ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

УДК: 159.9:33

№ госрегистрации: 01201165881

Инв.№:

УТВЕРЖДАЮ
Проректор НИУ ВШЭ, к.э.н.

М.М. Юдкевич

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

КОНСТРУИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ

(заключительный)

Шифр: ТЗ-55.0

Руководители темы:
зав. Международной научно-учебной
лабораторией анализа и выбора решений, д.т.н. Ф.Т. Алескеров

гл.н.с. Международной научно-учебной
лабораторией анализа и выбора решений, PhD Э. Маскин

Москва 2011

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Соруководители темы,

зав. лабораторией, д.т.н., зав. каф., проф.	___________	Ф.Т. Алескеров	(введение, заключение)
Гл. научн. сотр., PhD	___________	Э. Маскин	(подразделы 2.2, 6.1)

Исполнители темы

Научный сотрудник, к.э.н., доцент	___________	В.Ю. Белоусова	(пункт 4.1.5)
Ст.-исследователь, студент	___________	Ю.А. Веселова	(подраздел 1.2)
Ст.-исследователь, студент	___________	Ю.О. Гизингер	(пункты 1.3.1, 1.3.2)
Вед. науч. сотр., д.ф.-м.н., проф.	___________	В.А. Гордин	(подраздел 5.1)
Ст.-исследователь, преподаватель, аспирант	___________	Л.Г. Егорова	(подраздел 3.2)
Ст. науч. сотр., к.э.н., доцент	___________	А.В. Захаров	(подраздел 2.3)
Ст.-исследователь, студент	___________	А.А. Иванов	(подраздел 1.1)
Ст.-исследователь, студент	___________	Р.У. Камалова	(подразделы 8.3, 8.4)
Мл. науч. сотр., преподаватель, аспирант	___________	Д.С. Карабекян	(пункт, 1.3.5, подраздел 1.4)
Ст.-исследователь, студент	___________	И.А. Карачунский	(пункты 1.3.3, 1.3.4)
Мл. науч. сотр., преподаватель, аспирант	___________	А.В. Карпов	(подразделы 2.4, 2.5, 2.6)
Мл. науч. сотр., преподаватель, аспирант	___________	С.Г. Кисельгоф	(подразделы 8.3-8.6)

Ст.-исследователь, студент	___________	М.Б. Левкина	(подраздел 2.1)
Ст. науч. сотр., д.ф.-м.н., проф.	___________	А.Е. Лепский	(подраздел 5.2)
Вед. науч. сотр., д.т.н., проф.	___________	Б.Г. Миркин	(Приложение А)
Ст.-исследователь, студент	___________	Е.О. Митичкин	(пункты 7.2.1-7.2.3)
Вед. науч. сотр., д.т.н., проф.	___________	В.В. Подиновский	(подразделы 3.3-3.7)
Ст. науч. сотр., к.т.н., доцент	___________	А.А. Рубчинский	(подразделы 6.2, 6.3)
Ст. науч. сотр., к.ф.-м.н., доцент	___________	К.С. Сорокин	(подразделы 3.1)
Ст. науч. сотр., к.ф.-м.н., доцент	___________	А.Н. Субочев	(подраздел 7.1)
Ст.-исследователь, студент	___________	Ф.В. Строк	(подраздел 8.1, 8.2)
Ст.-исследователь, студент	___________	Е.Л. Черняк	(пункты 4.1.1- 4.1.4)
Ст.-исследователь, студент	___________	О.Н. Чугунова	(подраздел 4.2)
Мл..науч.сотр., преподаватель	___________	Д.А. Шварц	(подразделы 6.3-6.5)
Ст.-исследователь, студент	___________	С.В. Швыдун	(пункты 7.2.4, 7.2.5)

РЕФЕРАТ

Отчет 251 с., 1 ч., 32 рис., 36 табл., 136 источника.

ДИЗАЙН МЕХАНИЗМОВ, ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ, ТЕОРИЯ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА, ТЕОРИЯ ИГР, ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ, МАНИПУЛИРОВАНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ, КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ, МЕРА ИНФОРМАТИВНОСТИ, ОБОБЩЕННЫЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ.

Объектом исследования были модели и методы принятия решений и интеллектуального анализа данных.

Цель исследования – получение новых теоретических результатов в ряде научных областей, связанных с принятием решений (теория коллективного выбора, теория многокритериального выбора, теория игр, интеллектуальный анализ данных), а также применение теоретических моделей этих дисциплин для конструирования экономических механизмов.

