

Правительство Российской Федерации
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ-
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

УДК: 338.24.01

№ госрегистрации: 01201057709

УТВЕРЖДАЮ
Проректор ГУ-ВШЭ, д-р эконом. наук

С.В. Шишкин

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СОЦИАЛЬНЫХ И
ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
(заключительный)

ТЗ - 32.0

Руководитель темы:
зав. лабораторией анализа и выбора решений, д.т.н.

Ф.Т. Алескеров

Москва 2010

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель проекта

д.т.н., профессор, зав. Лабораторией анализа и выбора
решений ГУ-ВШЭ, зав. Кафедрой высшей
математики на ф-те экономики ГУ-ВШЭ

Ф.Т. Алескеров

подпись, дата

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Зав. лабораторией, д. т. н., зав. каф., проф.	_____	Ф.Т. Алескеров	(раздел 2, подразделы 1.2-5, 5.3, 6.1-2, 6.4)
Ст.-исследователь, студент	_____	П.Г. Алексашин	(пункт 6.1.1)
Ст.-исследователь, студент	_____	Ю.А. Аскарова	(подраздел 3.1)
Ст.-исследователь, преподаватель, аспирант	_____	В.Ю. Белоусова	(подраздел 6.1)
Ст.-исследователь, студент	_____	П.С. Бондарева	(подраздел 6.3)
Ст.-исследователь, студент	_____	А.А. Боярченкова	(подраздел 1.4)
Ст.-исследователь, студент	_____	Ю.А. Веселова (Якушева)	(подраздел 2.2)
Вед. науч. сотр., д. ф.-м. н., проф.	_____	В.А. Гордин	(подраздел 6.3)
Ст.-исследователь, преподаватель, студент	_____	Л.Г. Егорова	(подраздел 6.2)
Ст. науч. сотр., к. э. н., доцент	_____	А.В. Захаров	(подраздел 4.1)
Ст.-исследователь, аспирант РЭШ	_____	Д.Г. Ильинский	(подраздел 4.2)
Ст.-исследователь, студент	_____	Р.У. Камалова	(пункт 6.4.2)
Ст.-исследователь, преподаватель, аспирант	_____	Д.С. Карабекян	(подраздел 2.2)
Мл. науч. сотр., преподаватель, аспирант	_____	А.В. Карпов	(подраздел 2.1)
Мл. науч. сотр., преподаватель, аспирант	_____	С.Г. Кисельгоф	(подраздел 1.5)
Ст.-исследователь, магистрант	_____	А.А. Кнурова	(пункт 6.1.2)
Ст.-исследователь, студент	_____	А.В. Крамаренко	(подраздел 3.1)
Ст.-исследователь, студент	_____	Р.А. Курмакаева	(пункт 6.1.3)
Ст.-исследователь, студент	_____	М.Б. Левкина	(подраздел 5.3)
Вед. науч. сотр., д.т.н., проф.	_____	Б.Г. Миркин	(подраздел 3.1)
Ст.-исследователь, студент	_____	Е.О. Митичкин	(подраздел 1.3)
Ст.-исследователь,	_____	К.Б. Погорельский	(пункт 6.4.1)

преподаватель			
Вед. науч. сотр., д.т.н., проф.	_____	В.В. Подиновский	(подраздел 1.1)
Ст. науч. сотр., к. т. н., доцент	_____	А.А. Рубчинский	(подразделы 1.6, 3.2)
Ст.-исследователь, студент	_____	Ф.В. Строк	(подраздел 6.3)
Науч. сотр., к. ф.-м. н., доцент	_____	А.Н. Субочев	(введение, подразделы 1.2, 1.4, заключение)
Ст.-исследователь, студент	_____	Е.Л. Черняк	(подраздел 3.1)
Ст.-исследователь, студент	_____	А.Г. Чистяков	(подраздел 1.4)
Ст.-исследователь, студент	_____	О.Н. Чугунова	(подраздел 3.1)
Мл.науч.сотр., преподаватель	_____	Д.А. Шварц	(подразделы 5.1-2)
Ст.-исследователь, студент	_____	С.В. Швыдун	(подраздел 1.3)

РЕФЕРАТ

Отчет 136 с., 1 ч., 9 рис., 11 табл., 103 источника.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР, ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ, ТЕОРИЯ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА, ТЕОРИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА, ТЕОРИЯ ИГР, ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ БАНКОВ

Объектом исследования являлись модели и методы принятия решений.

Цель работы - получение новых теоретических результатов в ряде проблемных областей теории принятия решений, в частности, в теории коллективного выбора, а также применение некоторых теоретических моделей этих дисциплин в прикладных задачах, а именно, в задачах динамического анализа поведения российских коммерческих банков, и анализа распределения влияния в Международном Валютном Фонде с учетом предпочтения участников по вступлению в коалиции.

В частности, исследование имели целью разработать

- а) описание свойств пороговых процедур выбора;
- б) описание манипулируемости правил принятия коллективных решений;
- в) применение игрового подхода к анализу эконометрических моделей множественного выбора;
- г) теоретическое описание индексов влияния и способы применения данных концепций в практических задачах;
- д) описание свойств моделей односторонних и двусторонних рынков, построенных на основе централизованного распределения (в частности, изучение возможности применения этих моделей в анализе распределения студентов по вузам, студентов на курсы по выбору, «рынка невест»);
- е) интегрированную методологию анализа данных и теории принятия решений (в частности, разработка методов стратификации множеств объектов с автоматическим определением значений важности критериев);
- ж) эффективные методы решения нелинейных оптимизационных задач теории важности критериев;
- и) описание свойств решений задачи коллективного выбора;
- к) описание паттернов поведения российских коммерческих банков в кризисном периоде;
- л) усовершенствованную технику приближенного (в частности, асимптотического) численного решения параболических уравнений в частных производных типа уравнения Блэка–Шоулса–Мертона с негладкими начальными условиями, специфическими для финансовых приложений.

Проект был связан, прежде всего, с исследованием теоретических проблем. Его методологической основой служила теория рационального выбора. Основными средствами и методами исследований были математические объекты и процедуры, относящиеся к теории множеств и дискретной математике, в частности, процедуры оптимизации, различные численные и комбинаторные методы, объекты и методы теории графов.

Если говорить более конкретно, то в работах по проекту использовались методы и модели теории функций коллективного выбора, модели многокритериальных процедур, методы автоматической классификации и стратификации, комбинаторные методы дискретной оптимизации, вычислительные методы системного анализа, визуализация.

Кроме того проводились исследования, связанные с экономическими приложениями теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Техническим средством исследования служили электронные вычислительные машины.

Для прикладных исследований использовались базы данных по голосованиям, государственная статистика, статистические данные негосударственных и международных организаций.

В результате работы были выполнены пп. а)-л), разработаны программы и проведены экспериментальные расчеты на тестовых данных, собранных в организациях, участвующих в совместной работе, а также стендовых данных из Интернета, в частности на российском эмпирическом материале проведен динамический анализ поведения банков.

Все постановки задач, которые были сформулированы в 2010 году, являлись новыми.

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
ВВЕДЕНИЕ.....	8
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ.....	12
1. Проблема оптимального выбора.....	13
1.1 Оптимизационные задачи в теории важности критериев	13
1.2 Исследование решений в задаче оптимального выбора на мажоритарном графе.....	17
1.3 Использование методов теории коллективного выбора для оптимизации поиска в интернете.....	25
1.4 Построение агрегированных рейтингов научных журналов методами теории коллективного выбора.....	28
1.5 Моделирование поступления абитуриентов в государственные вузы Российской Федерации.....	39
1.6 Обобщение решения в задаче справедливого дележа (модель Брамса-Тейлора).....	45
2. Исследование процедур принятия коллективных решений.....	45
2.1 Аксиоматизация ординальных систем пропорционального представительства и анализ реально применяющихся избирательных систем, использующих правило передачи голосов	45
2.2 Оценка степени манипулируемости процедур коллективного выбора	59
3. Поддержка решений: методы кластеризации и автоматической обработки информации...61	
3.1 Методы остановки в дивизимных алгоритмах кластер-анализа, методы построения бикластеров и трикластеров, методы представления текстов на английском и русском языках суффиксными деревьями, методы оценки связи между таксономическими единицами в данном корпусе документов, методы спектрального кластер-анализа, методы оптимального обобщения множеств в иерархических предметных таксономиях	61
3.2 Дивизимно-агломеративный алгоритм классификации на основе минимаксной модификации частотного подхода.....	65
4. Исследования в области теории игр и теории пространственного голосования.....	73
4.1 Теоретико-игровое моделирование поведения политиков и избирателей во время избирательных кампаний	73
4.2 Стационарные решения в играх на выбывание.....	78
5. Исследование индексов влияния.....	78

5.1 Индексы влияния как элементы проективного пространства. Распространение "проективной" аксиоматики индексов Банцафа и Шепли-Шубика на индексы, зависящие от предпочтений участников.....	78
5.2 Построение аналогов известных аксиоматик индексов влияния для случая голосования с квотой.....	79
5.3 Построение аксиоматики обобщенных индексов Шепли-Оуэна	81
6. Применение методов и моделей теории выбора для анализа социальных институтов и практик	81
6.1 Исследование деятельности банков с помощью методов и моделей теории выбора.....	81
6.1.1 Анализ эффективности издержек российских банков	81
6.1.2 Динамический анализ паттернов поведения российских банков	86
6.1.3 Оценка ущерба от операционных рисков в банковской деятельности	94
6.2 Моделирование последствий принятия решений на фондовой бирже.....	105
6.3 Исследование модели ценообразования опционов Блэка-Шоулса-Мертонна	108
6.4 Анализ распределения влияния в политических и экономических институтах	126
6.4.1 Распределение влияния в Международном валютном фонде с учетом предпочтений по вступлению в коалиции.....	126
6.4.2 Распределение влияния партийных фракций в рейхстаге Веймарской республики (1919-1933)	126
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	128
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	130

ВВЕДЕНИЕ

Принятие решений - это процесс, посредством которого индивид или коллектив индивидов (в том числе организованный) определяют действия, необходимые для улучшения состояния (текущего или будущего) данного индивида или коллектива/организации. Главными компонентами процесса принятия решений являются определение множества альтернатив (например, возможных вариантов распределения ограниченных ресурсов); определение множества критериев оценки; выбор одной из альтернатив (в частности, использование процедур, связанных с голосованием, выработка соглашения с оппонентами) или построение рейтинга альтернатив.

Принятие индивидуальных и коллективных решений является неотъемлемой частью человеческой жизни, поэтому объектом исследования оно стало еще во времена античных философов. Началом научных исследований процесса принятия коллективных решений принято считать труды Кондорсе и Борда (рубеж XVIII-XIX вв.). В начале XX века эта научная область стремительно математизируется. Благодаря широкомасштабному применению математических моделей и методов о процессе принятия решений удалось узнать много нового, в частности, было осознано сходство индивидуального многокритериального выбора с коллективным выбором, открыта несовместимость ряда нормативных требований к процедурам выбора, ранее казавшихся естественными (парадокс Эрроу), пересмотрены критерии рациональности выбора. Использование математических объектов и методов открыло пути к построению моделей не только объясняющих, но и предсказывающих принимаемые решения. Публикация полученных результатов в ведущих журналах по экономической теории, политической науке и теории управления привела к возникновению обширной научной литературы по теории принятия решений.

Однако, несмотря на впечатляющие успехи, в данной дисциплине до сих пор остается достаточно много проблемных областей, слабо исследованных теоретически или не исследованных вовсе. К таковым относятся, например, методы предварительного анализа альтернатив, модели выбора, основанные на измерениях с погрешностью, зависящей от контекста, модели частичных (в частности, многокритериальных) обобщенных паросочетаний.

Необходимость исследований в этих областях обусловлена общей заинтересованностью профессионального сообщества в поддержании прогрессивного развития данной дисциплины. Помимо познавательного интереса, связанного с внутренними потребностями теории, развитие ряда теоретических областей, например теоретических исследований множеств-решений задачи коллективного выбора, строящихся с помощью отношения мажоритарного доминирования, стимулируется развитием вычислительной техники, поскольку оно сделало возможным применение теоретических концепций в прикладных задачах.

В рамках реализации проекта «Модели и методы принятия решений в социальных и экономических системах» планировалось:

- обобщить пороговые процедуры выбора на случай неравнозначных критериев;
- проанализировать условия, влияющих на устойчивость таких коалиционных структур, как картельные соглашения на рынке с несколькими производителями, или межпартийные коалиции в парламенте;
- по результатам компьютерного моделирования сравнить с точки зрения манипулируемости различные процедуры коллективного выбора;
- установить связь распределения вершин ориентированных графов по множествам-решениям задачи коллективного выбора, строящимся с помощью отношения мажоритарного доминирования, определенного как стандартным образом, так и с помощью α -большинства,
- распространить "проективную" аксиоматику для индексов Банцафа и Шепли-Шубика на индексы влияния, зависящие от предпочтений участников;
- написать программы для вычисления индексов влияния, зависящих от предпочтений участников;
- модифицировать систему показателей, используемых в рамках динамического анализа паттернов поведения российских коммерческих банков; ввести в анализ паттернов новые переменные, отражающие роль того или иного банка на рынке межбанковских кредитов и использование средств государственной поддержки банковского сектора;
- применить игровой подход к анализу эконометрических моделей множественного выбора, разработать программный инструментарий и осуществить его реализацию применительно к задачам электорального выбора;
- изучить возможность применения моделей односторонних и двусторонних рынков, построенных на основе централизованного распределения, в анализе распределения студентов по вузам, студентов на курсы по выбору, «рынка невест»;
- начать работу по интегрированию методологии анализа данных и принятия решений; начать разработку методов стратификации множеств объектов с автоматическим определением значений важности критериев, а также методов анализа региональных и иных данных для эмпирического выявления феномена компенсаторности критериев;
- продолжить работу по разработке концепции и методов анализа деятельности с помощью кластеризации тематики и представления кластеров в онтологической таксономии предметной области с помощью одновременной минимизации трех типов несоответствий между таксономией и кластерами;

- провести экспериментальную апробацию методов и параметров кластерных структур для анализа данных (прежде всего, эксперименты по сравнению методов бикластерного анализа и методов иерархического кластер-анализа);
- продолжить разработку эффективных методов решения нелинейных оптимизационных задач теории важности критериев
- развить технику приближенного (в частности, асимптотического) численного решения параболических уравнений в частных производных типа уравнения Блэка–Шоулса–Мертон с негладкими начальными условиями, специфическими для финансовых приложений;
- выявить элементы банковской системы, являющиеся причиной повышенной волатильности банков;
- выделить динамические группы банков, установить связь различных аспектов поведения банков с изменениями экзогенных по отношению к российской банковской системе факторов;
- провести эмпирические сравнения прогрессивности шкал налогообложения с учетом распределения доходов на основе наборов данных Luxembourg Income Study;
- провести анализ изменения влияния в МВФ в результате реформы 2008 г, провести расчет влияния с учетом предпочтений в Совете управляющих МВФ, оценив предпочтения по вступлению в коалиции с помощью товарооборота.

Таким образом, перечисленные задачи имеют отношение к моделям принятия решений в разных областях: теории коллективного выбора, теории многокритериального выбора, принятия политических решений, теории игр, функционировании банков.

Несмотря на впечатляющие успехи, достигнутые в теории принятия решений за последние 30 лет, вопросы, рассматриваемые в рамках данного проекта, являются малоизученными. В задаче коллективного выбора получены весьма значительные результаты, связанные с вариантами ее решения, однако все работы в этой области носят разрозненный характер. Задача устойчивости оценок относительной важности критериев ранее в литературе не ставилась. Задача агрегирования в условиях некомпенсаторности критериев была впервые поставлена в рамках исследований, проводившихся данным коллективом. Математическое моделирование зависимости между социологическими характеристиками и электоральным выбором российских избирателей, несмотря на то, что работы такого рода имеют широкое распространение на Западе, в России до сих пор является редкостью. Методология анализа влияния с учетом предпочтений участников по созданию коалиций в форме обобщения классических индексов влияния была впервые рассмотрена в рамках исследований, проводившихся данным коллективом. Методология анализа функционирования однородных единиц управления с помощью паттернов и их динамического анализа также была сформулирована в рамках исследований, проводившихся данным

коллективом.

Вышеперечисленные проблемы возникают в связи с кардинальной проблемой теории принятия решений - отсутствием единственного наилучшего метода выбора и оценки. Соответственно, работа над решением каждой из них является попыткой узнать больше о возможных способах принятия решений, что является фундаментальной познавательной задачей.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В соответствии с техническим заданием проекта, основной целью работы является получение новых теоретических результатов в ряде научных областей, связанных с принятием решений (теория коллективного выбора, теория многокритериального выбора, теория игр), а также применение теоретических моделей этих дисциплин в некоторых прикладных задачах, в частности, для динамического анализа поведения российских банков, анализа распределения влияния в Международном валютном фонде, построения агрегированных рейтингов научных журналов, анализа работы фондовой биржи, построения модели поиска в интернете.

1. Проблема оптимального выбора

1.1 Оптимизационные задачи в теории важности критериев

1.1.1 В рамках проекта проводилось изучение принципиальных особенностей оптимизационных задач, возникающих при использовании решающих правил, разработанных в теории важности критериев, разработкой точных (в том числе свободных от ошибок округления) и эффективных оптимизационных методов для сравнения вариантов по предпочтительности при неточной информации о важности критериев и ценности шкальных оценок, усовершенствованием теории выбора нескольких лучших вариантов при неполной информации о предпочтениях лица, принимающего решение, исследованием метода анализа иерархий. В результате исследований дана общая постановка оптимизационных задач, возникающих при многокритериальном выборе методами теории важности критериев, и исследованы особенности таких задач, разработан точный и эффективный метод (а также его модификация, свободная от ошибок округления) решения задач билинейного программирования для сравнения вариантов по предпочтительности при интервальной информации о важности критериев и ценности шкальных оценок, осуществлена алгоритмическая реализация разработанных методов и их вычислительная апробация, разработаны точные и эффективные методы (а также их модификации, свободные от ошибок округления) решения оптимизационных задач сравнения вариантов по предпочтительности при интервальной информации о важности критериев или же о ценности шкальных оценок, доработана теория выбора нескольких лучших вариантов при неполной информации о предпочтениях лица, принимающего решение, проведено исследование метода анализа иерархий и показана его некорректность с точки зрения математической теории измерений.

В теории важности критериев [1, 2] многие решающие правила, задающие на множестве векторных оценок Z отношение нестрогого предпочтения R с использованием накопленной информации о предпочтениях лица, принимающего решение, в которую включаются сведения об относительной важности критериев, ценности шкальных оценок критериев и др., являются параметрическими. Если величина (векторного) параметра λ , характеризующего предпочтения,

известна точно, то решающее правило формулируется при помощи нестрогих неравенств для одной или нескольких числовых функций η_t и имеет вид

$$yRz \Leftrightarrow \eta_t(y|\lambda) \geq \eta_t(z|\lambda), t = 1, \dots, \tau,$$

где y, z – сравниваемые по предпочтительности векторные оценки, $\tau \geq 1$. Если же информация о предпочтениях неточна в том смысле, что определяет лишь множество Λ возможных значений параметра λ , то полагается, что векторная оценка y не менее предпочтительна, чем z , когда все указанные выше неравенства выполняются при любом $\lambda \in \Lambda$, или, что равносильно, когда

$$\min_{\lambda \in \Lambda} \eta_t(y|\lambda) - \eta_t(z|\lambda) \geq 0, \quad t = 1, \dots, \tau \quad (1.1)$$

Оптимизационные задачи для (1.1.1.1) отличаются следующими существенными особенностями: отыскания минимумов не требуется, но нужно точно выяснить: верно ли, что они не меньше нуля; задачи имеют относительно небольшую размерность (до десятка переменных и нескольких десятков ограничений).

При линейных ограничениях на величины коэффициентов важности критериев и скорость роста предпочтений вдоль их шкалы задача минимизации для проверки выполнения (1.1) оказывается билинейной ($\tau=1$). Поскольку общие численные методы билинейного программирования являются приближенными [3], то актуальной является проблема разработки точных и экономных методов решения таких оптимизационных задач.

Для случая, когда имеются интервальные ограничения для отдельных значений ценности шкальных оценок, билинейная задача сводится к нескольким задачам линейного программирования [4, 5]. Для общего случая линейных ограничений в работах [6, 7] было предложено сводить билинейные задачи к задачам линейного программирования путем специальной замены переменных. Однако исследования, проведенные совместно с Подиновским Вик. В., показали, что этот подход ошибочен.

Для решения билинейных задач из (1.1.1.1), в которых имеются интервальные ограничения на степени превосходства в важности одних критериев над другими и скорость роста предпочтений вдоль их шкалы, в ходе исследования был разработан точный, свободный от ошибок округления, эффективный вычислительный метод, использующий аналитические выражения для координат крайних точек (вершин) многомерных многогранников ограничений. Этот метод реализован в компьютерной системе поддержки принятия многокритериальных решений DASS.

1.1.1.2 Подавляющее большинство применяемых на практике методов анализа многокритериальных решений использует информацию об относительной важности критериев, причем чаще всего количественную – в виде коэффициентов важности, или же «весов», однако

само понятие важности критериев не определяется [8]. Математическая теория количественной важности, опирающаяся на строгое определение понятия «Один критерий важнее другого во столько-то раз», была создана в России (см. [9]). В ней были разработаны аналитические решающие правила, позволяющие сравнивать по предпочтительности варианты решений с использованием коэффициентов важности критериев, причем само понятие коэффициента важности было строго определено.

Известно, однако, что указать точные значения оцениваемых величин человеку достаточно сложно, и поэтому в количественной информации часто содержатся неточности и даже ошибки. Более надежной информацией являются не точечные, а интервальные оценки. В [10–12] были предложены методы, позволяющие корректно использовать интервальные оценки степеней превосходства в важности одних критериев над другими при анализе многокритериальных задач для случая, когда общая шкала критериев является порядковой или же шкалой первой либо второй порядковой метрики. Эти методы состоят либо в сведении исходной оптимизационной задачи к задаче линейного программирования, либо являются итеративными. Однако в обоих случаях они не свободны от ошибок округления. В [11] рассматривался случай, когда, помимо интервальной информации о важности критериев, имеется также интервальная информация о скорости возрастания предпочтений вдоль шкалы критериев. В настоящем исследовании рассматривались задачи, в которых имеется интервальная информация о степенях превосходства в важности одних критериев над другими для случаев порядковой шкалы критериев, шкалы первой порядковой метрики (шкалы ограниченных отношений интервалов) или интервальной шкалы, а также задачи, в которых критерии упорядочены по важности или же коэффициенты важности заданы, а критерии имеют шкалу ограниченных отношений интервалов.

Математическая модель ситуации принятия решения выглядит следующим образом:

$$\langle X, f_1, \dots, f_m, Z_0, R \rangle,$$

где X – множество вариантов (стратегий, альтернатив, планов, ...), f_1, \dots, f_m – критерии, Z_0 – общая шкала (множество оценок, градаций) критериев, R – отношение нестрогого предпочтения. Каждый вариант x из множества всех вариантов X характеризуется значениями $m \geq 2$ критериев f_i . Под критерием f_i понимается функция, определенная на X и принимающая значения из Z_0 . Далее шкала критериев полагается конечной: $Z_0 = \{1, \dots, q\}$. Таким образом, каждый вариант x характеризуется m числами – значениями $f_i(x)$ всех критериев, образующими вектоценку этого варианта $y(x) = f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Поэтому сравнение вариантов по предпочтению сводится к сопоставлению их вектоценок. Множество всех вектоценок (как реальных, т.е. соответствующих вариантам из X , так и гипотетических) есть $Z = Z_0^m$. Предпочтения ЛПР моделируются при помощи отношения нестрогого предпочтения R на Z : yRz означает, что вектоценка y не менее предпочтительна, чем z .

Если ценности (полезности) $v(j)$ градаций j шкалы не заданы (т.е. функция ценности v не задана), то известно, что предпочтения возрастают вдоль шкалы, т.е. $v(j) > v(k)$ при $j > k$. Далее предполагается также, что может иметься дополнительная, интервальная информация об убывающей скорости роста предпочтений вдоль шкалы критериев, заданная в виде неравенств:

$$d_k \leq \frac{v(k+1)-v(k)}{v(k+2)-v(k+1)} \leq u_k, \quad 1 < d_k < u_k, \quad k = 1, \dots, q-2. \quad (1.2)$$

Относительная важность критериев f_i характеризуется при помощи коэффициентов важности – чисел α_i , удовлетворяющих условиям: $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_m > 0$; $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$. Для простоты записи будем полагать, что критерии занумерованы в порядке убывания их важности, так что самый важный критерий – это f_1 , а критерий f_m наименее важен. Если точные значения величин коэффициентов важности неизвестны, то имеются интервальные оценки соотношений величин важности соседних критериев:

$$l_i \leq \frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \leq r_i, \quad 1 \leq l_i \leq r_i, \quad i=1, \dots, m-1.$$

Разработаны решающие правила для указанных выше различных сочетаний видов информации о важности критериев и их шкале. Даны также модификации этих правил, свободные от ошибок округления, при следующем допущении, всегда выполняющемся на практике: величины параметров d_k , u_k , l_i , r_i являются либо натуральными числами, либо рациональными числами – простыми дробями с небольшим знаменателем (например, $\frac{4}{3}$ или $\frac{7}{5}$) или же десятичными дробями с небольшим числом знаков после запятой (например, 1.2 или 2.25).

Свободная от ошибок округления модификация решающего правила для случая, когда критерии упорядочены по важности, а для значений ценности градаций шкалы имеются ограничения, выглядит следующим образом (1.2). Пусть p – общий знаменатель дробей из d_1 , u_1 , \dots , d_{q-2} , u_{q-2} (если все эти числа целые, то $p = 1$). Это решающее правило выглядит так:

$$yRz \Leftrightarrow \hat{\gamma}_i^* \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad (1.3)$$

где $\hat{\gamma}_i^*$ – величины, последовательно рассчитываемые для каждого i по рекуррентным формулам:

$$\hat{\gamma}_i^1 = \begin{cases} pd_1 \theta_i^k, & \theta_i^k \geq 0, \\ pu_1 \theta_i^k, & \theta_i^k < 0; \end{cases} \quad \hat{\gamma}_i^k = \begin{cases} pd_k (p^{k-1} \theta_i^k + \hat{\gamma}_i^{k-1}), & p^{k-1} \theta_i^k + \hat{\gamma}_i^{k-1} \geq 0, \\ pu_k (p^{k-1} \theta_i^k + \hat{\gamma}_i^{k-1}), & p^{k-1} \theta_i^k + \hat{\gamma}_i^{k-1} < 0; \end{cases} \quad k=2, \dots, q-2; \quad \hat{\gamma}_i^* = \hat{\gamma}_i^{q-2} + p^{q-2} \theta^{q-1}. \quad (1.4)$$

В (1.3) и (1.4) $\theta_i^k = \sum_{j=1}^i c_j^k$, где $c_i^k \in \{-1, 0, 1\}$ – элементы $m \times (q-1)$ матрицы $C(y, z) = (c_i^k)$, которые зависят от сравниваемых вектоценок y и z и определяются равенством:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i v(y_i) - \sum_{i=1}^m \alpha_i v(z_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q-1} \alpha_i c_i^k \beta_k,$$

где

$$\beta_k = v_{k+1} - v_k, \quad k = 1, \dots, q-1.$$

Предложенные методы реализуются в компьютерной системе поддержки принятия многокритериальных решений DASS [14, 15].

Результаты исследований отражены в следующих опубликованных и подготовленных к публикации текстах:

- Подиновский В.В. Об одном подходе к решению задач нелинейного программирования при неточной информации о коэффициентах важности и градациях шкал критериев в аддитивной функции ценности // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы. 2010. № 4. С. 26 – 28.

- Подиновский В.В. Оптимизационные задачи в теории важности критериев // Материалы XXXVII Международной конференции “Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе” (Украина, Гурзуф, 20 – 30 мая, 2010 г.). Приложение к журналу «Открытое образование». С. 153 – 154.

- Подиновский В.В. Оптимизационные задачи теории важности критериев // Труды VI Московской международной конференции по исследованию операций» (Москва, 19 – 23 октября 2010 г.) М.: МАКС ПРЕСС, 2010. С. 205 – 206.

- Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Многокритериальные решающие правила для интервальной информации о важности критериев или их шкалах // XXXVII Международная конференция “Информационные технологии в науке, социологии, экономике и бизнесе” (Украина, Гурзуф, 1 – 10 октября, 2010 г.). Приложение к журналу «Открытое образование». 2010. (в печати).

- Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Билинейное программирование в анализе многокритериальных задач принятия решений методами теории важности критериев (принято к печати в «Журнале вычислительной математики и математической физики», 2011, № 4);

- Подиновский В.В., Подиновская О.В. О некорректности метода анализа иерархий (принято к печати в журнале «Проблемы управления», 2011, № 1);

- Podinovski V.V. Set choice problems with incomplete information about the preferences of the decision maker // European Journal of Operational Research. 2010. V. 207. P. 371 – 379.

1.2 Исследование решений в задаче оптимального выбора на мажоритарном графе

Одной из ключевых проблем моделирования оптимального коллективного выбора является отсутствие в общем случае победителя Кондорсе, то есть альтернативы, более предпочтительной для коллектива, чем любая другая альтернатива.

Начиная с конца 70-х гг. прошлого века предпринимаются попытки локализовать результат коллективного выбора в некотором всегда непустом подмножестве множества альтернатив, на

котором определено отношение мажоритарного доминирования, моделирующее предпочтения группы. В числе основных концепций решений данного рода были предложены минимальное доминирующее множество, непокрытое множество, минимальное слабоустойчивое множество и другие множества-решения.

Будучи различными воплощениями идеи оптимального коллективного выбора, эти множества позволяют оценивать результаты голосований и даже делать предсказания на основании информации о предпочтениях участников голосования. Ранее применение данных концепций в эмпирических исследованиях затруднялось проблемой вычисления, но в связи с развитием вычислительной техники в настоящее время интерес к ним активно возрождается. В частности, совсем недавно (в 2007 г.) были предложены новые концепции решений - незахваченное и незапертое множества. Практическая применимость требует и стимулирует дальнейшее теоретическое исследование данных моделей, чему и посвящена данная работа.

Целью настоящего исследования является уточнение теоретико-множественных соотношений тринадцати решений в задаче коллективного выбора, строящихся с помощью правила большинства (ядра, пяти версий непокрытого множества, трех версий минимального слабоустойчивого множества, незахваченного множества, незапертого множества, сильного и слабого максимальных циклов), с учетом трех (а не двух, как ранее) вариантов их соотношения: включение (одно решение всегда вложено в другое), сцепление (два решения имеют всегда непустое пересечение), независимость (существует возможность пустого пересечения двух решений).

Объект исследования - функции выбора, называемые также решениями. Областью определения этих функций является множество отношений мажоритарного доминирования на данном множестве альтернатив, областью значений - множество подмножеств множества альтернатив.

Исследование взаимосвязи множеств-решений в задаче коллективного выбора, является фундаментальной теоретической задачей. Методологической парадигмой исследования является теория рационального выбора. Основные методы и средства анализа относятся к математическому аппарату теории графов и теории множеств.

Принятие коллективных решений моделируется выбором из конечного множества альтернатив A , $|A|=n>2$, осуществляемым группой N , $|N|>1$, индивидуальных субъектов процесса принятия коллективных решений. У каждого индивидуального субъекта процесса принятия решений имеются предпочтения относительно альтернатив из A .

Бинарное отношение (далее просто отношение) ρ на A есть множество упорядоченных пар элементов из A , $\rho \subseteq A \times A$. Отношение ρ называется симметричным, если $\forall i, j (i, j) \in \rho \Rightarrow (j, i) \in \rho$.

Отношение называется асимметричным, если, во-первых, оно антирефлексивно $\forall i (i, i) \notin \rho$ и, во-вторых, $\forall i, j: i \neq j ((i, j) \in \rho \Rightarrow (j, i) \notin \rho)$.

Любое отношение ρ может быть однозначно представлено в виде объединения двух непересекающихся отношений, одно из которых асимметрично, а другое - симметрично. Эти отношения называются асимметричной и симметричной частями и обозначаются, соответственно, $\pi(\rho)$ и $\sigma(\rho)$:

$$\pi(\rho) \subseteq \rho; \sigma(\rho) \subseteq \rho; \pi(\rho) \cup \sigma(\rho) = \rho; (i, j) \in \rho \ \& \ (j, i) \notin \rho \Leftrightarrow (i, j) \in \pi(\rho); (i, j) \in \rho \ \& \ (j, i) \in \rho \Leftrightarrow (i, j) \in \sigma(\rho).$$

Отношение ρ называется полным, если $\forall i, j (i \neq j \Rightarrow i\rho j \vee j\rho i)$.

Очевидно, что если отношение ρ есть подмножество отношения ω , $\rho \subseteq \omega \subseteq A \times A$, и если ρ - полно, то ω также является полным отношением.

По предположению предпочтения индивидуальных субъектов являются полными бинарными отношениями ρ_i , $i \in N$, на A . Отношение ρ_i , $\rho_i \subseteq A \times A$ может быть однозначно представлено в виде объединения своих асимметричной и симметричной частей $\pi_i = \pi(\rho_i)$ и $\sigma_i = \sigma(\rho_i)$,

$$\rho_i = \pi_i \cup \sigma_i, \pi_i \cap \sigma_i = \emptyset.$$

Асимметричное отношение π_i представляет множество строгих предпочтений данного субъекта относительно пар альтернатив, а симметричное отношение σ_i моделирует безразличие субъекта i .

Совокупность отношений $\{\rho_i\}$, $i \in N$, называется профилем $P(A, N)$ предпочтений группы N на множестве A или просто профилем.

Принятие коллективного решения определяется как выбор некоторого подмножества из множества альтернатив A , при этом выбор коллектива зависит от предпочтений индивидуальных субъектов. Т. о. в задаче коллективного выбора требуется построить функцию выбора F , отображающую множество профилей на множество подмножеств A ,

$$F: \{P(A, N)\} \rightarrow 2^A.$$

В настоящем исследовании задача коллективного выбора рассматривается при двух дополнительных условиях.

Во-первых, требуется, чтобы функция выбора F зависела от профиля $P(A, N)$ через бинарное отношение мажоритарного доминирования μ на A , однозначно строящееся по профилю $P(A, N)$ и рассматривающееся как модель коллективных предпочтений относительно альтернатив из A ,

$$F(P(A, N)) = F(\mu).$$

Первое условие, таким образом, требует, чтобы значения функции выбора для профилей, порождающих одинаковые отношения, были одинаковы,

$$\mu(P_1(A,N))=\mu(P_2(A,N)) \Rightarrow F(P_1(A,N))=F(P_2(A,N)).$$

Во-вторых, требуется, чтобы выбор был в каком-либо смысле оптимален, то есть задача выбора рассматривается как задача оптимального выбора, и ее решение ищется в виде выбора наилучшей (в каком-либо смысле) альтернативы или альтернатив.

Одним из наиболее часто используемых способов оптимального выбора альтернатив из множества A , упорядоченных отношением ρ , $\rho \subseteq A \times A$, является выбор максимальных элементов отношения ρ . Альтернатива i из A называется *максимальным элементом* отношения ρ на A или ρ -*максимальной* в A , если

$$\forall j \neq i \ j \rho i \Rightarrow i \rho j.$$

Отношение мажоритарного доминирования есть бинарное отношение μ , $\mu \subseteq A \times A$, строящееся следующим образом: $(x, y) \in \mu$ тогда и только тогда, когда альтернатива x является (строго) более предпочтительной чем y для большинства (каким угодно образом определенного) субъектов процесса принятия решений: для простого большинства

$$x \mu y \Leftrightarrow \text{card}\{i \in N \ x \pi_i y\} > \text{card}\{i \in N \ y \pi_i x\},$$

для абсолютного большинства

$$x \mu y \Leftrightarrow \text{card}\{i \in N \ x \pi_i y\} > \text{card}\{i \in N \ y \pi_i x\}.$$

Если имеет место $x \mu y$, тогда говорится, что альтернатива x *доминирует* над альтернативой y (в μ), а альтернатива y *доминируема* (в μ) альтернативой x . По предположению большинство определено таким образом, что отношение μ является асимметричным.

Результаты анализа не зависят от того, какое количество субъектов в группе считается большинством, коль скоро соответствующее используемому определению большинства отношение мажоритарного доминирования является асимметричным. Решения могут приниматься простым большинством, абсолютным большинством, квалифицированным большинством или консенсусом - утверждения всех лемм и теорем данной работы будут справедливыми.

Если не имеет места ни $(x, y) \in \mu$, ни $(y, x) \in \mu$, то говорят, что пара (x, y) находится в отношении равенства голосов. Множество таких пар τ есть симметричное бинарное отношение на A : $\tau \subseteq A \times A$, $(x, y) \in \tau \Rightarrow (y, x) \in \tau$. Также предполагается, что отношение τ антирефлексивно, $\forall x \ (x, x) \notin \tau$. Из определения τ следует, что $\mu \cap \tau = \emptyset$.

Упорядоченная пара альтернатив/вершин графа $(x, y) \in \mu$ также называется μ -*шагом*. Упорядоченная последовательность неповторяющихся шагов, начинающихся в x и заканчивающихся в y , таких, что вторая альтернатива каждого шага совпадает с первой альтернативой шага, следующего за ним, называется μ -*путем* от x до y . Если альтернатива x совпадает с альтернативой y , то такой путь называется *циклом*. Альтернатива y называется *достижимой из x через отношение μ* , если существует μ -путь от x до y .

Нижним срезом $L(x)$ альтернативы x называется множество всех альтернатив, доминируемых альтернативой x ,

$$L(x) = \{y \in A: x \mu y\}.$$

Соответственно, *верхний срез* $D(x)$ альтернативы x есть множество всех альтернатив, доминирующих над альтернативой x ,

$$D(x) = \{y \in A: y \mu x\}.$$

Горизонт $H(x)$ альтернативы x есть множество всех альтернатив, находящихся с x в отношении равенства голосов,

$$H(x) = \{y \in A: x \tau y\}.$$

Очевидно, что

$$L(x) \cup D(x) \cup H(x) \cup \{x\} = A.$$

Победителем Кондорсе CW , $CW \in A$, называется альтернатива, доминирующая над всеми другими альтернативами,

$$\forall x (x \neq CW \Rightarrow CW \mu x).$$

Альтернатива x называется *слабым победителем Кондорсе* тогда и только тогда, когда, во-первых, над ней не доминирует никакая другая альтернатива, и, во-вторых, существует, по крайней мере, одна альтернатива, находящаяся с x в отношении равенства голосов,

$$\forall y y \neq x \Rightarrow (x \mu y \vee x \tau y) \ \& \ \exists z \in A \ x \tau z.$$

Множество всех недоминируемых альтернатив называется (*мажоритарным*) *ядром* Cr ,

$$x \in Cr \Leftrightarrow \forall y y \neq x \Rightarrow (x \mu y \vee x \tau y).$$

Из определения ядра следует, что ядро есть множество максимальных элементов отношения мажоритарного доминирования. Поэтому ядро является первым и естественным решением задачи коллективного выбора. К сожалению, в общем случае ядро пусто и выбрать что-либо с его помощью невозможно. У отношения коллективного предпочтения может не быть максимальных элементов, т.е. для коллектива может не существовать наилучших альтернатив даже тогда, когда предпочтения каждого индивидуального субъекта являются линейными порядками, и для него есть одна и только одна наилучшая альтернатива. Это обстоятельство получило название парадокса Кондорсе. Данный парадокс за последние полвека исследований в теории коллективного выбора привел к появлению множества альтернативных концепций решений. Были предприняты многочисленные попытки по расширению множества выбираемых альтернатив до некоторых всегда непустых подмножеств общего множества альтернатив, строящихся с помощью отношения мажоритарного доминирования на основании альтернативных интерпретаций условия оптимальности выбора. Исторически первыми концепциями данного рода стали доминирующее и недоминируемое множества.

Множество D , $D \subseteq A$, называется *доминирующим множеством* [16, 17], если оно непусто, и любая альтернатива из D доминирует над всеми альтернативами, не принадлежащими D , $D \neq \emptyset$ & $((x \in D \& y \notin D) \Rightarrow x \mu y)$.

Доминирующее множество WTC называется *слабым максимальным циклом* [18, 19, 20] если ни одно из его собственных подмножеств не является доминирующим множеством.

Множество U , $U \subseteq A$, называется *недоминируемым множеством* [17], если оно непусто, и никакая альтернатива, не принадлежащая U , не доминирует ни над какой альтернативой из U , $(x \in U \& y \notin U) \Rightarrow (y, x) \notin \mu$.

Недоминируемое множество STC называется *сильным максимальным циклом* [21], если ни одно из его собственных подмножеств не является недоминируемым множеством.

Если сильный максимальный цикл не единственен, то в качестве решения задачи коллективного выбора берется объединение этих множеств [22], которое тоже будет обозначаться STC .

