS Student Mathematical Library, V.23, 2003.
2) G.E.Andrews, *The Theory of Partitions*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press 1984 (reprinted in 2003).

На каждом занятии студентам раздаются листки с кратким содержанием текущей лекции.

2.3. Формы контроля Курс рассчитан на 2 модуля. Текущий контроль и, одновременно, важнейшая составляющая курса — самостоятельное решение студентами задач. Каждую неделю студент получает домашнее задание, которое он должен решить дома, а затем обсудить свои записанные решения с преподавателем во время практических занятий. Результаты решения домашних заданий оцениваются в баллах (разное число баллов за разные задачи); сумма баллов затем учитывается при выставлении итоговой оценки.

В конце первого модуля студенты сдают зачет, представляющий собой письменную работу из 5–6 задач, продолжительностью 4 астрономических часа.

В конце второго модуля студенты сдают экзамен, также представляющий собой письменную работу продолжительностью 4 астрономических часа, в ходе которой надо письменно решить 5–6 задач по всему курсу.

Итоговая оценка вычисляется по формуле

$$F = \frac{2}{3}\max(S, E) + \frac{1}{3}\min(S, E),$$

где E — оценка за экзамен (в первом модуле — зачет), а S — оценка за работу в семестре, вычисляемая, в свою очередь, по формуле

$$S = 10 * 1.6 * B/B_{max},$$

где B — сумма баллов, набранных студентом за решение всех задач из домашних заданий (в первом модуле — за первый модуль, во втором модуле — за оба модуля), а B_{max} — наибольная возможная сумма баллов за решение домашних заданий.

Таким образом, для получения максимальной оценки 10 баллов достаточно отлично написать экзамен и решить примерно 60% всех задач из домашних заданий.

2.4. Учебно-методические материалы Образцы домашних заданий и экзаменационных работ приводятся в дополнении к этой программе.