В частности, целями исследований были:

– построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений;

– разработка аксиоматики и анализ систем пропорционального представительства, реализующих правило передачи голосов;

– сравнительный анализ аксиоматических систем теории важности критериев и теории аддитивных функций ценности, обоснование многокритериальных решающих правил, основанных на аддитивной функции ценности и использующих информацию о важности критериев и их шкалах;

– разработка методов принятия решений о выборе параметров в алгоритмах кластер-анализа, разработка методов построения нечетких профилей текстовых и иных объектов в терминах заданной таксономии, разработка методов обобщения и интерпретации четких и нечетких множеств запроса в таксономиях;

– исследование мер информативности, определенных на множестве признаков недетерминистской системы; нахождение устойчивых представлений и описаний недетерминистских систем;

– исследование манипулирования в задаче дележа для двух участников;
– применение методов оптимального коллективного выбора и ранжирования альтернатив к построению агрегированных рейтингов и разработке самообучающихся ранжирующих алгоритмов для фильтрации записей;
– исследование математической модели выбора абитуриентом вуза.

Проект был связан, прежде всего, с исследованием теоретических проблем. Методологической основой исследований были теория рационального выбора, теория игр, теория важности критериев, теория интеллектуального анализа данных. Основными средствами и методами исследований были процедуры оптимизации, численные и комбинаторные методы, методы статистического и кластерного анализа данных, методы теории вероятностей и др.

Техническим средством исследования были электронные вычислительные машины. Для прикладных исследований использовались интернет-данные, базы данных по публикациям экономической тематики, базы данных приемной кампании в вузы и др.

В результате выполнения проекта получены **следующие результаты**:
– предложен алгоритм генерации представителей классов эквивалентности по анонимности и нейтральности профилей предпочтений в модели независимых анонимных и нейтральных предпочтений для вычисления индекса манипулируемости;
– вычислены разности индексов манипулируемости в модели с анонимностью и нейтральностью и без них, вычислены вероятности возникновения манипулирования в профиле с заданной мерой сходства предпочтений в нем для случая трех альтернатив и числа избирателей от 3 до 10;
– показано, что при определенных предпосылках все q-Паретовские правила можно проранжировать между собой по свободе манипулируемости;
– сопоставление q-Паретовских правил с правилами Нэнсона, Блэка и относительного большинства показало, что выбор наименее манипулируемого правила сильно зависит от того, какой метод расширения предпочтений используется; в зависимости от предпосылок, числа участника и альтернатив, в большинстве случае наиме-

нее манипулируемыми правилами становятся процедуры Нэнсона и Сильнейшее q-Паретовское правило простого большинства;

– построено обобщение различных методов, реализующих правило передачи голосов на практике, в виде формальной процедуры;

– предложен новый метод голосования, основанный на правиле передачи голосов, и построено его аксиоматическое описание;

– показано, что пересчет квоты в правилах передачи голосов не вносит существенных изменений в процедуру выбора;

– при сравнительном анализе аксиоматических систем теории важности критериев и теории аддитивных функций ценности показано, что отдельные критерии и группы критериев могут быть упорядочены по важности, даже если структура предпочтений с функцией ценности не является аддитивной или даже если функции ценности вовсе не существует, хотя отношение нестрогого предпочтения является связным;

– из результатов сравнительного анализа систем аксиом теории важности критериев и теории аддитивных функций ценности вытекает, что для упорядоченности критериев по важности вовсе не обязаны выполняться аксиомы, обеспечивающие существование функций ценности, в том числе аддитивных;

– предположение о существовании параметрического семейства аддитивных функций ценности при конечном множестве шкальных градаций и предположение о существовании количественных величин важности критериев с вычислительной точки зрения эквивалентны;

– построены нечеткие профили публикаций массива интернет-документов 2009-2010 гг. на основе заданных экономических факторов и осуществлена мультифасетная классификация этих факторов;

– построен граф значимых связей между экономическими факторами на основе анализа полученной мультифасетной классификации факторов;

– построена таксономия дисциплин «Математика», «Информатика» и «Прикладная математика» на основе классификации специальностей ВАК РФ;

– исследована задача нахождения минимального представления образа (на примере задачи нахождения минимального полигонального представления плоской дискретной кривой) методом нечеткой кластеризации с помощью отношений похожести и различия;