Говорят, что альтернатива x *запирает* альтернативу y , если x доминирует над y и не достижима из y через отношение μ , то есть, $x \mu y$, и не существует μ -пути от y до x [23].

Незапертое множество [23] UT состоит из альтернатив, которые не заперты никакими другими альтернативами.

Если верхний цикл является второй (после ядра) по времени определения концепцией, связанной с отношением мажоритарного доминирования, то незапертое множество, напротив, концепция весьма новая. Она была введена Дж. Дугганом [23] из нормативных соображений. Поскольку отсутствие у отношения μ в общем случае максимальных элементов (то есть, "наилучших" альтернатив) связано с наличием в нем циклов, Дугган предложил вместо самого отношения μ рассматривать множество его максимальных ациклических подмножеств, для которых в силу их ацикличности существование максимальных элементов гарантировано. Он показал, что множеством максимальных элементов множества максимальных ациклических подмножеств отношения μ является незапертое множество.

Чтобы определить непокрытое множество, необходимо дать определение отношения *покрытия* на A . Существуют пять различных версий определения этого отношения:

1. y покрывает x , если $y \mu x$ и $L(x) \subseteq L(y) \cup N(y)$ [23, 24],

тогда x - непокрытая альтернатива если

$$\forall y: y \mu x \Rightarrow \exists z: x \mu z \& z \mu y;$$

2. y покрывает x , если $y \mu x$ и $L(x) \subseteq L(y)$ [25],

тогда x - непокрытая альтернатива если

$$\forall y: y \mu x \Rightarrow \exists z: (x \mu z \& z \mu y) \vee (x \mu z \& z \tau y);$$

3. y покрывает x , если $u \mu x$ и $D(y) \subseteq D(x)$ [18, 25],

тогда x - непокрытая альтернатива если

$$\forall y \ u \mu x \Rightarrow \exists z: (x \mu z \ \& \ z \mu y) \vee (x \tau z \ \& \ z \mu y);$$

4. y покрывает x , если $u \mu x$ и $L(x) \subseteq L(y) \ \& \ D(y) \subseteq D(x)$ [25, 26],

тогда x - непокрытая альтернатива если

$$\forall y \ u \mu x \Rightarrow \exists z: (x \mu z \ \& \ z \mu y) \vee (x \mu z \ \& \ z \tau y) \vee (x \tau z \ \& \ z \mu y);$$

5. y покрывает x , если $u \mu x$ и $H(x) \cup L(x) \subseteq L(y)$ [23, 24],

тогда x - непокрытая альтернатива если

$$\forall y \ u \mu x \Rightarrow \exists z: (x \mu z \ \& \ z \mu y) \vee (x \mu z \ \& \ z \tau y) \vee (x \tau z \ \& \ z \mu y) \vee (x \tau z \ \& \ z \tau y).$$

Непокрытое множество [18, 25] UC^N , $N=I \div V$, состоит из всех тех альтернатив, которые не покрыты никакими другими альтернативами. Индекс N , являющийся латинской цифрой, указывает версию этого решения в соответствии с вышеуказанным списком версий определения отношения покрытия. Т.к. отношение покрытия асимметрично, то UC , очевидно, есть множество максимальных элементов отношения покрытия.

Говорят, что альтернатива x *захватывает* альтернативу y , если x , во-первых, покрывает y в соответствии с четвертой версией определения отношения покрытия и, во-вторых, покрывает все альтернативы нижнего среза y в соответствии с третьей версией определения отношения покрытия [23]. Таким образом, альтернатива x - *незахваченная* $\Leftrightarrow \forall y: u \mu x \Rightarrow$

$$\text{либо } \exists z: (x \mu z \ \& \ z \mu y) \vee (x \mu z \ \& \ z \tau y) \vee (x \tau z \ \& \ z \mu y);$$

$$\text{либо } \exists v, w: (x \mu v \ \& \ v \mu w \ \& \ w \mu y) \vee (x \mu v \ \& \ v \tau w \ \& \ w \mu y).$$

Незахваченное множество [23] UCp состоит из всех незахваченных альтернатив.

Непустое множество WS называется *слабоустойчивым* [27], если оно обладает следующим свойством: если какая-либо альтернатива y , не принадлежащая к WS , доминирует над какой-либо альтернативой x из WS , то в WS обязательно есть альтернатива z , доминирующая над y ,

$$\forall x \ x \in WS \Rightarrow (\exists y \notin WS: y \mu x \Rightarrow \exists z \in WS: z \mu y).$$

Слабоустойчивое множество MWS называется *минимальным слабоустойчивым множеством*, если ни одно из его подмножеств (кроме него самого) не является слабоустойчивым множеством. Если минимальное слабоустойчивое множество не единственно, то в качестве решения задачи коллективного выбора берется объединение этих множеств [27], которое также будет обозначаться MWS .

Непустое множество ES называется *внешнеустойчивым* если $\forall y \notin WS \ WS \cap D(y) \neq \emptyset$ [27]. Слабоустойчивое множество MES называется *минимальным внешнеустойчивым множеством*, если ни одно из его подмножеств (кроме него самого) не является внешнеустойчивым множеством. Если минимальное внешнеустойчивое множество не единственно, то в качестве

решения задачи коллективного выбора берется объединение этих множеств [29], которое также будет обозначаться MES.

Непустое множество WES называется *слабовнеустойчивым* если $\forall y \notin WS$ $WS \cap (D(y) \cup H(y)) \neq \emptyset$. Слабоустойчивое множество MWES называется *минимальным слабовнеустойчивым множеством*, если ни одно из его подмножеств (кроме него самого) не является внешнеустойчивым множеством. Если минимальное слабовнешнеустойчивое множество не единственно, то в качестве решения задачи коллективного выбора берется объединение этих множеств [30], которое также будет обозначаться MWES.

В результате исследования были найдены теоретико-множественные соотношения между вышеуказанными множествами. Найденные соотношения указаны в Таблице 1.1.

Таблица 1.1. - Теоретико-множественные соотношения между множествами-решениями

	UC ^I	UC ^{II}	UC ^{III}	UC ^{IV}	UC ^V	MWS	MES	MWES	UC _p	STC	UT	WTC
Cr	⊂	⊂	⊂	⊂	⊂	⊂	⊂	⊂	⊂	⊂	⊂	⊂
UC ^I		⊂	⊂	⊂	⊂	∅	⊂	⊂	⊂	∅	⊂	⊂
UC ^{II}			∅	⊂	⊂	⊃	⊃	⊂	⊂	⊃	⊃	⊂
UC ^{III}				⊂	⊂	⊃	⊂	⊃	⊂	⊃	⊃	⊂
UC ^{IV}					⊂	⊃	⊃	⊃	⊂	⊃	⊃	⊂
UC ^V						⊃	⊃	⊃	⊃	⊃	⊃	⊂
MWS							⊃	⊃	⊂	⊃	⊂	⊂
MES								⊃	⊂	⊃	⊃	⊂
MWES									⊃	⊃	⊃	⊂
UC _p										⊃	⊃	⊂
STC											⊂	⊂
UT												⊂

Символ \subset в Таблице 1.2.1 обозначает включение (решение, соответствующее строке всегда вложено в решение, соответствующее столбцу), символ \cap обозначает сцепление решений (два решения хотя не связаны отношением вложения, но имеют всегда непустое пересечение), символ \emptyset обозначает независимость решений (существуют случаи пустого пересечения двух решений)

Из Таблицы 1.2.1 видно, что среди рассмотренных множеств есть три пары независимых решений: UC^I и MWS , UC^I и STC , UC^{II} и UC^{III} .

По результатам исследования подготовлен к публикации текст статьи:

Subochev A. Generalized Solution Concepts based on Majority Rule: a Set Theoretical Comparison (направлен для публикации в журнал Social Choice and Welfare).

1.3 Использование теории коллективного выбора для оптимизации поиска в интернете

Предметом исследования является машинное обучение ранжированию, класс задач машинного обучения с учителем, заключающихся в автоматическом подборе ранжирующей модели по обучающей выборке, состоящей из множества списков и заданных частичных порядков на элементах внутри каждого списка. Частичный порядок обычно задаётся путём указания оценки для каждого элемента (например, «релевантен» или «нерелевантен»; возможно использование и более, чем двух градаций). Цель ранжирующей модели — наилучшим образом (в некотором смысле) приблизить и обобщить способ ранжирования в обучающей выборке на новые данные.

Цели работы - изучить принципы и алгоритмы работы современных поисковых систем, на основании полученных результатов разработать более совершенную ранжирующую модель. На первом этапе работы проводился детальный анализ существующих алгоритмов поисковых систем, поиска и анализа тестовых данных, использующихся при обучении и тестировании поисковых машин. Источник информации - данные, предоставляемые подразделением Microsoft Research корпорации Microsoft. Microsoft Research представляет комплексные наборы данных, содержащие имитации описания web-страниц с использованием набора из 136 критериев оценки страницы. Каждый набор содержит 10 тысяч страниц, оцененных по 136 критериям. Также имеются данные о релевантности страницы поисковому запросу. В стандартный пакет для обучения и тестирования входит 5 наборов данных, каждый из которых состоит из трех выборок: обучающей (в качестве эталонной модели для поисковой системы), тестовой (для ее калибровки) и валидационной (проверочной). Также предоставляются описания всех 136 критериев, по которым оцениваются страницы.

На втором этапе исследования решались следующие задачи: выяснение и обоснование того, как критерии из набора данных влияют на релевантность, исключение лишних критериев, построение новой агрегирующей модели. Был разработан ряд программных комплексов, позволяющих эффективно и быстро производить различные расчеты. При анализе использовался

файл, содержащий 235000 записей, имитирующих страницы в соответствии с разными поисковыми запросами, из которых производилась случайная выборка. Для этого был реализован программный модуль, который в соответствии с равномерным распределением выбирал 20000 записей из общего набора. Перед проведением дальнейших операций все значения были ортонормированы в диапазоне от 0 до 1.

Следующим шагом в работе был корреляционный анализ связи критериев (рассчитывались коэффициенты Пирсона и Спирмана). Для получения групп близких между собой критериев были применены несколько алгоритмов диагонализации матрицы связи. Были реализованы и испробованы алгоритмы «Спектр», «Объединение» и алгоритм автоматической классификации «KRAB». По результатам разбиения был выбран доработанный алгоритм «Объединение», с помощью которого было получено 59 групп. Также было разработано приложение для быстрого просмотра и редактирования выходных файлов в форме табличных данных и автоматического выделения недопустимых значений.

Диагонализация матрицы связи позволяет получать группы с высоким уровнем корреляции между факторами в группе. Проведение такой процедуры было обусловлено необходимостью исключения лишних факторов, то есть таких, которые хорошо коррелированы и их использование не дает прироста релевантности итоговой выборки. Были разработаны и применены алгоритмы (основаны на комбинаторном переборе и графах), позволяющие выбрать из каждой группы один критерий так, чтобы он был минимально коррелирован с остальными, в то же время он должен наилучшим образом коррелировать с критериями внутри группы. В результате общий набор критериев был сокращен со 136 до 59.

Следующей задачей было построение гистограмм, показывающих распределение значений (scores) каждого критерия из выборки. С помощью специально разработанного приложения были выделены диапазоны, по которым впоследствии строились гистограммы.

На основании данных из гистограмм были исключены некоторые критерии. Выборка содержала 20000 запросов. Критерий было решено считать незначимым, если на 19500 или более запросах значение score этого критерия находится в диапазоне от 0 до 0,5. Также были исключены булевы показатели (критерии 95-100), так как они могут принимать только значения 0 и 1 и недопустимы к использованию в строящейся модели. В итоге осталось 42 критерия.

Следующей задачей было построение регрессии по набору данных и определение роли каждого критерия. Для этого была разработана соответствующая программа. По оставшимся 42 критериям и данным о релевантности была проведена регрессия, с ее помощью было выявлено влияние каждого из критериев на релевантность.

Далее по результатам регрессии были проведены границы, и исключены менее значимые факторы. Итоговый набор факторов указан в Таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Отобранные критерии оценки страниц

Значение регрессии	Фактор	Описание (в соответствии с базой Microsoft)
0,928549	26	min of term frequency (body)
0,925598	3	covered query term number (title)
0,785549	50	sum of stream length normalized term frequency (whole)
0,650667	136	url dwell time (the average dwell time of a url aggregated from user browsing data in a period)
0,619201	108	BM 25 (title)
0,580117	129	outlink number
0,569442	106	BM25 (body)
0,56646	82	max of tf*idf (anchor)
0,553018	67	variance of stream length normalized term frequency (anchor)
-0,456642	57	max of stream length normalized term frequency (anchor)
-0,631044	11	stream length (body)
-1,037225	17	IDF (Inverse document frequency) (anchor)
-1,169436	51	min of stream length normalized term frequency (body)

Следующим шагом исследования стало построение 5-градационного разбиения гистограмм распределения элементов по каждому из вышеперечисленных критериев. То есть, был осуществлен переход к дискретной модели. Каждая гистограмма была проанализирована, были выявлены диапазоны критериев и их количество в каждом диапазоне. В зависимости от близости по диапазону и числу элементов каждом из них, вся выборка была поделена на 5 классов. Далее была произведено ранжирование элементов выборки в соответствии с построенными группами разбиения.

Критериальные оценки элементов выборки (ранги по отдельным критериям) агрегировались с помощью следующих процедур.

Способ 1. Сравнивается количество минимальных значений рангов в векторах критериальных оценок двух элементов. Элемент, в чьем векторе их больше - хуже другого.

Способ 2. Сравнивается количество минимальных значений рангов в векторах критериальных оценок двух элементов. Элемент, в чьем векторе их больше - хуже другого.

Способы 3, 4, 5. Для $a=0.1$, 0.2 и 0.3 , соответственно. Для каждого вектора рангов сравниваемых элементов вычисляется число минимумов m и число максимумов M , после чего вычисляется коэффициент F по формуле $F=M \cdot a + m \cdot (1-a)$. Элемент, у которого значение F больше, - лучше.

В итоге результатом агрегирования становится бинарное отношение, на основании которого с помощью различных решений в задаче коллективного выбора можно выбирать наилучшие элементы и строить ранжирования.

1.4 Построение агрегированных рейтингов научных журналов методами теории коллективного выбора

Для объективной оценки качества научных журналов используются различные библиометрические показатели, такие как импакт-фактор, индекс оперативности, индексы SNIP и SJR и другие. На основании расчета значений этих индексов строятся рейтинги, отражающие сравнительную значимость журнала, как средства внутринаучной коммуникации. Однако множественность показателей приводит к несовпадению оценок влияния журналов, сделанных на их основе.

Цель данного исследования состояла в том, чтобы на основании массива эмпирических данных о 82 международных научных журналах по менеджменту дать количественную оценку степени (не)согласованности различных библиометрических показателей, построить рейтинги журналов по менеджменту, агрегирующие информацию об их сравнительной значимости, которую дают ранжирования по отдельным показателям.

В настоящем исследовании был использован новый подход к построению таких рейтингов, основанный на использовании методов ранжирования, впервые предложенных в теории коллективного выбора, а затем примененных в задачах многокритериального оценивания. Различными критериями, по которым оцениваются журналы, в данном случае, являются такие библиометрические показатели, как двух- и пятилетний импакт-факторы, индекс оперативности, индекс влияния статьи, индекс Хирша, индексы SNIP и SJR. Критериальные оценки агрегируются на основании мажоритарного правила (правила большинства). Результатом агрегирования становится бинарное отношение, называемое мажоритарным. Это отношение содержит информацию о парных сравнениях журналов, то есть дает ответ на вопрос - какой из двух сравниваемых журналов лучше по большинству критериев. С помощью мажоритарного отношения можно определить те журналы, которые следует считать наилучшими с точки зрения всей совокупности показателей. Для этого можно использовать правила выбора, основанные на обобщении принципа выбора максимального элемента отношения, например, правило выбора альтернатив, принадлежащих непокрытому множеству, или правило выбора альтернатив, принадлежащих минимальному внешнеустойчивому множеству. Агрегированный рейтинг получается с помощью следующей многоступенчатой процедуры: с помощью правила выбора, основанного на мажоритарном отношении, из совокупности журналов, еще не получивших места в рейтинге, выбираем наилучшие; выбранные журналы помещаем на первую незанятую позицию рейтинга; исключаем эти журналы из числа журналов, еще не получивших места в рейтинге, и повторяем процедуру для оставшейся совокупности.

Для анализа степени согласованности оценок влияния научного журнала, получаемых с помощью семи вышеописанных библиометрических показателей (импакт-фактора, 5-летнего

импакт-фактора, индекса оперативности, индекса влияния, индекса Хирша, индексов SNIP и SJR), были выбраны научные журналы по менеджменту. В базе JCR за 2008 г. представлено 89 изданий, отнесенных к категории «Management». Все они также индексируются в базе Scopus. Соответственно, по выбранным 89 журналам можно извлечь (или, как в случае с индексом Хирша, рассчитать) значения показателей, вычисляемых как по одной, так и по другой базе. Однако у семи изданий значения пятилетнего импакт-фактора опубликованы не были (обычно такое случается, если журнал включен в базу JCR относительно недавно), поэтому эти журналы были исключены из анализа. В результате, для 82 журналов были получены значения импакт-фактора (2008 г.), пятилетнего импакт-фактора (2008 г.), индекса оперативности (2008 г.), индекса Хирша (2004–2008 гг.), индекса SNIP (апрель 2010 г.), индекса SJR (апрель 2010 г.), и индекса влияния (2008 г.).

Поскольку рассматриваемые показатели являются интервальными величинами, оценить степень их согласованности можно с помощью обычного коэффициента парной корреляции (коэффициента Пирсона). Результаты вычислений приведены в Таблице 1.3.

Таблица 1.3 - Коэффициент корреляции

	импакт-фактор	5-летний импакт-фактор	индекс оперативности	индекс влияния	индекс Хирша	SNIP	SJR
импакт-фактор	1,00	0,92	0,61	0,86	0,82	0,89	0,73
5-летний импакт-фактор	0,92	1,00	0,52	0,91	0,82	0,86	0,69
индекс оперативности	0,61	0,52	1,00	0,51	0,54	0,62	0,52
индекс влияния	0,86	0,91	0,51	1,00	0,75	0,79	0,72
индекс Хирша	0,82	0,82	0,54	0,75	1,00	0,85	0,69
SNIP	0,89	0,86	0,62	0,79	0,85	1,00	0,76
SJR	0,73	0,69	0,52	0,72	0,69	0,76	1,00

На основании значений библиометрического показателя строится рейтинг журналов. Рейтинг – это ранжирование, состоящее из позиций (мест, на которые можно поставить один или несколько журналов). Журналы с совпадающими значениями показателя соответствуют одной позиции ранжирования, т.е. одинаковому месту в рейтинге, а несовпадающие – разным. Позиции упорядочиваются по «ухудшению» (в нашем случае - убыванию) значения показателя и нумеруются натуральными числами, начиная с позиции, соответствующей «наилучшему» значению.

Номер позиции является ранговой переменной, поэтому для оценки согласованности двух различных рейтингов журналов вместо коэффициента Пирсона нужно использовать ранговые коэффициенты корреляции.

Рассмотрим пару журналов и сравним их позиции в двух рейтингах. Если позиция одного из журналов выше позиции другого журнала как в одном рейтинге, так и в другом, или если номера

позиций обоих журналов совпадают как в одном рейтинге, так и в другом, то говорят, что данные рейтинги строго согласуются в оценке данной пары. Соответственно, мерой согласия рейтингов является доля тех (неупорядоченных) пар журналов, в оценке которых рейтинги строго согласуются друг с другом, $R_{strict}=(N_++N_0)/N$, где N_+ - число пар, в которых позиция одного из журналов выше позиции другого журнала как в одном рейтинге, так и в другом, N_0 - число пар, в которых номера позиций обоих журналов совпадают как в одном рейтинге, так и в другом, N – общее число пар. Коэффициент R_{strict} принимает значения от 0 до 1, и достигает единицы, когда оба рейтинга полностью совпадают. Результаты вычислений коэффициента R_{strict} приведены в Таблице 1.4.

Таблица 1.4 - Коэффициент строгого согласия R_{strict}

	импакт-фактор	5-летний импакт-фактор	индекс оперативности	индекс влияния	индекс Хирша	SNIP	SJR
импакт-фактор	1,00	0,90	0,74	0,84	0,77	0,84	0,84
5-летний импакт-фактор	0,90	1,00	0,72	0,87	0,80	0,84	0,83
индекс оперативности	0,74	0,72	1,00	0,73	0,68	0,71	0,73
индекс влияния	0,84	0,87	0,73	1,00	0,78	0,81	0,81
индекс Хирша	0,77	0,80	0,68	0,78	1,00	0,78	0,78
SNIP	0,84	0,84	0,71	0,81	0,78	1,00	0,87
SJR	0,84	0,83	0,73	0,81	0,78	0,87	1,00

Коэффициент R_{strict} слишком жестко оценивает расхождения между двумя ранжированиями, ведь если в одном рейтинге журналы стоят на одной позиции, а в другом - на разных, то нет необходимости трактовать эту ситуацию как противоречие. Можно считать, что в данном случае первый рейтинг «уточняет» второй, поскольку различие журналов он «видит» лучше, чем рейтинг, с точки зрения которого журналы одинаковы. Соответственно, с помощью вышеописанного «принципа уточнения» из двух различных рейтингов можно построить один, согласованный рейтинг, учитывающий оценки журналов как по одному, так и по другому критерию. Но сделать это можно только при условии, что между рейтингами нет действительных противоречий, то есть нет таких пар, которые оцениваются противоположным образом (в одном рейтинге первая альтернатива стоит выше второй, тогда как в другом – вторая выше первой). Таким образом, если в оценке данной пары журналов два рейтинга строго согласуются или если хотя бы в одном из них журналы стоят на одной позиции, то будем говорить, что эти рейтинги в оценке данной пары согласуются нестрого. Соответственно, мерой согласия рейтингов является доля пар, в оценке которых они согласуются нестрого. Она вычисляется по формуле $R_{weak}=1 - (N_-/N)$, где N_- - это число противоречий (пар, ранжированных противоположным образом). Коэффициент R_{weak} принимает значения от 0 до 1, и достигает единицы, когда два рейтинга можно объединить в один

на основании принципа уточнения. Результаты вычислений коэффициента R_{weak} приведены в Таблице 1.5. Очевидно, что для любой пары показателей $R_{\text{weak}} \geq R_{\text{strict}}$.

Таблица 1.5 - Коэффициент нестрогого согласия R_{weak}

	импакт-фактор	5-летний импакт-фактор	индекс оперативности	индекс влияния	индекс Хирша	SNIP	SJR
импакт-фактор	1,00	0,90	0,75	0,85	0,84	0,84	0,86
5-летний импакт-фактор	0,90	1,00	0,72	0,87	0,87	0,84	0,85
индекс оперативности	0,75	0,72	1,00	0,73	0,75	0,72	0,76
индекс влияния	0,85	0,87	0,73	1,00	0,84	0,81	0,83
индекс Хирша	0,84	0,87	0,75	0,84	1,00	0,85	0,86
SNIP	0,84	0,84	0,72	0,81	0,85	1,00	0,89
SJR	0,86	0,85	0,76	0,83	0,86	0,89	1,00

Ранговым коэффициентом корреляции, который меняется в одном диапазоне с коэффициентом Пирсона, является коэффициент Γ («гамма»), впервые введенный в [31]. Если число позиций в обоих рейтингах равно числу журналов, то $\Gamma=1$ означает, что эти рейтинги полностью совпадают, а $\Gamma=-1$ имеет место в случае, когда они абсолютно противоположны. Коэффициент Γ вычисляется по формуле $\Gamma=(N_+-N_-)/(N_++N_-)$. Он имеет нормальное распределение и популярен в эмпирической социологии. Результаты вычислений Γ приведены в Таблице 1.6.

Таблица 1.6 - Коэффициент Γ

	импакт-фактор	5-летний импакт-фактор	индекс оперативности	индекс влияния	индекс Хирша	SNIP	SJR
импакт-фактор	1,00	0,80	0,49	0,69	0,66	0,69	0,72
5-летний импакт-фактор	0,80	1,00	0,44	0,74	0,73	0,67	0,69
индекс оперативности	0,49	0,44	1,00	0,46	0,46	0,43	0,50
индекс влияния	0,69	0,74	0,46	1,00	0,66	0,62	0,65
индекс Хирша	0,66	0,73	0,46	0,66	1,00	0,68	0,70
SNIP	0,69	0,67	0,43	0,62	0,68	1,00	0,77
SJR	0,72	0,69	0,50	0,65	0,70	0,77	1,00

Практически все коэффициенты показывают наличие сильной положительной корреляции рассматриваемых библиометрических показателей. Если исключить из рассмотрения индекс оперативности, который, согласно Таблицам 1.4–1.6, хуже всего коррелирует со всеми другими показателями, то для любой пары индексов значение Γ будет больше 0,6. Это вполне предсказуемо, поскольку в менеджменте, как было сказано выше, знание воспринимается достаточно медленно, и число цитирований, полученных статьями непосредственно в год их выхода, невелико. В результате индекс оперативности менее свободен от случайных выбросов, и его высокое значение может быть следствием не только реального научного уровня издания, но и

удачного стечения обстоятельств, в силу которого статьям журнала удалось получить цитирование в том же году, в котором они были опубликованы.

Наибольшую корреляцию по Γ демонстрируют два импакт-фактора — двухлетний и пятилетний ($\Gamma=0,80$). Это свидетельствует о том, что по среднему числу ссылок на статьи журнала, вышедшие в течение двух предыдущих лет, можно делать хорошие предсказания о цитируемости более глубокого архива издания. За этой парой следуют пары SNIP/SJR ($\Gamma=0,77$) и пятилетний импакт-фактор/индекс влияния ($\Gamma=0,74$). Сильная корреляция SNIP и SJR означает хорошее согласие показателей «невзвешенного» и «взвешенного» цитирований, чему, вероятно, способствует то, что оба показателя рассчитываются по одной базе данных (Scopus) и на едином трехлетнем интервале времени («трехлетнее окно цитирования»). Аналогично можно объяснить корреляцию пятилетнего импакт-фактора и индекса влияния: для расчета обоих индикаторов используется база данных Web of Science (Journal Citation Reports) и пятилетнее окно цитирования. Наиболее «самобытный» показатель, индекс Хирша, имеет максимальную корреляцию с пятилетним импакт-фактором ($\Gamma=0,73$), что также может быть объяснено равной глубиной (5 лет) и одинаковой базой данных (Web of Science).

Анализ минимальных значений Γ (при исключении по указанным выше причинам из рассмотрения индекса оперативности) показал, что индекс влияния слабо коррелирует с индексами SNIP ($\Gamma=0,62$) и SJR ($\Gamma=0,65$). Эти пары считаются по разным базам данных и с разным окном цитирования. Кроме того, в первом случае (индекс влияния/SNIP) имеет место разница в подходе к оценке цитирований: индекс влияния их «взвешивает», а SNIP нет.

Аналогичные закономерности демонстрируют коэффициенты R_{strict} и R_{weak} (Таблицы 1.4 и 1.5), с незначительными вариациями. Это свидетельствует о хорошем согласии между собой различным образом построенных коэффициентов ранговой корреляции. Единственное ярко выраженное исключение вполне предсказуемо - значения R_{strict} для индекса Хирша оказались ощутимо ниже значений R_{weak} . Дело в том, что по определению h -индекс является целым положительным числом, причем в наших подсчетах его максимальное значение оказалось равным 28 (для журнала Academy of Management Journal). Поэтому многие журналы имеют одинаковый индекс Хирша, но отличаются значениями других индикаторов. Это не уменьшает ни Γ , при вычислении которого такие пары никак не учитываются, ни R_{weak} , уменьшение которого возможно лишь за счет роста N_- , но понижает R_{strict} , в числителе которого стоит сумма N_+ и N_0 , сильно зависящая от наличия совпадений рангов журналов только в одном из рейтингов.

В целом, за двумя вышеописанными исключениями (индекс оперативности и, в случае R_{strict} , индекс Хирша), степень корреляции оценок, получаемых журналами по различным библиометрическим показателям, может быть оценена как высокая, а в ряде случаев даже как очень высокая.

Полученные значения коэффициентов ранговой корреляции показывают, что использование различных показателей приводит к схожим, но отнюдь не совпадающим ранжированиям журналов. Даже наиболее близкие друг к другу индексы, двух- и пятилетний импакт-факторы, дают противоположные оценки в 10% случаев, и, следовательно, основанные на них рейтинги не могут быть согласованы с помощью принципа уточнения. Однако расчет каждого показателя основан на разумных соображениях, и у нас пока нет достаточных оснований для того, чтобы предпочесть какой-либо из индексов всем остальным. Более того, есть основания предполагать, что расхождения между индексами могут быть обусловлены не сравнительной ущербностью одного из них, а тем, что они связаны с измерением различных сторон такого многомерного понятия, как значимость журнала. Соответственно, возникает необходимость найти способ построения рейтинга журналов на основании информации, которую дает об их значимости каждый из индексов. Таким образом, ранжирование журналов превращается в проблему оценки на основании нескольких критериев, т.е. в многокритериальную задачу.

Классическим решением задачи ранжирования альтернатив, оцениваемых по нескольким критериям, является вычисление взвешенной суммы значений критериев для каждой из альтернатив и их упорядочение по этой величине. Однако у этого метода есть серьезное ограничение – необходимо теоретически обосновать возможность суммирования. Для рассматриваемой задачи такого обоснования пока нет, следовательно, мы не можем быть уверены в том, что суммирование взвешенных значений библиометрических показателей является корректной процедурой, дающей логически осмысленные результаты. Выходом из положения является возможность использования в многокритериальных задачах методов, разработанных в теории коллективного выбора.

Основной задачей теории коллективного выбора является описание способов определения альтернатив, которые или *будут* выбраны, или *должны быть* выбраны из числа имеющихся в наличии вариантов на основании мнения о них индивидуальных участников процесса принятия коллективных решений. Применить методы теории коллективного выбора в задаче многокритериального оценивания можно, если оценку альтернатив по каждому из критериев считать мнением одного из членов группы, от каждого из которых зависит выбор коллектива. Соответственно, в задаче построения агрегированного рейтинга журналов альтернативами считаются журналы, а мнением индивидуального участника процесса принятия коллективных решений - их оценки по определенному показателю цитируемости.

Использовалась математическая модель коллективного выбора, описанная в 1.2: дано множество доступных для выбора альтернатив A , $|A|=m \geq 3$, и группа N , $|N|=n \geq 2$, лиц, участвующих в процессе принятия коллективного решения, которое сводится к выбору определенных альтернатив из A . Мнение отдельного участника i , $i \in N$, об альтернативах из A , определяющее его

индивидуальный выбор, моделируется бинарным отношением P_i на A , $P_i \subseteq A \times A$, фиксирующим результаты попарного сравнения альтернатив. Если при сравнении пары альтернатив x и y участник i отдает предпочтение альтернативе x , то говорят, что упорядоченная пара (x, y) принадлежит отношению P_i , $(x, y) \in P_i$, или, что альтернатива x доминирует альтернативу y по отношению P_i , $x P_i y$. Если выбирающий не способен решить, какая из двух альтернатив лучше, или считает их равноценными, то будем полагать, что он не предпочитает ни одну из них другой, т.е. что имеет место $(x, y) \notin P_i$ & $(y, x) \notin P_i$.

Если известны предпочтения того, кто делает выбор (т.е. бинарное отношение на A), и если задано правило выбора, определенное как функция, отображающая множество бинарных отношений на A в множество непустых подмножеств A , то можно предсказать, какие альтернативы должны стать результатом выбора. Таким образом, зная индивидуальные предпочтения, задачу коллективного выбора можно решить, если, во-первых, определить бинарное отношение μ , $\mu \subseteq A \times A$, моделирующее коллективные предпочтения (мнение коллектива об альтернативах из A), а во-вторых, задать правило выбора $S(\mu, A): \{\mu\} \rightarrow 2^A \setminus \emptyset$, называемое также решением. Обычно отношение μ строится из отношений предпочтений индивидуальных участников с помощью мажоритарного правила и поэтому называется мажоритарным отношением (см. 1.2).

Выбор в качестве способа агрегирования мажоритарного правила однозначно диктуется рядом естественных условий [32], справедливых и для рассматриваемой задачи построения агрегированного рейтинга журналов. Кроме того, в многокритериальных задачах использование мажоритарного правила является способом получать агрегированные оценки альтернатив, не прибегая к арифметическим действиям над критериями, обосновать законность которых, как было сказано выше, затруднительно или вообще невозможно.

Для проведения компьютерных вычислений мажоритарное отношение μ представляется с помощью мажоритарной матрицы $M=[m_{ij}]$, определяемой так:

$$m_{xy}=1 \Leftrightarrow (x, y) \in \mu, m_{xy}=0 \Leftrightarrow (x, y) \notin \mu.$$

Аналогично мажоритарной матрице M можно построить матрицу T , представляющую отношение равенства голосов τ .

Одним из наиболее простых способов построения рейтинга альтернатив является правило Коупленда [33]. В основе этого правила лежит следующее соображение: чем больше число альтернатив, которые хуже (при парном сравнении), чем альтернатива x , тем лучше данная альтернатива в целом. В соответствии с так определённым правилом Коупленда рейтинг альтернативы определяется мощностью ее нижнего среза $r_x=|L(x)|$ – чем больше r_x , тем ближе x к

вершине рейтинга. Вектор \mathbf{r} очков, получаемых журналами по правилу Коупленда, вычисляется по формуле $\mathbf{r} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}$, где \mathbf{a} – это вектор, все компоненты которого равны 1.

Для построения рейтинга также можно использовать известное решение задачи выбора наилучших альтернатив. Рассмотрим следующую итерационную процедуру. Решение $S(\mu, A)$ определяет множество $B_{(1)}$ наилучших альтернатив в A , $B_{(1)} = S(\mu, A)$. По сравнению со всеми остальными альтернативами варианты из $B_{(1)}$ – это альтернативы «первого сорта». Если повторить процедуру выбора для множества $A \setminus B_{(1)}$, то будет определено множество $B_{(2)} = S(\mu, A \setminus B_{(1)}) = S(\mu, A \setminus S(\mu, A))$, содержащее альтернативы, которые можно назвать альтернативами «второго сорта» (они хуже альтернатив из $B_{(1)}$, но лучше альтернатив из $A \setminus (B_{(1)} \cup B_{(2)})$). Повторяя операцию удаления наилучших альтернатив, определенных на предыдущем этапе, за конечное число шагов мы разделим все множество A на группы альтернатив разных сортов, $B_{(k)} = S(\mu, A \setminus B_{(k-1)})$, что и будет искомым ранжированием.

В данном исследовании для построения агрегированного рейтинга были выбраны два решения: вторая версия непокрытого множества UC^{Π} и минимальное внешнеустойчивое множество MES . Их определения даны в 1.2.

Непокрытое множество и объединение минимальных внешнеустойчивых множеств могут быть вычислены с помощью матриц M и T . Формулы, выражающие UC^{Π} и MES через M и T , приведены в [30].

Агрегированные рейтинги журналов, построенные на основании парных сравнений журналов по семи библиометрическим показателям с помощью правила Коупленда, правила выбора альтернатив, принадлежащих непокрытому множеству и правила выбора альтернатив, принадлежащих минимальному внешнеустойчивому множеству, даны в Таблице 1.7.

Таблица 1.7 - Номер журнала в рейтинге по показателю или в агрегированном рейтинге

	импакт-фактор	5-летний импакт-фактор	индекс оперативности	индекс влияния	индекс Хирша	SNIP	SJR	правило Коупленда	непокрытое множество UC^{Π}	минимальное внешнеустойчивое множество MES
Academy of Management Review	1	2	2	1	2	1	3	1	1	1
Academy of Management Journal	2	3	22	2	1	3	5	2	2	2
MIS Quarterly	3	1	4	4	4	2	8	3	3	3
Strategic Management Journal	4	4	12	6	2	6	15	4	4	4

Journal of Management	5	9	28	10	10	5	12	7	5	5
Organizational Research Methods	6	20	1	11	11	7	4	5	5	5
Journal of International Business Studies	7	8	20	14	7	10	17	8	6	6
Administrative Science Quarterly	8	5	42	3	12	16	1	7	6	5
Organizational Behavior and Human Decision Processes	9	21	10	12	10	22	7	11	8	8
Research Policy	10	13	30	18	6	11	2	9	7	7
Journal of Product Innovation Management	11	17	44	25	13	13	22	19	15	13
Organization Science	12	7	19	7	5	17	17	7	6	5
Journal of Management Studies	13	19	3	16	9	12	14	10	8	8
Research in Organizational Behavior	14	10	25	5	19	37	18	14	10	10
Journal of Organizational Behavior	15	14	7	13	9	30	19	13	8	8
Journal of Operations Management	16	15	16	24	8	9	10	11	8	8
Information & Management	17	11	17	27	6	14	13	12	9	9
Journal of Management Information Systems	17	16	10	22	11	21	21	16	12	12
Management Science	18	12	14	9	3	8	9	6	5	5
Decision Sciences	19	22	35	24	13	20	16	19	12	12
Information Systems Research	20	6	45	8	10	15	20	14	10	10
Leadership Quarterly	21	18	43	17	10	18	15	15	11	11
Omega - International Journal of Management Science	22	28	5	36	10	4	7	14	10	10
R & D Management	23	32	53	50	17	23	20	22	17	15
Group & Organization Management	24	39	25	30	17	39	20	24	18	15
Journal of Information Technology	25	23	23	31	19	57	26	26	17	15
Technovation	26	41	33	62	12	35	20	24	18	15
Organization Studies	27	24	9	19	9	31	18	16	12	12
British Journal of Management	28	35	37	26	16	32	23	25	18	15
Advances in Strategic Management	29	57	48	47	19	80	39	46	30	25
Harvard Business Review	30	29	21	21	9	44	13	17	13	12
International Small Business Journal	31	46	45	61	17	49	26	36	26	23
International Journal of Operations & Production Management	32	37	40	54	13	33	21	27	20	17
International Journal of Management Reviews	33	25	15	33	17	24	20	20	16	14
International Journal of Forecasting	34	48	24	34	13	19	11	21	17	15
Long Range Planning	35	43	8	56	15	29	26	28	21	18
Supply Chain Management - an International Journal	36	27	52	40	15	58	25	30	21	15
System Dynamics Review	37	53	13	46	17	75	35	39	27	24
Industrial Marketing Management	38	31	47	59	11	43	27	29	21	18
Human Relations	39	42	41	32	14	50	25	29	21	18
Journal of Occupational and Organizational Psychology	40	26	25	20	13	47	23	23	17	15
Tourism Management	41	45	46	65	13	25	23	30	21	19
Industrial and Corporate Change	42	36	6	23	12	41	6	18	14	12
Journal of Economics & Management Strategy	43	49	63	15	16	27	23	30	22	15
IEEE Transactions on Engineering Management	44	33	39	37	14	28	21	26	19	16
Academy of Management Perspectives	45	65	26	42	19	38	22	33	24	18

California Management Review	46	34	29	29	13	26	23	22	17	15
MIT Sloan Management Review	47	44	53	35	15	34	27	32	23	20
Corporate Governance - an International Review	48	40	34	39	16	64	34	35	24	21
Journal of Sport Management	49	64	56	71	18	36	29	44	27	24
Organization	50	38	36	28	13	46	30	31	21	18
Gender Work and Organization	51	50	18	41	16	37	29	34	24	21
Management Learning	52	52	55	50	16	40	25	35	25	22
Journal of Management Inquiry	53	60	16	44	17	72	35	43	29	25
Journal of Engineering and Technology Management	54	30	59	49	17	42	28	37	26	23
Journal of Small Business Management	55	51	49	60	17	55	31	41	28	24
International Journal of Service Industry Management	56	47	61	58	17	48	30	40	27	24
International Journal of Selection and Assessment	57	54	31	38	16	67	33	38	26	24
International Journal of Human Resource Management	58	55	53	63	14	68	33	43	28	25
Journal of the Operational Research Society	59	63	38	53	12	45	24	36	26	18
Small Group Research	60	58	42	43	17	52	30	39	27	24
Technology Analysis & Strategic Management	61	68	27	68	19	59	26	45	30	25
Human Resource Management	62	56	64	51	16	53	33	43	28	25
Personnel Review	63	62	63	66	18	63	32	47	30	26
Organizational Dynamics	64	66	60	55	17	65	34	48	31	26
Systems Research and Behavioral Science	65	78	29	78	18	70	36	51	33	27
Research - Technology Management	66	61	51	69	18	76	37	52	33	27
Journal of Organizational Behavior Management	67	69	66	70	21	66	39	53	35	27
Interfaces	68	72	50	57	17	62	26	45	31	25
Group Decision and Negotiation	69	59	32	52	17	51	30	42	28	24
New Technology Work and Employment	70	70	40	64	19	54	34	49	32	26
International Journal of Technology Management	71	75	57	75	18	71	36	53	35	27
Journal of Organizational Change Management	72	71	54	67	18	69	36	50	33	26
Journal of Forecasting	73	67	65	45	17	56	33	46	30	26
Service Industries Journal	74	76	58	74	19	78	39	56	37	27
International Journal of Manpower	75	74	66	73	19	74	34	54	36	27
Review of Industrial Organization	76	73	62	48	18	61	36	51	34	26
Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis	77	81	51	80	22	81	41	58	40	30
Total Quality Management & Business Excellence	78	77	65	76	18	73	35	56	38	27
Systemic Practice and Action Research	79	80	66	79	21	77	38	57	39	29
Negotiation Journal	80	80	11	72	20	60	38	55	35	28
Canadian Journal of Administrative Sciences - Revue Canadienne des Sciences de l'Administration	81	79	66	77	20	79	40	57	39	29

Таблица 1.8 содержит результаты вычисления коэффициента ранговой корреляции Γ для трех агрегированных рейтингов и семи ранжирований по значению одного индекса.

Таблица 1.8 - Коэффициент ранговой корреляции Γ

	правило Коупленда	непокрытое множество UC	минимальное внешнеустойчивое множество MES
импакт-фактор	0,84	0,86	0,87
5-летний импакт фактор	0,84	0,87	0,87
индекс оперативности	0,54	0,55	0,55
индекс влияния	0,78	0,79	0,81
индекс Хирша	0,78	0,79	0,79
SNIP	0,78	0,79	0,80
SJR	0,83	0,83	0,86
правило Коупленда	1,00	0,99	0,99
непокрытое множество UC	0,99	1,00	0,99

Исследование коэффициентов ранговой корреляции значений различных библиометрических показателей для 82-х выбранных научных журналов по менеджменту дало прогнозируемый результат: хорошо коррелируют те показатели, методика подсчета которых в чем-то схожа. Например, использование одной и той же базы данных (JCR или Scopus), одного и того же временного интервала «окна цитирования», одного подхода к назначению весов полученных ссылок, как правило, приводит к усилению корреляции индикаторов. Максимальная корреляция наблюдается для двух- и пятилетнего импакт-факторов, а менее всего коррелирует с другими показателями индекс оперативности, что также можно было предвидеть ввиду слишком узкого «окна цитирования», которое он использует.

В целом можно заметить, что величина индекса Γ для любого из трех построенных ранжирований с ранжированиями по библиометрическим показателям выше, чем величина Γ при сравнении последних между собой. Иначе говоря, введенные ранжирования хорошо соотносятся с совокупностью библиометрических показателей и могут служить в качестве интегральных показателей для построения рейтинга журналов.

Еще одним преимуществом предложенного подхода состоит в том, что он дает более «грубое» разбиение журналов, что больше соответствует интуитивным представлениям об их значимости.

Естественным продолжением данного исследования является применение для построения агрегированных рейтингов других решений и других способов ранжирования альтернатив на основании отношения мажоритарного доминирования, а также применение данного анализа к другим совокупностям журналов.

Результаты исследования отражены в подготовленном к публикации тексте:

- Ф.Т. Алескеров, В.В. Писляков, А.Н. Субочев, А.Г. Чистяков. Построение рейтингов журналов по менеджменту с помощью методов теории коллективного выбора.

1.5 Моделирование поступления абитуриентов в государственные вузы Российской Федерации

В рамках настоящего проекта проводилось моделирование механизма зачисления абитуриентов в государственные вузы Российской Федерации, а также анализ справедливости получающегося распределения по вузам с точки зрения абитуриента, анализ стабильности распределения абитуриентов, выявление недостатков существующего механизма распределения и путей их устранения, эмпирическая проверка результатов моделирования, анализ практической реализации механизмов распределения. В результате была сформирована база данных по заявлениям и зачислению абитуриентов в вузах Томской области с целью эмпирической проверки результатов моделирования, построена теоретико-игровая модель процесса выбора абитуриентом вузов для подачи документов и процесса поэтапного зачисления абитуриентов в соответствии с принятой в 2010 г. процедурой зачисления, предсказано поведение абитуриентов при выборе группы вузов для подачи документов в рамках одной группы направлений подготовки (с одинаковым набором результатов ЕГЭ), смоделирован процесс подачи документов и зачисления абитуриентов в вузы при различных распределениях абитуриентов по результатам сдачи ЕГЭ, предсказан недобор абитуриентов в вузах среднего качества при соблюдении этими вузами правил приема абитуриентов, установлена неэффективность по Парето и нестабильность (в терминах обобщенных паросочетаний) получаемого распределения абитуриентов по вузам при различных исходных распределениях результатов ЕГЭ.

Для целей моделирования было сделано предположение о том, что все ВУЗы и все абитуриенты разделены на некоторое количество категорий, в зависимости от их «качества», причем разделение на категории известно всем участникам. Выбор абитуриента в рамках приемной кампании ограничен пятью ВУЗами. При подаче документов абитуриент ориентируется на качество ВУЗа и ожидаемую вероятность поступления в этот ВУЗ. При предположении о квадратичных функциях полезности абитуриента и экспоненциальном падении ожидаемой вероятности поступления при росте качества ВУЗа оказывается, что абитуриент будет всегда подавать документ в ВУЗ, поступление в который он считает гарантированным («качество» такого ВУЗа считаем соответствующим качеству абитуриента), а также, в зависимости от параметров, в один или два ВУЗа качеством выше на 3 «ступени», от одного до трех ВУЗов качеством выше на две «ступени» и один ВУЗ на одну ступень выше. В результате при существующей системе приема (которая подробно описана ниже) сильно пострадают ВУЗы уровня «выше среднего»: они недоберут студентов, т.к. сильные абитуриенты уйдут в наиболее привлекательные ВУЗы, а более слабые будут лишены возможности перейти на освободившиеся места из-за ограниченного количества шагов. Кроме того, возможны «несправедливые» ситуации, когда относительно более слабые абитуриенты получают места в более сильных ВУЗах, чем относительно более сильные.

Исследование механизмов построения паросочетаний в ситуациях, когда участники имеют предпочтения и свободу принятия решений, было начато в классической работе [34]. Авторы рассматривали модели построения паросочетаний один-к-одному (когда каждый участник получает не более одного партнера) и один-ко-многим (когда участник одной стороны рынка - студенты - получают ровно одного партнера, а участники другой стороны рынка - колледжи - получают более одного партнера). Авторами был предложен алгоритм, позволяющий за конечное число шагов получить паросочетание при известных предпочтениях участников, являющихся линейными порядками на множестве участников противоположной стороны. В литературе этот алгоритм называется «алгоритмом отложенного принятия» (deferred acceptance algorithm). Существует две версии алгоритма в зависимости от того, кто является предлагающей стороной, абитуриенты или колледжи.

В первой из них предлагающей стороной являются студенты. До начала работы алгоритма подаются предпочтения участников - линейные порядки на множестве агентов противоположной стороны. На первом шаге каждый абитуриент обращается в наиболее предпочтительный для себя ВУЗ. ВУЗ рассматривает все полученные заявления и (временно) принимает q лучших абитуриентов, где q соответствует числу мест. На следующем шаге те абитуриенты, которым было отказано, обращаются в следующие по предпочтительности ВУЗы. ВУЗы снова рассматривают все полученные заявления (оставленные с первого шага и вновь поступившие). Если ВУЗ получает новое заявление от абитуриента, которого он предпочитает временно зачисленному, то последнему ВУЗ отказывает и на следующем шаге такой абитуриент делает предложение следующему ВУЗу. Эта процедура продолжается до тех пор, пока все абитуриенты не будут зачислены в ВУЗы либо не получат отказ от всех ВУЗов, указанных в предпочтениях.

Важным достоинством механизма является то, что он позволяет получить устойчивое паросочетание, т.е. такое, что никакой участник не хочет отказаться от предложенного партнера и остаться один, и никакие два участника не желают сговориться и заключить «соглашение» друг с другом, избежав предписанного распределения. Кроме того, при использовании варианта механизма, в котором предлагающей стороной являются студенты, им оказывается выгодно представлять свои истинные предпочтения. Другие известные механизмы решения этой задачи либо приводят к неустойчивому паросочетанию (top trading cycles), либо эквивалентны механизму отложенного принятия (serial dictatorship) [35].

Работа [34] получила широкое развитие и в теоретических исследованиях, и в прикладном дизайне централизованных механизмов. Механизм отложенного принятия (с незначительными вариациями) был внедрен на программе распределения медицинских интернов в США, системе зачисления в ВУЗы Турции по итогам единого тестирования, а также в департаментах образования Бостона, Нью-Йорка и других городов США для зачисления в муниципальные школы.

Для вычисления распределения абитуриентов по ВУЗам Турции используется механизм multi-category serial dictatorship [35]. Турецкая система единого экзамена близка к российской: экзамен проводится по набору предметов, и для оценки качества подготовки абитуриентов при зачислении на разные специальности используются различные взвешенные суммы оценок. Приведем используемый в Турции алгоритм вычисления итогового распределения абитуриентов по ВУЗам. До начала работы алгоритма все абитуриенты сообщают свои предпочтения относительно ВУЗов, представленные в виде линейного порядка. В список может быть включено не более 18 факультетов разных вузов. Предпочтения факультетов формируются автоматически, исходя из рассчитанных взвешенных баллов абитуриентов. Факультеты одной специализации имеют одинаковые предпочтения (скажем, для всех физических факультетов устанавливается одинаковая формула для расчета итогового балла абитуриентов; для всех медицинских - другая формула и т.д.). На первом шаге для каждой специализации выполняется следующая процедура: лучший абитуриент, из числа подавших заявку на специализацию, зачисляется в свой наиболее предпочтительный ВУЗ; каждый следующий абитуриент зачисляется в наиболее предпочтительный для себя ВУЗ, в котором еще остались места и т.д.

После проведения этой процедуры для всех специальностей фиксируется временное распределение, в котором некоторые абитуриенты могут быть зачислены более чем в один ВУЗ. Затем предпочтения абитуриентов, зачисленных более чем в один ВУЗ, искусственно «обрезаются» таким образом, что в списке приемлемых ВУЗов остается только лучший ВУЗ из числа тех, в которые абитуриент «предварительно зачислен». Процедура повторяется до тех пор, пока каждый абитуриент не получит ровно одно место в ВУЗе (либо останется незачисленным). В [35] показано, что данный механизм по получаемому паросочетанию эквивалентен механизму отложенного принятия с предлагающими ВУЗами.

Однако, есть механизмы, приводящие к нестабильному паросочетанию. Например, «Бостонский механизм», использовавшийся для распределения детей Бостона по муниципальным школам до проведения с участием исследователей-экономистов реорганизации системы зачисления [36]. Перед началом работы механизма участники (школы и поступающие) сообщают свои предпочтения в виде линейных порядков (списков) друг относительно друга. На первом шаге каждый абитуриент подает заявку в наилучшую для себя школу. Если школа получила больше заявок, чем имеется мест, то она отбирает лучших абитуриентов. На втором шаге абитуриенты, отвергнутые на первом шаге, подают заявки во вторые по предпочтительности школы. Школы не пересматривают результаты зачисления на первом шаге, даже если вновь обратившиеся абитуриенты для них предпочтительнее уже зачисленных. Каждая школа зачисляет лучших из вновь обратившихся абитуриентов на оставшиеся места. Так продолжается до тех пор, пока все абитуриенты не будут зачислены (либо отвергнуты всеми школами).

Такой механизм ведет к созданию неустойчивого паросочетания. Действительно, рассмотрим абитуриента, поставившего на первое и второе места школы X и Y, соответственно. Пусть на первом шаге школа X не приняла абитуриента, т.к. получила достаточное количество заявлений от более предпочтительных абитуриентов; школа Y также полностью заполнила свои места на первом шаге. Тогда на втором шаге абитуриент подает заявление в Y. Но даже если Y считает этого абитуриента лучшим среди всех, она не сможет его принять, так как все места заполнены на первом шаге. Использование этого механизма в Бостонской системе муниципального образования приводило к тому, что родители школьников старались манипулировать своими предпочтениями таким образом, чтобы попасть в наилучшую доступную школу. Этот алгоритм был заменен алгоритмом отложенного принятия [36], что позволило улучшить получаемое распределение для существенной доли абитуриентов и ликвидировать необходимость манипулирования при представлении предпочтений.

При практической реализации всех описанных механизмов участники только представляют свои предпочтения относительно партнеров противоположной стороны, однако сами шаги механизма, приводящие к получению паросочетания, вычисляются компьютерной системой. В этом состоит ключевое отличие от системы, принятой в России, так как российские абитуриенты и ВУЗы принимают активное участие в процессе зачисления. В то же время формально российский механизм является централизованным, т.к. правила, процедуры и сроки подачи документов и зачисления установлены заранее и извне.

Организация приемной кампании в российских государственных ВУЗах в 2010 году включала три основных этапа. На первом этапе абитуриенты подают заявления в интересующие их ВУЗы. В 2010 году число ВУЗов, в которые мог подавать заявление абитуриент, было ограничено 5-ю. В каждом ВУЗе абитуриент мог подавать заявление не более чем на 3 специальности. Заявления принимались приемными комиссиями ВУЗов до середины 25 июля. Заявление на определенную специальность принимается при наличии копии аттестата о полном среднем образовании и результатов ЕГЭ по трем или четырем предметам, сдаваемым при приеме на эту специальность. Таким образом, если абитуриент подает заявление на одну и ту же специальность в разные ВУЗы, он имеет одинаковое количество баллов. После окончания приема заявлений производится так называемая первая волна зачислений. Вузы объявляют списки абитуриентов, которых они готовы принять. Список всех подавших заявления на некоторую специальность сортируется по сумме баллов ЕГЭ. Список принимаемых абитуриентов включает верхнюю часть списка подавших заявления, при этом число принимаемых должно соответствовать числу мест. Если заявления подало меньше абитуриентов, чем имеется мест в ВУЗе, то все подавшие заявления включаются в список принимаемых абитуриентов. До 4 августа абитуриенты должны были принести подлинник аттестата в один из ВУЗов, включивших их в

список. Если до установленного срока рекомендованный абитуриент не принес подлинник, то он выбывает из дальнейшего конкурса на эту специальность в этом ВУЗе. Абитуриенты, принесшие подлинник, переходят в разряд официально рекомендованных к зачислению. На втором этапе из списков вычеркиваются все, кто мог бы быть принят, но не принес подлинник. Вузы формируют новые списки принимаемых абитуриентов, опять в соответствии с суммой баллов ЕГЭ абитуриента. Абитуриент, который принес подлинник аттестата в первой волне зачислений, имеет право забрать его и принести в другой ВУЗ, принявший его только во второй волне, но более для этого абитуриента предпочтительный. В остальном правила те же - до установленного централизованно срока (9 августа) ВУЗы ждут абитуриентов с подлинниками аттестатов. После этого централизованная приемная кампания заканчивается и ВУЗы зачисляют тех абитуриентов, которые принесли подлинники.

В исследовании рассматривался прием абитуриентов на одну группу специальностей в государственные ВУЗы в соответствии с описанными выше правилами. A - множество всех абитуриентов, B - множество всех ВУЗов, A_i - множество абитуриентов уровня подготовки i , $i=1 \div M$ (т.о. абитуриенты разбиты на M категорий по уровню подготовки: чем выше номер категорий, тем выше уровень подготовки абитуриента (результат ЕГЭ)), B_j - множество ВУЗов качества j , $j=1 \div (M+1)$. Т.о. ВУЗы разбиты на $M+1$ категории по качеству (репутации). Чем выше номер категории, тем выше качество образования входящих в нее ВУЗов.

Число абитуриентов в каждой группе - k_i , число ВУЗов - n , число мест в каждом ВУЗе считалось одинаковым и равным L .

По предположению все ВУЗы имеют одинаковые предпочтения на множестве абитуриентов, устроенные следующим образом: группы абитуриентов упорядочены по предпочтительности зачисления в вуз. При этом абитуриенты, сравнить которых между собой ВУЗы не могут, попадают в одну категорию A_i по уровню подготовки. Внутри группы с одинаковым уровнем подготовки ВУЗ не может сравнить абитуриентов, т.е. считает их одинаковыми. Предположение об одинаковых предпочтениях ВУЗов является жизнеспособным в том случае, если мы рассматриваем прием только на одну группу специальностей, на которой в разных ВУЗах требуется одинаковый набор результатов ЕГЭ, и, следовательно, абитуриенты имеют одинаковую сумму баллов с точки зрения любого ВУЗа.

Вузы из более высокой группы предпочтительнее ВУЗов из более низкой группы для любого абитуриента. Каждый абитуриент ранжирует ВУЗы внутри группы ВУЗов одинакового качества в индивидуальном порядке. Полезность u от поступления в ВУЗ $b \in B_j$ для некоторого абитуриента a оценивается как

$$u=(j+s_a)^2, 0 < s_a \leq 1,$$

где s_a определяется местом ВУЗа в ранжировке данного абитуриента. А именно, если ВУЗ является лучшим для абитуриента в данной группе, то $s_a=1$. Если ВУЗ является l -ым по предпочтительности в этой группе, то

$$s_a=(n-l+1)/n.$$

Т.е. полезность s_a задается таким образом, чтобы любой вуз категории $j+1$ был заведомо предпочтительнее любого вуза из категории j . Кроме полезности от поступления, ВУЗы оцениваются абитуриентами по вероятности поступления. Вероятность поступления зависит от уровня подготовки абитуриента (прямо) и качества ВУЗа (обратно). Таким образом, абитуриенту $a \in A_i$ невыгодно подавать документы в ВУЗ $b \in B_j$, если $i > j$, т.к. это будет заведомой потерей по сравнению с гарантированным ВУЗом из категории $j=i$.

Каждый абитуриент должен выбрать набор из 5 ВУЗов. Для каждого набора оценивается ожидаемая полезность, абитуриент выбирает набор с наибольшей ожидаемой полезностью. В исследуемой модели предполагалось, что все абитуриенты придерживаются принципа: «Если я зачислен сразу в несколько ВУЗов, то выбираю лучший, т.е. приносящий наибольшую полезность от поступления». Определив ожидаемое поведение абитуриентов, можно предсказать развитие приемной кампании.

Вузы первых двух категорий получают наибольшее число заявлений. Первая волна зачислений. Поскольку ВУЗ не различает абитуриентов одной категории, он рекомендует к зачислению всех абитуриентов лучшей категории, а если остаются места, то целиком всех подавших заявления из следующей категории. Абитуриенты, увидев списки, принимают решение о том, куда нести подлинник аттестата. На данном этапе каждый, кроме абитуриентов сильной категории, попал в ровно один ВУЗ и отнесет свой подлинник именно туда. Больше всех пострадают ВУЗы категории В10, т.к. зачисленные ими абитуриенты в полном составе разбредутся по более сильным ВУЗам категории В11. Надо сказать, что большого превышения числа мест в ВУЗах категории В11 не будет, т.к. число заявлений не соответствует реальному спросу на места - все сильные абитуриенты подавали заявления сразу в четыре сильных ВУЗа.

Вторая волна зачислений Вузы, у которых места оказались незанятыми (а это ВУЗы из категории В10) публикуют новые списки рекомендованных к зачислению. Они предлагают поступить более слабым абитуриентам из группы А9, которые также подавали заявления. Абитуриенты группы А9 в соответствии с законом имеют возможность забрать свои документы из ВУЗов В9 и отнести их в более желательные для них ВУЗы В10.

Таким образом, ВУЗы категории А8, если они будут вести себя в соответствии с установленными правилами и отдадут документы абитуриентам после первой волны, останутся без студентов.

Предложенный в данном исследовании способ моделирования поведения абитуриента при выборе набора вузов для подачи заявлений, а также смоделированный ход приемной кампании для различных ситуаций (при разной имеющейся у вузов и абитуриентов информации и разном соотношении числа мест и числа абитуриентов) позволяют высветить слабые места существующего в России механизма распределения абитуриентов по вузам. Дальнейшее развитие исследование предполагает два направления. Во-первых, это моделирование зачисления в течение нескольких лет, при котором абитуриенты второго и последующих лет получают дополнительную историческую информацию. Второе направление - моделирование поведения вузов как активных игроков, которое позволило бы описать и предсказать случаи и характер манипулирования механизмом зачисления.

Результаты исследования отражены в следующей публикации:

- Кисельгоф, С.Г. Выбор вузов абитуриентами с квадратичной функцией полезности: препринт WP7/2011/01 [Текст] / С.Г.Кисельгоф; Высшая школа экономики. – М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2011.

1.6 Обобщение решения в задаче справедливого дележа (модель Брамса-Тейлора)

В рамках проекта развивались методы справедливого дележа, предложенные в рамках модели Брамса-Тейлора. Для случая произвольного числа участников устанавливалась геометрическая структура множества выигрышей в пространстве, размерность которого равна числу участников, и различные требования «справедливости» представлялись в виде оптимизационных постановок на этом множестве. Результатом работы стала формальная модель задачи справедливого дележа при нескольких участниках. Этот результат отражен в публикации:

- Rubchinsky A. Brams-Taylor model of fair division for divisible and indivisible items // Mathematical Social Sciences. 2010. V. 60. Iss. 1.

2. Исследование процедур принятия коллективных решений

2.1 Аксиоматизация ординальных систем пропорционального представительства и анализ реально применяющихся избирательных систем, использующих правило передачи голосов

2.1.1 В рамках проекта проводились построение аксиоматики ординальных систем пропорционального представительства и изучение реально применяющихся избирательных систем, использующих правило передачи голосов. Проведившийся аксиоматический анализ основывался на работах Балинского и Янга [37] по системам пропорционального представительства, а также на современных работах по теории рационального выбора [38, 39]. Для изучения примеров из практики применения систем пропорционального представительства изучалось избирательное законодательство Австралии и Новой Зеландии. В результате работы по проекту создана аксиоматика систем пропорционального представительства в терминах

рационального выбора и изучены все существующие избирательные систем, использующие правило передачи голосов.

В исследовании показана невозможность создания процедуры пропорционального представительства, удовлетворяющей некоторым свойствам рационального выбора.

Правило передачи голосов – класс ординальных методов пропорционального представительства. Основное различие среди них заключается в способе перераспределения излишка голосов, который появляется после выявления очередного победителя. С точки зрения процесса голосования эти методы идентичны. Избирателю предлагается проранжировать кандидатов согласно своим предпочтениям, причем необязательно ставить ранг напротив каждой фамилии – достаточно отметить хотя бы одного кандидата.

Исследовались реально применявшиеся в избирательных системах правила передачи голосов. В последнее время увеличился интерес к данным методам и появилось несколько новых процедур, например см. [39], стремящихся исправить некоторые недостатки существующих методов. Без детального изучения реально используемых методов правила передачи голосов, практически неизвестных в России, нельзя включаться в международную дискуссию. Таким образом, настоящее исследование заполняет этот пробел и представляет как аксиоматический анализ ординальных моделей, так и обзор применяющихся на текущий момент вариантов правила передачи голосов.

Основной результат теории коллективного выбора, показывающий невозможность построения рациональных предпочтений общества, заключен в теореме Эрроу [40]. Системы пропорционального представительства представляют совершенно другой метод агрегирования, и поэтому они не рассматривались в данном контексте. В настоящем исследовании была сделана попытка провести анализ систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора.

Постановка задачи пропорционального представительства в терминах рационального выбора. Выборный орган избирается путем голосования за партии. Каждый избиратель из множества N ($|N| = n$) характеризуется предпочтениями, представимыми линейным порядком P на множестве партий A ($|A| = k$). Некоторое правило должно определить представительство каждой партии при заполнении S мест в парламенте

$$F : P^n \rightarrow A^S.$$

Итоговый выбор является множеством из S альтернатив, будем считать, что $S > |A| = k$. В общем случае не исключается возможность неоднозначного решения. Например, задача

распределения 3 мест при профиле $\begin{cases} a \succ b \\ b \succ a \end{cases}$ не имеет единственного анонимного, нейтрального решения, поэтому возможным решением будут два набора $\{a, b, b\}$, $\{a, a, b\}$.

Множество участников, для которых альтернатива x является более предпочтительной, чем альтернатива y .

$$V(x, y, \vec{P}) = \{i \in N \mid (x, y) \in P_i\}.$$

Процедура пропорционального представительства характеризуется функцией выбора:

$$C(\vec{P}, A, S) = \{y \mid y \in F(\vec{P}, A, S)\}.$$

Иногда удобно характеризовать выбор как вектор (s_1, s_2, \dots, s_k) , где

$$s_j = \text{card}(C(\vec{P}, A, S) \cap \text{Im}(x_j)).$$

Суть систем пропорционального представительства в распределении мест в парламенте между конкурирующими партиями в наибольшем соответствии предпочтениям избирателей. Различные методы можно разделить по используемой информации о предпочтениях на кардинальные, в которых каждый избиратель характеризуется лучшим в его предпочтениях кандидатом, и порядковые, в которых учитываются вся информация о предпочтениях (линейный порядок).

В силу простоты процедуры голосование наибольшее распространение получили кардинальные методы.

$$F : Z^n \rightarrow A^k, \text{ где } Z = \left\{ a \mid \forall y \in A \ a P_i y, i \in N \right\}$$

Так как число мест, которое партия может получить дискретно, то возникает множество способов распределения. В общем случае процедуры, удовлетворяющим минимальному набору разумных требований не существует [37].

Наиболее распространены две группы процедур: методы наибольшего остатка и методы делителей.

Свойства систем пропорционального представительства

1. Независимость от посторонних альтернатив (consistency).

Для любого разбиения альтернатив на $(J \cup \bar{J}) = A$ выбор останется неизменным

$$C(\vec{P}, J, \sum_{j \in J} s_j) \cup C(\vec{P}, \bar{J}, \sum_{j \in \bar{J}} s_j) = C(\vec{P}, A, S).$$

Этому свойству, например, удовлетворяет процедура, дающая каждой партии по одному месту, а оставшиеся места достаются первой по алфавиту партии.

2. Единогласие

$$V(x, y, \vec{P}) = N \Rightarrow s_x \geq s_y.$$

3. Монотонность

$$V(x, y, \vec{P}) \subset V(x, y, \vec{P}') \Rightarrow s_x \leq s'_x, s_y \geq s'_y$$

4. Ненавязанность

$$\forall A, S, N \quad \forall C \in A^s \exists \vec{P} : C = C(\vec{P}, A, S)$$

5. Анонимность

Выбор не зависит индекса участника i в профиле \vec{P} .

6. Нейтральность

Выбор основывается только на предпочтениях и не зависит от других характеристик альтернативы.

7. Монотонность представительства

$$\forall \vec{P}, A, S \quad C(\vec{P}, A, S) \subset C(\vec{P}, A, S+1).$$

8. Сбалансированность. При объединении двух партий их представительство не должно отличаться более, чем на 1 место.

$$s_x + s_y - 1 \leq s_{x \cup y} \leq s_x + s_y + 1$$

9. Условие отбрасывания.

Если убрать партии не получившие мест, то распределение не должно измениться.

Можно доказать следующие два важных утверждения.

Лемма (о нейтральности). Пусть $V(x, y, \vec{P}) \subset V(t, z, \vec{P})$, выполняется монотонность, нейтральность, тогда из $s_x \geq s_y$ следует $s_t \geq s_z$ и из $s_z \geq s_t$ следует $s_y \geq s_x$.

Для $\text{card}(A) = 2$ традиционные процедуры удовлетворяют свойствам независимости от посторонних альтернатив, монотонности, анонимности, нейтральности и ненавязанности.

Теорема. Для $n \geq 3$ и $\text{card}(A) \geq 4$ не существует процедур, одновременно удовлетворяющим свойствам монотонности, анонимности, нейтральности.

2.1.2 В мире используется большое число модификаций правила передачи голосов: классический метод Грегори - в Австралийской Столичной Территории, Тасмании и в Северной Ирландии, включающий метод Грегори - в австралийском сенате, регионах Южная Австралия и Западная Австралия [41], взвешенный включающий метод Грегори – в Шотландии, метод Мика – в Новой Зеландии. Австралия является крупнейшей страной, где используется правило передачи голосов на национальном уровне (для обозначения процедур передачи голосов в Австралии используется термин система Хара-Кларка).

В каждом округе избирается несколько представителей. Исходя из их числа и количества заполненных бюллетеней, рассчитывается квота. В большинстве методов используется квота Друпа:

$$Q = \left\lfloor \frac{\text{число голосов}}{\text{число мест} + 1} \right\rfloor + 1.$$

Кандидаты, которые получили число первых мест в бюллетенях, превышающее квоту, считаются избранными. Смысл этой формулы в том, что исключается случай, когда число кандидатов, превысивших квоту, больше числа мест. На первом этапе подсчета учитываются только первые в предпочтениях кандидаты. Если один из кандидатов набирает квоту и объявляется избранным, то часть голосов его сторонников передаются вторым по предпочтениям кандидатам, при этом их голоса уже не имеют полного веса, так как часть голоса уже «была потрачена» на избрание первого кандидата. Если ни один из кандидатов не набирает квоты, то находится кандидат с наименьшим числом голосов и эти голоса передаются следующим по предпочтениям кандидатам. Процесс перераспределения голосов продолжается до тех пор, пока не будут избраны заранее известное число кандидатов.

Метод Грегори. Все бюллетени раскладываются по корзинам. В корзину кандидата А кладется 4000 (3200+800) бюллетеней, в корзину В – 1000 бюллетеней и т.д. Кандидат А, набравший 4000 голосов, что превышает квоту, объявляется избранным. Излишек в 1500 голосов перераспределяется другим кандидатам. Излишек составляет долю $1500/4000=37,5\%$, что называется передаваемым значением. Из корзины с голосами кандидата А достается 37,5% бюллетеней. Из каждой группы бюллетеней, в которых кандидат А указан на первом месте, передаются 37,5% голосов тем кандидатам, которые стоят на втором месте в этих бюллетенях. Если таковых нет, то бюллетени перемещаются в корзину, именуемую «непередаваемые бюллетени». На выборах начала XX в. [42] бюллетени перекладывались вручную и брались из корзины случайным образом, поэтому фактическая доля перемещенных бюллетеней каждой группы избирателей могла отличаться. В настоящее время применяется следующий алгоритм, исключающий такой элемент случайности.

В рассматриваемом примере из тех, кто проголосовал за А, 3200 следующим указали кандидата В, 800 не указали никого. Таким образом, кандидату В переходит $3200 \cdot 0,375 = 1200$ голосов, $800 \cdot 0,375 = 300$ голосов не достаются никому, то есть переходят в категорию непередаваемых голосов. В итоге после первого перераспределения голосов:

А 2500 голосов - избран;

В 2200 голосов (1000+1200);

С 1000 голосов;

D 2000 голосов;
E 1999 голосов;
Непередаваемые 300 голосов.
Сумма 9999 голосов.

Второй этап. Ни один из кандидатов не набирает квоты, равной 2500 голосов. Тогда находится кандидат с наименьшим числом голосов. Его голоса передаются остальным кандидатам, т.е. его бюллетени перекладываются в корзины соответствующих кандидатов. В данном случае исключается кандидат С, и все его голоса (1000 голосов) передаются кандидату В, который является вторым по предпочтениям для этих избирателей. После второго этапа имеем:

A 2500 голосов - избран;
B 3200 голосов (2200+1000);
C 0 голосов;
D 2000 голосов;
E 1999 голосов;
Непередаваемые 300 голосов.
Сумма 9999 голосов.

Третий этап. Кандидат В превысил квоту. Согласно методу Грегори в качестве излишка будет передаваться только та часть голосов, которая перешла к кандидату при последней передаче, то есть в данном случае от кандидата С (от С к В перешли 1000 голосов). Излишек, который оказался у В ($3200 - 2500 = 700$ голосов) должен перейти к следующим кандидатам. Так как избиратели этой группы не указали более своих предпочтений кроме уже учтенных $C > B$, то эти голоса становятся непередаваемыми.

При ручном подсчете голосов это самый естественный способ передачи [42]. Как только в корзине какого-либо кандидата накапливалось необходимое количество голосов, остаток предыдущего излишка передавался следующим кандидатам.

A 2500 голосов - избран;
B 2500 голосов - избран;
C 0 голосов;
D 2000 голосов;
E 1999 голосов;
Непередаваемые 1000 голосов (300+700).
Сумма 9999 голосов.

Среди оставшихся двух кандидатов побеждает кандидат D. Итог выборов при подсчете по методу Грегори – кандидаты A, B, D.

Включающий метод Грегори отличается от обычного метода Грегори только способом перераспределения излишков, являющихся результатом перераспределения голосов. Таким образом, в данном примере первые два шага метода Грегори: перераспределение изначального излишка и исключение кандидата с наименьшим количеством голосов – остаются прежними. Изменения касаются только распределения излишка кандидата В.

3200 голосов кандидата В состоят из 1000 собственных голосов 3200 голосов от кандидата А, которые перешли с весом (исходным значением) 0,375, и 1000 голосов от исключенного кандидата С. При квоте, равной 2500, надо перераспределить 700 голосов.

Включающий метод Грегори учитывает все голоса за кандидата, то есть $1000+3200+1000=5200$. При перераспределении излишка итоговое значение каждого голоса будет равно $700/5200=0,1346$. Это означает, что 13,5% голосов каждой группы будет передано, вне зависимости от исходного значения голоса.

Из 1000 голосов кандидата В к кандидату D перейдет $1000*0,1346=134,6$ голосов. Из 3200 голосов, переданных от кандидата А, к следующему кандидату – Е (С уже исключен, поэтому ему голоса не передаются) переходят $3200*0,1346=430,7$ голосов. От исключенного кандидата С далее $1000*0,1346=134,6$ голосов перейдут в категорию непередаваемых. В результате:

А 2500 голосов - избран;

В 2500 голосов - избран;

С 0 голосов;

D 2134,6 голосов ($2000+134,6$);

Е 2429,7 голосов ($1999+430,7$);

Непередаваемые 434,6 голосов ($300+134,6$).

Сумма 9999 голосов.

Среди оставшихся двух кандидатов побеждает кандидат Е. Итог выборов при подсчете по включающему методу Грегори – кандидаты А, В, Е.

При ручном подсчете, который ещё возможно провести по этому методу, передаётся целое число голосов, что влечет за собой дополнительное искажение из-за ошибок округления.

Взвешенный включающий метод Грегори, как и включающим метод Грегори, отличается от обычного метода Грегори только способом перераспределения последующих излишков.

Взвешенный включающий метод Грегори рассматривает различные голоса кандидата В по-разному, с учетом исходного значения. Так 3200 голосов, пришедших от кандидата А, с исходным значением 0,375 учитываются как 1200 голосов, которые собственно были переданы.

Передаваемые голоса будут иметь значение

$$TV = \frac{\text{Излишек} \cdot \text{исходное значение}}{\text{число голосов кандидата}}.$$

Доля излишка равна $700/3200=0,21875$. Таким образом, из 1000 голосов кандидата В к кандидату D перейдет $1000*0,21875=218,75$ голосов. Из 3200 голосов, переданных от кандидата А, к следующему кандидату – Е переходят $3200*0,375*0,21875=262,5$ голосов. От исключенного кандидата С далее $1000*0,21875=218,75$ голосов перейдут в категорию непередаваемых. В результате:

А 2500 голосов - избран;

В 2500 голосов - избран;

С 0 голосов;

Д 2218,75 голосов (2000+218,75);

Е 2261,5 голосов (1999+262,5);

Непередаваемые 518,75 голосов (3000+218,75).

Сумма 9999 голосов.

Среди оставшихся двух кандидатов побеждает кандидат Е. Итог выборов при подсчете по взвешенному включающему методу Грегори – кандидаты А, В, Е.

Таблица 2.1 иллюстрирует различие трех методов при передаче излишка кандидата В, образовавшегося из трёх источников: собственные голоса, передача от избранного кандидата А и передача от исключенного кандидата С. Квота $Q=2500$.

Таблица 2.1 - Перераспределение излишка кандидата В

	Первый подсчет: 1000 голосов за В (первые предпочтения)	Второй подсчет: 3200 голосов от А	Третий подсчет: 1000 голосов от С
Метод Грегори			
Исходное значение	1	0,375	1
Итоговое значение	0	0	0,7
Вклад в излишек (%)	0	0	100,0
Включающий метод Грегори			
Исходное значение	1	0,375	1
Итоговое значение	0,1346	0,1346	0,1346
Вклад в излишек (%)	19,2	61,5	19,2
Взвешенный включающий метод Грегори			
Исходное значение	1	0,375	1
Итоговое значение	0,219	0,082	0,219
Вклад в излишек (%)	31,325	37,5	31,325

Вклад излишек вычисляется как отношения числа голосов соответствующей группы, которая была передана следующим кандидатам при перераспределении излишка, к всему излишку ($3200 - 2500 = 700$ голосов).

Метод Грегори перераспределяет только голоса от кандидата С, образовавшиеся при последнем подсчете. Таким образом, передаваемые голоса полностью состоят из бюллетеней кандидата С, другие бюллетени на этом этапе не учитываются. Приверженцы метода считают это справедливым. Люди, поставившие кандидата В первым, уже довольны результатами выборов, они представлены в парламенте, напротив голоса сторонников кандидата С ещё не были использованы для избрания и им необходимо дать большее предпочтение. Таким образом, метод благоприятствует малым группам, чей основной кандидат не прошел. Игнорирование основных сторонников кандидата (собственно бюллетени кандидата В) указывается критиками данного метода как основной недостаток.

Включающий метод Грегори учитывает все голоса, отданные за кандидата, при этом исходное значение (вес голоса) игнорируется, что приводит завышению вклада в излишек голосов переданных от других кандидатов. Метод способен увеличивать значение голоса на поздних этапах подсчета (например к кандидату Х передан бюллетень со значением 0,1, а от кандидата Х он передан со значением 0,15), что является основным недостатком этого метода. По сути, некоторые избиратели имеют в данном случае более одного голоса. Стоит отметить, что такие случаи крайне редки.

Взвешенный включающий метод Грегори перераспределяет излишек с учетом исходного значения голоса, что приводит к более «равномерному» вкладу в излишек голосов от разных кандидатов. При этом его значение голоса обязательно уменьшается при каждой передаче. Для очередного перераспределения излишка необходимо помнить предысторию передачи каждого голоса, что значительно усложняет процесс подсчета, но исключает возможность возникновения проблем, связанных с первыми двумя методами.

Невозможность передачи голосов уже избранным кандидатам при взвешенном включающем методе Грегори может привести к искажению результатов выборов. Если при передаче голоса ближайшим по предпочтениям стоит уже избранный кандидат, голос передается следующему кандидаты. Предпочтения сторонников уже избранного кандидата игнорируются, хотя было бы логично передать голос уже избранному кандидату для того, чтобы с учетом предпочтений его сторонников передать голос далее другим кандидатам. Кроме того, наличие непередаваемых голосов явным образом нарушает логику подсчета квоты. Благодаря непередаваемым голосам для победы достаточно иметь меньше голосов, чем при стандартном подсчете квоты. Учет этих особенностей привел к появлению метода Мика [43, 44], являющегося итеративной процедурой.

Метод Мика имеет следующие отличающие особенности: возможность передачи голосов уже избранным кандидатам, пересчет квоты, итеративность.

На каждом шаге процедуры каждому кандидату присваивается «удерживаемое значение» (УЗ), которое отражает долю каждого голоса, полученного кандидатом, которая остается у кандидата, остальное передается. 100% означает, что кандидат ещё не избран, но не исключен. Когда кандидат становится избранным его УЗ опускается ниже 100%, возникает излишек, который передаётся. УЗ 0% соответствует исключенному кандидату, который больше не участвует в перераспределении голосов.

Представим, что на некотором шаге кандидат УЗ кандидата А равно 0, УЗ для В равно 0,6, УЗ С – 0,8, УЗ D – 1, Е – 1. Тогда, к примеру, бюллетень $A \succ B \succ D$ следующим образом разделится между кандидатами. А удержит 0 голосов, остальные голоса перейдут кандидату В, который удержит 0,6 голоса, а остаток 0,4 голоса перейдет к D. Еще не набравший квоты кандидат D получает оставшиеся 0,4 голоса. Итог: А – 0, В – 0,6, D – 0,4. Бюллетень $B \succ C \succ A$ приведет к тому, что у В будет 0,6 голоса, у С $(1-0,6)*0,8 = 0,32$, у А $(1-0,6)*(1-0,8)*0 = 0$, в непередаваемые голоса попадет $(1-0,6)*(1-0,8)*(1-0) = 0,08$ голоса.

Рассмотрим действие метода Мика.

Итерация 1

Так как на первом шаге избранных и исключенных кандидатов нет, то всем кандидатам присваивается УЗ, равное 1. Метод Мика рассчитан на компьютерную обработку, поэтому предполагает вычисление всех значений с точностью до 9 знака после запятой.

Квота рассчитывается как

$$Q = \frac{\text{число голосов}}{\text{число мест} + 1}$$

с округлением в большую сторону в последнем разряде (9-ом знаке после запятой). $Q=2499,750000001$. Число голосов кандидата А превышает квоту, он объявляется избранным. Общий излишек = $4000 - 2499,750000001 = 1500,249999999$.