– введена и исследована усредненная мера информативности, определенная на множестве признаков образа, которые в свою очередь являются случайными величинами;

– исследована задача нахождения наиболее устойчивого представления относительно усредненной стохастической меры информативности в том случае, когда признаки являются независимыми случайными величинами;

– при исследовании манипулирования в задаче дележа для двух участников были найдены условия, при которых манипулирование лишено практического смысла или невыгодно для обоих;

– применение методов оптимального коллективного выбора и ранжирования альтернатив, основанных на коллективных предпочтениях, моделируемых мажоритарным отношением к построению агрегированных рейтингов научных журналов показало, что введенные ранжирования хорошо соотносятся с совокупностью библиометрических показателей и могут служить в качестве интегральных показателей для построения рейтинга журналов; предложенный подход дает более «грубое» разбиение журналов, что больше соответствует интуитивным представлениям об их значимости;

– разработан самообучающийся ранжирующий алгоритм для фильтрации записей в поисковых системах;

– предложен способ моделирования поведения абитуриента при выборе вузов для подачи заявлений и ход приемной кампании при разной информации неопределенности и начальных условиях; показано, что из-за ограничения количества шагов (два в 2011 г.) механизма зачисления абитуриентов недобирают не только самые слабые вузы, но и вузы уровня «выше среднего».

Область применения полученных результатов – разработка и анализ процедур голосования, многокритериальное принятие решений, распознавание образов, интернет-поиск, ранжирование альтернатив и построение агрегированных рейтингов, организация приемной кампании в вузы.

Все полученные результаты являются новыми. Их значимость подтверждена многочисленными апробациями на международных конференциях и авторитетных семинарах. Кроме того, практически все представленные результаты опубликованы, в том числе в реферируемых научных изданиях.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория механизмов в настоящее время является одной из наиболее динамично развивающихся научных дисциплин, которую, как образно заметил один из столпов этой теории и один из соруководителей настоящего проекта Э. Маскин, «можно рассматривать как "инженерную" сторону экономической теории». Основной вопрос данной дисциплины – это проблема имплементации, то есть поиск способов практического достижения желаемых (оптимальных) результатов. Для определения того, какие результаты являются оптимальными, теория механизмов использует нормативные модели экономической теории и теории коллективного и индивидуального выбора. Для достижения оптимальных результатов используется математический аппарат теории игр, поскольку модельная имплементация осуществляется через конструирование игры, равновесием в которой будет заранее заданный оптимальный результат социального или экономического взаимодействия. Таким образом, конструирование экономических механизмов является междисциплинарной областью, в которой используются модели и методы экономической теории, теории принятия решений и теории игр.

В части настоящего исследования, связанной с теорией принятия решений, можно сказать, что, несмотря на успехи, достигнутые в данной области за последние полвека, вопросы, рассматриваемые в рамках данного проекта, являются малоизученными.

В соответствии с техническим заданием в ходе выполнения данного проекта были проведены исследования в следующих научных направлениях:

– построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений;
– разработка аксиоматики и анализ систем пропорционального представительства, реализующих правило передачи голосов;
– сравнительный анализ аксиоматических систем теории важности критериев и теории аддитивных функций ценности, обоснование многокритериальных решающих

правил, основанных на аддитивной функции ценности и использующих информацию о важности критериев и их шкалах;

– разработка методов принятия решений о выборе параметров в алгоритмах кластер-анализа, разработка методов построения нечетких профилей текстовых и иных объектов в терминах заданной таксономии, разработка методов обобщения и интерпретации четких и нечетких множеств запроса в таксономиях;

– исследование мер информативности, определенных на множестве признаков недетерминистской системы; нахождение устойчивых представлений и описаний недетерминистских систем;

– исследование манипулирования в задаче дележа для двух участников;

– применение методов оптимального коллективного выбора и ранжирования альтернатив к построению агрегированных рейтингов и разработке самообучающихся ранжирующих алгоритмов для фильтрации записей;

– исследование математической модели выбора абитуриентом вуза.