Разница между двумя кандидатами с наименьшим количеством голосов $1000 - 1000 = 0,000000000$ меньше общего излишка. Следовательно, для определения какой из кандидатов будет исключен, необходимо распределить излишек.

Итерация 2

Избранный кандидат А получает новое УЗ

$$УЗ = \frac{\left(\text{текущее } УЗ \right) \cdot \left(\text{текущая квота} \right)}{\left(\text{текущее число голосов} \right)}.$$

$$УЗ = 1 * 2499,750000001 / 4000 = 0,624937501$$

Округление, как и при подсчете квоты, проводится в большую сторону. 4000 голосов пересчитываются, используя новое УЗ.

Для 3200 голосов типа А > В > С > Е 0,624937501 голоса удерживаются за кандидатом А, (1 - 0,624937501) = 0,375062499 голоса переходят кандидату В.

Для 800 голосов типа А 0,624937501 голоса удерживаются за кандидатом А, (1 - 0,624937501) = 0,375062499 голоса становятся непередаваемыми.

Остальные голоса не изменились.

Благодаря наличию непередаваемых голосов возможно уменьшить квоту с сохранением невозможности случая, когда число кандидатов, превысивших квоту, больше числа мест. Квота пересчитывается как

$$Q = \frac{\text{число голосов} - \text{число непередаваемых голосов}}{\text{число мест} + 1}.$$

$$Q = (9999 - 300,049999200) / 4 = 2424,737500201.$$

$$\text{Общий излишек} = 2499,750004000 - 2424,737500201 = 75,012503799.$$

Разница между кандидатами с наименьшим количеством голосов 1999-1000=999 превышает Общий излишек. Так как распределение излишка не влияет на то, какой кандидат имеет наименьшее число голосов, то кандидат С с 1000 голосов должен быть исключен.

Итерация 3

УЗ кандидата С становится равным 0.

$$УЗ кандидата А = 0,624937501 * 2424,737500201 / 2499,750004000 = 0,606184376$$

Пересчет голосов:

Для 3200 голосов типа А > В > С > Е 0,606184376 голоса удерживаются за кандидатом А, (1 - 0,606184376) = 0,393815624 голоса переходят кандидату В.

Для 800 голосов типа А 0,606184376 голоса удерживаются за кандидатом А, оставшиеся (1 - 0,606184376) = 0,393815624 голоса становятся непередаваемыми.

Для 1000 голосов типа С > В 0 остается у кандидата С, 1 голос у кандидата В.

Остальные голоса не изменились.

За увеличением числа непередаваемых голосов следует пересчет квоты.

$$Q = (9999 - 315,052499200) / 4 = 2420,986875201.$$

Кандидат В избран.

$$\text{Общий излишек} = (2424,737504000 - 2420,986875201) + (3260,209996800 - 2420,986875201) = 842,973750398.$$

Разница между кандидатами с наименьшим количеством голосов $2000 - 1999 = 1$, меньше Общего излишка. Следовательно, для определения какой из кандидатов будет исключен, необходимо распределить излишек.

Итерация 4

$$\text{УЗ кандидата А} = 0,606184376 * 2420,986875201 / 2424,737504000 = 0,605246719.$$

$$\text{УЗ кандидата В} = 1 * 2420,986875201 / 3260,209996800 = 0,742586177.$$

Пересчет голосов:

Для 3200 голосов типа $A \succ B \succ C \succ E$ 0,605246719 голоса удерживаются за кандидатом А, $(1 - 0,605246719) * 0,742586177 = 0,293138330$ голоса переходят кандидату В, $(1 - 0,605246719) * (1 - 0,742586177) * 0 = 0$ голоса переходит кандидату С, оставшиеся $(1 - 0,605246719) * (1 - 0,742586177) * (1 - 0) = 0,101614951$ переходят кандидату Е.

Для 800 голосов типа А 0,605246719 голоса удерживаются за кандидатом А, оставшиеся $(1 - 0,605246719) = 0,394753281$ голоса становятся непередаваемым.

Для 1000 голосов типа $C \succ B$ 0 остается у кандидата С, 0,742586177 голос у кандидата В, оставшиеся $(1 - 0,742586177) = 0,257413823$ голоса становятся непередаваемым.

Для 1000 голосов типа $B \succ D$ 0,742586177 голоса удерживаются за кандидатом В, оставшиеся $(1 - 0,742586177) = 0,257413823$ голоса переходят кандидату D.

Остальные голоса не изменились.

За увеличением числа непередаваемых голосов следует пересчет квоты.

$$Q = (9999 - 573,216447800) / 4 = 2356,445888051.$$

$$\text{Общий излишек} = (2420,986876000 - 2356,445888051) + (2423,215009347 - 2356,445888051) = 131,310109245.$$

Разница между кандидатами с наименьшим числом голосов $2324,167843853 - 2257,413823000 = 66,754020853$ меньше Общего излишка. Следовательно, для определения какой из кандидатов будет исключен, необходимо распределить излишек.

Итерация 5

$$\text{УЗ кандидата А} = 0,605246719 * 2356,445888051 / 2420,986876000 = 0,589111473.$$

$$\text{УЗ кандидата В} = 0,742586177 * 2356,445888051 / 2423,215009347 = 0,722125002.$$

Пересчет голосов:

Для 3200 голосов типа $A \succ B \succ C \succ E$ 0,589111473 голоса удерживаются за кандидатом А, $(1 - 0,589111473) * 0,722125002 = 0,296712878$ голоса переходят кандидату В, $(1 - 0,589111473) * 0,277874998$ переходят кандидату Е.

Для 800 голосов типа А 0,589111473 голоса удерживаются за кандидатом А, оставшиеся $(1 - 0,589111473) = 0,410888527$ голоса становятся непередаваемым.

Для 1000 голосов типа $C \succ B$ 0 остается у кандидата С, 0,722125002 голоса у кандидата В, 0,277874998 голоса становится непередаваемым.

Для 1000 голосов типа $B \succ D$ 0,722125002 голоса остаются у кандидата В, 0,27787499800 переходят кандидату D.

Остальные голоса не изменились.

За увеличением числа непередаваемых голосов следует пересчет квоты.

$$Q = (9999 - 606,585819600) / 4 = 2348,103545100.$$

Кандидат Е избран. Итог выборов при подсчете по методу Мика – кандидаты А, В, Е.

В общем случае при последующем повторении итераций квота не увеличивается, а количество голосов у неизбранных кандидатов не уменьшается. Доказано существование и единственность решения по этому методу.

Для изучения применения ординальных методов в исследовании была взята Австралия. Эта страна имеет более чем вековые традиции использования данного метода, кроме того на протяжении столетия её избирательная система эволюционировала, отражая те проблемы, с которыми сталкивается использование правило передачи голосов.

В 1974 на выборах в Австралийский Сенат возникла ситуация, показывающая несправедливость использования метода Грегори, названная синдромом Боннера по имени кандидата от либеральной партии. Высокая доля его сторонников указала вторыми в предпочтениях кандидатов от партии лейбористов, но так как Боннер был избран благодаря передаче голосов от другого кандидата, то эти голоса при передаче излишка никак не учитывались. Из-за этого Колстон, кандидат от лейбористов, проиграл, что вызвало дискуссию относительно необходимости изменения избирательной системы. Реформа, заменившая используемый метод на включающий метод Грегори, произошла в 1983 году.

На выборах 2001 года в Австралии, которые проводились с использованием включающего метода Грегори, на 234 этапе подсчета метод продемонстрировал аномальную ситуацию. Метод увеличил значимость некоторых голосов, что повлияло на результат выборов. Возникшая дискуссия о необходимости очередной избирательной реформы имеет два направления. Первое – в сторону упрощения процедуры до метода Грегори. Прозрачность метода позволяет лучше анализировать результаты выборов, а именно, как произведен подсчет голосов и на что повлияли голоса тех или иных избирателей. Второе – дальнейшее усложнение системы с целью исключения возможности появления известных аномалий. Кроме метода Мика предлагаются метод Варрена и система Врайта, являющиеся модификациями метода Мика.

Другие страны, использующие систему передачи голосов, пошли по пути усложнения системы. Так, в Шотландии в 2007 году впервые в мире прошли выборы по методу взвешенного включающего метода Грегори. Новая Зеландия стала единственной страной принявшей метод Мика в начале 2000-ых. Этот метод настолько сложен, что он напрямую не описывается в законодательстве, а дается только ссылка на статью в научном журнале и алгоритм, занимающий на языке Pascal несколько страниц кода.

Новозеландский метод подсчета правила передачи голосов основан на методе подсчета голосов, изложенном Брайаном Миком в 1969 году, что требует использование Алгоритма 123. Этот метод (с усовершенствованиями) описан в [45]. Всестороннее рассмотрение математических уравнений, которые доказывают существование и единственность этого метода, представлено в статье. Новозеландский метод подсчета правила передачи голосов включает модификации метода Мика и содержит в себе некоторые правила, относящиеся к действию местного избирательного законодательства Новой Зеландии.”

Таким образом, мы видим, как совершенствование теоретических моделей правила передачи голосов приводит к изменению реально функционирующих избирательных систем. Не имея возможности полностью повторить логику метода, законодатели ссылаются на программный код и математическую модель, тем самым демонстрируя доверие к проведенным изысканиям.

На основе рассмотренных методов можно сделать вывод о выборе метода как о компромиссе между его прозрачностью, простотой вычисления и исключением возникающих аномалий. Каждый последующий метод усложняется для решения существующих проблем, но не застрахован от возникновения новых.

Результаты исследований отражены в следующих опубликованных и подготовленных к публикации текстах:

- Karpov A.V. Impossibility Theorem in Proportional Representation Problem // American Institute of Physics Conference Proceedings 1281, USA: American Institute of Physics, 2010.
- Карпов А.В. Аксиоматический анализ ординальных моделей систем пропорционального представительства // Сборник трудов VI Московской международной конференции по исследованию операций (ORM - 2010), М.: МАКС Пресс, 2010. с. 416-418.
- Вольский В.И., Карпов А.В. Применение различных вариантов правила передачи голосов (направлено для публикации в журнал «Полития»);
- Вольский В.И., Карпов А.В. Особенности различных методов применения правила передачи голосов (будет опубликовано в сборнике трудов XI Международной научной конференции по проблемам развития экономики и общества).

2.2 Оценка степени манипулируемости процедур коллективного выбора

В рамках исследований процедур выбора анализировалась степень манипулируемости процедур коллективного выбора при условии, что расширенные предпочтения выбирающих являются частичным порядком для случая трех альтернатив, исследовал манипулируемость q -Паретовских правил голосования, в условиях линейного порядка расширенных предпочтений, провел сопоставление позиционных правил принятия решений с точки зрения манипулируемости в общем случае. Для проведения анализа использовались методы теории выбора, теории коллективных действий и математического моделирования. В качестве источника информации использовались сгенерированные компьютером профили предпочтений, причем для случая 3, 4 и 5 участников и 3, 4, 5 альтернатив использовался полный перебор всех возможных профилей, тогда как для большего числа участников в связи со сложностью вычислений генерировался 1 млн. возможных профилей, для каждого рассматриваемого случая.

Сопоставление позиционных правил принятия решений показало, что с точки зрения степени манипулируемости наилучшими являются система Хара и процедура Блэка для случая минимум 7 участников голосования. При меньшем числе участников результат сильно зависит от используемого метода расширения предпочтений. Сравнение оценок для случая сильного и слабого манипулирования показывает, что соотношение мер манипулируемости практически неизменно в независимости от используемой концепции. В ряде случаев, при числе участников кратном количеству альтернатив, возможны несовпадения соотношения правил, однако общий характер зависимости - такой же.

При исследовании сильной манипулируемости q -Паретовских правил принятия решений (случай линейного порядка расширенных предпочтений) было получено, что наименьшей манипулируемостью в рассматриваемом классе обладает Сильнейшее правило q -Парето простого большинства. Важным фактом является то, что при этом низкая манипулируемость достигается не за счет серьезных потерь в разрешимости (доле однозначного выбора). В то же время Сильное правило q -Парето простого большинства демонстрирует очень низкую разрешимость и высокую манипулируемость не только среди своего класса правил, но и среди порядковых и мажоритарных правил.

Сильнейшее правило q -Парето простого большинства демонстрирует низкую манипулируемость и при сравнении с правилами других классов, причем в ряде случаев оно демонстрирует наименьшую манипулируемость среди всех рассматриваемых правил. Точный ответ зависит от рассматриваемого метода расширения предпочтений, количества участников и количества альтернатив.

В рамках манипулирования при частичном порядке расширенных предпочтений (слабое манипулирование) получены предварительные результаты оценки степени манипулируемости с

точки зрения индекса Келли. Было замечено, что для большинства правил и трех альтернатив три рассматриваемые аксиомы (аксиома доминирования Келли, принцип Гэрденфорса и принцип ожидаемой полезности с предположением о равной вероятности альтернатив) дают одинаковые результаты. Это говорит о том, что дополнительные соотношения между наборами альтернатив, которые добавляют два последних принципа расширения предпочтений либо невозможны в реальных голосованиях, либо заведомо будут приводить к ухудшению положения. Остается открытым вопрос построения матрицы возможных переходов для случая 4-х и 5-х альтернатив. Также необходимо проверить, является ли результат общим для позиционных правил принятия решений (был построен контрпример для случая одной из версий непокрытого множества).

Также на профилях индивидуальных предпочтений исследовались свойства анонимности и нейтральности: были составлены алгоритмы генерации представителей классов эквивалентности и вычисления мощности классов с помощью которых проведены вычисление мощности классов эквивалентности и генерация их представителей.

Результаты исследований отражены в опубликованных или подготовленных к публикации текстах:

- Aleskerov F., Karabekyan D., Sanver R., Yakuba V. On Manipulability of Known Social Choice Rules in the Case of Multiple Choice (направлено для публикации в журнал Mathematical Social Sciences).
- Aleskerov F., Karabekyan D., Sanver R., Yakuba V. On Manipulability of Known Social Choice Rules in the Case of Multiple Choice (направлено для публикации в серию препринтов Nurmi Festschrift).
- Aleskerov F., Karabekyan D., Sanver R., Yakuba V. Individual manipulation of positional voting rules (в работе).
- Yakuba V., Karabekyan D. Estimating the Degree of Manipulability of Voting Rules for Weak Manipulation // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2010, USA: AIP Conference Proceedings, 2010. P. 2151-2154.
- Карабекян Д.С., Якуба В.И. Слабое манипулирование при голосовании // Труды III Международной научной конференции «Математическое моделирование социально-экономической динамики» (MMSED-2010). М.: 1С-Паблишинг, 2010.
- Карабекян Д.С., Якуба В.И. Слабое манипулирование при голосовании // Сборник трудов VI Московской международной конференции по исследованию операций (ORM - 2010), Москва: МАКС Пресс, 2010.

3. Поддержка решений: методы кластеризации и автоматической обработки информации

3.1 Методы остановки в дивизимных алгоритмах кластер-анализа, методы построения бикластеров и трикластеров, методы представления текстов на английском и русском языках суффиксными деревьями, методы оценки связи между таксономическими единицами в данном корпусе документов, методы спектрального кластер-анализа, методы оптимального обобщения множеств в иерархических предметных таксономиях

В настоящее время кластеризация является активно развивающейся частью анализа данных. Ее развитие связано как с усовершенствованием методов кластеризации, так и с внедрением новых технологий в технике. Например, увеличение мощности компьютеров позволяет обрабатывать все большие массивы данных.

Понятие кластеризации тесно связано с классификацией. Основное отличие состоит в том, что классы в кластеризации изначально не заданы. Не случайно кластеризация называется обучением без учителя.

Задачей кластеризации является группировка объектов по определенным признакам. Сходство объектов определяется специально заданной математической мерой. Количество кластеров и их объем определяется методом кластеризации. Изначально существовало два подхода к кластеризации: иерархический подход и метод к-средних. Но за последние десять лет появились новые подходы, например, кластеризация с помощью нейронных сетей, спектральная кластеризация.

Кластеризация широко применяется в химии, биологии, социологии, географии, медицине и в других областях науки и техники. Например, в медицине кластеризация используется для правильного диагностирования заболеваний и выявления наиболее эффективных и дешевых комплексов лекарственных препаратов для их лечения.

В последнее время кластеризация стала востребованной и в МЧС. Для того, чтобы эффективно справляться с чрезвычайными ситуациями (ЧС), нужно быстро реагировать на сигнал и отправлять на место происшествия чрезвычайную группу. Так как ЧС возникают неожиданно, группы реагирования должны формироваться быстро. Как показала практика, эффективность работы таких групп сильно зависит от слаженности работы ее членов. С целью формирования максимально эффективных групп необходимо предварительно отбирать в ее состав психологически совместимых специалистов с близкими профессиональными уровнями. Для формирования таких групп применяется кластеризация.

В рамках данного проекта проводились исследования методов выбора параметров анализа данных (числа кластеров, относительных весов субкритериев и пр.), а также исследования оценок

соответствия между таксономическими единицами и текстами учебных программ в анализируемых проблемах обобщения текстовых и иных данных.

В частности, разрабатывались методы остановки в дивизимных алгоритмах кластер-анализа, методы построения бикластеров и трикластеров, методы представления текстов на английском и русском языках суффиксными деревьями, методы оценки связи между таксономическими единицами в данном корпусе документов, методы спектрального кластер-анализа, методы оптимального обобщения множеств в иерархических предметных таксономиях.

В ходе исследований был создан архив данных, содержащий порядка 140 текстов программ учебных курсов математико-информатического цикла и таксономию математики по материалам РЖ «Математика», использованных для экспериментальных расчетов по автоматизации анализа содержания программ. Разработаны генераторы искусственных данных, моделирующие определенные аспекты реальных данных, для сравнения предложенных методов с собственными предложениями и предложениями других авторов.

В результате исследований было сформировано математическое обеспечение и начаты экспериментальные расчеты по онтологическому анализу корпуса текстов на русском и английском языках: (а) анализ содержания комплекса учебных программ математико-информатического цикла в ВШЭ (русский язык), (б) анализ аннотаций и ключевых слов статей, опубликованных в журналах, издаваемых всемирной Ассоциацией вычислительных машин (английский язык). Был проведен ряд экспериментов по верификации эффективности предложенных критериев остановки процесса деления кластеров; проведена первичная отработка алгоритма подъема множества запроса по дереву таксономии и визуализации результатов, проанализированы результаты его работы на программах курсов, удалось представить некоторые темы из множеств их объединений более общими темами на таксономии, обнаружена несбалансированность таксономии (некоторые разделы гораздо более детализирована, нежели другие, в связи с чем результаты агрегирования данных в ней зачастую не соответствовали интуитивным предпосылкам объединения), определены направления дальнейшего развития исследования: а) оптимизация выбора весов в работе алгоритма; б) обобщение на случай нечетких множеств; в) тестирование метода на новых базах программ. Предложены методы построения три- и эн-кластеров (в результате распространения метода бикластеризации БОКС на тернарные связи) и проведены тесты по их экспериментальной верификации, в данных экспериментах показана устойчивость метода к шумам.

Бикластеризация является подклассом кластеризации. Ее основное отличие состоит в том, что для определения сходных объектов используются не только связи между объектами, но и связи между объектами и признаками. Кроме того, в качестве результата получается не только

кластер объектов, как в кластеризации, но и кластер признаков, объединенный с кластером объектов.

Существует множество алгоритмов бикластеризации: Bimax, ISA, Samba, CC, OPSM, и т.д. Краткий обзор существующих методов бикластеризации приведен в первой главе.

Методы бикластеризации хорошо описывают бинарные двумерные контексты, т.е. двумерные бинарные матрицы. В связи с появлением новых типов данных, представляющих собой трехмерные контексты, появилась задача перенесения методов бикластеризации на тернарные отношения. Несмотря на то, что бикластеризации ранее не распространялась на тернарные отношения, данные отношения уже встречались ранее в других областях анализа данных. Например, в [46] использовались тернарные отношения при сравнении троек объектов в случае, когда признак является индикатором, показывающим, какие из пар объектов в рассматриваемой тройке наиболее похожи. В [47] тернарные отношения описаны в виде циклов на графах, состоящих из трех вершин. В данном исследовании тернарные данные были представлены в виде трехмерного бинарного контекста, который состоит из индикаторов, показывающих принадлежит ли объект признаку/тегу.

Начальные данные загружались с сайта Imdb.com, на котором существует постоянно обновляемый рейтинг фильмов, оцениваемых посетителями сайта. Фильм добавляется в список лучших в случае, если за него проголосовало более 3000 человек. Кроме того, о каждом фильме есть дополнительная информация, как то: ключевые слова, жанры, актеры, режиссер, список фильмов, рекомендованных базой, дата выхода в прокат и т.д. Часть этой информации была собрана и использована для создания бинарного контекста – исходного объекта исследования.

В качестве метода бикластеризации был выбран метод БОКС-кластеризации, разработанный Б.Г. Миркиным. В результате был разработан описание нового подхода к бикластеризации и переноса метода БОКС-кластеризации на тернарные связи. Исходные данные состоят из массива объектов и двух, а не одного, массивов признаков, т.е. из трех массивов данных: объектов, признаков и тегов. Данный тип кластеризации был использован с целью увеличения качества итоговых кластеров и усиления связей между объектами в получившихся кластерах. Было введено новое понятие трикластера, которое является обобщением понятия бикластера.

Целью исследования являлось получение наборов оптимальных трикластеров и оценка эффективности нового подхода к бикластеризации.

Используемые методы трикластеризации основаны на принципах аппроксимации данных. Критерием эффективности получившихся трикластеров является вклад трикластера, который показывает среднюю интенсивность внутри трикластера в сочетании с объемом трикластера. С помощью данных методов получается набор отличающихся друг от друга, но необязательно

непересекающихся трикластеров. Алгоритмы трикластеризации являются итерационными. Поиск трикластеров ведется начиная с синглтонов, то есть единичных трикластеров.

Для оценки эффективности трикластеризации приведено сравнение результатов работы метода трикластеринга с результатами, полученными после применения метода бикластеринга. Причем алгоритм бикластеризации был апробирован на данных, состоящих из объектов и признаков. Объектами являются названия фильмов, а признаками – все возможные комбинации жанров и ключевых слов. Таким образом, плоскость, состоящая из признаков (ключевых слов) и тегов (жанров) спроецирована на отрезок, состоящий из всех возможных комбинаций признаков и тегов.

В тестах алгоритм показал высокую стабильность работы с зашумленными данными. При сравнении полученных бикластеров и трикластеров по названиям фильмов, стоит заметить, что алгоритм трикластеризации нашел больше кластеров, чем алгоритм бикластеризации. Методы бикластеризации являются широко применимыми сегодня. Но несмотря на большое количество и разнообразие подходов данных методов, находятся типы данных, на которых применить данные методы становится проблематично. По этой причине был разработан метод трикластеризации, в основе которого лежит распространение метода бикластеризации БОКС на тернарные связи. В проведенных экспериментах со сгенерированными данными показана устойчивость к шумам. В применении к реальным данным модель приводит к нетривиальным и хорошо интерпретируемым результатам. Возможными направлениями дальнейшей работы являются повышение эффективности алгоритма, дальнейшие эксперименты и поиск интересных приложений.

Результаты данных исследований отражены в следующих опубликованных и подготовленных к публикации текстах:

- Аскарова Ю.А., Миркин Б.Г., Черняк Е.Л., Чугунова О.Н. Эксперименты по онтологическому анализу корпуса текстов (в работе).
- Ковалева Е., Б. Миркин Б. Метод случайных направлений для остановки процесса деления кластеров (в работе).
- Amorim R., Mirkin B. Minkowski Metric, Feature Weighting and Anomalous Cluster Initializing in K-Means Clustering, 2010 (направлено для публикации в Pattern Recognition, получены замечания рецензентов, представлена исправленная версия).
- B. Mirkin, Choosing the number of clusters (направлено для публикации в WIRE Journal of Data Mining and Knowledge Discovery).
- Mirkin B., Chiang M. Intelligent Choice of the Number of Clusters in K-Means Clustering: An Experimental Study with Different Cluster Spreads // Journal of Classification, 2010. V. 27. N. 1. P. 1—38.

- Mirkin B., Kramarenko A. Approximate biclusters and triclusters (в работе).
- Voulgaris Z., Mirkin B. Choosing a Discernibility Measure for Reject-Option of Individual and Multiple Classifiers // International Journal of General Systems. 2010. V. 39 (8). P. 855-871.

3.2 Дивизимно-агломеративный алгоритм классификации на основе минимаксной модификации частотного подхода

В рамках исследования способов кластеризации проводилась разработка алгоритма автоматической классификации нового поколения, основанного на формализации понятия «интуитивно правильной» классификации (удачность такой формализации определяется не доказательством точных утверждений о свойствах построенных классификаций, например, оптимизацией тех или иных формальных критериев, а только визуальным анализом результатов классификации в двумерных и некоторых других интуитивно ясных случаях, предложенный метод позволяет получить убедительные экспериментальные результаты без использования какой бы то ни было внешней информации, включая число классов, о рассматриваемой задаче). Результатом работы стала работающая программа автоматической классификации.

Задача автоматической классификации (далее для краткости АК) состоит в разбиении заданного множества объектов на несколько непересекающихся подмножеств (обычно называемых классами, агрегатами, блоками, кластерами и т.д.). При этом требуется, чтобы классы состояли из объектов, в том или ином смысле тесно связанных, похожих друг на друга, а объекты, принадлежащие разным классам, были бы по возможности менее похожими друг на друга, заметно различающимися.

Предполагается заданным множество объектов, для которых тем или иным способом уже определена *степень не-схожести* (или *схожести*). Информация о схожести / несхожести представляется в виде: матрицы «объекты-параметры» (называемой также матрицей данных); матрицы несхожести (схожести); неориентированного графа.

Для решения задачи АК предлагается алгоритм, находящий «правильные» классы в разнообразных ситуациях, основываясь только на самих исходных данных (множеству точек в евклидовом пространстве, матрице несхожести, графу) без использования в явном или неявном виде каких бы то ни было предположений вероятностного, геометрического или любого другого характера. Несмотря на наличие большого числа методов решения задачи АК (попытка даже самого поверхностного обзора многократно увеличила бы объём данного материала), методов, находящихся интуитивно правильные классификации в простых, но достаточно разнообразных ситуациях, просто нет.

В предлагаемом подходе исходная информация о задаче представляется *графом соседства*. Вершины графа соответствуют объектам. Любая вершина графа v соединяется ребром с 4-5 другими вершинами, соответствующими объектам, ближайшим к объекту, которому сопоставлена

вершина v . Близость объектов определяется либо непосредственно заданной матрицей схожести/несхожести, либо евклидовым расстоянием между объектами, вычисляемым по матрице данных. Описание задачи АК графом является наиболее общим описанием – именно потому, что оно использует минимальную и наиболее «мягкую» (не числовую) информацию о связях между объектами, которые и нужно классифицировать. В рамках предлагаемого подхода используется только такая – по сути дела качественная – информация о связях между классифицируемыми объектами.

В исследовании в основном рассматривались примеры множеств точек на плоскости. Задача АК является неформальной задачей. Если для рассматриваемых двумерных множеств интуитивно правильные классификации ясны, и если формальный метод не находит эти решения, то вряд ли можно надеяться, что этот же метод окажется способным находить кластерные структуры в достаточно сложных многомерных случаях или в задачах, заданных матрицей схожести/несхожести. Как показало исследование, предлагаемый подход, справляется не только с двумерными задачами, но и с многомерными данными, и с матрицами схожести/несхожести.

Анализ известных методов АК показывает, что они хорошо справляются с одними, зачастую сложными, задачами и практически не справляются с другими, представляющимися заметно более простыми, причём как те, так и другие являются разными для разных методов. Вероятно, именно неудовлетворённость этим обстоятельством приводит к появлению новых методов, однако ситуация существенно не улучшается. Можно предположить, что вряд ли вообще возможно придумать одну формальную модель, описывающую в достаточно общем случае, что такое правильная классификация. Поэтому предложенный подход, не пытается, используя какую-либо *одну* формальную модель, найти *одну* правильную классификацию. Вместо этого предлагается процедура, состоящая из нескольких последовательных этапов. Результатом каждого этапа является *семейство классификаций*, которое сначала постепенно расширяется, а затем постепенно *сужается*, так что на выходе процедуры практически всегда оказывается одна классификация. С этой точки зрения подход близок генетическим алгоритмам, работающим не с отдельными решениями, а с их множествами (популяциями). Преимущество такого подхода состоит и в том, что можно остановиться после каких-то шагов процедуры и выбрать одну из нескольких оставшихся классификаций, используя какой-либо известный метод. Поскольку оставшиеся классификации уже достаточно разумны, такое применение известных формальных методов может оказаться значительно более эффективным, чем их применение с самого начала, зачастую требующее решения тяжёлых вычислительных задач без гарантии получения результата.

Процедура предлагаемого алгоритма классификации – дивизимно-агломеративной процедуры (ДАП) является четырёхэтапной. Её блок-схема показана на рисунке 2.1.

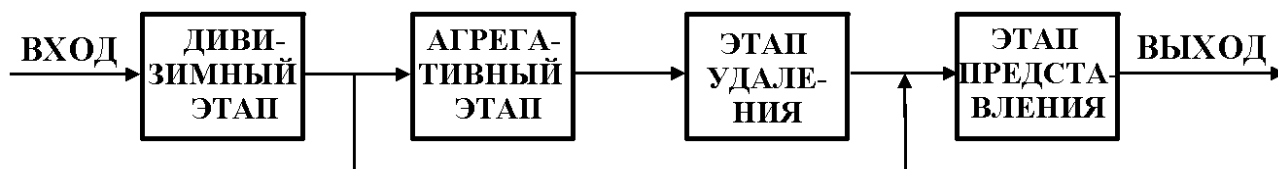


Рисунок 2.1 - Блок-схема дивизимно-агломеративной процедуры

Входом процедуры является граф соседства, построенный по исходным данным. Параметрами процедуры являются параметры дихотомии (указанные непосредственно перед минимаксным алгоритмом в пункте 2.2), и вводимый ниже единственный параметр k , относящийся уже к самой процедуре. Выходом ДАП является семейство классификаций исходного множества объектов.

Вспомогательным алгоритмом для ДАП является алгоритм модификации матрицы связей при объединении классов, который входит в дивизимный и агломеративный алгоритмы в качестве отдельного повторяемого шага.

Алгоритм модификации матрицы связи. Входом алгоритма являются: симметричная матрица связей D между m классами (размерности $m \times m$); номера i и j двух классов ($i < j$). Выходом является аналогичная матрица D' для $(m-1)$ класса, где «новый» i -ый класс получен объединением «старых» i -го и j -го классов. Предполагается, что величина связи между любым из остальных классов и новым объединённым классом является суммой величин связи между ним и i -м и j -м классом, а все другие связи не меняются. Это предположение естественно для рассматриваемой ситуации, в которой сила связей между блоками равна числу рёбер, соединяющих соответствующие подграфы исходного графа.

1. Для всех элементов i -й строки матрицы D положить

$$d_{ik} = d_{ik} + d_{jk}.$$

2. Для всех элементов i -го столбца матрицы D положить

$$d_{ki} = d_{ki} + d_{kj}.$$

3. Положить $d_{ii} = 0$.

4. Сдвинуть вверх все строки, начиная с $(j+1)$ -ой

$$d_{st} = d_{s+1,t}, s = j, \dots, m-2; t = 0, 1, \dots, m-1.$$

5. Сдвинуть влево все столбцы, начиная с $(j+1)$ -го

$$d_{ts} = d_{t,s+1}, s = j, \dots, m-2; t = 0, 1, \dots, m-1.$$

6. Вычеркнуть последнюю строку и последний столбец матрицы D .

Полученная матрица D' является выходом алгоритма.

Четыре этапа ДАП. Дивизимный этап. Дивизимный алгоритм классификации представляет собой последовательное деление исходного множества – сначала на две части, затем одну из двух частей снова на две части и т.д., вплоть до получения некоторой классификации, которая

представляется удовлетворительной. Ответы на самые главные вопросы – как именно осуществляется деление на два части, какая из уже имеющихся частей выбирается для очередного деления и каково правило остановки – определяют суть используемого алгоритма и отражены в следующем алгоритме.

Дивизимный алгоритм. Входом алгоритма является неориентированный связный граф G . Единственным параметром алгоритма является целое число k , равное максимальному числу частей, на которое разбивается множество вершин графа. Выход алгоритма определён ниже.

1. Инициализация. Определить целочисленную переменную d (номер текущей дихотомии); одномерный целочисленный массив P длины $k-1$ (массив номеров подграфов, последовательно выбираемых для деления); массив S длины k , компонентами которого являются подграфы. Далее, положить

$$d = 0; S[d] = G,$$

где G – заданный граф. $P[0] = 0$ по построению.

2. Среди подграфов $S[i]$, $0 \leq i \leq d$, выбрать подграф $S[im]$ с максимальным числом вершин.

3. Положить $P[d] = im$.

4. Разделить подграф $S[im]$ на два подграфа алгоритмом дихотомии и обозначить полученные подграфы через S_a и S_b .

5. Положить $S[im] = S_a$, $S[d+1] = S_b$.

6. Положить $d = d+1$.

7. Если $d < k-1$, перейти к шагу 2.

8. Построение семейства классификаций множества $A = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

8.1. Определить классификацию C_k^{k-2} множества $A = \{0, 1, \dots, k-1\}$ на k классов

$$A_k^{k-2}[j] = \{j\}, j = 0, 1, \dots, k-1.$$

8.2. Для $i = k-3, \dots, 0$ рекуррентно определить классификации C_{i+2}^i множества

$A = \{0, 1, \dots, k-1\}$ на $(i+2)$ класса следующим образом:

$$A_{i+2}^i[j] = A_{i+3}^{i+1}[j], j = 0, 1, \dots, i+1; j \neq P[i], \quad (3.1)$$

$$A_{i+2}^i[P[i]] = A_{i+3}^{i+1}[P[i]] \cup A_{i+3}^{i+1}[i+2]. \quad (3.2)$$

9. Определить симметричную матрицу D размера $k \times k$, в которой элемент d_{ij} равен числу рёбер, соединяющих i -ый и j -ый подграфы из массива S , $i, j = 0, 1, \dots, k-1$; $i \neq j$. Для этого вводится массив a длины N , где N – число вершин исходного графа. Для всех вершин v подграфа $S[i]$ положить $a[v] = i$, $i = 0, 1, \dots, k-1$. Просматривая последовательно все рёбра исходного графа (заданные в виде массива пар инцидентных вершин) прибавляем единицу к элементу матрицы D с номером (p, q) , где $p = a[v]$, $q = a[w]$, v и w – концы очередного ребра и $p < q$. После просмотра всех рёбер положить $d_{ij} = d_{ji}$ для всех пар (i, j) при $i > j$.

10. Построение семейства матриц.

10.1. Положить $D_k^{k-2} = D$.

10.2. Для $i = k-3, \dots, 0$ рекуррентно определить новую матрицу D_{i+2}^i по матрице D_{i+3}^{i+1} и номерам $P[i+1]$ и $(i+2)$ рассмотренным выше алгоритмом модификации матрицы связей.

11. Остановка алгоритма.

Выходами дивизимного алгоритма являются: массив подграфов S ; семейство классификаций $\{C_{i+2}^i\}$, $i = k-2, \dots, 0$, множества $A = \{0, 1, \dots, k-1\}$ на $(i+2)$ класса и семейство матриц $\{D_{i+2}^i\}$, $i = k-2, \dots, 0$. Далее эти классификации и матрицы называются *базовыми*. Подграфы $S[0], S[1], \dots, S[k-1]$, являющиеся компонентами массива S , далее называются *блоками*, так как все классы во всех рассматриваемых классификациях состоят только из них и/или их объединений.

Агломеративный этап. В качестве исходного множества рассматривается множество $A = \{0, 1, \dots, k-1\}$. За силу связи между отдельными элементами i и j принимается элемент d_{ij} матрицы D_4^2 , найденной на дивизимном этапе; сила связи между двумя множествами элементов определяется как сумма чисел d_{ij} по всем парам элементов, входящих в эти множества. Напомним, что по построению d_{ij} совпадает с числом рёбер, соединяющих соответствующие подмножества вершин исходного графа. В агломеративном алгоритме для каждого значения i , меняющегося от $k-2$ до 0, по базовым матрицам $\{D_{i+2}^i\}$ и классификациям $\{C_{i+2}^i\}$ строятся свои наборы матриц и классификаций, названных *присоединёнными*.

Агломеративный алгоритм. Входом алгоритма является: семейство базовых классификаций $\{C_{i+2}^i\}$ на $(i+2)$ класса, $i = k-2, \dots, 0$, множества $A = \{0, 1, \dots, k-1\}$ и семейство базовых матриц $\{D_{i+2}^i\}$, $i = k-2, \dots, 0$. Выходом алгоритма является семейство $\frac{k(k-1)}{2}$ классификаций, определяемых в процессе работы алгоритма.

1. Построение присоединённых матриц и классификаций. Для каждого $i = k-2, \dots, 0$ (внешний цикл) осуществляются следующие операции:

1.1. Для $j = i+1, \dots, 2$ (внутренний цикл) рекуррентно определить новую матрицу D_j^i по предыдущей матрице D_{j+1}^i следующим образом:

1.1.1. Найти пару индексов s и t ($s < t$), для которой элемент d_{st} матрицы D_{j+1}^i максимален.

1.1.2. Определить новую матрицу D_j^i по матрице D_{j+1}^i и номерам s и t рассмотренным выше алгоритмом модификации матрицы связей.

1.1.3. Определить новую классификацию C_j^i множества $A = \{0, 1, \dots, k-1\}$ на j классов по классификации C_{j+1}^i следующим образом:

$$A_j^i[p] = A_{j+1}^i[p], p = 0, 1, \dots, t-1; p \neq s, \quad (3.3)$$

$$A_j^i[p] = A_{j+1}^i[p+1], p = t, \dots, j-1, \quad (3.4)$$

$$A_j^i[s] = A_{j+1}^i[s] \cup A_{j+1}^i[t]. \quad (3.5)$$

2. Представление выхода. Записать все построенные классификации в следующем порядке, объединив в одном ряду все классификации на одно и то же число классов:

$$\begin{aligned} &C_2^0, C_2^1, \dots, C_2^{k-3}, C_2^{k-2}, \\ &C_3^1, \dots, C_3^{k-3}, C_3^{k-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ &C_{k-1}^{k-3}, C_{k-1}^{k-2}, \\ &C_k^{k-2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь первая в каждой строке классификация является базовой; все они получены из начальной классификации C_k^{k-2} формулами (3.1) и (3.2). Все остальные классификации в списке (3.6) являются присоединёнными. Последние классификации в каждой строке (начиная с предпоследней строки) являются присоединёнными к C_k^{k-2} , предпоследние классификации в каждой строке (начиная с третьей с конца строки) являются присоединёнными к C_{k-1}^{k-3} , и т.д., вплоть до классификации C_2^1 , присоединённой к C_3^1 . Во всех случаях нижний индекс означает число классов, а верхний является номером записанной по диагонали группы, содержащей одну (первую в диагонали) базовую классификацию, найденную дивизимным алгоритмом, и все присоединённые к ней, найденные агломеративным алгоритмом. *Выходом* агломеративного алгоритма является семейство классификаций множества $A = \{0, 1, \dots, k-1\}$, представленное списком (3.6); сами классификации определяются формулами (3.1), (3.2) (базовые) и (3.3) – (3.5) (присоединённые).

Этап удаления. Выходом агломеративного этапа является семейство классификаций вида (3.6). Поскольку число классификаций в i -м снизу ряду равно i , а общее число рядов равно k , то всего построено $\frac{k(k-1)}{2}$ классификаций множества $A = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Некоторые из них могут совпадать друг с другом. Удаление таких (заведомо лишних) классификаций осуществляется на данном этапе процедуры. Сам алгоритм достаточно очевиден, тем более что размерность задачи невелика (число блоков k предполагается сравнительно небольшим – порядка 10–20). Однако задача сравнения двух классификаций одного и того же множества легко решается и при значительно больших k . Достаточно упорядочить элементы в каждом из множеств в порядке возрастания. Сравнение классификаций очевидным образом сводится к сравнению множеств, а для упорядоченных множеств оно сводится к последовательному сравнению элементов с одними и теми же номерами вплоть до первого несовпадения или до окончания просмотра.

Этап представления. Выходом этапа удаления является семейство различных классификаций множества $A = \{0, 1, \dots, k-1\}$ (далее обозначаемое через F). Однако выходом всей ДАП является (как указывалось в начале раздела) семейство классификаций исходного множества

объектов (т.е. вершин заданного графа G), а не множества номеров блоков $A = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Переход от одного семейства к другому и осуществляется на данном этапе.