Работа над данным проектом является продолжением исследований, проводимых в научно-учебной Лаборатории анализа и выбора решений в 2010 г. в ходе реализации проекта "Модели и методы принятия решений". В частности, в 2010 г. были получены следующие новые теоретические результаты:

– дана общая постановка оптимизационных задач, возникающих при многокритериальном выборе методами теории важности критериев, разработаны точные и эффективные методы решения таких задач при интервальной информации о важности критериев и ценности шкальных оценок;

– предложены и апробированы методы автоматизации решения для дивизимных, бикластерных и трикластерных алгоритмов, предложены методы построения профилей для текстовых данных, проведена их экспериментальная проверка и выработаны рекомендации по улучшению, разработаны программы для подъема четких множеств запроса и визуализации результатов;

– разработан метод справедливого дележа при любом числе делимых и неделимых пунктов для двух участников;

– изучены реально используемые ординальные системы пропорционального представительства, реализующие правило передачи голосов, представленных выборами в Ирландии, Австралии, Новой Зеландии и др. странах;

– создан комплекс программ, позволяющий вычислять как ряд решений в задаче коллективного выбора, так и связанные с ними способы построения рейтингов, исследованы теоретико-множественные соотношения решения фон Неймана – Моргенштерна, двух версий множества Бэнкса и тринадцати решений в задаче коллективного выбора, строящихся с помощью правила большинства;

– построена "проективная" аксиоматика для индексов влияния, зависящих от предпочтений участников, построены алгоритмы для их вычисления;

– сопоставление позиционных правил принятия решений показало, что с точки зрения степени манипулируемости наилучшими являются система Хара и процедура Блэка для случая минимум 7 участников голосования, при меньшем числе участников результат сильно зависит от используемого метода расширения предпочтений, сравнение оценок для случая сильного и слабого манипулирования показывает, что соотношение мер манипулируемости практически неизменно в независимости от используемой концепции, в ряде случаев, при числе участников кратном количеству альтернатив, возможны несовпадения соотношения правил, однако общий характер зависимости – такой же;

– в рамках манипулирования при частичном порядке расширенных предпочтений (слабое манипулирование) получены предварительные результаты оценки степени манипулируемости с точки зрения индекса Келли.

Исследования 2011 года, выполненные в ходе реализации данного проекта, с одной стороны развивают некоторые из указанных исследований прошлого года, а с другой стороны, используют предыдущие исследования.

Методологической основой исследований служат теория рационального выбора, теория игр, теория важности критериев, теория интеллектуального анализа данных. Основными средствами и методами исследований являются процедуры оптимизации, численные и комбинаторные методы, методы статистического и кластерного анализа данных, методы теории вероятностей и др.

Техническим средством исследования служат электронные вычислительные машины. Для прикладных исследований использовались интернет-данные, базы данных по публикациям экономической тематики, базы данных приемной кампании в вузы и др.

Данный отчет состоит из восьми разделов, соответствующих основным направлениям исследований, проводимых в ходе выполнения данного проекта и одного приложения.

В первом разделе рассматривается построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений. В частности, в этом разделе предложен алгоритм генерации представителей классов эквивалентности по анонимности и нейтральности профилей предпочтений в модели независимых анонимных и нейтральных предпочтений для вычисления индекса манипулируемости; вычислены разности индексов манипулируемости в модели с анонимностью и нейтральностью и без них, вычислены вероятности возникновения манипулирования в профиле с заданной мерой сходства предпочтений в нем для случая трех альтернатив и числа избирателей от 3 до 10. Кроме того, в этом разделе исследовано поведение q-Паретовских правил голосования с точки зрения их манипулируемости. Показано, что при определенных предпосылках все q-Паретовские правила можно проранжировать между собой по манипулируемости. В отличие от результатов, полученных в 2010-м году, была значительно расширена база сопоставления мер манипулируемости. В виду того, что были получены результаты для правила Нэнсона, удалось обобщить результаты на случай большего числа правил. Кроме того, q-Паретовские правила были сопоставлены с точки зрения для индексов свободы манипулируемости и с точки зрения индекса Нитцана-Келли для случая слабого манипулирования.

Во втором разделе приведены результаты исследований по разработке аксиоматики и анализу систем пропорционального представительства, реализующих правило передачи голосов. В частности, в этом разделе построено обобщение различных методов, реализующих правило передачи голосов на практике, в виде формальной процедуры, предложен новый метод голосования, основанный на правиле передачи голосов, и построено его аксиоматическое описание. Показано, что пересчет квоты в правилах передачи голосов не вносит существенных изменений в процедуру выбора.