Конечно, каждый блок (т.е. подграф исходного графа) однозначно определяется своим номером (см. описание выхода дивизимного этапа). Поэтому каждая классификация множества номеров блоков однозначно определяет некоторую классификацию исходного множества. Однако на этом этапе целесообразно (учитывая дальнейшие операции предложенного общего алгоритма классификации) представить каждую классификацию на t классов в виде набора t бинарных векторов ($t = 2, \dots, k$) длины N , где N – число вершин в графе G .

Алгоритм представления. Входом алгоритма является массив S блоков длины k , построенный на дивизимном этапе, и семейство классификаций F множества $A = \{0, 1, \dots, k-1\}$, элементы которого соответствуют номерам под-графов в массиве S . Выходом алгоритма является семейство R классификаций множества вершин графа G , обозначаемого через V .

1. Положить $R = \emptyset$.
2. Для каждой классификации $C \in F$ выполнить следующие операции (внешний цикл по задан-
 - 2.1. Положить $B(C) = \emptyset$ (через $B(C)$ обозначен набор бинарных векторов, определяющих классификацию множества V , соответствующую C).
 - 2.2. Для каждого класса X из классификации C выполнить следующие операции (цикл по классам из фиксированной классификации):
 - 2.2.1. Определить вектор x с N компонентами и положить $x_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$).
 - 2.2.2. Для каждого индекса $p \in X$ выполнить следующие операции (цикл по блокам из класса X):
 - 2.2.2.1. Рассмотреть множество вершин подграфа $S[p]$ (оно задано в виде целочисленного массива z длины n_p , компонентами которого являются номера вершин, входящих в подграф $S[p]$).
 - 2.2.2.2. Для каждой компоненты u массива z положить $x[u] = 1$ (внутренний цикл по вершинам одного блока).
 - 2.2.3. Добавить вектор x к множеству $B(C)$: $B(C) = B(C) \cup \{x\}$.
 - 2.3. Добавить множество векторов $B(C)$ к множеству R

Таким образом, выходом алгоритма представления и, следовательно, всей ДАП, является семейство классификаций множества вершин графа G , каждая из которых задана множеством бинарных векторов – по одному вектору на каждый класс. Многочисленные примеры показывают, что правильные классификации действительно содержатся среди небольшого числа классификаций, найденных предложенной ДАП.

Методы кластеризации демонстрируют разнообразие и глубину математических оснований, на которых они построены. И, тем не менее, предложенная значительно более простая схема

оказывается более эффективной – в первую очередь в смысле разнородности и трудности решаемых ей задач АК.

Первое отличие предложенной схемы от других подходов состоит в достаточно чётком описании допустимых исходных множеств. Именно, рассматриваются задачи АК, представленные неориентированными графами. Классы являются подграфами, содержащими достаточно много рёбер по сравнению с числом рёбер, соединяющих данный подграф с другими. Никакие другие данные о взаимном расположении подграфов, координатах вершин и длинах рёбер не используются. Как число рёбер в классе, так и число рёбер, соединяющих данный класс с остальными, могут сильно меняться. Важно только, чтобы отношение этих количеств было бы достаточно большим.

Второе отличие состоит в самом характере схемы, которая использует не какую-то одну идею, но комбинацию различных известных идей. При этом число классификаций сначала растёт, а затем уменьшается – вплоть до одной.

Третье отличие состоит в том, что число классов заранее не задаётся – ограничивается только сверху достаточно большим числом.

Четвёртое отличие состоит в сравнительно небольшом (для универсальной схемы) количестве параметров и их содержательности. Два параметра f и T предложенного нового варианта частотной дихотомии мало влияют на результат. Все приведённые результаты расчётов получены при $f = 10$ и $T = 1000$. Но при $f = 20$ и $T = 1500$ (как и при других независимых изменениях этих параметров в пределах $5 - 25$ и $500 - 3000$) результаты практически не менялись. Единственным параметром дивизимно-агломеративной процедуры является число блоков k . Этот параметр является существенным. Грубо говоря, при слишком малом k правильные классификации могут не быть найденными, а при слишком большом k могут появиться «лишние» устойчивые классификации. Однако при всех промежуточных k находится одна и та же правильная классификация. Наконец, на внешнем цикле при проверке устойчивости задаётся два параметра – число независимых испытаний g и уровень совпадения α . Здесь можно произвольно взять $g \in \{5, \dots, 10\}$ и $\alpha \in [0,95; 0,99]$; при изменениях в этих пределах результирующая классификация почти всегда остаётся той же самой.

Пятое отличие состоит в чёткости и однозначности результата. Разумеется, знание о ситуации может быть очень полезным – но не на вычислительном уровне, а на уровне интерпретации результатов.

Естественно, универсальных методов классификации не может быть. Предложенный метод замечателен тем, что работает в очень многих разнородных и трудных случаях.

Результаты исследования отражены в публикации:

•Rubchinsky A. A. Divisive-Agglomerative Classification Algorithm Based on the Minimax Modification of Frequency Approach. Working paper WP7/2010/07. – M.: University – Higher School of Economics, 2010.

4. Исследования в области теории игр и теории пространственного голосования

4.1 Теоретико-игровое моделирование поведения политиков и избирателей во время избирательных кампаний

В рамках применения теоретико-игровых методов к моделированию социальных систем и процессов в ходе реализации настоящего проекта проводились эконометрическая оценка метрик функций полезностей для пространственных моделей голосования, разработка теоретико-игровых моделей поведения политиков во время избирательных кампаний, исследование теоретико-игровой модели политической конкуренции, в которой выигрыш каждого политического агента не является линейной функцией от числа полученных голосов, оценкой моделей поведения избирателей на основе данных социологических опросов. В результате впервые получена сравнительная статика для равновесия в вероятностной модели голосования, и показано, что позиции кандидатов зависят от того, насколько ценность победы на выборах с большим перевесом отличается от ценности победы с маленьким перевесом.

Согласно теореме о средневзвешенном избирателе, в модели политической конкуренции кандидаты будут выбирать одинаковые политические программы в том случае, если голосование носит вероятностный характер. Было показано, что этот результат является артефактом и на самом деле основан на предположении, что кандидаты являются нейтральными к риску и максимизируют математическое ожидание получаемых голосов, что не верно для многих конкретных политических систем. В настоящем исследовании рассматривалась вероятностная модель голосования в которой кандидаты обладают предпочтениями, отличающимися от максимизации математического ожидания числа голосов. Был проведен анализ сравнительной статистики для случая с двумя избирателями и одномерным множеством политических альтернатив. Предполагается, что каждый избиратель имеет предпочтения как относительно личности кандидата, так и относительно его предвыборной программы. Показано, что при увеличении ценности одного голоса (то есть при увеличении отвращения к риску) кандидаты выбирают политические программы, расположенные ближе к наилучшим альтернативам избирателей, предпочитающих данных кандидатов. Численное моделирование равновесия подтверждает полученные теоретические результаты для большего числа избирателей. Исследование показывает, что нелинейность и несимметричность выигрышей кандидатов может влиять на их равновесные политические программы.

Немногие из существующих политических систем можно описать как стопроцентно пропорциональные или мажоритарные; обычно, соотношение между числом голосов, полученным

кандидатом или политической партией, и его выигрышем, более сложно. Во-первых, если один из кандидатов победит с большим отрывом, то возможно ему достанется более чем пропорциональный выигрыш. В парламентах большинства стран существует правило сверхбольшинства для утверждения особо важных законопроектов, таких, например, как принятие поправок к конституции. В американском сенате действует правило, согласно которому партия, находящаяся в меньшинстве, фактически в состоянии заблокировать обсуждение законопроекта, если она может набрать 40 голосов из 100 или больше. На выборах в исполнительные органы власти выигрыш победителя может нелинейно зависеть от числа голосов, так как победа с большим перевесом влияет на политическое участие как со стороны избирателей, так и со стороны оппонентов [48]. Победа с очень большим отрывом снижает вероятность возникновения новых политических конкурентов, может мотивировать сторонников к более активной поддержке, или может привести к снижению явки среди избирателей, поддерживающих других кандидатов. Существование таких стимулов иногда является причиной обширных нарушений при ведении избирательных кампаний и подсчете голосов; цель таких нарушений - не изменить личность победителя, но увеличить его отрыв от конкурентов. Симпсер [48] показал, что в большинстве развивающихся стран нарушения на выборах проводились в пользу кандидата, который все равно бы победил в отсутствие нарушений.

Еще одна причина _ существование .утешительных призов. для кандидатов, проигравших с небольшим отрывом. Ходжман [49] описывает существование таких призов на выборах в сенат Чили. Те кандидаты от правящей партии, которые проиграли, но набрали при этом достаточно много голосов, могут рассчитывать на призы в виде престижных рабочих мест в публичном секторе, причем ценность этих мест может даже превосходить ценность победы на выборах.

В странах с парламентской политической системой могут существовать существенные нелинейности при переводе голосов в парламентские места [50, 51]. Настоящие системы пропорционального представительства, на самом деле, не являются полностью пропорциональными в силу таких факторов, как существование региональных списков (Израиль и Нидерланды - единственные страны, в которых партии предлагают единые национальные списки), требования к минимальному числу голосов, и квотные формулы, распределяющие голоса. Многопартийные выборы в странах с мажоритарной системой (таких, как Великобритания) - еще один пример того, как избирательная система может быть ни полностью пропорциональной, ни полностью мажоритарной (так как, например, получение 40% голосов не обязательно гарантирует победу в избирательном округе).

Наконец, в парламентской системе выигрыш политической партии в том виде, в котором он следует из получения политической ренты, определяется вероятностью того, что данная партия сможет стать частью правящей коалиции. Очень часто партия, имеющая самое большое

представительство, формирует правительство, в то время как следующая по размерам партия (возможно, имеющая лишь незначительно меньшее представительство) является аутсайдером и не участвует в формировании правительства. В то же самое время, малые партии могут претендовать на места в парламентской коалиции. Существуют различные подходы к моделированию возникновения парламентских коалиций [52-54]; ни один из этих подходов не предполагает того, что вероятность попадания в кабинет является линейной функцией от числа голосов. Ценность министерских портфелей, к тому же, зависит и от ожидаемой продолжительности существования правительства, что, в свою очередь, зависит от многих институциональных факторов [55, 56]. Предположим, что нужно построить модель предвыборной конкуренции между кандидатами (или партиями) при условии, что исход голосования - случайная величина, распределение которой зависит от действий, принимаемых каждой стороной. Если всего существует N избирателей, то возможно $N - 1$ исходов: Кандидат 1 получает 0 голосов и Кандидат 2 - N голосов, Кандидат один получает 1 голос и Кандидат 2 - $N - 1$ голосов, и так далее. Так как исход выборов - случайная величина, необходимо для каждого кандидата определить функцию полезностей на множестве возможных исходов. В общем случае, единственное ограничение для функции полезности - монотонность относительно числа голосов. Однако, существующие модели предполагают либо полезность, линейную относительно числа голосов, либо ступенчатую функцию полезности, согласно которой кандидаты максимизируют вероятность получения большинства голосов.

Вероятностные модели политической конкуренции возникли в результате неспособности детерминистических моделей объяснить электоральное поведение в том случае, когда пространство политических альтернатив имеет размерность два или больше. Вероятностные модели предполагают, что голос каждого избирателя - это случайная величина, причем вероятность голосования за каждого кандидата является непрерывной функцией от политических программ кандидатов. Такая постановка гарантирует существование равновесия в смешанных стратегиях и, при достаточно широких условиях, локального равновесия Нэша. Существование глобального равновесия, однако, не гарантировано и, как правило, условия существования собственно равновесия Нэша получить очень трудно, так как это требует вогнутости целевых функций кандидатов [57-62].

Известный результат в этой теории - теорема о средневзвешенном избирателе, согласно которой в равновесии оба (или все) кандидаты выберут одну и ту же предвыборную программу. При предположении о том, что предпочтения избирателей относительно личности победившего кандидата одинаковы, программа, занимаемая кандидатами в равновесии, максимизирует суммарный выигрыш всех избирателей. В задаче с двумя кандидатами было показано, что при более общих условиях единственное равновесие, которое может существовать - это когда политические программы кандидатов одинаковы [62]. При помощи численных методов было

показано, что другие, несимметричные равновесия могут существовать, если число кандидатов (или партий) больше двух [63, 54]. Однако, свойства таких несимметричных равновесий известны только в очень ограниченной мере. Например, Скофилд [64] показал, что в модели с несколькими кандидатами и многомерным пространством альтернатив все политические программы будут лежать на одной прямой. Тем не менее можно утверждать, что вероятностные модели голосования (особенно модели с двумя кандидатами) пока не были способны генерировать равновесия, в которых кандидаты выбирают разные политические программы, и тем более объяснить сравнительную статистику такого равновесия.

Большая часть вероятностных моделей предполагала наличие политических агентов, максимизирующих математическое ожидание числа голосов, что соответствует линейной функции полезности. Оставшиеся работы предполагали ступенчатую функцию полезности. Эквивалентность поведения кандидатов при этих двух предположениях привлекла внимание ряда исследователей. Хинич [57] аргументировал в пользу стратегической эквивалентности этих двух предположений при евклидовых предпочтениях избирателей. Однако Пэтти [65, 66] показал, что при более общих предположениях относительно функций вероятности голосования, функции отклика для политических агентов, максимизирующих вероятность победы, отличаются от функций отклика агентов, максимизирующих математическое ожидание голосов. В недавней работе [67] Захаров показал, что для вероятностной модели голосования с двумя кандидатами политические программы в равновесии совпадают если только если выполняются достаточно сильные условия симметричности на целевые функции кандидатов. И ступенчатая, и линейная функция удовлетворяют этим условиям, а большинство других функций, в том числе и все выпуклые функции, не удовлетворяют.

Данная работа являлась продолжением предыдущей. В работе [67] доказывалось несуществование равновесия с одинаковыми предвыборными программами при несоблюдении условий симметричности функций полезностей. В настоящем исследовании было найдено несимметричное равновесие, и проведен анализ сравнительной статистики. Аналитически это делается для простейшего случая с двумя избирателями. Численные методы используются для большего числа избирателей. Основной результат состоит в выявлении взаимосвязи между политическими программами кандидатов, их целевыми функциями, и степенью симпатии отдельных групп избирателей к кандидатам - так называемой валентности.

Валентность одного кандидата может быть разной для разных групп избирателей. Одни избиратели могут считать кандидата более компетентным, другие - менее компетентным. Существует несколько источников такой неоднородности. Во-первых, это партийная идентификация. Исследования электорального поведения в США показали, что партийная идентификация - наиболее значимый фактор, влияющий на голоса избирателей, даже если

контролировать идеологические и политические предпочтения избирателей [68]. Существует противоречивые данные относительно того, как меняется со временем партийная идентификация избирателей и ее магнитуда ее влияния на электоральное поведение [69]. Во-вторых, это предрасположенность какой-то конкретной этнической, культурной, или религиозной подгруппы к данному кандидату или к данной партии. Например, в США многие афро-американские избиратели предпочитают кандидатов Демократической партии, даже если контролировать такие факторы, как политические предпочтения и доход [70]. Третья причина - многомерная природа валентности. Например, двух кандидатов могут воспринимать как имеющих разные черты характера: один может быть «умным» другой «сильным». Те избиратели, которые считают, что ум - более важное качество, будут иметь более высокую валентность в отношении первого кандидата; другая группа избирателей - в отношении второго. Этот феномен тесно связан с так называемым *issue ownership*, когда отдельные политические партии рассматриваются избирателями как имеющие компетенцию в реализации тех или иных аспектов политики (внешняя политика, борьба с преступностью, и т.д.). В работе [71] было показано, что численный эффект таких предпочтений может быть сильнее, чем эффект предпочтений относительно традиционных пространственных вопросов - таких, например, как налоги. Данная работа прогнозирует существование причинно-следственной связи между валентностью кандидатов, их предпочтениями, и их предвыборными программами. Показано, что если целевые функции кандидатов в достаточной степени выпуклы, то они будут выбирать политические программы, расположенные достаточно близко к наилучшим альтернативам предпочитающих их избирателей. Если целевые функции вогнуты - например, если существует дополнительный стимул победить с большим отрывом - то тогда каждый кандидат будет выбирать программу ближе к наилучшей альтернативе избирателей из противоположной группы. При увеличении валентности этот эффект усиливается.

Результаты исследований отражены в следующих опубликованных или подготовленных к публикации текстах:

- Zakharov A., Marakulin V. On the equivalence of some solution concepts in probabilistic voting models. (препринт, будет опубликован в серии WP7 препринтов ГУ-ВШЭ).
- Zakharov A., Fantazzini D. Euclidian or city-block? Estimation of voter preferences in a multi-dimensional probabilistic voting model (в работе).
- Zakharov A. Probabilistic voting equilibria under alternative candidate payoff functions. (направлено для публикации в журнал *Social Choice and Welfare*).
- Zakharov A. Non-convergence in two-candidate probabilistic voting model (направлено для публикации в журнал *Journal of Theoretical Politics*).

• Schofield N., Claasen C., Ozdemir U., Zakharov A. 2010. Estimating the effects of activists in two-party and multi-party systems: comparing the United States and Israel. (направлено для публикации в журнал Social Choice and Welfare).

• Schofield N., Zakharov A. A stochastic model of 2007 Russian Duma election // Public Choice. 2010. V. 142 (1-2). P.177–194.

• Schofield N., Claasen C., Ozdemir U., Zakharov A. Application of a Theorem in Stochastic Models of Elections // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2010. P.1—30.

4.2 Стационарные решения в играх на выбывание

Проводилось исследование решений в играх на выбывание. Для данного класса игр доказан принцип однократного отклонения, найдены все стационарные равновесия в чистых стратегиях для дуэльных игр с одновременной стрельбой при игре втроем. По результатам исследований подготовлены к печати следующие публикации:

• Измалков С., Ильинский Д., Савватеев А. Игры на выбывание при одновременной стрельбе (в работе).

• Измалков С., Ильинский Д., Савватеев А. Игры на выбывание. Современные подходы к исследованию и моделированию в экономике, финансах и бизнесе // Материалы конференции Европейского университета в Санкт-Петербурге и Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН. СПб.: Изд-во Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2010.

• Ильинский Д. Исследование игр на выбывание при стрельбе по кругу; поиск условий на «поддержание» мирового соглашения для игры втроем (в работе).

• Измалков С., Ильинский Д., Савватеев А. Игры на выбывание при стрельбе по кругу. (в работе).

5. Исследование индексов влияния

5.1 Индексы влияния как элементы проективного пространства. Распространение "проективной" аксиоматики индексов Банцафа и Шепли-Шубика на индексы, зависящие от предпочтений участников процесса принятия коллективных решений

Основной задачей теории индексов влияния (power indices theory) является измерение реального воздействия участников на процесс принятия коллективных решений. Классические статьи по данной теме были опубликованы в 1950–70-х гг. [72–75] Было предложено несколько мер влияния, имеющих определенные «хорошие» свойства или удовлетворяющих ряду «естественных» аксиом, однако ни одна не стала универсально используемой.

Большинство индексов влияния определены так, что сумма влияний всех игроков равна единице. Это условие обычно вводится принудительно, т.е. реальный интерес представляют не

абсолютные, а относительные значения индексов влияния. Поэтому индексы влияния можно определить с точностью до пропорциональности, т.е. как элементы проективного пространства.

Исследование, проводившееся в рамках настоящего проекта, было посвящено развитию этого подхода. Основой для него стало несколько довольно очевидных наблюдений. При вычислении многих индексов влияния (Банцафа, Джонстона, Дигена-Пакела, Холера-Пакела) вначале считается так называемый "общий индекс", а сам соответствующий индекс влияния получается из него нормированием, т.е. делением на такое число, чтобы сумма влияний всех игроков стала равна единице. Иначе говоря, в индексах влияния используются относительные значения. Если в ситуации голосования с квотой умножить число голосов всех игроков и квоту на одно и то же положительное число, новое голосование с квотой будет задавать ту же простую игру, что и старое. Интенсивности предпочтений участников во многих случаях также могут быть определены с точностью до пропорциональности, поскольку от умножения всех интенсивностей на одно и то же число отношения влияния игроков не изменится, поэтому их можно определить с точностью до пропорциональности, т.е. как элементы проективного пространства.

В этом случае можно не различать общий и нормированный индексы и таким путем избавиться от первого недостатка. При этом аксиома общей суммы становится не нужна.

В результате исследования построены "проективные" аксиоматики для индексов влияния, зависящих от предпочтений участников, и, как следствие, для индекса Банцафа. В частности, построена первая аксиоматика для нормированного индекса Банцафа. Также был предложен общий подход к описанию индексов влияния, учитывающих предпочтения, которые были предложены Ф. Алескеровым. Построены две аксиоматизации таких индексов. Получены новые наборы аксиом для этих индексов, в частности, не содержащие аксиомы анонимности. Конструкция аксиом обобщает аксиоматики А. Ларуелля и Ф. Валенсиано для индексов Банцафа (Пенроуза) и Шепли-Шубика.

По результатам исследования опубликованы и подготовлены к публикации следующие тексты:

- Шварц Д.А. Аксиоматика для индексов влияния, учитывающих предпочтения участников // Автоматика и Телемеханика. 2010. №1. С. 144-158.

- Шварц Д.А. Индексы влияния, как элементы проективного пространства (готовится к публикации).

5.2 Построение аналогов известных аксиоматик индексов влияния для случая голосования с квотой

Исследовалась возможность распространения "проективной" аксиоматики для индексов Банцафа и Шепли-Шубика на индексы, зависящие от предпочтений участников и построением аналогов известных аксиоматик для индексов влияния для случая голосования с квотой. В итоге

исследования удалось расширить область применения проективного подхода к индексам влияния и упростить доказательства.

Большинство встречающихся в жизни схем голосования являются или могут быть записаны как голосования с квотой. Но аксиоматики для индексов влияния, определенных на простых играх напрямую не переносятся на голосования с квотой, поскольку используемые в них операции в этом случае определены некорректно. Тем не менее большую часть аксиоматик можно адаптировать для голосований с квотой.

Проблеме аксиоматического задания индексов влияния посвящено множество работ. С другой стороны, большинство существующих схем голосования являются (или могут быть описаны как) голосования с квотой. Встает вопрос - как аксиоматически задать индекс влияния на этом классе правил принятия решения.

Непосредственно перенести любую из рассмотренных этих или других известных аксиоматик на случай голосований с квотой не удастся, поскольку в отличие от простых игр, на которых исходно определяются индексы влияния, множество голосований с квотой не замкнуто относительно многих операций (объединение, пересечение, вычеркивание коалиции).

Была построена аксиоматика для индекса влияния Банцафа, адаптированная для голосований с квотой. В этом исследовании были введены несколько новых аксиом, формулировки сложнее, чем в аксиоматиках для индекса Банцафа для простых игр.

Конструкция интересна сама по себе, но оказалось, что многие (а на самом деле - большинство) аксиоматик можно адаптировать для голосований с квотой, просто дописав в нужных местах фразу "если результат операции тоже будет голосованием с квотой".

Столь же просто удастся переформулировать для голосований с квотой и аксиоматики для нововведенных индексов влияния, зависящих от предпочтений участников.

В рамках данного исследования не было возможным переформулировать и передоказать утверждения для всех возможных аксиоматик. Однако это несложно сделать. В исследовании это было сделано для аксиоматики Дуби-Шепли, для индекса Банцафа и одной из аксиоматик индексов влияния, зависящих от предпочтений участников.

Анализ возможности построения аксиоматик для индексов влияния, ограниченных голосованиями с квотой показывает, что эта задача не обещает интересных результатов. Дело в том, что все известные индексы влияния однозначно задаются, например, множеством выигрывающих коалиций и никакой специфики голосований с квотой не используют.

С другой стороны, настоящее исследование показывает, что аксиоматики для индексов влияния в случае голосований с квотой можно получать простой переформулировкой аксиом.

По результатам исследования подготовлен к публикации следующий текст:

- Шварц Д.А. Аксиоматики для индексов влияния в задаче голосования с квотой (готовится к публикации).

5.3 Построение аксиоматики обобщенных индексов Шепли-Оуэна

В данном исследовании была построена аксиоматика обобщенного индекса Шепли-Оуэна [76], введенного Алескером и Очур [77].

Рассматривалась абстрактная кооперативная игра, связанная с голосованием. Игроками являются кандидаты, которые должны победить на выборах, выдвинув политическую программу. Множество альтернатив (политических позиций), доступных каждому кандидату, однозначно соответствует множеству точек в метрическом пространстве. Предпочтения избирателя, выбирающего между кандидатами, зависят от расстояний до позиций кандидата от идеальной точки (политической позиции избирателя). Также предполагается, что формирование коалиций зависит от политических позиций кандидатов. Поэтому распределение идеальных точек голосующих влияет на величину индекса. Задача кандидата – нахождение политической позиции, при выборе которой вероятность поражения минимальна. Шепли и Оуэн доказали, что такой позицией является центр власти, совпадающий с сильной точкой. В данном исследовании аксиоматизируются три типа обобщенных индексов влияния, основанных на данной модели.

По результатам исследования подготовлен к публикации следующий текст:

Алескер Ф.Т., Левкина М.Б. Аксиоматика обобщенных индексов Шепли-Оуэна, учитывающих доли голосов каждой партии (в работе).

6. Применение методов и моделей теории выбора для анализа социально-экономических институтов и практик

6.1 Исследование деятельности банков с помощью методов и моделей теории выбора

6.1.1 Анализ эффективности издержек российских банков

В рамках применения методов теории коллективного выбора для исследования реальных социально-экономических процессов проводились анализ эффективности издержек российских банков, определение сравнимых по размеру групп банков; выявление влияния размера, структуры активов и пассивов российских банков, их структуры собственности, уровня достаточности капитала и финансового посредничества на эффективность работы банков, определение влияния уровня социально-экономического развития регионов России на уровень издержек российских банков, исследованием связи между типом управления коммерческим банком и эффективностью его функционирования в 2008 г., определением бизнес-моделей крупных и средних российских коммерческих банков до и после глобального финансового кризиса 2007 г. (до 2009 г.). В результате была сформирована база данных по показателям функционирования коммерческих банков и по индикаторам социально-экономического развития регионов России за период с 2006-2009 гг., выделены однородные группы российских банков в зависимости от удельного веса,

оценен уровень эффективности российских банков, показано влияние размера банка, структуры активов и пассивов, участия иностранного инвестора в капитале и наличия доступа к государственным средствам на эффективность издержек банков, сравнимых по размеру, выявлены наиболее распространенные бизнес-модели крупных и средних российских банков, характерные в предкризисный и послекризисный период времени.

Также в ходе исследования была подготовлена база данных показателей деятельности банков, проведен статистический анализ показателей деятельности банковской системы РФ с 2006 по 2009 г. и осуществлена кластеризация множества бизнес - моделей российских банков за указанный период.

Предметом исследования являлась связь между типом управления коммерческим банком и эффективностью его функционирования. Тип управления определяется на основе модели формального влияния акционеров на процесс принятия решений, учитывающей предпочтения по формированию коалиций. Уровень эффективности банка оценивается путем построения границы эффективности в форме издержек. Показано, что чем больше суммарное влияние двух крупнейших акционеров, тем более эффективен банк в управлении издержками.

Одной из важных задач корпоративного управления организацией, особенно финансовой, является способ определения качества управления. Под корпоративным управлением принято понимать систему функционирования компании, посредством которой достигаются цели компании и осуществляется их мониторинг, т.е. управление компанией. Управление включает в себя совокупность взаимоотношений между менеджментом, советом директоров, собственниками и другими заинтересованными лицами компании.

В настоящем исследовании оценивается управленческая способность менеджмента банка принимать оптимальные решения в вопросе выбора банковских продуктов и использования факторов производства — так называемая эффективность издержек банков. В этом случае границей эффективности является минимально возможный уровень издержек российского коммерческого банка с учетом рискованности проводимых им операций.

Первой и пока единственной попыткой изучить влияние качества корпоративного управления на стоимость российских банков, оцененную по показателю Q Тобина, является работа В. Бокова и А. Верникова [78], в которой помимо структуры и размера совета директоров дополнительно оцениваются качество аудиторов, уровень концентрации акционеров банков (доля трех крупнейших собственников), стабильность правления и совета директоров и др. Ограничением использования результатов указанной работы является весьма малый размер выборки, на основании которой были получены результаты, — 10 банков.

В настоящем исследовании типы управления рассматривались с иной точки зрения, нежели было представлено выше, а именно, использовалась оценка формального влияния акционеров с

учетом их предпочтений по формированию коалиций. В основе данного подхода лежит теория влияния участников голосования.

Практическое приложение теории индексов влияния участников голосования к корпоративному управлению началось с работы [79], где был предложен подход к определению степени контроля над фирмой, учитывающей не только долю акций крупнейшего акционера, но и распределение акций между остальными акционерами (дисперсию владения). Разработанная методология была применена для оценки степени контроля в крупных компаниях Великобритании [80-82].

В настоящем исследовании российские коммерческие банки были проклассифицированы по степени контроля их акционеров, которая определяется на основе индексов влияния с учетом предпочтений, предложенных Ф.Т. Алескеровым [83].

Таким образом, настоящее исследование находится на стыке нескольких направлений исследований: теории оценки граничной эффективности, методов оценки влияния акционеров с учетом их предпочтений по формированию коалиций и теории фирмы.

Расчет оценки коэффициентов функции издержек и среднего уровня неэффективности коммерческого банка за рассматриваемый период показал, что основным значимым фактором, который приводит к высокому уровню издержек и соответственно к низкой эффективности, является рост номинальной заработной платы банковских служащих, то есть повышение тех издержек, которые связаны с перегревом экономики.

Анализ банков по степени контроля, определяемой на основе индексов влияния, показал, что наиболее часто влияние группы крупнейших акционеров растет с увеличением размера группы, начиная от 20% для единственного крупнейшего акционера и превышая 60% для группы из трех крупнейших акционеров. Что касается индексов Пенроуза, наиболее частым случаем является влияние крупнейшего акционера порядка 0,4, 0,5 (в сумме 48% выборки) и 0,7 (20% выборки). С учетом вероятностной интерпретации индекса это означает, что распределение вероятности крупнейшего по величине акционера оказаться ключевым при голосовании близко к бимодальному. Второй по величине акционер также играет существенную роль, что демонстрируется довольно большой вероятностью оказаться ключевым, равной 0,4 (56% выборки) или 0,5 (20% выборки).

Имеется различие между распределениями, полученными с помощью классических индексов влияния и с помощью индексов, учитывающих предпочтения. В частности, последние приписывают большее влияние блокам из двух и трех акционеров, чем соответствующие нормализованные индексы Банцафа. Принимая во внимание результаты анализа и тот факт, что типичная структура владения российским банком обычно основана на двух крупных

собственников, мы делаем вывод о том, что эти акционеры имеют примерно одинаковую степень контроля, составляющую около 50% общего влияния.

На втором этапе исследования оценивались парные регрессионные зависимости между уровнем неэффективности издержек и степенью контроля крупнейших акционеров банков. Наравне с индексами влияния в качестве независимых переменных были рассмотрены индикаторы концентрации акционерной собственности (CR3, CR4, ННІ) и их модификации, например корректировка ННІ на долю крупнейшего акционера, учет концентрации капитала миноритарных акционеров и др. Кроме этого, в качестве дополнительных объясняющих переменных использовались индексы влияния, скорректированные на долю крупнейшего акционера или долю второго по величине собственника банка или же на их суммарную долю. Последняя представляет собой соотношение между степенью влияния двух крупнейших акционеров и их суммарной долей при принятии решений по правилу простого большинства.

Уровень среднегодовой неэффективности функционирования коммерческих банков был рассчитан на основе квартальных значений граничной неэффективности по издержкам, которая оценивалась как по моделям TI, так и по моделям TVD стохастической границы.

Также протестирована гипотеза о согласованности результатов оценки уровня эффективности коммерческих банков, полученных при использовании различных методов оценки: пара- метрических, к которым относятся модели стохастической границы (TI и TVD), и традиционных индикаторов (CIR (cost to income ratio), ROA, ROE). Для этой цели была рассчитана величина ранговой корреляции между данными показателями эффективности и проверена ее статистическая значимость. Оказалось, что модели TI и TVD дают согласованные оценки уровня эффективности банков (ранговый коэффициент корреляции между ними наибольший и достигает 0,99). Показатели прибыльности тоже характеризуются высоким уровнем ранговой корреляции, равным 0,91. При этом наблюдается довольно слабая отрицательная ранговая корреляция между CIR и ROA (-0,33). Однако ранговая корреляция между параметрическими методами оценки эффективности и традиционными показателями эффективности отсутствует. Это можно объяснить тем, что, в отличие от граничной эффективности, традиционные показатели эффективности не учитывают индивидуальный выпуск банка, цены ресурсов и другие экзогенные факторы, с которыми сталкиваются коммерческие банки, в том числе уровень принимаемых ими рисков.

Статистической зависимости между размером неэффективности банков и уровнем концентрации акционерной собственности выявлено не было, однако оказалось, что значимый эффект на величину неэффективности оказывает степень влияния крупнейших акционеров. Степень влияния акционеров банка определялась с помощью индекса Банцафа (β_i), а также индексов влияния с учетом предпочтений.

Типичная структура владения российским банком обычно основана на двух крупных собственниках — эти акционеры имеют примерно одинаковую степень контроля, составляющую около 50% общего влияния.

Полученные результаты показывают, что чем выше степень влияния двух крупнейших акционеров с учетом их доли в капитале банка, тем более эффективен банк в управлении издержками. Можно предположить, что с ростом пакета акций и влияния, которое получают крупные собственники банка, контроль с их стороны за деятельностью менеджмента банка становится более жестким и эффективным. Соответственно сокращаются издержки, которые могут возникать в результате неоптимального или оппортунистического поведения менеджмента банка. Это, в свою очередь, повышает эффективность функционирования банка при управлении издержками.

Полученные результаты необходимо интерпретировать с осторожностью, поскольку объем итоговой выборки составил только 45 наблюдений по крупнейшим коммерческим банкам.

Получены предварительные результаты оценки зависимости между эффективностью банков и степенью влияния их крупнейших акционеров.

Первой работой по выявлению крупнейшего собственника российских коммерческих банков был обзор, подготовленный коллективом журнала Forbes в апреле прошлого года. Настоящее исследование, таким образом, представляет собой развитие этой тематики не только путем выявления уровня концентрации акционерной собственности банков, но и путем расчета степени влияния крупнейших акционеров банков и эффективности издержек.

В итоге был получен ряд значимых результатов. Во-первых, выявлены два основных типа владения крупнейшими коммерческими банками: банки, находящиеся в абсолютном владении единственного акционера, и банки, которые принадлежат двум блокхолдерам. Таким образом, совместно блокхолдеры получают абсолютный контроль над банком.

Во-вторых, практически для всех из топ-100 банков наблюдается высокая концентрация акционерного капитала. Подобная структура рынка акционерного капитала близка к монопольной, на которую приходится 55% всех наблюдений. Возникающая в результате такой концентрации монополистическая конкуренция на рынке акционерного капитала свойственна только 25 банкам. Свободная конкуренция при этом не превысила порог в 10%. Данная черта отличает российские коммерческие банки от банков развитых стран, например Великобритании, США, где широко распространена распыленная структура собственности.

Наконец, гипотеза о том, что банки с более концентрированной структурой собственности менее эффективны, не нашла статистического подтверждения. На выборке в 45 банков наблюдается отрицательная зависимость между неэффективностью функционирования банков и

степенью влияния крупнейших собственников коммерческих банков, скорректированной на пакет акций, который находится в их совместном владении.

Данная модель может быть дополнена и другими индикаторами, характеризующими финансовую и экономическую эффективность функционирования коммерческого банка, в частности, путем анализа коэффициента перераспределения ресурсов между контрагентами через банки или коэффициента трансформации. В качестве перспективных направлений дальнейших исследований может быть выделен анализ степени влияния акционеров с учетом их принадлежности к различным формам собственности (например, частной и государственной, государственной и нерезидентов, нерезидентов и частной собственности).

Результаты исследования были отражены в публикациях:

- Алескеров Ф.Т., В.Ю. Белоусова, И.В. Ивашковская, К.Б. Погорельский, А.Н. Степанова. Анализ эффективности издержек и распределения влияния между акционерами банка // Управление в кредитной организации. I: 2010. №2 (54). С.49-63; II: 2010. №3 (55). С.30-38.

- Белоусова В.Ю. Эффективность издержек российских банков: факторы роста // Управление в кредитной организации. 2011. № 1 (59). С. 64-78.

- Белоусова В.Ю. Моделирование границы эффективности российских банков по издержкам: вопросы методологии // Лизинг. 2011. № 1.

6.1.2 Динамический анализ паттернов поведения российских банков

Исследование банков России включало динамический анализ паттернов их поведения. Новый этап данного анализа был связан с модификацией системы используемых показателей. Был проведен кластерный анализ банков по отдельным показателям во времени, оценены эффективность российских коммерческих банков в 2008 г. и взаимосвязь между эффективностью банков и их структурой собственности.

В связи с кризисом 2009 г. российская экономика пережила неожиданно сильный экономический спад. Падение относительно других развитых и развивающихся стран было намного значительнее. Рост активов банковского сектора за 1 квартал 2009 г. сократился по сравнению с предыдущим годом почти в 4 раза (1,8% вместо 6% в 2008 году), совокупный финансовый результат кредитных организаций составил 58,3 млрд. руб., что в 2,3 раза ниже соответствующего показателя в 1 квартале 2008 г.

В условиях растущего рынка исследования поведения банков были сфокусированы в первую очередь на том, как они будут расти, в каком направлении развиваться, какие использовать ресурсы и как это может повлиять на их состояние в будущем. В период кризиса, когда внешние условия совершенно противоположны: экономический рост сменился спадом, доступ к дешевым ресурсам из-за рубежа отсутствует, рынок межбанковских кредитов практически не работает, и банки столкнулись с огромными проблемами с уже выданными кредитами, показатели

устойчивости и надежности становятся приоритетными для оценки коммерческого банка как финансового посредника, а динамический анализ может дать ответы на вопросы, которые в рамках обычного статистического исследования остаются неохваченными.

Финансовый кризис неизбежно приводит к потерям, как на уровне общества, так и на уровне отдельных организаций. Нестабильность функционирования отдельных элементов банковской системы в такой период особенно опасна. Однако именно на основе анализа информации о поведении банков до кризиса в сравнении с кризисным периодом можно делать выводы о наличии в системе неустойчивых элементов, вносящих наибольшую нестабильность. Анализируя такой период, когда условия функционирования банковского сектора резко меняются (доступ к дешевым ресурсам из-за рубежа ограничен, падает спрос на кредитные ресурсы, снижается доверие к банкам), а финансовые организации должны достаточно оперативно реагировать на эти изменения, намного проще выявить системные проблемы, характерные для российских коммерческих банков сегодня.

В частности, в данном исследовании была сделана попытка учета таких факторов, как неадекватная оценка рисков заемщиков, что выражается в неполном формировании резервов под возможные потери по ссудам и приводит к росту просроченной задолженности с последующей необходимостью уменьшать текущий финансовый результат в связи с доформировыванием резервов; недостаточный объем капитализации российского банковского сектора; низкий уровень развития рынка ценных бумаг; возможное возникновение разрывов текущей ликвидности в результате несоответствия срочности активов и пассивов.

В данной работе объединены два направления исследования: динамический анализ паттернов поведения банков и анализ банков в период кризиса.

Проведение динамического анализа паттернов включает в себя решение двух последовательных задач: кластеризацию банков в соответствии со структурой их операций; выявление паттернов развития и формирование динамических групп (каждому кластеру ставится в соответствие уникальный паттерн), на основе динамики которых за все рассматриваемые периоды выявляются сходные траектории развития.

Паттерном называется совокупность значений показателей системы CAMEL, характеризующих определенную в рамках кластерного анализа группу банков. Фактически каждому кластеру соответствует определенный уникальный паттерн, который будет представлять собой среднее значение показателей для всех банков входящих в данный кластер.

Для оценки тенденций развития банковского сектора и выявления долгосрочных тенденций развития банков подобный анализ проводится для всей совокупности объектов. По результатам анализа для каждого банка за весь промежуток времени выделяется траектория его развития (рис. 6.1).

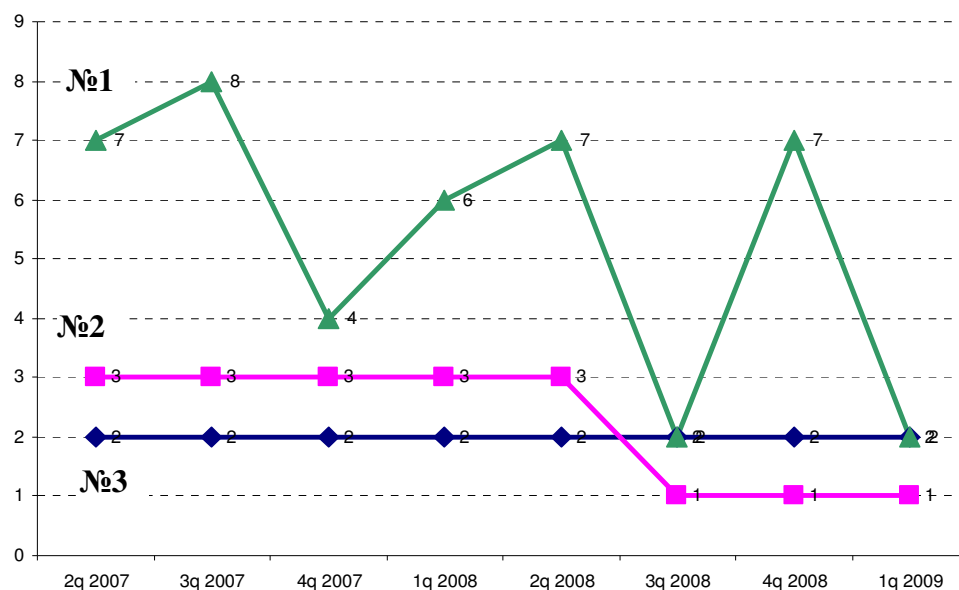


Рисунок 6.1 - Примеры выявленных динамических траекторий

Под *траекторией развития* банка понимается упорядоченная совокупность номеров паттернов, каждый из которых определяет функционированием банка в соответствующий период времени [84, 85].

В данном исследовании методология проведения кластерного анализа использовалась для изучения динамики развития российского банковского сектора в период с апреля 2007 года по март 2009 года (8 квартальных периодов).

Классификация банковских кредитных организаций проводилась в соответствии с системой изменяющихся во времени показателей, которые с разных сторон характеризуют деятельность банка. В частности, наиболее полное представление о деятельности банка можно составить на основе модели CAMEL [86-88] предоставляющей корректную оценку различных аспектов финансового института как традиционного банка.

Для выбора ключевых показателей в рамках модели CAMEL был проведен анализ различных показателей на некоррелированность по тем банкам, по которым имела вся информация. В качестве порогового значения парного коэффициента был выбран уровень 0,75. В результате была сформирована следующая система финансовых коэффициентов, отвечающих модели CAMEL (табл. 6.1).

Таблица 6.1 - Система финансовых коэффициентов, отвечающих модели CAMEL

Показатель	Коэффициент
Достаточность капитала (C)	Собственный капитал/Валюта баланса
Качество активов (A)	Просроченная задолженность/Кредиты НБС
Качество управления (M)	Депозиты НБС/Кредиты НБС
Прибыльность (E)	ROAE
Ликвидность (L)	НЗ

Источником информации о количественных параметрах, используемых для расчетов, послужила база данных Центра экономического анализа «Интерфакс» и данные с сайта Банка России.

Кластерный анализ был проведен для 366 банков на временном интервале, включающем 8 кварталов: с апреля 2007 года по март 2009 года. Применение рассмотренной выше методологии позволило выделить 30 паттернов поведения российских коммерческих банков.

Разброс банков по паттернам достаточно велик (рис. 6.2). При этом первые по численности 10 паттернов включают 92,62% всех объектов. Каждый из первых 4 паттернов содержит более 7% наблюдений, а в сумме на них приходится 72,88% объектов. Такое распределение банков по паттернам говорит о том, что, несмотря на большие значения общего количества банков в российском банковском секторе, существует весьма небольшое число наиболее распространенных типов поведения.

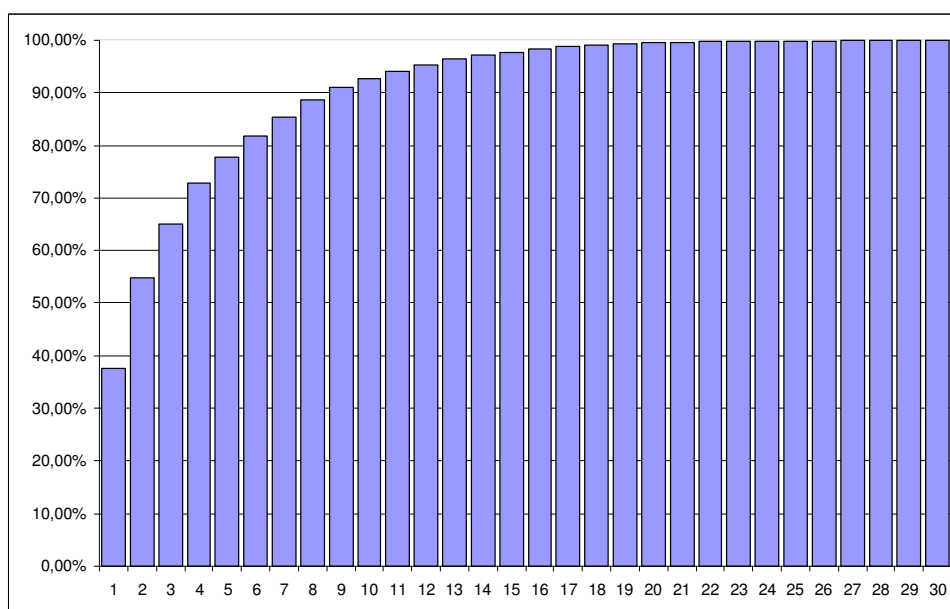


Рисунок 6.2 - Распределение российских коммерческих банков по паттернам

В Таблице 6.2 приведены характеристики 4 доминирующих паттернов, показатели по которым отображены на рисунке 6.3.

Таблица 6.2 - Характеристики 4 доминирующих паттернов

№ паттерна	С	А	М	Е	Л
1	0,1816	0,0169	0,6953	0,0557	0,7985
2	0,2088	0,0237	0,3499	0,1116	1,5818
3	0,1874	0,0146	1,1127	0,0879	0,6444
4	0,1764	0,0172	0,5086	6,4848	0,8562

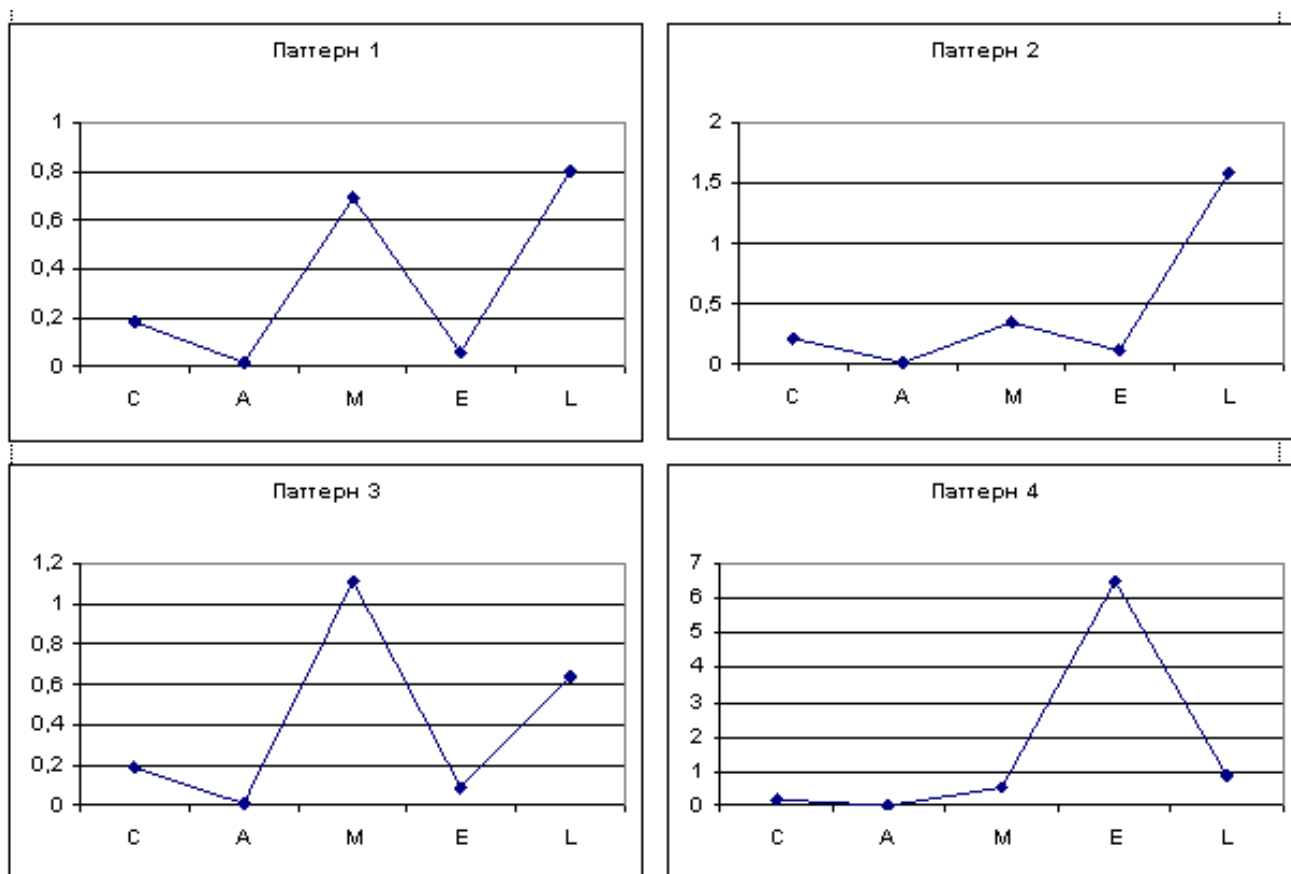


Рисунок 6.3 - Компоненты системы CAMEL для 4-х наиболее распространенных паттернов

В соответствии с проведенной кластеризацией и выявлением динамических траекторий развития коммерческих банков можно определить 4 группы банков в зависимости от частоты смены ими паттернов поведения (табл. 6.3).

Таблица 6.3 - Частота смены банками паттернов поведения

Группы	Количество смен паттернов (из 8)	Количество банков	Доля банков
Абсолютно устойчивые	0	15	4%
Полуустойчивые	1-2	70	19%
Неустойчивые	3-4	135	37%
Абсолютно неустойчивые	5-7	146	40%

Таким образом, можно сделать вывод, что большая часть российских коммерческих банков за последние 8 кварталов попадает в категории неустойчивых и абсолютно неустойчивых (суммарно около 77% всех банков). Около 23% банков можно отнести к устойчивым категориям. При анализе банков в группах, сформированных по типам устойчивости, важно обратить внимание на наличие «аномальных» моделей развития. В данном случае под «аномальностью» понимается несоответствие структуры операций банков с возможностями долгосрочного устойчивого развития (без существенных проблем с ликвидностью, достаточностью капитала) в сочетании с поддержанием приемлемого для собственников уровнем прибыльности.

Анализ группы абсолютно устойчивых банков

Всего в данную группу попадает 15 банков, которые на протяжении всего рассматриваемого периода ни разу не меняли свой паттерн. К числу таких устойчивых моделей поведения банков относятся паттерны №1, 2, 3, 4.

Паттерн №1: данный паттерна характеризуется достаточно высокими показателями достаточности капитала (более 18%) и запасом ликвидности (значение для паттерна 0,79 при нормативе ЦБ РФ - 0,5). Банки данного паттерна достаточно однородны по своим характеристикам. Всего таких банков 7, большинство – это банки второй-третьей сотни, достаточно крупные игроки на региональных финансовых рынках, но не обладающие значительными ресурсами для содержания и развития филиальной сети, их деятельность сконцентрирована в основном в одном из «нестолчных» регионов России. Некоторые из таких банков в рейтинге РБК входят в число 100 самых «клиентских» банков (например, СДМ-банк), остальные несколько ниже, но также используют средства физических лиц в качестве ресурсов, размещая их затем в кредиты.

Паттерн №2: достаточность капитала высокая (20,87%), что совершенно не сказывается на прибыльности. Наоборот, рентабельность операций возрастает более чем в 2 раза по сравнению с 1 паттерном. Также стоит отметить очень высокий уровень избыточной ликвидности (НЗ более чем 1,58), что может быть связано либо со спецификой проводимых операций, либо с неустойчивостью пассивов банков.

На протяжении рассматриваемого периода данный паттерн устойчиво характерен для 3 банков. Два из них входят в сотню крупнейших по размеру активов российских банков (Центрокредит банк и Банк Сосьете Женераль Восток), третий – банк Первомайский, весьма крупный банк, основная деятельность которого сосредоточена в регионах. Банки данного паттерна активно развиваются как универсальные клиентские банки с инвестиционной направленностью, поэтому в структуре их операций традиционные банковские услуги постепенно замещаются более рисковыми, но при этом и более доходными.

Паттерн №3: характеризуется высокой достаточностью капитала и очень высоким отношением полученных депозитов к кредитам (более 1,11). Такое распределение характеристик не характерно для банков, ориентированных на предоставление классических банковских услуг широкому кругу лиц.

Паттерн №4: достаточно средние показатели достаточности капитала и отношения депозитов к кредитам, сочетаются с высоким уровнем ликвидности (0,85) и огромным значением показателя прибыльности (648, 48%). Причем этот паттерн показал, что он является достаточно распространенным, а для 4-х банков устойчивым на протяжении всего рассматриваемого периода.

Вероятнее всего, для банков данного паттерна с подобной стабильной траекторией характерна ориентация на достаточно рисковое кредитование (высока доля просрочки в

кредитном портфеле – почти 2%) в сочетании с высокодоходными операциями на рынке ценных бумаг (это подтверждает высокое значение коэффициента текущей ликвидности). Все банки, стабильно придерживающиеся данной модели поведения, обладают достаточно небольшими активами, их деятельность в основном сосредоточена в регионах (Дальний Восток и Юг России).

Общий анализ паттернов банков из группы абсолютно устойчивых показал, что только один из них может быть в полной мере отнесен к категории ориентированных исключительно на обеспечение работы реального сектора и удовлетворения потребностей населения в финансовых ресурсах, хотя банки паттернов №1,2,3 неплохо выполняют функции финансовых посредников. Банки этой группы в значительной степени ориентированы на получение прибыли от операций на рынке ценных бумаг и валюты и увеличение спектра предоставляемых услуг. Именно такие банки могут в первую очередь столкнуться с проблемами во время кризиса, когда доступ к международным рынкам капитала с некогда привлекательными условиями заимствования существенно ограничен так же, как и возможности привлечения капитала с внутреннего рынка, а операции с ценными бумагами могут привести к существенным потерям в связи с нестабильностью российского фондового рынка.

Анализ группы абсолютно неустойчивых банков

Всего в данную группу попадает 146 банков, которые на протяжении всего рассматриваемого периода 6-7 раз меняли свой паттерн. Это достаточно разнородные банки. Часть из них является крупными розничными банками (входят в топ-100 по активам и рейтинг РБК «самые розничные банки»), с крупными портфелями кредитов физическим лицам («Банк Русский стандарт» и «Ренессанс-Капитал»), которые колеблются между 1, 2 и 4 паттернами в зависимости от значения показателя качества своего кредитного портфеля (компонент А в системе CAMEL). В зависимости от этого показателя (доля прострочки) и прибыльности данные банки могут менять паттерн (например, на №8, 10, 11 или 14): периодически риски по активам возрастают, что приводит к скачкам достаточности капитала в той или иной степени. Этот процесс сопровождается ростом отдачи на капитал, т.к. вкладываясь в более рискованные активы банки могут получить больший доход за счет более высокой маржи (по потребительским кредитам, например).

Также в группу банков постоянно меняющих паттерн попадают небольшие банки (четвертая сотня и дальше), основная деятельность которых сосредоточена в регионах, специализирующиеся на обслуживании корпоративных клиентов различных отраслей (Морской банк, Дальневосточный банк, Читапромстройбанк). Для них характерны периодические скачки просроченной задолженности (соответственно увеличение показателя качества активов), достаточности капитала и ликвидности, что может быть связано с высокой степенью нестабильности ресурсной базы и зависимостью от деятельности региональных компаний, функционирование которых в значительной степени подвергается действию сезонных факторов.

Общий взгляд на состав и динамику паттернов за рассматриваемый период позволяет говорить о том, что поведение российских банков было весьма неоднородным до кризиса, а после эта дифференциация усилилась еще больше.

С точки зрения стабильности и долгосрочного развития банковской системы страны наиболее опасно существование и устойчивость «аномальных» паттернов и динамических траекторий. Проведенный нами анализ выявил наличие нескольких таких паттернов. В частности, паттерн №4, попадающий в группу Абсолютно устойчивых (для 4 банков на протяжении всех периодов) не может соответствовать нормальному развитию банка. Прибыльность на уровне 600% могут дать лишь сверхрисковые операции, возможно, в сочетании с очень узкой нишевой специализацией, что также усиливает концентрацию рисков на конкретном банке, которая в неблагоприятном случае может привести к убыточности и банкротству банка.

Другой пример, когда для ряда банков наблюдается сочетание в ряде периодов паттерна №4 и паттерна №17, которому соответствует отрицательная прибыльность (убыточность) на уровне - 600%. С практической точки зрения это может быть связано с одновременным ростом просрочки по существующему кредитному портфелю, при сохранении прежних темпов и характера кредитования (высокорисковые сегменты) в сочетании с оттоком вкладчиков, о чем косвенно свидетельствует рост достаточности капитала, обусловленный увеличением доли собственных средств в пассивах.

Также к числу «аномальных» можно отнести паттерны №16, 21 и 27, для которых наблюдаются убытки, хотя и не столь значительные как для паттерна №17. В период кризиса, когда многие банки столкнулись с существенными проблемами с финансовым результатом, убыточность в нескольких кварталах вполне объяснима, однако, ситуация, когда банк на протяжении большинства периодов придерживается подобного паттерна, – неблагоприятный сигнал уже не только для конкретного банка, но и для системы. Для ряда анализируемых банков характерно именно такое поведение: 18 банков (почти 5% от выборки) демонстрируют убытки на протяжении более чем 3 периодов.

Анализ выявил общее для большинства банков повышение волатильности паттернов к концу рассматриваемого периода, что говорит о снижении устойчивости банковской системы в целом. Несмотря на наличие «аномальных» паттернов и траекторий в развитии российского банковского сектора можно говорить об адекватности большей части паттернов.

Большая часть российских коммерческих банков, по меньшей мере, банки 1 и 2-го паттернов, которые суммарно составляют около 54% банковского сектора, ориентирована на предоставление традиционных банковских услуг: либо стабильно придерживается подобной модели поведения, либо со временем выходят на такую траекторию. Данные паттерны являются преобладающими стереотипами поведения банков (число наблюдений 1100 и 507,

соответственно). В целом данные паттерны могут рассматриваться как оптимальные стратегии развития банковского сектора на сегодняшний день, поэтому траектории, выводящие банки на эти паттерны в большинстве случаев являются устойчивыми.

Существует достаточно большое количество банков (около 34%), в траекториях которых появляются паттерны, не характерные для банков, ориентированных на традиционные операции. Так, характеристики паттернов 3, 6, 7, 8, 15 свидетельствуют о том, что деятельность банков в меньшей степени ориентирована на кредитование и в большей степени носит инвестиционный характер. Частота проявления данных паттернов во времени до кризисных событий достаточно велика, так как банки, имея доступ к дешевым ресурсам, часто использовали возможности получения высоких прибылей от операций на рынке ценных бумаг и валюты.

Таким образом, проведение динамического анализа паттернов поведения российских коммерческих банков в период кризиса и до него позволило оценить сходства и различия в динамике функционирования коммерческих банков, выявить особенности функционирования различных типов банков, выявить общие траектории развития, а также идентифицировать банки, которые являются источниками повышенной волатильности банковского сектора.

Результаты исследования отражены в следующих опубликованных и подготовленных к публикации текстах:

- Knurova A. Russian Commercial Banks Behavior during Current Financial Crisis // Proceedings of Eurasia Business and Economics Society Conference. 2010. P.38-39.
- Кнурова А.А. Стереотипы поведения российских коммерческих банков в период кризиса (будет опубликовано в сборнике трудов XI Международной научной конференции по проблемам развития экономики и общества).

6.1.3 Оценка ущерба от операционных рисков в банковской деятельности

В данном исследовании был рассмотрен метод оценки ущерба от совместной реализации трёх типов рисков, основанного на эмпирических данных с помощью распределения Пуассона, проанализирован достаточный уровень резервирования капитала для покрытия операционных рисков при различных видах величины ущерба и различном количестве ущерба, распределённого по нормальному закону и закону Пуассона, проведено сравнение трех моделей расчета величины достаточного капитала для возмещения ущерба от операционных рисков. Предлагается метод расчета величины капитала, достаточного для компенсации ущерба при различных видах ущерба, распределённого по нормальному, биномиальному и закону Пуассона.

Несмотря на растущую сложность внутренних бизнес процессов, информационные технологии позволяют провести более точный учет величины достаточного капитала для компенсации операционных рисков.

«Под операционным риском (ОР) понимается риск, связанный с возможным возникновением прямых или косвенных убытков в результате неадекватных или ошибочных внутренних процессов, действий сотрудников и систем или внешних событий » (цитируется по [89], стр. 185). В частности, ОР могут быть вызваны несанкционированными действиями персонала, недостаточной подготовкой персонала, нечеткой работой технических средств или программного обеспечения. Регулирующие органы, такие как Базельский комитет по банковскому надзору (БКБН), стремясь повысить устойчивость банковской системы, формируют требования к капиталу банков, резервируемого на покрытие операционных убытков. В частности, БКБН было принято соглашение «Международная конвергенция измерения капитала и стандартов капитала: новые подходы» [90] (далее для краткости Базель II). В нем изложена методология расчёта достаточности капитала и минимальные стандарты для покрытия основных видов рисков.

Документы Базель II не детализируют статистическую модель, которая описывает величину ущерба при оценке операционных рисков (которую мы далее называем моделью операционного риска, модель ОР). Модель ОР должна описывать как временные характеристики риска, например, среднее время между событиями риска, так и распределение величины ущерба в случае наступления события риска.

В данной работе анализируется зависимость величины резервного капитала от модели ОР. Сравниваются модели ОР, построенные на базе следующих гипотез распределения величины ущерба: биномиальное распределение, распределение Пуассона, нормальное распределение. В результате исследования описываются обстоятельства, которые обуславливают выбор одной из этих гипотез и показывается, что наиболее адекватно события риска описываются гипотезами 1 или 2, но не 3. Также предлагается также методика расчета величины капитала, достаточного для компенсации ущерба, распределённого по биномиальному закону и закону Пуассона.

При реализации операционной деятельности отделения банка случайным образом наступают события, которые нарушают установленный порядок выполнения банковских операций и приносят ущерб. Наиболее полно описать обстоятельства, сопутствующие каждому событию риска можно указав

- a) тип события риска,
- b) величину ущерба V , т.е. сумму расходов на ликвидацию последствий события риска и упущенной выгоды за время простоя,
- c) предпосылку события риска,
- d) меры регулирования риска.

Изучение большого множества событий риска в различных банковских структурах позволяет сделать вывод о том, что можно выделить несколько групп событий риска, имеющих одинаковые

сценарии, причины и сопоставимые величины ущерба. Каждая группа событий риска может быть описана характеристиками а) – д) и, кроме того,

- е) количеством событий данной группы за время наблюдения (время наблюдения в настоящем исследовании принимается равным 1 году, т.к. наиболее удобные и распространенные формы отчетности банков – годовые отчеты).

Целесообразно объединить события риска, имеющие сходные причины и сравнимую величину ущерба от одного события, в группы событий ОР. Например, в [91] ОР подразделяются на четыре группы: риск персонала, технологический риск, риск физического ущерба, риск взаимоотношений.

Документы Базель – II допускают различные подходы к расчёту операционного риска. В исследовании рассматривались следующие три подхода из [89].

Базовый индикативный подход (BIA, Basic Indicator Approach) – простейший метод, в котором величина капитала для покрытия операционного риска (ORC, Operational Risk Capital) определяется по формуле

$$ORC = k \cdot \frac{1}{3} \cdot GI$$

Здесь GI (Gross income) – суммарная величина положительного валового дохода за последние три года, k – коэффициент резервирования капитала, установленный БКБН на уровне 15%. Данный подход не учитывает специфику деятельности банка, так как игнорирует различия в выборе приоритетного направления развития, тем самым не принимая во внимание различную степень подверженности рискам различных направлений.

Анализ распределения потерь. Подход на основе распределения потерь (LDA, Loss Distribution Approach) предполагает, что вероятность операционных рисков и размер операционных потерь рассчитываются исходя из результатов измерений и наблюдений деятельности данной кредитной организации за достаточно большой промежуток времени. Минимальная величина резервируемого капитала под операционный риск не должна превосходить годовые неожиданные убытки, т.е. величину VaR (VaR – “стоимостная мера риска, выраженная в денежных единицах оценка величины, которую не превысят ожидаемые в течение данного периода времени потери с заданной вероятностью” [91], стр. 247).

Внутренняя оценка. Подход на основе внутренней оценки (IMA, Internal Measurement Approach) предполагает деление всей активности банка на 8 направлений и установление для каждого из них регулирующим органом специальных коэффициентов риска. Уровень риска определяется с учетом коэффициентов, отражающих вероятность наступления убытка и его возможный размер, которые банк рассчитывает самостоятельно исходя из внутренней статистики

операционных убытков (на основе анализа информации, собираемой различными способами на уровне бизнес- и функциональных подразделений финансового учреждения).

Подход к анализу величины достаточного капитала, выбранный при проведении данного исследования, дополняет подход на основе внутренней оценки. Для определения уровня риска и расчета достаточного капитала использовалась внутренняя статистика операционных убытков, составление которой включает следующие этапы: наблюдение (измерение, оценки) рисков данной организации, анализ результатов на основе некоторой модели, формулирование выводов и рекомендаций.

Рассматривались несколько гипотез, описывающих внутреннюю структуру процессов, которые приводят к событиям риска.

Статистическая модель операционного риска. Предполагается, что имеется K групп ОР (K – заданное число), каждой группе присвоен номер $k \in \{1, \dots, K\}$ $k = \overline{1, K}$. Цель исследования – разработка методики расчета величины достаточности капитала для компенсации совокупного ущерба от событий всех групп риска в рамках гипотезы о биномиальном, пуассоновском или нормальном распределении количества событий риска и величины ущерба внутри одной группы.

Пусть T есть протяженность периода наблюдения, величина n_k равна числу событий риска группы k за время T . Предполагается, что n_k есть случайная величина со средним значением $\langle n_k \rangle$ и дисперсией $Dn_k = \langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2$. Величина ущерба от одного события риска k -й группы задана и равна V_k . Результаты данного анализа обобщаются на случай, когда V_k есть также случайная величина с некоторой функцией распределения. Суммарный ущерб от событий риска k -й группы равен

$$Y_k = n_k V_k,$$

суммарный ущерб от событий всех групп равен

$$Y = \sum_{k=1}^K Y_k.$$

Средний суммарный ущерб от событий всех групп за время T равен

$$\langle Y \rangle = \sum_{k=1}^K \langle Y_k \rangle = \sum_{k=1}^K \langle n_k \rangle V_k.$$

Пусть $P_k(m, t, \Delta t)$ есть вероятность наступления ровно m событий риска k -й группы за промежуток времени от t до $t + \Delta t$, причем для всех k

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_k(m, t, \Delta t) = 1$$

Таким образом, набор функций $P_k(m, t, \Delta t)$ вместе с соответствующими величинами V_k является моделью ОР. Предполагается, что при малом Δt величина $P_k(1, t, \Delta t)$ пропорциональна Δt , так что

$$P_k(1, t, \Delta t) = \mu_k(t) \frac{\Delta t}{T} (1 + \alpha_k(t, \Delta t)), \text{ где } \alpha_k(t, \Delta t) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta t \rightarrow 0.$$

При весьма общих предположениях можно вычислить все $P_k(m, t, \Delta t)$, $m \geq 0, m \neq 1$, зная только $P_k(1, t, \Delta t)$. В дальнейшем величина $P_k(1, t, \Delta t)$ обозначается $P_k(t, \Delta t)$.

Предполагается, что события риска разных групп независимы, поэтому дисперсия величины полного ущерба равна сумме дисперсий

$$DY = \sum_{k=1}^K DY_k = \sum_{k=1}^K V_k^2 Dn_k.$$

Модель с релаксацией (биномиальное распределение) Первой была рассмотрена модель, которая адекватно описывает реакцию банка на события риска, сопровождающиеся заметным ущербом. По предположению в соответствии с установленным в данном кредитном учреждении порядком, каждое событие риска в данной группе рисков влечет за собой временное усиление мер контроля со стороны администрации. Такой подход может применяться исключительно к событиям, происходящим редко (не каждый день) и влекущим значимый ущерб.

Администрация осознает, что меры предотвращения требуют значительных дополнительных расходов и не могут быть назначены на постоянной основе. В модели учитываются также особенности, приводящие со временем к снижению внимания со стороны руководства и исполнителей и ослаблению контроля. Поэтому для событий риска данной группы существует определенное время релаксации. На некоторый промежуток времени устанавливается особенный режим, по истечении которого событие вновь становится возможным. Переход от особенного (усиленного) режима к стационарному называется релаксацией.

Простейшая модель релаксации основана на гипотезе об экспоненциальном законе перехода от особенного режима к стационарному. В данном исследовании использовалась упрощенная модель релаксации. Предполагается, что на протяжении промежутка времени τ после события, происшедшего в момент t_0 , следующее событие невозможно, а затем вероятность соответствует стационарному режиму. Используется биномиальная гипотеза, в соответствии с которой на каждом из N промежутков продолжительностью τ каждый, ровно одно событие риска может произойти с вероятностью p и не произойти с вероятностью $q = 1 - p$ соответственно, наступление двух или большего числа событий на протяжении каждого из N промежутков невозможно, события риска на различных промежутках независимы.

Пусть $T = N_k \tau_k$, $q_k = 1 - p_k$, случайная величина $n_k^{(b)}$ равна числу событий риска k -й группы за время T . Основным результатом биномиальной гипотезы состоит в том, что $n_k^{(b)}$ есть случайная величина, имеющая биномиальное распределение, причём вероятность наступления ровно n событий риска за время T равна

$$P(n_k^{(b)} = n) = C_{N_k}^n p_k^n q_k^{N_k - n}, \quad n \in \{0, \dots, N_k\}.$$

Среднее значение случайной величины $n_k^{(b)}$ равно

$$\langle n_k^{(b)} \rangle = N_k p_k,$$

дисперсия равна

$$Dn_k^{(b)} = N_k p_k q_k.$$

Если величину ущерба от одного события риска k -й группы обозначить $V_k^{(b)}$, то среднее значение ущерба от событий риска k -й группы равно

$$\langle Y_k^{(b)} \rangle = \langle n_k^{(b)} \rangle V_k^{(b)} = N_k p_k V_k^{(b)},$$

дисперсия равна

$$DY_k^{(b)} = N_k p_k q_k \left(V_k^{(b)} \right)^2.$$

Модель с пуассоновским распределением. В случае, если события риска данной группы происходят часто, то вместо расследования каждого события предпринимаются мероприятия, уменьшающие вероятность наступления события риска. Эти меры занимают длительное время и не связаны с конкретным событием риска. В данном случае исполнитель А не информируется о событии риска, происшедшем у исполнителя Б. Поэтому наступление очередного события риска в рамках данной модели возможно сразу после предыдущего. События риска этой группы удовлетворяют следующим условиям: вероятность наступления ровно одного события риска за малое время Δt пропорциональна Δt , случайные величины, равные количеству событий, произошедших на неперекрывающихся промежутках времени, независимы.

В этом случае $n_k^{(p)}$ – количество событий риска k -й группы, которые происходят за время T , есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона,

$$P(n_k^{(p)} = n) = \frac{(\mu_k)^n}{n!} e^{-\mu_k}.$$

Известно, что

$$\langle n_k^{(p)} \rangle = \mu_k,$$

$$Dn_k^{(p)} = \mu_k.$$

Ущерб от событий риска k -й группы равен

$$Y_k^{(b)} = n_k V_k^{(p)},$$

среднее значение ущерба равно

$$\langle Y_k^{(p)} \rangle = \langle n_k^{(p)} \rangle V_k = \mu_k V_k^{(p)},$$

дисперсия величины ущерба равна

$$DY_k^{(p)} = \mu_k \left(V_k^{(p)} \right)^2.$$

Модель с нормальным распределением. Если событие риска данной группы подвержено влиянию большого числа случайных факторов, некоторые из которых способствуют совершению события, а другие препятствуют, то количество событий ущерба подчинено закону нормального распределения. Наступление очередного события возможно сразу после предыдущего события (релаксация отсутствует). Плотность распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону,

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(n-a)^2}{2\sigma^2}},$$

среднее значение $\langle n \rangle = a$, дисперсия $Dn = \sigma^2$. Есть две проблемы, которые требуется решить, чтобы использовать нормальное распределение для анализа ОР. Во-первых, в соответствии с моделью ОР, величина n может принимать только целые значения. Во-вторых, величина n может принимать только неотрицательные значения.

Сравнение параметров трех моделей. Для удобства сравнения моделей с биномиальным, пуассоновским и нормальным распределениями предполагается, что их средние значения и дисперсии совпадают. В результате

$$\begin{cases} V_k^{(p)} = (1 - p_k) V_k^{(b)}, \\ \lambda_k T = N_k \frac{p_k}{q_k}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_k^{(g)} a_k = N_k p_k V_k^{(b)}, \\ \left(V_k^{(g)} \right)^2 \sigma_k^2 = N_k p_k \left(V_k^{(b)} \right)^2. \end{cases}$$

Таким образом, величины ущерба от единичного события риска для трех моделей несколько различаются.

Расчет достаточного уровня резервного капитала, соответствующего заданной вероятности того, что величина ущерба не превосходит величины резервного капитала. Для этого требуется функция распределения величины ущерба от событий риска всех групп,

$$F(y) = P(Y < y), \text{ где } Y = \sum_{k=1}^K Y_k.$$

Вычисление основывалось на следующей гипотезе. Предполагается, что каждая пара групп риска, k и m , $k, m \in \{1, \dots, K\}$, $k < m$, удовлетворяет условию $D_k \ll D_m$. Таким образом, ОР группы 1 имеет наименьшую дисперсию, группы K – наибольшую. При сложении ущербов от рисков двух групп, ущерб от риска с меньшей дисперсией можно принять за константу, равную своему среднему значению. При сложении ущербов от рисков нескольких групп, величину резервного капитала для ущерба с меньшей дисперсией можно принять равной его среднему значению, и только для риска с наибольшей дисперсией величина резервного капитала будет больше среднего значения, причем для расчета требуется анализ функции распределения. Если складываются две нормально распределенные величины X_1 и X_2 ,

$$P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-x_{01})^2}{2\sigma_1^2}},$$

$$P_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-x_{02})^2}{2\sigma_2^2}},$$

$$\sigma_1 \ll \sigma_2,$$

то для величины $X_3 = X_1 + X_2$ имеем

$$P_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_3} e^{-\frac{(x-x_{03})^2}{2\sigma_3^2}},$$

где $x_{03} = x_{01} + x_{02}$,

$$\sigma_3 = \sigma_2 \sqrt{1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \approx \sigma_2 \left(1 + \frac{\sigma_1^2}{2\sigma_2^2} \right) \approx \sigma_2.$$

Поэтому для анализа достаточного капитала можно принять

$$P_3(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-(x_{01}+x_{02}))^2}{2\sigma_2^2}} = P_2(x - x_{01}).$$

Аналогичные формулы описывают также сумму биномиальных и пуассоновских величин. Эти рассуждения можно провести для каждой пары ОР разных групп с аналогичным результатом. Ущерб от ОР всех групп, кроме одной, можно принять равным среднему значению ущерба, и только для ОР с наибольшей дисперсией требуется рассматривать ущерб как случайную величину и анализировать функцию распределения.

Т.о. можно рассматривать величину полного ущерба как случайную величину, среднее значение которой равно сумме средних значений,

$$\langle Y \rangle = \sum_{k=1}^K \langle Y_k \rangle,$$

а функция распределения равна

$$F_Y(y) = F_K\left(y - \sum_{k=1}^{K-1} \langle Y_k \rangle\right),$$

где K - номер самого широкого распределения.

Расчет резервного капитала для рисков с малой дисперсией. Рассмотрены следующие группы событий ОР с конкретными значениями показателей: риски, связанные с мелкими ошибками персонала при выполнении операций со вкладами,

$$\langle n_1 \rangle = N = 10000 \text{ событий/год}, V_1 = V_0 = 1000 \text{ руб.};$$

риски, связанные с крупными ошибками персонала при работе с клиентами,

$$\langle n_2 \rangle = \frac{N}{10} \text{ событий/год}, V_2 = 10 \cdot V_0 \text{ руб.};$$

риски, связанные со сбоями компьютерных систем,

$$\langle n_3 \rangle = \frac{N}{100} \text{ событий/год}, V_3 = 100 \cdot V_0 \text{ руб.};$$

риски, связанные с несанкционированными действиями персонала, приводящими к появлению судебных исков,

$$\langle n_4 \rangle = \frac{N}{1000} \text{ событий/год}, V_4 = 1000 \cdot V_0 \text{ руб.};$$

риски крупных злоупотреблений со стороны персонала,

$$\langle n_5 \rangle = \frac{N}{10000} = 1 \text{ событие/год}, V_5 = 10000 \cdot V_0 = 10\,000\,000 \text{ руб.}$$

Для указанных событий пяти групп средние значения ущерба от каждой группы событий рисков равны между собой,

$$\langle n_k V_k \rangle = 10\,000\,000 \text{ руб.}$$

Это означает, что каждая группа рисков вносит примерно одинаковый вклад в средний ущерб от рисков в данном банке. Частота повторения более крупных ущербов значительно меньше частоты повторения менее крупных ущербов.

Необходимо найти величину резервного капитала, которая с вероятностью более 99,99% (в соответствии с подходом LDA) гарантировала бы покрытие суммарного ущерба от рисков всех групп. В соответствии с вышеизложенным, для первых четырех типов риска достаточно зарезервировать капитал, равный среднему значению ущерба.

Если предположить, что риски распределены по закону Пуассона, то среднее значение величины $Y_1 = n_1 V_1$ равно $W_0 = \langle Y_1 \rangle = \langle n_1 V_1 \rangle = 10$ млн. руб., дисперсия $Dn_1 V_1 = 0,1^2$ (млн. руб.)². С вероятностью не менее 99,99% величина Y_1 будет лежать в пределах

$$(\langle n_1 V_1 \rangle - 3,7\sigma, \langle n_1 V_1 \rangle + 3,7\sigma) = (10 - 0,37, 10 + 0,37) \text{ млн. руб.}$$

Т.о. достаточно зарезервировать $W_1 = W_0 \cdot 1,037$ млн. руб., что примерно на 3,7% больше среднего значения. Аналогично, величины достаточного резервного капитала для второй, третьей, четвертой групп равны

$$W_2 \approx W_0 (1 + 0,12),$$

$$W_3 = W_0 (1 + 0,37),$$

$$W_4 = 2,2W_0.$$

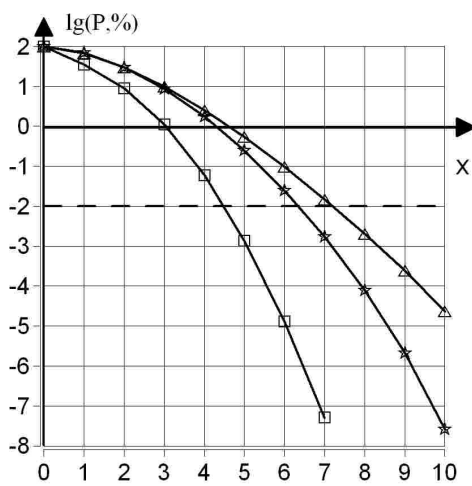
Общий достаточный резервный капитал для первых четырех групп рисков равен

$$W_{1...4} \approx W_0 \left(4 + \sqrt{0,37^2 + 0,12^2 + 0,37^2 + 1,2^2} \right) = 5,315W_0 = 4 \cdot 1,33 \cdot W_0.$$

Т.о. резервный капитал должен быть на 33% больше арифметической суммы средних ущербов, причем эта величина практически не зависит от гипотезы, описывающей распределение ущерба. Для последней, пятой группы риска, требуется более детальный анализ.

Сравнение величины ущербов пятого типа, распределенных по биномиальному, нормальному и пуассоновскому законам. Применяется предложенный Базелем II подход LDA, величина ущерба полагается равной $W_5 = 10$ млн. руб.

На рисунке 6.4 показаны результаты расчета вероятности того, что ущерб от рисков указанного типа превосходит и для значений капитала q в пределах от 1



величину $q \cdot \langle n_k V_k \rangle$ для $k = 5$ коэффициента резервирования до 10.

Горизонтальная ось - q , вертикальная ось – $\lg(P \cdot 100)$. Значение 2 по вертикали соответствует вероятности $P=1$, значение -2 (прерывистая линия) – вероятности $P=0,0001$. \triangle - модель с распределением Пуассона, ∇ - модель с биномиальным распределением, \square - модель с нормальным распределением.