Третий раздел посвящен результатам сравнительного анализа аксиоматических систем теории важности критериев и теории аддитивных функций ценности, обоснованию многокритериальных решающих правил, основанных на аддитивной функции ценности и использующих информацию о важности критериев и их шкалах. Показано, что отдельные критерии и группы критериев могут быть упорядочены по важности (в смысле точных определений из теории важности критериев), даже если структура предпочтений с функцией ценности не является аддитивной или даже если функции ценности вовсе не существует, хотя отношение нестрогого предпочтения является связным. В частности, установлено, что для упорядоченности критериев по важности вовсе не обязаны выполняться аксиомы, обеспечивающие существование функций ценности, в том числе аддитивных, а предположение о существовании параметрического семейства аддитивных функций ценности при конечном множестве шкальных градаций и предположение о существовании количественных величин важности критериев с вычислительной точки зрения эквивалентны.

В четвертом разделе построены нечеткие профили публикаций массива интернет-документов 2009-2010 гг. на основе заданных экономических факторов и осуществлена мультифасетная классификация этих факторов, построен граф значимых связей между экономическими факторами на основе анализа полученной мультифасетной классификации факторов.

Пятый раздел отчета посвящен результатам исследований одной задачи – задачи нахождения минимального представления образа (на примере нахождения минимального полигонального представления плоской дискретной кривой) двумя способами, исходя из разных моделей неопределенности. Первый способ связан с применением метода нечеткой кластеризации относительно отношений похожести и различия. Второй подход основан на описании образа с помощью усредненных мер информативности, определенных на множестве признаков образа, которые в свою очередь являются случайными величинами. Поставлена и исследована задача нахождения наиболее устойчивого представления относительно усредненной стохастической меры информативности в том случае, когда признаки являются независимыми случайными величинами.

В шестом разделе приведены результаты исследований манипулирования в задаче дележа для двух участников. В частности, найдены условия, при которых манипулирование лишено практического смысла.

В седьмом разделе рассматривается применение методов оптимального коллективного выбора и ранжирования альтернатив, основанных на коллективных предпочтениях, моделируемых мажоритарным отношением к построению агрегированных рейтингов научных журналов. Показано, что введенные ранжирования хорошо соотносятся с совокупностью библиометрических показателей и могут служить в качестве интегральных показателей для построения рейтинга журналов. Кроме того, в этом разделе разработан самообучающийся ранжирующий алгоритм для фильтрации записей в поисковых системах.

В восьмом разделе приведены результаты моделирования поведения абитуриента при выборе набора вузов для подачи заявлений и хода приемной кампании при разной имеющейся информации и параметрах. В частности показано, что из-за ограничения количества шагов (два в 2011 г.) механизма зачисления абитуриентов недобирают не только самые слабые вузы, но и вузы уровня «выше среднего».

В Заключении приведены краткие выводы по результатам выполнении НИР и даны рекомендации по конкретному использованию их результатов.

В Приложении А приведены результаты построения таксономии дисциплин «Математика», «Информатика» и «Прикладная математика» на основе классификации специальностей ВАК РФ, построенной с помощью разработанной программа для метода обобщения нечетких кластеров в иерархической структуре понятий.

Все полученные результаты являются новыми. Их значимость подтверждена многочисленными апробациями на международных конференциях и авторитетных семинарах. Кроме того, практически все представленные результаты опубликованы, в том числе в реферируемых научных изданиях.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В соответствии с техническим заданием проекта «Конструирование экономических механизмов» основной целью работы было получение новых теоретических результатов в ряде научных областей, связанных с принятием решений (теория коллективного выбора, теория многокритериального выбора, теория игр), а также применение теоретических моделей этих дисциплин для конструирования экономических механизмов. В рамках заявленной темы были проведены исследования в следующих научных направлениях:

– построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений;
– разработка аксиоматики и анализ систем пропорционального представительства, реализующих правило передачи голосов;
– сравнительный анализ аксиоматических систем теории важности критериев и теории аддитивных функций ценности, обоснование многокритериальных решающих правил, основанных на аддитивной функции ценности и использующих информацию о важности критериев и их шкалах;
– разработка методов принятия решений о выборе параметров в алгоритмах кластер-анализа, разработка методов построения нечетких профилей текстовых и иных объектов в терминах заданной таксономии, разработка методов обобщения и интерпретации четких и нечетких множеств запроса в таксономиях;
– исследование мер информативности, определенных на множестве признаков недетерминистской системы; нахождение устойчивых представлений и описаний недетерминистских систем;
– исследование индексов влияния и манипулирования в группах;
– теоретический анализ и применение методов оптимального коллективного выбора и ранжирования альтернатив, основанных на коллективных предпочтениях, моделируемых мажоритарным отношением;
– исследование математической модели выбора абитуриентом вуза;

– исследование моделей справедливости дележа при произвольном числе участников, делимых и неделимых пунктов.