Рисунок 6.4 - Динамика распределения трёх видов ущербов

Из рисунка 6.4 видно, что с вероятностью 99,99% ущерб от рисков с наибольшей дисперсией не превзойдет $7,2 \langle n_k V_k \rangle$ для модели Пуассона, $6,3 \langle n_k V_k \rangle$ для биномиальной модели и $4,4 \langle n_k V_k \rangle$ для модели с нормальным распределением.

Т.о. если ущербы распределены по нормальному закону, то с вероятностью 99,99% достаточная сумма резервного капитала для покрытия ОР равна $Var^{(g)} = 54$ млн. руб. Если ущербы распределены по биномиальному закону, то $Var^{(b)} = 73$ руб. Если же ущерб распределен закону Пуассона, то $Var^{(p)} = 82$ руб. Причина различия величин резервного капитала связана со скоростью стремления к нулю плотности каждого из распределений правее точки максимума. Медленнее всего стремится к нулю плотность распределения Пуассона, быстрее всего – плотность нормального распределения. Биномиальное распределение занимает промежуточное положение между пуассоновским и нормальным. Различие объясняется тем, что для биномиальной модели имеется некоторый промежуток времени (время релаксации), на протяжении которого в соответствии с моделью наступление очередного события риска невозможно. Использование нормального распределения для оценки величины ущерба приводит к наименьшему резервному капиталу.

В итоге рамках простой модели показано, что при прочих равных условиях нормативы резервного капитала для покрытия ОР зависят от модели ОР. Наибольший резервный капитал соответствует распределению Пуассона, для биномиального распределения резервный капитал меньше, для нормального распределения капитал наименьший.

По результатам исследований подготовлен текст публикации:

- Алескеров Ф.Т., Быков А.А., Курмакаева Р.А. Анализ операционных рисков на основе биномиального, пуассоновского и нормального распределений.

6.2 Моделирование последствий принятия решений на фондовой бирже

Целью исследования было построение базовой поведенческой модели биржи как ее реакции на поступающие сигналы о состоянии экономики, а также разработка новых моделей, более полно учитывающих реальное поведение игроков на бирже. Каждая из двух разрабатывавшихся моделей предполагала возможность обучения игрока в результате успешных действий и получение определенной награды за «правильное» поведение. Разработанные модели были протестированы на реальных данных (S&P 500, CAC 40, DAX, Nikkei 225, Hang Seng за 1999-2009 гг.), в результате чего были получены оценки численных параметров моделей.

Н. Талеб в своей книге «Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости» [92], анализируя причины финансовых кризисов, делает вывод о том, что современные экономические модели плохо описывают реальность, т.к. не умеют предсказывать такие кризисы. Все неординарные события, в частности, кризисы, он называет черными лебедями.

Таким образом, утверждается, что современные социальные науки (и прежде всего экономическая теория) беспомощны и бесполезны поскольку не обладают инструментами для предсказания экстраординарных событий. В настоящем исследовании была сделана попытка с помощью математического моделирования опровергнуть вывод о нерелевантности современной экономической теории.

Процессы, происходящие на бирже, были представлены как поток событий двух типов, поступающих на биржу, – «регулярных» событий (случающихся очень часто) и «кризисных» (случающихся намного реже). Какое событие пришло в конкретный момент заранее неизвестно и участник (игрок) должен опознать неизвестное событие. От того, насколько успешно он это делает, зависит его благосостояние. Далее оценивался средний выигрыш при различных вероятностях правильного распознавания этих процессов, и полученные оценки сравнивались с данными о реальных процессах на бирже. Далее исходная математическая модель была усложнена за счет ввода возможности игрока обучаться на своих действиях и получать награду за «правильное» поведение. В результате каждая из предложенных новых моделей позволяет игроку быть свободнее в своем решении и ошибаться чаще в редких событиях.

Поведения игрока на бирже можно представить как реакцию на поток событий двух типов: часто случающихся событий типа Q (от слова quick) и экстраординарных событий типа R (rare). Каждый из них является простейшим, т. е. стационарным, ординарным и не имеет последствий. Интенсивность потока событий типа Q равна λ , интенсивность потока событий типа R равна μ , причем $\lambda \gg \mu$ (события типа Q происходят гораздо чаще событий типа R).

Задача игрока заключается в распознавании наступившего события X . Если наступило событие Q и устройство его идентифицировало верно, то оно поощряется получением небольшого вознаграждения a ; если же произошла ошибка, и событие Q было распознано как событие R , то

устройство будет «оштрафовано» на величину b . Вероятности таких исходов известны и равны p_1 и q_1 , соответственно. Аналогично, для событий типа R , при правильной идентификации устройством наступившего события R выигрыш составляет величину c , причем $c \gg a$, а при неправильной – «проигрыш» составляет $-d$, и $d \gg b$. После каждого наступившего события величина полученного выигрыша/проигрыша прибавляется к предыдущей сумме.

Далее оценивается средняя сумма полученных за время t выигрышей. Случайная величина Z общей суммы полученных выигрышей за время t является сложной пуассоновской величиной, поскольку количество слагаемых в сумме $Z = \sum X_i$ тоже является случайной величиной и зависит от потока событий, поступивших на устройство. Тогда средний выигрыш игрока можно оценить через математическое ожидание случайной величины выигрыша Z

$$E(Z) = (\lambda t)E(X_1) + (\mu t)E(Y_1) = \lambda t((1 - q_1)a - q_1b) + \mu t((1 - q_2)c - q_2d).$$

Согласно модели, события Q происходят чаще, чем R , что соответствует тому, что кризис в нашей жизни явление редкое. Событие X можно интерпретировать как некий сигнал, который поступает брокеру на бирже о состоянии экономики, о котором он должен решить, что означает этот сигнал – что экономика находится в “нормальном режиме”, либо наступает кризис. Например, являются ли сведения о том, что снизились цены на нефть предвестником того, что экономика переживает спад, или это временное явление и на состояние экономики они не повлияют?

Величины a, b, c, d также имеют свое значение в такой интерпретации. Если наступило событие Q (экономика стабильна) и брокер его правильно распознал, то он может получить за это небольшой доход – величину a . Если событие Q будет принято за R , то он понесет небольшие потери – b . Если же наступило событие R (кризис) и не было распознано верно, то брокер понесет потери, намного большие – сумму $-d$. Если же он «угадает» наступление кризиса, то сможет на этом неплохо заработать – в случае правильной идентификации R брокер получает величину c .

Параметры модели можно оценить исходя из интенсивности потоков этих событий. Для этого используется временной ряд доходности фондового индекса. Этот ряд является стационарным как на небольших выборках (порядка 10-20 точек), так и в течение длительного периода (несколько лет). Для анализа на стационарность выбирались периоды, соответствующие только регулярным или только кризисным дням, для проверки использовался тест Дики-Фуллера на наличие единичного корня и анализ автокорреляционной и частной автокорреляционной функции.

Параметры λ и μ , по сути, показатели состояния экономики, поэтому для их оценки возьмем фондовый индекс S&P 500. Временной интервал возьмем равный 10 годам – с 1999 по 2009 гг. (более точно: с августа 1999 до декабря 2009 года). Чтобы понять, когда наступают проблемы в

экономике и начинается спад, построим значения волатильности индекса со скользящим интервалом в 20 дней. В качестве порогового значения принимается значение волатильности равное 6%. Если значение волатильности превысит 6%, то это будет интерпретировано как наступление события типа R , т.е. кризис. По полученной оценке за год в среднем бывает 246 “спокойных дней” и 4 дня, характеризующихся высокой волатильностью и падением индекса. Для барьера в 10% соответствующие оценки равняются 249 и 1 соответственно.

Далее оцениваются величины отдельных выигрышей/проигрышей. В точках, соответствующих событию Q (что определяется по значению волатильности индекса – она должна быть меньше порогового значения для события Q), оценим a и b . Если в этот момент индекс пошел вверх, значит, реализовалось событие a , а если вниз – то $-b$. Аналогично с событиями типа R . Если взять в качестве порогового значения 6%, то в этом случае $a = 7, -b = -7.5, c = 23.5, -d = -26$. Для таких оценок параметров достаточно распознавать события типа Q в половине случаев для обеспечения положительного результата всей игры.

В результате анализа показано, что при небольшом вознаграждении за правильное (с вероятностью чуть больше $\frac{1}{2}$) распознавание частых событий (и при том, что кризисные события распознаются с очень малой вероятностью), средний выигрыш игрока будет положительным. Иначе говоря, игрокам нет необходимости играть в более сложные игры, пытаясь распознать кризисные события заранее.

Этот вывод вполне согласуется с логикой осторожного поведения, предписывающей почти надежное получение малых выигрышей. Однако, следует отметить, что эти выводы были получены при одинаковых (нулевых) начальных капиталах игроков. Кроме того, рассматривались иные варианты модели, в которые были введены дополнительные условия в виде награды за «правильное поведение» (как просто прибавкой в сумме выигрыша, так и с увеличением вероятности верной идентификации, связанной с накоплением опыта у игрока). Каждая из этих моделей позволяет игроку увеличить выигрыш и больше ошибаться в своих решениях, компенсируя ошибки возможностью «донабрать» на последовательности верных ответов.

Продолжение исследования связано с совершенствованием модели, компьютерным моделированием исследуемых процессов и построением имитационной модели поведения биржевого игрока.

По результатам исследования к публикации подготовлены следующие тексты:

- Алескеров Ф.Т., Егорова Л.Г. Так ли уж плохо, что мы не умеем распознавать черных лебедей? (готовится к публикации в Экономическом журнале ГУ-ВШЭ).

- Aleskerov F., Egorova L. Is it so bad that we cannot recognize black swans? WP7/2010/03, М.: SU-HSE, 2010.

• Aleskerov F., Egorova L. Is it so bad that we cannot recognize black swans? (готовится для публикации в журнале Economic Letters).

6.3 Исследование модели ценообразования опционов Блэка-Шоулса-Мертон

В рамках настоящего проекта проводилось исследование точного решения модели ценообразования опционов Ф. Блэка, М. Шоулса и Р. Мертона, получением асимптотических решений модели при малых и больших временах, разработкой методов «сращивания» асимптотик на больших и малых временах для получения формулы для всех времен, формированием базы данных по ценам европейских опционов, позволяющей оценить волатильность цен на них и провести численную оценку данной модели. В результате получены асимптотические формулы для цены опциона при любых соотношениях параметров модели Блэка-Шоулза на больших и малых временах, проведено сравнение времени вычислений точного решения модели, выраженного через несобственный интеграл, и полученных асимптотических формул, получены асимптотики решения смешанной краевой задачи при $t \ll 1$ и при $t \rightarrow +\infty$ (эти асимптотики содержат не только целые (соответственно, положительные и отрицательные) степени времени t , но и полуцелые), рассмотрены различные варианты обобщений двухточечной аппроксимации Паде (рациональная аппроксимация, имеющая предписанные разложения Пюизо в нуле и на бесконечности).

Динамика стоимости ценных бумаг, как и динамика их оценок, часто описывается параболическими уравнениями. Это связано с тем, что соответствующие уравнения Колмогорова (Фоккера – Планка), отвечающие случайным процессам (особенно часто – винеровским), имеют именно параболический тип. В этом состоит глубокая причина общности описания на языке дифференциальных уравнений в частных производных многих моделей финансовой математики, [93] и классической математической физики (уравнения диффузии и теплопроводности) [94]. Разумеется, при разработке моделей финансовой математики авторы имели перед глазами примеры успехов теории уравнений в частных производных.

Решение задачи Коши для параболических уравнений в некоторых случаях удается получить аналитически. В остальных случаях (если число независимых «пространственных» переменных достаточно мало) можно использовать численные методы. Существенной проблемой при таком подходе является постановка «вычислительных» граничных условий – граничные условия в разностной задаче необходимо ставить не на бесконечности, а в крайней (или крайних) точке сетки, а значит, вносить в решение погрешность, растущую со временем. Методы постановки таких «неотражающих» граничных условий для разностных уравнений и систем обсуждаются в [94].

Получение аналитической интегральной формулы типа свертки не до конца решает вычислительную проблему. Обычно решение содержит несобственный интеграл и зависит от

нескольких внешних параметров. Вычисление с высокой точностью несобственного интеграла для множества значений параметров, отвечающих многомерной сетке вариантов, может оказаться достаточно трудоемкой даже для современных компьютеров. В некоторых случаях вычисление таких интегралов (или соответствующих специальных функций) приводит к большим погрешностям.

Важный подход к получению решений при больших и малых временах дают асимптотические методы, в основе которых лежат метод стационарной фазы, лемма Эрдейи, метод перевала. В ряде случаев их применению предшествует использование интегральных преобразований (Фурье - по пространству и/или Лапласа – по времени). Соответствующие примеры рассмотрены, например, в [94-96].

Однако при средних (что это значит в конкретных примерах, нам предстоит определить) временах асимптотика в нуле уже плоха, а на бесконечности еще плоха. В настоящей работе описан алгоритм сращивания асимптотик в нуле и на бесконечности с помощью обобщенной аппроксимации Эрмита. В простейшем случае речь идет о построении двухточечной аппроксимации Паде (аппроксимации Эрмита) рациональной функции переменного $Q=Q(t)$, такой что ее асимптотика в нуле такая же, как и у истинного решения, и на бесконечности – тоже, см. [94, 97, 98].

Основные изменения нашей конструкции по сравнению с предшественниками: 1) вместо рациональной функции по целым степеням переменных используются полужелые (возможно обобщение и на другие дробные степени α); 2) используется не рациональная функция, а произведение $Q(t) = \varphi(t)R(t^\alpha)$ рациональной функции и некоторой «определяющей» $\varphi(t)$, заданной заранее из дополнительных соображений. Степени числителя и знаменателя R также задаются заранее (чем выше степени, тем лучше приближение).

Различные аспекты подхода можно продемонстрировать на двух примерах: А) динамика температуры на поверхности двухслойной среды, см. [94], стр. 596-605; Б) динамика цен на европейские опционы – будет рассмотрена ниже.

Динамика цен на европейские опционы. Уравнение Блэка–Шоулса-Мертон.

Основные определения и уравнения. Формула типа Пуассона. Опцион – это контракт, который дает держателю право купить (call-опцион) или продать (put-опцион) базовый актив в определенный день T (день исполнения опциона) по заранее оговоренной цене K (цена исполнения опциона). Если реальная цена актива S в момент исполнения окажется меньше или равна цене, оговоренной в опционе, то ценность опциона – нулевая, а держатель опциона зря потратил свои деньги на покупку. Таким образом, выгода, которую опцион приносит держателю определяется формулой

$$f_c(T=0, S) = \max(S - K, 0). \quad (6.1)$$

День исполнения опциона может совпадать с днем истечения срока действия опциона (европейский опцион) или быть любым днем раньше срока истечения (американский опцион). Опционный контракт, в котором оговаривается вид базисного актива, объем контракта, цена и дата исполнения называется ванильным опционом. Опционы, на цену или дату исполнения которых накладываются более сложные условия, называются экзотическими. Здесь рассматриваются европейские call-опционы. Рассмотрение put-опционов совершенно аналогично.

Аналогично ценность put-опциона определяется формулой

$$f_p(T=0, S) = \max(K - S, 0),$$

Согласно модели Блэка – Шоулса и Мертона [99, 100] (далее БШМ), использовавших теорию стохастических дифференциальных уравнений, цена опциона описывается следующим обратным линейным параболическим дифференциальным уравнением в частных производных с переменными коэффициентами на луч $S > 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0. \quad (6.2)$$

Здесь f – оценка стоимости опциона (справедливая цена), S – фактическая цена актива, r – ставка банковского кредита, σ – волатильность. Последние две величины полагаются известными положительными константами. При $S=0$ уравнение имеет особенность. Как показывает несложный анализ, условие ограниченности решения при $S \rightarrow +0$ заменяет граничное условие (Дирихле, Неймана или т.п.), которое для обеспечения корректности обычно ставят на границе области в случае постоянных коэффициентов.

В современных более продвинутых моделях эти величины уже сами считаются неизвестными подверженными изменению со временем функциями, см., например [101 -103]. Это может приводить к увеличению числа переменных в уравнении по сравнению с уравнением (6.2). Однако и в таких моделях какие-то константы приходится определять статистическим анализом реальных рынков. В настоящей работе метод сращивания асимптотик демонстрируется на сравнительно простом уравнении (6.2).

Условие Коши (6.1) задается при $t=T$, а решение f нужно определить при $t=0$. Подчеркнем: уравнение (6.2) решается в обратном направлении по времени, и соответствующее уравнение, в котором знак перед производной изменен, уже является параболическим.

В уравнении (6.2) заменой $x = \ln(S/K)$, $\tau = T - t$ можно перейти к уравнению с постоянными коэффициентами на прямой $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial f}{\partial x} - rf, \quad (6.3)$$

где терминальная функция (т. е. решение при $t=T$) задается формулой:

$$f_0 = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (S - K) = K[\exp(x) - 1], & x > 0. \end{cases}$$

Применяя к уравнению (6.3) преобразование Фурье, решая обыкновенное дифференциальное уравнение по времени и затем, применяя обратное преобразование Фурье, получаем формулу типа Пуассона для решения задачи Коши:

$$f(T, x) = \frac{e^{-rT} K}{\sqrt{2\sigma^2 \pi T}} \int_0^\infty (e^z - 1) \cdot e^{-\left[\frac{(\ln(x) - z + Tr - \frac{1}{2}T\sigma^2)^2}{2\sigma^2 T} \right]} dz. \quad (6.4)$$

Полученное казалось бы окончательное решение задачи нуждается еще в вычислении. В данном случае эта задача вполне выполнима для современных компьютеров, но в случаях более сложных финансовых моделей дело обстоит не столь благополучно. Под точным решением далее понимается цена опциона, вычисленная по формуле (6.4) методом Симпсона с шагом и отрезком интегрирования, зависящими от времени до исполнения опциона T . Чем меньше T , тем меньше берется шаг (вплоть до 10^{-8}) и тем меньше область интегрирования (самая маленькая область интегрирования составляет отрезок $[0, 1.5]$). На больших временах шаг интегрирования достигает 10^{-6} , а правая граница отрезка интегрирования достигает 350.

Лемма Ватсона. Для асимптотического анализа интеграла (26) используем лемму Ватсона [96]. Рассмотрим частный случай интеграла Лапласа

$$\Phi(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx. \quad (6.5)$$

Пусть $0 < a < \infty$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $f(x) \in C^\infty([0, a])$. Тогда при $\operatorname{Re}(\lambda) \rightarrow \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$:

$|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, справедливо асимптотическое разложение:

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+\beta)/\alpha} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad (6.6)$$

причем это асимптотическое разложение можно дифференцировать по λ любое число раз. Здесь Γ – гамма-функция Эйлера.

Асимптотика при малых T . Для того чтобы воспользоваться леммой Ватсона для асимптотического разложения точного решения (6.4) при малых временах T до истечения опциона, предварительно преобразуем интеграл к виду, удовлетворяющему условиям леммы.

Сначала преобразуем показатель второй экспоненты и вынесем постоянный множитель за знак интеграла:

$$f(T, x) = \frac{e^{-rT} K}{\sqrt{2\sigma^2 \pi T}} \int_0^\infty (e^z - 1) \cdot e^{\left[\frac{\left(\ln(x) - z + Tr - \frac{1}{2} T \sigma^2 \right)^2}{2\sigma^2 T} \right]} dz =$$

$$\frac{e^{-rT} K}{\sqrt{2\sigma^2 \pi T}} e^{\left[-\frac{T \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2}{2\sigma^2} \right]} \int_0^\infty (e^z - 1) \cdot e^{-\frac{2 \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{2\sigma^2} (\ln(x) - z)} \cdot e^{-\frac{(\ln(x) - z)^2}{2\sigma^2 T}} dz;$$

Множитель перед интегралом можно упростить:

$$r + \frac{\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2}{2\sigma^2} = \frac{2\sigma^2 r + r^2 - r\sigma^2 + \frac{1}{4} \sigma^4}{2\sigma^2} = \frac{r^2 + r\sigma^2 + \frac{1}{4} \sigma^4}{2\sigma^2} = \frac{\left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2}{2\sigma^2},$$

и, следовательно,

$$f(T, x) = \frac{K}{\sqrt{2\sigma^2 \pi T}} e^{-T \left[\frac{\left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2}{2\sigma^2} \right]} \int_0^\infty (e^z - 1) \cdot e^{-\frac{\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\sigma^2} (\ln(x) - z)} \cdot e^{-\frac{(\ln(x) - z)^2}{2\sigma^2 T}} dz;$$

Далее будем обозначать интеграл

$$\Phi(T, x) = \int_0^\infty (e^z - 1) \cdot e^{-\frac{\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\sigma^2} (\ln(x) - z)} \cdot e^{-\frac{(\ln(x) - z)^2}{2\sigma^2 T}} dz. \quad (6.7)$$

Допустим для начала, что $S > K$, и, следовательно, $\log(x) > 0$.

Перейдем к новой переменной $y = z - \log(x)$ в интеграле Φ :

$$\Phi = \int_{-\log(x)}^\infty (e^{y+\ln(x)} - 1) \cdot e^{y \frac{\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy.$$

Разобьем область интегрирования на две части

$$\Phi = \int_{-\log(x)}^0 (e^{y+\ln(x)} - 1) e^{y \frac{\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dz + \int_0^\infty (e^{y+\ln(x)} - 1) e^{y \frac{\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy,$$

и обозначим

$$\Phi_1 = \int_{-\log(x)}^0 \left(e^{y+\ln(x)} - 1 \right) \cdot e^{y \frac{\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy, \quad \Phi_2 = \int_0^\infty \left(e^{y+\ln(x)} - 1 \right) \cdot e^{y \frac{\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy, \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Преобразуем интеграл Φ_1 с помощью замены $q = -y$ и поменяем пределы интегрирования:

$$\Phi_1 \rightarrow \int_0^{\ln(x)} \left(e^{-q+\ln(x)} - 1 \right) e^{-\frac{\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\sigma^2} q} e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2 T}} dq \quad (6.8)$$

Применим лемму Ватсона с параметрами

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2 T}, \quad \beta = 1, \quad \alpha = 2, \quad g_1(q) = \left(e^{-q+\ln(x)} - 1 \right) e^{-\frac{\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\sigma^2} q}.$$

Получаем разложение:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} T^{\frac{k+1}{2}} \left(2\sigma^2 \right)^{\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2} \right) \frac{g_1^{(k)}(0)}{k!},$$

где

$$g_1^{(k)}(0) = (-1)^k \left(1 + \frac{r - \frac{1}{2} \sigma^2}{\sigma^2} \right)^k \frac{S}{K} - (-1)^k \left(\frac{r - \frac{1}{2} \sigma^2}{\sigma^2} \right)^k = \frac{(-1)^k}{\sigma^{2k}} \left(\left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^k \frac{S}{K} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^k \right).$$

Теперь рассмотрим интеграл Φ_2 , который удовлетворяет лемме Ватсона с параметрами

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2 T}, \quad \beta = 1, \quad \alpha = 2, \quad g_2(y) = \left(e^{y+\ln(x)} - 1 \right) e^{y \frac{\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)}{\sigma^2}}.$$

Мы получаем асимптотическое разложение:

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} T^{\frac{k+1}{2}} \left(2\sigma^2 \right)^{\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2} \right) \frac{g_2^{(k)}(0)}{k!},$$

$$\text{где } g_2^{(k)}(0) = \left(1 + \frac{r - \frac{1}{2} \sigma^2}{\sigma^2} \right)^k \frac{S}{K} - \left(\frac{r - \frac{1}{2} \sigma^2}{\sigma^2} \right)^k = \sigma^{-2k} \left(\left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^k \frac{S}{K} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^k \right).$$

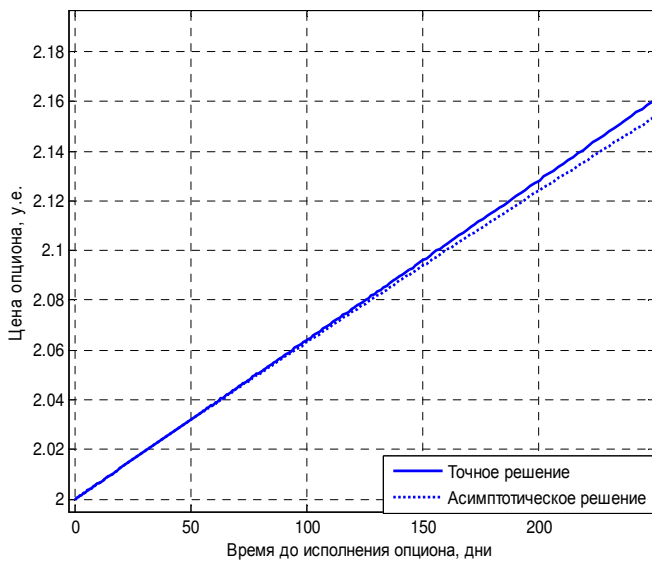
Нетрудно заметить, что четные члены разложения Φ_1 и Φ_2 , начиная с нулевого, совпадают, а нечетные члены разложения отличаются только знаком. Следовательно, итоговое разложение $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ будет иметь вид:

$$\Phi = (2\sigma^2 T)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} T^k (2\sigma^2)^k \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!}.$$

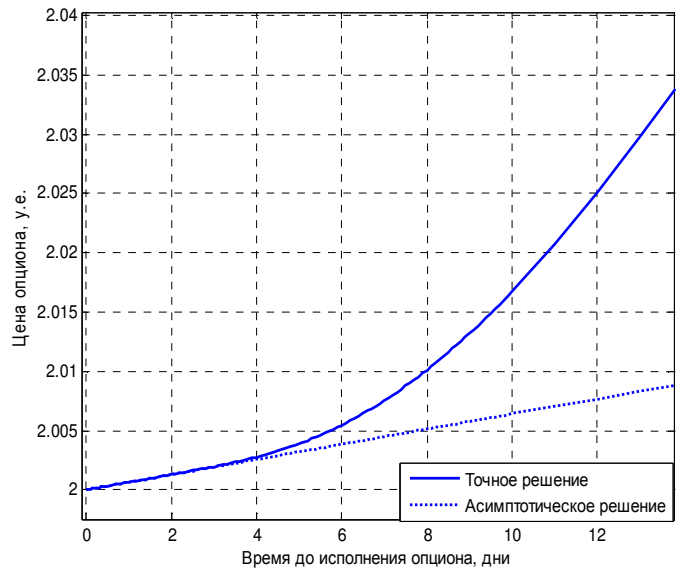
С учетом члена перед интегралом, получим асимптотическое разложение цены опциона для малых времен до исполнения и положительного значения $\ln(x)$ по целым степеням T :

$$f(T, \eta) = \frac{K}{\sqrt{\pi}} e^{-T \left[\frac{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2} \right]} \sum_{k=0}^{\infty} T^k (2\sigma^2)^k \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) \frac{g_2^{(2k)}(0)}{(2k)!}. \quad (6.9)$$

Графики на рисунке 6.5 показывают, что, как и в предыдущем параграфе, качество аппроксимации асимптотикой решительно зависит от параметров модели.



6.5.a



6.5.б

Рисунок 6.5 - График точного решения и двух членов асимптотического разложения при параметрах $S = 8$, $K = 6$, $r = 4\%$ и различных значениях σ : а) $\sigma = 15\%$, б) $\sigma = 90\%$.

Далее будем использовать обозначения $A_{\pm} = \frac{\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}$. В случае а) коэффициент

$$A_- = \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma^2} \approx 1,27, \text{ а в случае б) } A_- \approx -0,95.$$

При увеличении волатильности и при неизменных остальных величинах, точность асимптотики при малых временах снижается кардинально. Учитывая этот факт, стоит брать большее число членов асимптотического ряда.

На рисунке 6.6 дребезжание кривой на уровне ниже $\log(\text{Погрешность} / \text{Точное решение}) = -30$ связано с вычислительной погрешностью.

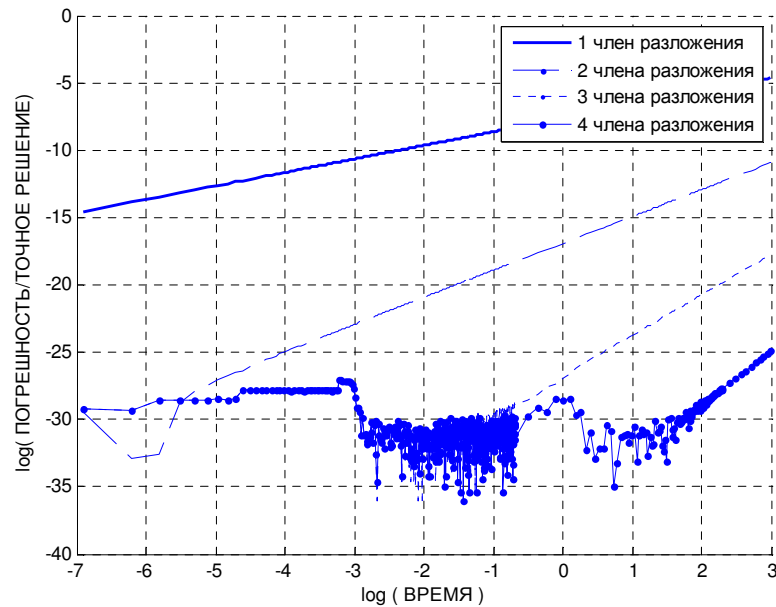


Рисунок 6.6 - Относительная погрешность асимптотик при $s=8$, $K=6$, $r=4\%$, $\sigma=15\%$ в двойных логарифмических координатах

Действительно, здесь достигаются значения $\exp(-30) \approx 9,36 \cdot 10^{-14}$, а вычислительная точность МАТЛАБа $\varepsilon = 2.2204e-016$. Разница в два порядка объясняется накоплением ошибки при вычислении «точного решения», для нахождения которого необходимо приближенно посчитать несобственный интеграл. В данной работе использовался метод Симпсона с шагом и отрезком интегрирования, зависящими от T . При вычислении значения интеграла на малых временах происходит разбиение отрезка интегрирования приблизительно на $15 \cdot 10^7$ частей.

Предположим теперь, что цена базового актива в момент покупки опциона меньше стоимости исполнения опциона. Это означает, что $\ln(x) < 0$ и экспонента $e^{-\frac{(\ln(x)-z)^2}{2\sigma^2 T}}$ в выражении (6.7) достигает своего максимума на краю области интегрирования, т. е. при $z = 0$. Перейдем к новой переменной $X = (z - \ln(x))^2 - \ln^2(x)$ в интеграле (6.7):

$$\Phi = e^{-\frac{\ln^2(x)}{2\sigma^2 T}} \int_0^\infty \frac{\left(e^{\sqrt{X+\ln^2(x)}+\ln(x)} - 1\right)}{2\sqrt{X+\ln^2(x)}} \cdot e^{\frac{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2} \sqrt{X+\ln^2(x)}} \cdot e^{-\frac{X}{2\sigma^2 T}} dX.$$

Применим лемму Ватсона к полученному выражению с параметрами

$$\beta = 1, \quad g(X) = \frac{\left(e^{\sqrt{X+\ln^2(x)}+\ln(x)} - 1\right)}{2\sqrt{X+\ln^2(x)}} \cdot e^{\frac{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2} \sqrt{X+\ln^2(x)}}, \quad \alpha = 1, \quad \lambda = \frac{1}{2\sigma^2 T}.$$

Таким образом, при $\ln(x) < 0$ имеем

$$\Phi = e^{-\frac{\ln^2(x)}{2\sigma^2 T}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2\sigma^2 T\right)^{(k+1)} \Gamma(k+1) \frac{g^{(k)}(0)}{k!}.$$

С учетом члена перед интегралом и, сократив гамма-функцию с факториалом, получим асимптотическое разложение цены опциона для малых времен до исполнения и отрицательного значения $\ln(x)$ по полуцелым и целым степеням T :

$$f(T, x) = \frac{K}{\sqrt{\pi}} e^{-T \left[\frac{\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2} \right]} e^{-\frac{\ln^2(x)}{2\sigma^2 T}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2\sigma^2 T\right)^{(k+1/2)} g^{(k)}(0). \quad (6.10)$$

Может создаться впечатление, что здесь асимптотика не дифференцируема в точке $T=0$ в связи с наличием в разложении полуцелых степеней T , однако, производные всех порядков множителя $e^{-\frac{\ln^2(x)}{2\sigma^2 T}}$ при $T=0$ обращаются в ноль, что и обеспечивает бесконечную дифференцируемость произведения.

До сих пор предполагалось, что величина $\ln x$ остается отличной от нуля и конечной при $T \rightarrow +0$. Рассмотрим теперь случай $T=0$. В этом случае интеграл $\Phi_1 = 0$ и в ответ входят и полуцелые степени:

$$\Phi = \Phi_2 = T\sigma^2 \left[1 + \frac{r\sqrt{2T\sigma^2}}{\sigma^2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right] + O(T^2). \quad (6.11)$$

В случае, когда S совсем немного больше K , рассуждения предыдущего раздела также не работают, так как интеграл (6.8) берется по малому отрезку и в задаче имеется два малых параметра: $\ln(S/K)$ и $2\sigma^2 T$. Данный случай для вычисления интеграла Φ_1 требует особого подхода. Интеграл Φ_2 не меняется. Будем считать, что $\ln(S/K) \sim LT$, где L – константа. Тогда интеграл Φ_1 запишется в следующем виде:

$$\Phi_1 = \int_0^{LT} \left(e^{-q+LT} - 1 \right) e^{-\frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)q}{\sigma^2}} e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2 T}} dq.$$

Лемма Ватсона к интегралу с малым верхним пределом неприменима. Однако этот интеграл можно взять явно. Перейдем в этом интеграле к новой переменной $z = \frac{q}{T}$ и раскроем скобки:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= T \int_0^L \left(e^{TL} e^{-zT} - 1 \right) e^{-\frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)zT}{\sigma^2}} e^{-\frac{Tz^2}{2\sigma^2}} dz = T e^{TL} \int_0^L e^{-\frac{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)zT}{\sigma^2}} e^{-\frac{Tz^2}{2\sigma^2}} dz - \\ &- T \int_0^L e^{-\frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)zT}{\sigma^2}} e^{-\frac{Tz^2}{2\sigma^2}} dz = T e^{TL} \int_0^L e^{-T\left(\frac{(2r+\sigma^2)z+z^2}{2\sigma^2}\right)} dz - T \int_0^L e^{-T\left(\frac{(2r-\sigma^2)z+z^2}{2\sigma^2}\right)} dz = \\ &= T e^{TL} \left[e^{-T\left(\frac{(2r+\sigma^2)L+L^2}{2\sigma^2}\right)} - 1 \right] - T \left[e^{-T\left(\frac{(2r-\sigma^2)L+L^2}{2\sigma^2}\right)} - 1 \right] = T(1 - e^{TL}) = O(T^2). \end{aligned}$$

Поскольку интеграл Φ_2 содержит слагаемые с меньшими степенями T , вклад Φ_1 в асимптотический ряд существен только для четвертого слагаемого. Поэтому для наших целей

$$\text{можно положить } \Phi \approx \Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^2 T^{\frac{k+1}{2}} (2\sigma^2)^{\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{g_2^{(k)}(0)}{k!} + O(T^2).$$

При $\ln x = 0$ получается формула (6.11).

Асимптотика решения при больших T .

$$\text{Пусть } S > K, \text{ т. е. } x > 0. \text{ Положим } \Pi(T, x) = \int_0^\infty \left(e^z - 1 \right) e^{-\frac{(\ln(x)-z)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} \bullet e^{-\left[\frac{(\ln(x)-z)^2}{2\sigma^2 T}\right]} dz.$$

$$\text{Тогда } f(T, x) = \frac{e^{-rT} K}{\sqrt{2\sigma^2 \pi T}} e^{-\frac{T\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}} \Pi.$$

Разобьем интеграл Π на две части, соответствующие разным слагаемым в первой скобке:

$$\int_0^{\infty} e^z e^{-\frac{(\ln(x)-z)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(x)-z)^2}{2\sigma^2 T}} dz - \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\ln(x)-z)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(x)-z)^2}{2\sigma^2 T}} dz.$$

Обозначим первый интеграл через Π^1 , а второй – через Π^2 .

В интеграле Π^1 сделаем замену $y = z - \ln(x)$:

$$\Pi^1 = \frac{S}{K} \int_{-\ln(x)}^{\infty} e^y e^{\frac{y\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy = \frac{S}{K} \int_{-\ln(x)}^{\infty} e^{\frac{y\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy.$$

Разделим область интегрирования на две части и поменяем знак переменной в первом интеграле:

$$\begin{aligned} \Pi^1 &= \frac{S}{K} \int_{-\ln(x)}^0 e^{yA_+} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy + \frac{S}{K} \int_0^{\infty} e^{yA_+} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy = \frac{S}{K} \int_0^{\ln(x)} e^{-yA_+} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy + \frac{S}{K} \int_0^{\infty} e^{yA_+} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy = \\ &= \frac{S}{K} (\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

Поскольку область интегрирования в первом интеграле φ_1 ограничена, и $T \rightarrow \infty$, его можно оценить разложением в ряд Тейлора экспоненты $e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}}$ по переменной $-\frac{y^2}{2\sigma^2 T} \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{A_+} \left(1 - \left(\frac{K}{S} \right)^{A_+} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2 T} \left(2 \left(\frac{1}{A_+} \right)^3 - \left(\frac{K}{S} \right)^A \left(\frac{x^2}{A_+} + 2 \frac{x}{A_+^2} + 2 \frac{1}{A_+^3} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sigma^2 T} \right)^2 \left(-\frac{x^4}{A_+} \left(\frac{K}{S} \right)^A - \frac{4}{A_+} \left(\frac{x^3}{A_+} \left(\frac{K}{S} \right)^A - \frac{3}{A_+} \left(\frac{2}{A_+^3} - \left(\frac{K}{S} \right)^A \left(\frac{x^2}{A_+} + \frac{2x}{A_+^2} + \frac{2}{A_+^3} \right) \right) \right) \right) + O(T^{-3}). \end{aligned}$$

Интеграл φ_2 можно представить как комбинацию интеграла по всей прямой и интеграла, удовлетворяющего условиям леммы Ватсона:

$$\varphi_2 = \frac{S}{K} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{yA} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy - \int_{-\infty}^0 e^{yA} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy \right).$$

Первый интеграл в скобках после элементарных преобразований сводится к известному интегралу Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{yA_+} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy = e^{\frac{A_+^2 \sigma^2 T}{2}} \sqrt{2\pi\sigma^2 T}$$

Во втором интеграле в скобках перейдем к новой переменной $q = -\frac{y}{\sqrt{T}}$:

$$\int_{-\infty}^0 e^{yA_+} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy \Rightarrow \sqrt{T} \int_0^{\infty} e^{-q\sqrt{T}A_+} e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}} dq.$$

По лемме Ватсона с параметрами $\alpha=1$, $\beta=1$, $g(q)=e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}}$, $\lambda=\sqrt{T}A_+$ интеграл раскладывается в ряд:

$$\sqrt{T} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{T} A_+ \right)^{-k-1} \frac{\Gamma(k+1) g^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k} A_+^{-2k-1} g^{(2k)}(0),$$

где $g(0)=1$, $g^{(1)}(0)=0$, $g^{(2)}(0)=-1/\sigma^2$, $g^{(3)}(0)=0$, $g^{(4)}(0)=3/\sigma^4$.

Отсюда $\varphi_2 = e^{\frac{A_+ \sigma^2 T}{2}} \sqrt{2\pi\sigma^2 T} - \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k/2} A_+^{-k-1} g^{(k)}(0)$ и

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \left(\frac{1}{A_+} \left(1 - \left(\frac{K}{S} \right)^{A_+} \right) - \frac{1}{2\sigma^2 T} \left(2 \left(\frac{1}{A_+} \right)^3 - \left(\frac{K}{S} \right)^A \left(\frac{x^2}{A_+} + 2 \frac{x}{A_+^2} + 2 \frac{1}{A_+^3} \right) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sigma^2 T} \right)^2 \left(-\frac{x^4}{A_+} \left(\frac{K}{S} \right)^{A_+} - \frac{4}{A_+} \left(\frac{x^3}{A_+} \left(\frac{K}{S} \right)^{A_+} - \frac{3}{A_+} \left(\frac{2}{A_+^3} - \left(\frac{K}{S} \right)^{A_+} \left(\frac{x^2}{A_+} + \frac{2x}{A_+^2} + \frac{2}{A_+^3} \right) \right) \right) \right) \right) + \\ & + \frac{S}{K} \left(e^{\frac{A_+^2 \sigma^2 T}{2}} \sqrt{2\pi\sigma^2 T} - \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k/2} A_+^{-k-1} g^{(k)}(0) \right). \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению интеграла $\Pi_2 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\ln(x)-z)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(x)-z)^2}{2\sigma^2 T}} dz$.

Сделаем замену $y = z - \ln(x)$:

$$\Pi_2 = \int_{-\ln(x)}^{\infty} e^{\frac{y\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy.$$

Разобьем область интегрирования на две части:

$$\Pi_2 = \int_{-\ln(x)}^0 e^{\frac{y\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy + \int_0^{\infty} e^{\frac{y\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy = \phi_1 + \phi_2.$$

Интеграл ϕ_1 берется после разложения в ряд Тейлора второй экспоненты по переменной $-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}$ в окрестности точки ноль, поскольку $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \int_{-\ln(x)}^0 e^{\frac{y\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} \left(1 - \frac{y^2}{2\sigma^2 T} + \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2\sigma^2 T}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{y^2}{2\sigma^2 T}\right)^3 + \dots\right) dy = \\
&= \frac{1}{A_+ - 1} \left(1 - \left(\frac{K}{S}\right)^{A_+ - 1}\right) - \frac{1}{2\sigma^2 T} \left(2 \left(\frac{1}{A_+ - 1}\right)^3 - \left(\frac{K}{S}\right)^{A_+ - 1} \left(\frac{x^2}{A_+ - 1} + 2 \frac{x}{(A_+ - 1)^2} + 2 \frac{1}{(A_+ - 1)^3}\right)\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sigma^2 T}\right)^2 \left(-\frac{K^4}{(A_+ - 1)} \left(\frac{K}{S}\right)^{A_+ - 1} - \frac{4}{(A_+ - 1)} \left(\frac{x^3}{(A_+ - 1)} \left(\frac{K}{S}\right)^{A_+ - 1} - \frac{3}{A_+ - 1} \left(\frac{2}{(A_+ - 1)^3} - \left(\frac{K}{S}\right)^{A_+ - 1} \left(\frac{x^2}{A_+ - 1} + \frac{2x}{(A_+ - 1)^2} + \frac{2}{(A_+ - 1)^3}\right)\right)\right) + O(T^{-3}).
\end{aligned}$$

Вычислим теперь разложение для ϕ_2 . Если $\frac{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2} = A_- = A_+ - 1 < 0$, то можно сделать замену переменных $y = q\sqrt{T}$ и разложить интеграл в ряд по лемме Ватсона с параметрами $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $g(q) = e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}}$, $\lambda = -\sqrt{T}A_-$: $\Pi_2 = \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k} (-A_-)^{-2k-1} g^{(2k)}(0)$, если же $A_- > 0$, то первая экспонента растёт по y , и лемму Ватсона применять уже нельзя. В этом случае представим интеграл как комбинацию интегралов:

$$\Pi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{y\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy - \int_{-\infty}^0 e^{\frac{y\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy.$$

Первый интеграл сводится к известному интегралу Пуассона элементарными преобразованиями:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{y\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy = e^{\frac{TA_-^2}{2}\sigma^2} \sqrt{2\pi T\sigma^2},$$

а второй раскладывается в ряд по лемме Ватсона: $\sum_{k=0}^{\infty} T^{-k/2} A_-^{-k-1} g^{(k)}(0)$.

Учитывая, что $f(T, x) = \frac{e^{-rT} K}{\sqrt{2\sigma^2 \pi T}} e^{-\frac{T\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}} \Pi$, получим:

при $A_- > 0$, т. е. при $r > \frac{1}{2}\sigma^2$:

$$\begin{aligned}
f(T, x) &= S - Ke^{-rT} + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 \pi T}} e^{-\frac{A_-^2 \sigma^2 T}{2}} \left(S \left(\phi_1 - \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k} A_+^{-2k-1} g^{(2k)}(0) \right) + K \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k} A_-^{-2k-1} g^{(2k)}(0) - K \phi_1 \right) \quad (6.12)
\end{aligned}$$

при $A_- < 0$:

$$f(T, x) = S + \frac{e^{-\frac{A_-^2 \sigma^2 T}{2}}}{\sqrt{2\sigma^2 \pi T}} \left(S \left(\phi_1 - \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k} A_+^{-2k-1} g^{(2k)}(0) \right) - K \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k} (-A_-)^{-2k-1} g^{(2k)}(0) - K \phi_1 \right)$$

Явные выражения для слагаемых φ_1 и ϕ_1 в последних двух формулах не приводим, ввиду их громоздкости. Важно, что φ_1 и ϕ_1 представляют собой ряды по целым отрицательным степеням T .

В случае, когда $S < K$ все выкладки остаются в силе, однако нужно учитывать, что интегралы, у которых в одном из пределов интегрирования стоит $\ln(x)$, а в другом ноль, поменяют знак.

Сращивание асимптотических формул. Обобщенная аппроксимация Паде – Эрмита.

При решении реальных задач знание поведения функции при больших и малых временах не всегда бывает достаточно, необходимо еще некоторое представление о том, что происходит с функцией на «средних временах». Для того, чтобы получить информацию о поведении функции на любых временах, будем применять алгоритмы сращивания, основанные на двухточечной аппроксимации Паде рациональными функциями [97, 98] и её обобщениях.

Для примера рассмотрим случай, когда цена базового актива превышает цену исполнения опциона и $A_- > 0$, т. е. $r > \frac{1}{2}\sigma^2$. Воспользуемся асимптотиками на бесконечности и в нуле.

Будем искать аппроксимирующую функцию в виде:

$$R = K(\eta - e^{-rT}) \frac{\alpha + \beta T + \gamma T^2}{1 + \mu T + \gamma T^2}. \quad (6.13)$$

Неопределенные параметры $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ предстоит определить. Очевидно, что при любом $\gamma \neq 0$, $T \rightarrow +\infty$ функция R стремится к асимптотике точного решения на бесконечности, найденной с помощью образов Лапласа в параграфе 2: $R \rightarrow K(\eta - e^{-rT}) = S - Ke^{-rT}$.

Поскольку разность функции R и асимптотики в окрестности нуля должна быть мала:

$$K[x - \exp(-rt)] \frac{\alpha + \beta T + \gamma T^2}{1 + \mu T + \gamma T^2} = Ke^{-T \left[\frac{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2} \right]} (b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + b_3 T^3), \quad (6.14)$$

где, согласно (6.9),

$$b_0 = x - 1, \quad b_1 = \frac{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 x - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}, \quad b_2 = \frac{\left(\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^4 x - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^4\right)}{8\sigma^4},$$

$$b_3 = \frac{\left(\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^6 x - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^6\right)}{48\sigma^6}.$$

Приведем выражение (6.14) к общему знаменателю и перенесем второе слагаемое в правую часть равенства:

$$[x - \exp(-rt)](\alpha + \beta T + \gamma T^2) = (1 + \mu T + \gamma T^2) e^{-T \left[\frac{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2} \right]} (b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + b_3 T^3)$$

Введем обозначение $B = \frac{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}$ и разложим e^{-TB} и e^{-rT} в ряды Тейлора:

$$\begin{aligned} \left[x - \left(1 - rT + \frac{(rT)^2}{2} - \frac{(rT)^3}{6} + \dots \right) \right] (\alpha + \beta T + \gamma T^2) = \\ = (1 + \mu T + \gamma T^2) \left(1 - BT + \frac{(BT)^2}{2} - \frac{(BT)^3}{6} + \dots \right) (b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + b_3 T^3). \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях равенства:

$$T^0 : (x-1)\alpha = b_0;$$

$$T^1 : (x-1)\beta + r\alpha = b_1 - Bb_0 + \mu b_0;$$

$$T^2 : (x-1)\gamma + r\beta - \frac{r^2}{2}\alpha = b_2 - Bb_1 + \frac{B^2}{2}b_0 + \mu(b_1 - Bb_0) + \gamma b_0;$$

$$T^3 : r\gamma - \frac{r^2}{2}\beta + \frac{r^3}{6}\alpha = b_3 - Bb_2 + \frac{B^2}{2}b_1 - \frac{B^3}{6}b_0 + \mu\left(b_2 - Bb_1 + \frac{B^2}{2}b_0\right).$$

Из первого уравнения легко находится коэффициент $\alpha = 1$. Подставим в систему найденный коэффициент и запишем получившуюся систему линейных уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} b_0 & -b_0 & 0 \\ r & -b_1 + Bb_0 & 0 \\ -\frac{r^2}{2} & -b_2 + Bb_1 - \frac{B^2}{2}b_0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - Bb_0 - r \\ \frac{r^2}{2} + b_2 - Bb_1 + \frac{B^2}{2}b_0 \\ -\frac{r^3}{6} + b_3 - Bb_2 + \frac{B^2}{2}b_1 - \frac{B^3}{6}b_0 \end{pmatrix}.$$

Матрица системы вырожденная, так как

$$-b_1 + Bb_0 = \frac{-\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 x + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2} + \frac{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2} (x-1) = \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2} = -r,$$

и, следовательно, первые две строки системы линейно зависимые. Единственное возможное решение, когда все коэффициенты нулевые, а, значит, сращивающая функция тождественно равна асимптотике на бесконечности.

Для уточнения асимптотической формулы для средних времен вычтем из асимптотик в нуле и на бесконечности $S - Ke^{-rT}$ и сравним, получившиеся асимптотики для разности. Так как асимптотика на бесконечности, полученная с помощью преобразования Лапласа, равна

вычитаемой величине, для сращивания далее будем использовать более точную асимптотику из параграфа 2:

$$f_{\infty}(T, x) = S - Ke^{-rT} + \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi T}} e^{-BT} \left(S \left(\phi_1 - \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k} A_+^{-2k-1} g^{(2k)}(0) \right) + K \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k} A_-^{-2k-1} g^{(2k)}(0) - K\phi_1 \right).$$

После вычитания получим:

$$f_{\infty} - S + Ke^{-rT} = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-BT} \sum_{k=0}^{\infty} c_k T^{-k},$$

$$f_0 - S + Ke^{-rT} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k T^k.$$

Будем искать такую функцию R , что $R \xrightarrow{T \rightarrow \infty} f_{\infty} - S + Ke^{-rT}$ и $R \xrightarrow{T \rightarrow 0} f_0 - S + Ke^{-rT}$:

$$R = e^{-BT} \frac{c_0 \alpha m^2}{1 + \beta m + \gamma m^2 + \alpha m^3},$$

где $m = \sqrt{T}$.

Для нахождения сращивающей функции нам понадобятся следующие коэффициенты ряда:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} \frac{K}{A_+ A_-}, \quad a_1 = \frac{S \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 - K \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2}{2\sigma^2} - B(S - K) - Kr,$$

$$a_2 = \frac{S \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^4 - K \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^4}{8\sigma^4} - B \frac{\left(S \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 - K \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 \right)}{2\sigma^2} + \frac{(S - K)}{2} B^2 + \frac{Kr^2}{2}.$$

Приравняем разность R и функции $f_0 - S + Ke^{-rT}$ к нулю, предварительно разложим e^{-BT} в ряд Тейлора, составим систему линейных уравнений и найдем коэффициенты:

$$(1 - Bm^2) c_0 \alpha m^2 = (1 + \beta m + \gamma m^2 + \alpha m^3) (a_1 m^2 + a_2 m^4)$$

$$m^2 : c_0 \alpha = a_1 \Rightarrow \alpha = \frac{a_1}{c_0},$$

$$m^3 : 0 = \beta a_1 \Rightarrow \beta = 0,$$

$$m^4 : -B c_0 \alpha = \gamma a_1 + a_2 \Rightarrow \gamma = -B - \frac{a_2}{a_1}.$$

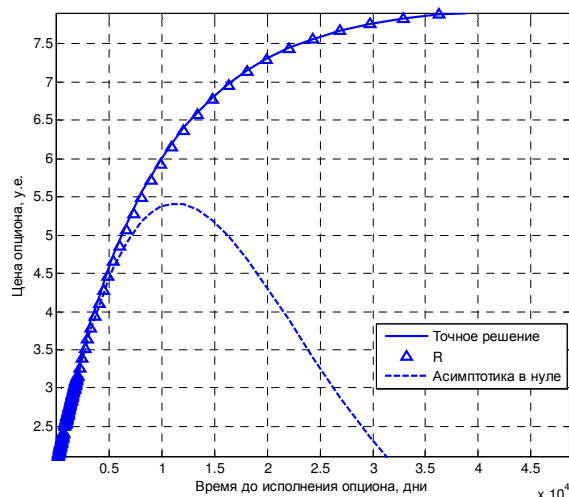


Рисунок 6.7 - График точного решения, четырех членов асимптотического разложения в нуле и значки аппроксимирующей функции R при параметрах $S=8$, $K=6$, $r=4\%$, $\sigma=15\%$.

Поскольку на графики функции R на рисунке 6.7 и точного решения визуально неразличимы, построим график относительной погрешности $\frac{f-R}{f}$ в логарифмических координатах.

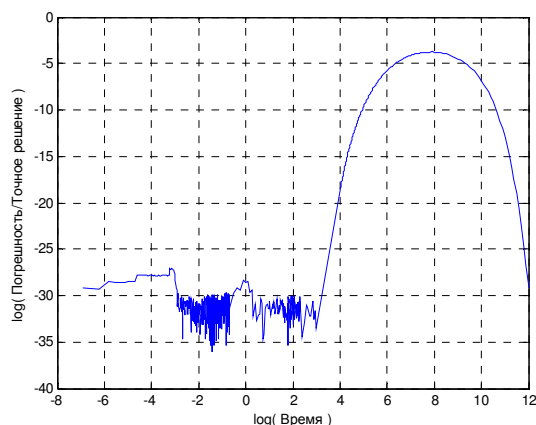


Рисунок 6.8 - Относительная погрешность R при $S=8$, $K=6$, $r=4\%$, $\sigma=15\%$ в двойных логарифмических координатах.

Графики на рисунке 6.8 показывают, что погрешность полученной асимптотики с практической точки зрения весьма мала (не превышает $e^{-3} \approx 0,05$), а максимального значения достигает при времени $e^8 \approx 3000$ дней, когда асимптотика на малых временах уже не дает хорошего приближения, а асимптотика на больших временах только начинает в полной мере вступать в силу. Сильные осцилляции погрешности на уровне ниже $\log(\text{Погрешность} / \text{Точное решение}) = -30$ связаны с погрешностью компьютерных вычислений.

Сравнение времени компьютерных вычислений цены опциона с помощью полученных асимптотик и точного решения. Для сравнения времени счета, рассмотрим несколько примеров:

I. $S = 8, K = 6, \sigma = 15\%, r = 4\%$.

Будем искать точное и асимптотическое решения одновременно для 605 точек на отрезке $T \in [0, 20]$. Для вычисления точного решения выберем начальный шаг интегрирования $h = 0,1$ и будем его уменьшать, пока точность вычисления интеграла не достигнет e^{-30} . Это произойдет при шаге интегрирования $h = 0,0001$ и времени компьютерных вычислений: *1,9596 секунд*. Все вычисления проводятся в математической системе Матлаб.. Все вычисления проводятся в математической системе Матлаб.

Для асимптотического решения параметр, который будем варьировать – это количество членов ряда. Заданная точность на интервале $T \in [0, 20]$ достигается при четырех членах асимптотического разложения в нуле. Время вычислений: *0.000762 секунды*.

II. $S = 6, K = 8, \sigma = 15\%, r = 4\%$.

Понизим требуемую точность до e^{-26} в связи с резким увеличением погрешности счета точного интеграла при подобных параметрах, по сравнению с предыдущим случаем.

Для достижения погрешности заданного порядка при вычислении интеграла в точном решении необходимо выбирать шаг $h = 10^{-6}$. Время счета в этом случае составит *142,3484 секунд*.

Для вычисления асимптотического решения с такой же погрешностью необходимо использовать 19 членов ряда. Время счета в этом случае: *0,8614 секунд*.

III. $S = 8, K = 8, \sigma = 15\%, r = 4\%$.

Для того, что погрешность вычисления точного решения не превышала e^{-26} необходимо выбрать шаг интегрирования $h = 10^{-6}$. Время счета составит: *165,2027 секунд*.

Асимптотическое решение с такой же точностью вычисляется *0,0022 секунды* и содержит 9 членов ряда.

Анализ показывает, что, несмотря на зависимость времени вычисления с заданной точностью от входных параметров, асимптотические формулы в любом из рассмотренных случаев оказывались более подходящими для компьютерных расчетов по сравнению с точным решением. При этом ускорение счета происходило в 100 и 1000 раз. Данное обстоятельство оказывается существенным, когда возникает необходимость оценки цены не одного опциона, а сразу большого их числа, например, при разных значениях цены исполнения опциона и (или) даты исполнения.

Таким образом результатом исследования является эвристический алгоритм обобщенной рациональной аппроксимации решений задачи Коши для линейных параболических уравнений. Алгоритм основан на предварительном построении асимптотик решения при $T \rightarrow +0$ и при

$T \rightarrow +\infty$. Применение подобных аппроксимаций существенно снижает объем вычислений по сравнению с использованием аналитической интегральной формулы, а в некоторых случаях и превосходит ее по качеству из-за компьютерного вычисления интеграла.

Достоинства метода были продемонстрированы на задаче финансовой математики (аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Блэка - Шоулса - Мертона - модель, описывающая динамику цен на европейские опционы).

Результаты исследования отражены в следующих опубликованных или подготовленных к публикации текстах:

- Гордин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики. М.: Физматлит, 2010. (рекомендовано в качестве учебного пособия для студентов естественнонаучных специальностей; задача о сращивании асимптотик рассмотрена в п.4.15.5 (стр. 602-605));

- Бондарева П.С., Гордин В.А. Обобщенная рациональная аппроксимация Эрмита и сращивание асимптотик решений параболических уравнений (готовится к публикации).

6.4 Анализ распределения влияния в политических и экономических институтах

6.4.1 Распределение влияния в Международном валютном фонде с учетом предпочтений по вступлению в коалиции

В рамках настоящего проекта проводился анализ реформы квот и голосов МВФ 2008 г. с точки зрения изменения влияния стран. Оценка влияния осуществлялась как с помощью классических индексов, так и с помощью индексов, учитывающих предпочтения в Совете управляющих МВФ по вступлению в коалиции, которые определялись на основе товарооборота. В итоге было показано, что несмотря на то, что изменение относительного влияния соответствует обозначенным в положении о реформе МВФ целям, в абсолютном выражении данное перераспределение влияния незначительно. Данный результат является следствием необходимости квалифицированного большинства голосов для принятия решения.

Результаты анализа отражены в публикации:

- Pogorelskiy, K. Implications of the Quota & Voice Reform of the IMF: the Aspect of Power, HSE Working Papers, WP7/2010/01, М.: State University - Higher School of Economics.

6.4.2 Распределение влияния партийных фракций в рейхстаге Веймарской республики (1919-1933)

С помощью индексов влияния, учитывающих предпочтения участников процесса принятия коллективных решений по созданию коалиций, в рамках настоящего проекта проводилось исследование распределения влияния в рейхстаге догитлеровской Германии. В исследовании решалась задача оценки влияния фракций в парламенте с учетом идеологических ограничений на формирование коалиций. Ф.Т. Алескеровым были предложены два типа индексов, учитывающих

предпочтения игроков по созданию коалиций. Они похожи на индекс Банцафа, но кроме того оценивают силу связи участника выигрывающих коалиций. Ординальные α -индексы предполагают линейный порядок предпочтений, а кардинальные α -индексы предполагают количественную оценку предпочтений агентов по отношению друг к другу.

Для преодоления основной сложности работы, состоявшей в том, чтобы присвоить той или иной идеологии количественную оценку, была использована одномерная идеологическая шкала «левые – правые», в основе которой лежит направление экономической политики, за которую выступает партия. Для того чтобы оценить предпочтения партий Веймарской республики по отношению друг к другу партии были расположены в линейном порядке. Также были рассмотрены случаи ассиметричных предпочтений.

Для моделирования предпочтений фракций в одномерном идеологическом пространстве, где более близкие идеологические позиции означают большее желание вступить в коалицию, была предложена особая мера, зависящая от пары идеологических позиций. В Веймарской Германии партийная система была крайне плюралистична, и коалиции между идеологически полярными фракциями были невозможны. Пример Коммунистической партии Германии показал что, отказ от вхождения в коалиции способен свести на нет влияние партии в законодательном органе, даже в том случае, если она обладает значительной долей мест. Аналогичным образом, было продемонстрировано, что относительная идеологическая «размытость» способна увеличить влияние даже небольших фракций. Полученные результаты согласуются с интерпретациями данного периода, которые дают историки.

По результатам исследований опубликованы и подготовлены к публикации следующие тексты:

- Aleskerov F., Holler M., Kamalova R. Power distribution in the Weimar Reichstag in 1919-1933, HSE Working Papers, WP7/2010/08, Moscow, SU-HSE, 2010.

- Aleskerov F., Holler M., Kamalova R. Power Distribution in the Weimar Reichstag in 1919-1933 (планируется публикация данного текста в серии препринтов, издаваемой Public Choice Research Centre (Турку, Финляндия))

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работ по проекту фундаментальных исследований был решен ряд теоретических задач, связанных с проблемой оптимального выбора, изучением свойств процедур принятия решений, разработкой методов и систем автоматической обработки информации, используемых для поддержки принятия решений, теоретико-игровым моделированием социальных взаимодействий, разработкой инструментария для анализа институтов, в рамках которых происходит принятие коллективных решений.

В области проблемы оптимального выбора был получен ряд результатов, связанных с оптимизационными задачами в теории важности критериев, решениями в задаче оптимального выбора на мажоритарном графе, обобщением решений в задаче справедливого дележа. Методы оптимального выбора были применены в задачах оптимизации поиска в интернете, построения агрегированных рейтингов научных журналов, моделирования поступления абитуриентов в государственные вузы Российской Федерации. В области исследования процедур принятия коллективных решений были проведены аксиоматизация ординальных систем пропорционального представительства и анализ реально применяющихся избирательных систем, использующих правило передачи голосов, а также оценивалась манипулируемость процедур коллективного выбора. В области методов кластеризации и автоматической обработки информации, разрабатывались методы остановки в дивизимных алгоритмах кластер-анализа, методы построения бикластеров и трикластеров, методы представления текстов на английском и русском языках суффиксными деревьями, методы оценки связи между таксономическими единицами в данном корпусе документов, методы спектрального кластер-анализа, методы оптимального обобщения множеств в иерархических предметных таксономиях и дивизимно-агломеративный алгоритм классификации на основе минимаксной модификации частотного подхода. В области теории игр и теории пространственного голосования проводилось теоретико-игровое моделирование поведения политиков и избирателей во время избирательных кампаний, и изучались стационарные решения в играх на выбывание. Исследование индексов влияния велось в рамках аксиоматического подхода. Была предпринята работа по распространению "проективной" аксиоматики индексов Банцафа и Шепли-Шубика на индексы, зависящие от предпочтений участников, построению аналогов известных аксиоматик для индексов влияния для случая голосования с квотой, и аксиоматизации обобщенных индексов Шепли-Оуэна.

Кроме теоретических исследований в области теории выбора, ее методы и модели в ходе реализации настоящего проекта фундаментальных исследований были применены для анализа социально-экономических институтов и практик в ряде прикладных задач, таких как исследование деятельности банков (при анализе эффективности издержек российских банков, динамический

анализе паттернов их поведения, а также для оценки ущерба от операционных рисков в банковской деятельности), моделирование последствий принятия решений на фондовой бирже, моделирования ценообразования опционов, анализа распределения влияния в политических и экономических институтах (Международном валютном фонде с учетом и рейхстаге Веймарской республики).

По результатам исследований опубликовано или подготовлено к печати 65 текстов по теме проекта (из них 2 книги, 39 статей (из них 17 статей в международных журналах (из них 5 опубликовано, 12 подготовлено к печати)), 8 препринтов, 16 текстов докладов) и сделано 66 докладов на международных и общероссийских конференциях и научных семинарах.

Результаты исследований, проводившихся в рамках данного проекта, были использованы для существенного обновления и расширения курса «Теория принятия индивидуальных и коллективных решений», читаемого на английском языке. В него был добавлен раздел, в котором российским студентам впервые систематически излагалась теория решений в задаче коллективного выбора на мажоритарном графе. Этот курс не имеет ни отечественных, ни зарубежных аналогов. Его содержание в значительной степени отражает новейшие результаты исследований в области теории индивидуального и коллективного выбора.

Результаты исследований также могут быть использованы для обновления программ следующих учебных курсов: "Методы оптимальных решений", "Теория индивидуального и коллективного выбора", «История и методология прикладной математики и информатики», «Методы анализа данных для принятия управленческих решений», "Математические модели принятия решения в управлении банком", "Оптимизация и математические методы принятия решений", "Основы математического моделирования", "Теория игр и исследование операций", "Теория принятия решений", "Математические модели банковских систем", "Анализ и поддержка решений", "Математическое моделирование и информационно-аналитическая поддержка принятия социально-экономических и политических решений", "Математика конфликтов и принятия политических решений", "Теория принятия управленческих решений", "Математическое моделирование в менеджменте", "Теория и методы принятия решений о развитии организаций и общества", "Методы анализа политических процессов", «Банковский менеджмент», «Дискретные математические модели». В настоящее время данные учебные курсы читаются сотрудниками лаборатории и кафедры высшей математики на студентам различных факультетов ГУ-ВШЭ.

Уровень проводившихся в рамках данного проекта исследований и значимость полученных результатов полностью соответствуют научным стандартам и уровню развития данной области знания, что подтверждается принятием текстов статей, отражающих результаты реализации проекта, ведущими международными научными журналами для публикации.

Техническое задание проекта выполнено полностью.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений: Учебное пособие. М.: Физматлит, 2007.
2. Podinovski V.V. On the use of importance information in MCDA problems with criteria measured on the first ordered metric scale // *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*. 2009. V. 15. P. 163 – 174.
3. Стрекаловский А.С., Орлов А.В. Биматричные игры и билинейное программирование. М.: Физматлит, 2007.
4. Salo A.A., Hämäläinen R.P. Preference assessment by imprecise ratio statements // *Operations Research*. 1992. V. 40. P. 1053 – 1061.
5. Mateos A., Jiménez A., Ríos-Insua S. Solving dominance and potential optimality in imprecise multi-attribute additive problems // *Reliability engineering and system safety*. 2003. V. 79. P. 253 – 262.
6. Eum Y.S., Park K.S., Kim S.H. Establishing dominance and potential optimality in multi-criteria analysis with imprecise weight and value // *Computer and Operation Research*. 2001. V. 28. P. 397 – 409.
7. Lee K.S., Park K.S., Kim S.H., Lee K.S. Extended methods for identifying dominance and potential optimality in multi-criteria analysis with imprecise information // *European journal of operational research*. 2001. V. 134. P. 557 – 563.
8. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений: Учебник. М.: Логос, 2002.
9. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений: Учебное пособие. М.: Физматлит, 2007.
10. Подиновский В.В. Интервальные оценки важности критериев в многокритериальном выборе // *Системы управления и информационные технологии*. 2007. № 1(27). С. 22 – 26.
11. Подиновский В.В. Интервальные оценки важности критериев в многокритериальной оптимизации // *Информационные технологии моделирования и управления*. 2006. № 8 (33). С. 975 – 979.
12. Подиновский В.В. Интервальная информация о важности критериев в анализе многокритериальных задач принятия решений // *Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы*. 2007. № 6. С. 15 – 18.
13. Подиновский В.В., Нелюбин А.П. Билинейное программирование в анализе многокритериальных задач принятия решений методами теории важности критериев // *Материалы XXXVI Международной конференции “Информационные технологии в науке, образовании,*

телекоммуникации и бизнесе” (20 – 30 мая 2009 г., Гурзуф, Украина). Приложение к журналу “Открытое образование”. 2009. С. 145 – 147.

14. Подиновский В.В., Потапов М.А. Теоретические основы и системы поддержки принятия многокритериальных решений // Материалы XXXIV Международной конференции “Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе” (20 – 30 мая 2007 г., Гурзуф, Украина). Приложение к журналу «Открытое образование». 2007. С. 87 – 89.

15. Подиновский В.В. Анализ задач многокритериального выбора методами теории важности критериев при помощи компьютерных систем поддержки принятия решений // Известия АН. Теория и системы управления. 2008. № 2. С. 64 – 68. Английский перевод: Podinovski V.V. Analysis of multicriteria choice problems by methods of the theory of criteria importance, based on computer systems of decision making support // Journal of Computer and System Sciences International. 2008. V. 47. No 2. P. 221 – 225.

16. Smith J. Aggregation of Preferences with Variable Electorates // *Econometrica*. 1973. V. 41. Iss. 6. P. 1027-1041.

17. Ward B. Majority Rule and Allocation // *Journal of Conflict Resolution*. 1961. V. 5. P. 379-389.

18. Fishburn P. Condorcet social choice functions // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 1977. V. 33. P. 469-489.

19. Miller N. Graph-theoretical approaches to the theory of voting // *American Journal of Political Science*. 1977. V. 21. P. 769-803.

20. Schwartz T. Collective choice, separation of issues and vote trading // *The American Political Science Review*. 1977. V. 71. No. 3. P. 999-1010.

21. Schwartz T. On the Possibility of Rational Policy Evaluation // *Theory and Decision*. 1970. V. 1. P. 89-106.

22. Schwartz T. Rationality and the Myth of the Maximum // *Noûs*. 1972. V. 6. P. 97-117.

23. Duggan J. A systematic approach to the construction of non-empty choice sets // *Social Choice and Welfare*. 2007. V. 28. P. 491-506.

24. Duggan J. Uncovered sets. Mimeo. 2006.

25. Miller N. A new solution set for tournaments and majority voting: Further graph-theoretical approaches to the theory of voting // *American Journal of Political Science*. 1980. V. 24. P. 68-96.

26. McKelvey R. Covering, dominance and institution-free properties of social choice // *American Journal of Political Science*. 1986. V. 30. P. 283-314.

27. Aleskerov F., Kurbanov E. A Degree of Manipulability of Known Social Choice Procedures // *Current Trends in Economics: Theory and Applications* / Eds. Alkan A., Aliprantis Ch., Yannelis N. N.Y.: Springer-Verlag, 1999. P. 13-27.
28. von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944.
29. Subochev A. Dominant, Weakly Stable, Uncovered Sets: Properties and Extensions. Working paper WP7/2008/03. Moscow: State University - Higher School of Economics, 2008.
30. Aleskerov F., Subochev A. Matrix-vector representation of various solution concepts. Working paper WP7/2009/03. M.: State University - Higher School of Economics, 2009.
31. Goodman L. A., Kruskal W. H. Measures of Association for Cross Classifications // *Journal of the American Statistical Association*. 1954. V. 49. N. 268. P. 732–764.
32. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы) // *Автоматика и телемеханика*. 1983. № 9. С. 127-151.
33. Copeland A.H. A reasonable social welfare function (mimeo). 1951. University of Michigan, Ann Arbor (Seminar on Application of Mathematics to the Social Sciences).
34. Gale D., Shapley L.S. College Admissions and the Stability of Marriage // *American Mathematical Monthly*. 1962. V. 69. P. 9-14.
35. Balinski M., Sonmez T.A. Tale of Two Mechanisms: Student Placement // *Journal of Economic Theory*. 1999. V. 84(1). P. 73-94.
36. Abdulkadiroglu A., Sonmez T.A. School Choice: A Mechanism Design Approach // *American Economic Review*. 2003. V. 93. P. 729-747.
37. Balinski M., Young P. *Fair representation*. New Haven: Yale University Press, 1982.
38. Balinski M., Ramirez V. Parametric methods of apportionment, rounding and production // *Mathematical social studies*. 1999. V. 37. P. 107-122.
39. Tideman N., Richardson, D. Better voting methods through technology. The refinement-manageability trade-off in the single transferable vote // *Public Choice*. 2000. V. 103. P. 13-34.
40. Geanakoplos J. Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem // *Cowles Foundation Discussion Paper*. 2004. 1123RRRR.
41. Farrel D.M., McAllister I. The 1983 Change in Surplus Vote Transfer Procedures for the Australian Senate and its Consequences for the Single Transferable Vote // *Australian Journal of Political Science*. 2003. V. 38. N. 3. P. 479-491.
42. Hoag C.G., Hallett G.H. *Proportional representation*. New York: The Macmillan Company, 1926.
43. Meek B.L. Equality of the treatment of votes and a feedback mechanism for vote counting // *Voting Matters*. 1994. I. 1. P. 1-7.

44. Meek B.L. The problem of nontransferable votes // *Voting Matters*. 1994. I. 1. P. 7-11.
45. Hill I.D., Wichmann B.A., Woodall D.R. Algorithm 123 – Single Transferable Vote by Meek's method // *The Computer Journal (UK)*. 1987. V. 30. N. 3. P. 277-81.
46. Colonius H., Schulze H.-H. Tree structures for proximity data // *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*. 1981. V. 34. P. 167–180.
47. Novák V., Novotný M. Binary and ternary relations // *Mathematica Bohemica*. 1992. V.117. N. 3. P. 283-284.
48. Simpsen A. *Cheating Big: On the Logic of Electoral Corruption in Developing Countries*. Typescript. 2008.
49. Hojman D. So, Do You Really Want to Be a Senator? The Political Economy of Candidate Motivation and Electoral Defeat in Chile. Typescript. University of Liverpool. 2004.
50. Lijphart, Arend. The Political Consequences of Electoral Laws // *American Political Science Review*. 1990. V. 84. P. 481–496.
51. Gallagher, Michael. 1992. Comparing Proportional Representation Electoral Systems: Quotas, Thresholds, Paradoxes and Majorities // *British Journal of Political Science*. 1992. V. 22. P. 469–496.
52. Snyder J., Ting J., Ansolabehere M. 2005. Legislative Bargaining under Weighted Voting // *The American Economic Review*. 2005. V. 95(4). P. 981–1004.
53. Laver M., Shepsle K. *Making and Breaking Governments: Cabinets and Legislatures in Parliamentary Democracies*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
54. Schofield N., Sened I. *Multiparty Democracy: Elections and Legislative Politics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
55. King G., Alt J., Burns N.E., Laver M. A Unified Model of Cabinet Dissolution in Parliamentary Democracies // *American Journal of Political Science*. 1990. V. 34(3). P. 846–871.
56. Warwick P. *Government Survival in Parliamentary Democracies*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
57. Hinich M. Equilibrium in spatial voting: The median voter result is an artifact // *Journal of Economic Theory*. 1977. V. 16. P. 208–219.
58. Hinich M., Ledyard J., Ordeshook P. Nonvoting and the existence of equilibrium under majority rule // *Journal of Economic Theory*. 1972. V. 4. P. 144–153.
59. Hinich M., Ledyard J., Ordeshook P. A Theory of Electoral Equilibrium: A Spatial Analysis Based on the Theory of Games // *Journal of Politics*. 1973. V. 35. P. 154-193.
60. Lindbeck A., Weibull J. Balanced-budget redistribution as the outcome of political competition // *Public Choice*. 1987. V. 52. P. 273–297.
61. Coughlin P. *Probabilistic voting theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

62. Banks J., Duggan J. Probabilistic Voting in the Spatial Model of Elections: The Theory of Office-Motivated Candidates // *Social Choice and Strategic Decisions* / Eds. Austen-Smith D., Duggan J. N.Y.: Springer, New York, 2005.
63. Quinn K., Martin A. An Integrated Computational Model of Multiparty Electoral Competition // *Statistical Science*. 2002. V. 17(4). P. 405–419.
64. Schofield N. The Mean Voter Theorem: Necessary and Sufficient Conditions for Convergent Equilibrium // *Review Of Economic Studies*. 2007. V. 74. P. 965–980.
65. Patty J. Local Equilibrium Equivalence in Probabilistic Voting Models // *Games and Economic Behavior*. 2005. V. 51(1). P. 523–536.
66. Patty J. Generic Difference of Expected Vote Share and Probability of Victory Maximization in Simple Plurality Elections with Probabilistic Voters // *Social Choice and Welfare*. 2007. V. 29(1). P. 149–173.
67. Zakharov A. Policy convergence in a two-candidate probabilistic voting model. Typescript. 2009.
68. Ansolabehere S., Rodden J., Snyder J. The Strength of Issues: Using Multiple Measures to Gauge Preference Stability, Ideological Constraint, and Issue Voting // *American Political Science Review*. 2008. V. 102. P. 215–232.
69. Bartels L. Partisanship and Voting Behavior, 1952-1996 // *American Journal of Political Science*. 2000. V. 44(1). P. 35–50.
70. Adams J., Dow J., Merrill S. The political consequences of alienation-based and indifference-based voter abstention: Applications to Presidential Elections. // *Political Behavior*. 2006. V. 28(1). P. 65–86.
71. Whiteley P., Stewart M., Sanders D., Clarke H. 2005. The issue Agenda and Voting in 2005. V. 58(4). P. 802–817.
72. Penrose L.S. The elementary statistics of majority voting // *Journal of the Royal Statistical Society*. 1946. V. 109. P. 53–57.
73. Shapley L.S., Shubik M. A method for evaluating the distribution of power in a committee system // *American Political Science Review*. 1954. V. 48. P. 787–792.
74. Banzhaf J. Weighted voting doesn't work: A Mathematical Analysis // *Rutgers Law Review*. 1965. V. 19. P. 317–343.
75. Coleman J.S. Control of collectivities and the power of a collectivity to act // *Social choice* / Ed. Lieberman B. London: Gordon and Breach, 1971.
76. Shapley L., Owen G. Optimal Location of Candidates in Ideological Space // *International Journal of Game Theory*. 1989. V. 18(3). P. 339-356

77. Aleskerov F., Ochoir O. Generalized Shapley-Owen's index and power distribution in the third DUMA. Working paper WP7/2007/03. Moscow: State University - Higher School of Economics, 2007.
78. Боков В., Верников А. Качество управления и оценка коммерческих банков в России: эмпирическое исследование // *EJournal of Corporate Finance*. 2008. N. 3 (7). С. 5–16.
79. Cubbin J., Leech D. The Effect of Shareholding Dispersion on the Degree of Control in British Companies: Theory and Measurement // *The Economic Journal*. 1983. V. 93. P. 351–369.
80. Leech D. The Relationship between Shareholding Concentration and Shareholder Voting Power in British Companies: A Study of the Application of Power Indices for Simple Games // *Management Science*. 1988.V. 34. N. 4. P. 509–527.
81. Leech D. Shareholder Voting Power and Corporate Governance: A Study of Large British Companies // *Nordic Journal of Political Economy*. 2001. V. 27. P. 33–54.
82. Leech D., Leahy J. Ownership Structure Control Type Classifications and the Performance of Large British Companies // *The Economic Journal*. 1991. V. 101. P. 1418–1437.
83. Aleskerov F. Power indices taking into account agents' preferences // *Mathematics and Democracy* / Eds. Simeone B., Pukelsheim F. Berlin: Springer, 2006. P. 1–18.
84. Алескеров Ф.Т., Солодков В.М., Челнокова Д.С. Динамический анализ паттернов поведения коммерческих банков России // *Экономический журнал ВШЭ*. 2006. №1. С. 48-61.
85. Aleskerov F., Belousova V., Serdyuk M., Solodkov V. Dynamic Analysis of the Behavioural Patterns of the Largest Commercial Banks in the Russian Federation / Working paper, International Center for Economic Research. 2008. p.17
86. Bedingfield J., Reckers P. and Stagliano A. Distributions of Financial Ratios in the Commercial Banking Industry // *Journal of Financial Research*. 1985. V.8. P. 77-81.
87. Bodla B.S., Verma R. Evaluating Performance of Banks through Camel Model // *Icfai University Journal of Bank Management*. 2006. P. 49-63.
88. Cole R.A., Gunther J.W. A CAMEL Rating's Shelf Life // *Studies (Financial Industry)*. Federal Reserve Bank of Dallas. December, 1995.
89. Алескеров Ф.Т., Андриевская И.К., Пеникас Г.И., Солодков В.М. Анализ математических моделей Базель II. М.: Физматлит, 2010.
90. О новом соглашении по достаточности капитала Базельского комитета по банковскому надзору. Сообщение ЦБ РФ от 16 июня 2004 г.
91. Энциклопедия финансового риск-менеджмента / Под ред. А. А. Лобанова, А. В. Чугунова – 3-е изд. – М.: Альпина Пабlishер, 2003.
92. Талеб Н.Н. Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. М.: Издательство КоЛибри, 2010.

93. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.2. М.: Фазис, 1998.
94. Гордин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики. М.: Физматлит, 2010.
95. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М. Наука, 1971.
96. Федорюк М.В. Асимптотика, интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
97. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.
98. Jones W.B., Thron W.J. Two point Pade tables and T-fractions // Bulletin of American Mathematical Society. 1977. V.83. P. 388-390.
99. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. V. 81. P. 637–654.
100. Merton R. C. Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. Spring 1973. P. 141–183.
101. Бухбиндер Г.Л., Чистилин К.М. Стохастическая динамика котировок акций РАО ЕЭС // Математическое Моделирование. 2005. Т. 17. №2. С. 119-125.
102. Бухбиндер Г.Л., Чистилин К.М. Описание российского фондового рынка в рамках модели Гестона. // Математическое Моделирование. 2005. Т. 17. №10. С. 31-38.
103. Heston S.L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // Review of Financial Studies. 1993. V. 6. P. 327-343.