1 Построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений

В рамках проекта исследовалась манипулируемость правил агрегирования предпочтений.

Принятие коллективных решений – одна из неотъемлемых составляющих жизни человека в обществе. Теория коллективного выбора изучает свойства правил голосования, и одно из таких свойств – это степень их манипулируемости. Манипулирование со стороны участников голосования, избирателей, заключается в представлении ими на выборах неискренних предпочтений с целью повлиять на итог голосования, и добиться более выгодного для них результата. Для измерения степени манипулируемости был предложен индекс Келли [1], который является основой для множества исследований в данной области. Он вычисляется как отношение всех ситуаций голосования, при которых манипулирование по данному правилу возможно, к общему количеству всех ситуаций голосования.

Под ситуацией ниже понимаем распределение типов упорядочения альтернатив на множестве избирателей, или кто и как голосует в обществе. Однако какие из ситуаций считать эквивалентными, а какие – разными? Есть несколько моделей предпочтений, отличающиеся тем, какие именно предпочтения коллектива считать эквивалентными друг другу. В литературе подробно изучены три основные модели. Первая из них предполагает, что все ситуации голосования уникальны и равновероятны. Другая модель считает неразличимыми имена избирателей, т.е. обладает свойством анонимности. Третья модель не только считает избирателей анонимными, но и не делает различия между именами альтернатив. Последняя модель является достаточно новой и малоизученной.

В данном проекте были подробно исследованы свойства модели с анонимностью и нейтральностью, предложены новые алгоритмы решения задач в этой модели, такие как: нахождение мощности классов эквивалентности по анонимности и нейтральности, алгоритм генерации представителей классов эквивалентности. Решение ряда задач для этой модели весьма трудоемко в силу необходимости учитывать как изменение порядка избирателей, так и все возможные переименования альтернатив.

В проекте были поставлены и решены как теоретические, так и численные задачи. Теоретическое исследование посвящено оценке разности степени манипулируемости в модели с анонимностью и нейтральностью и без них. Численное исследование задача манипулирования предполагало провести вычислительные эксперименты, чтобы получить фактические показатели манипулируемости правил. Для этой цели необходимо было решить ряд подзадач, построить схему вычислений и написать реализующий теоретические алгоритмы программный код.

Еще одна задача исследования – это проверка гипотезы о наличии взаимосвязи между возможностью манипулирования в некоторой ситуации голосования и степенью сходства предпочтений избирателей в ней. Вопрос о наличии этой взаимосвязи еще не был решен в теории коллективного выбора.

Для решения этого ряда задач были использованы методы современной прикладной алгебры, дискретной математики и комбинаторики, теории групп, теории алгоритмов и вычислительной сложности. Для проведения вычислительных экспериментов использованы средства программирования математического пакета Maple 13.

1.1 Обзор исследований

1.1.1 Обзор исследований по манипулируемости правил коллективного выбора

Центральное место в данном направлении исследований занимает изучение возможности манипулирования со стороны избирателей при заданном правиле голосования. В этом пункте будет сделан краткий обзор литературы в этой области, и выделены основные публикации, имеющие наибольшее значение для исследуемой в данной работе задачи.

Манипулирование результатом голосования может быть осуществлено несколькими способами: намеренное изменение повестки дня, изменение распределения избирателей по избирательным округам, индивидуальное манипулирование избирателем и коалиционное манипулирование. Со стороны избирателей стратегическое поведение – это изменение представляемых на выборах предпочтений, имеющее целью изменить результат голосования в свою пользу. В основе большого количества литературы по манипулируемости правил коллективного выбора лежат исследования [2] и [3]. В этих работах было доказано, что любая недиктаторская процедура выбора не является защищенной от манипулирования.

Дополнение к теореме о манипулируемости всякой недиктаторской процедуры выбора было предложено [4]. Что если коллективный выбор в некоторой процедуре голосования в какой-то степени подвержен влиянию случайности? Например, независимо от предпочтений избирателей некоторый генератор случайным образом выбирает альтернативу. Эта процедура точно не является манипулируемой, но и не вызывает одобрения. Другой пример – это случайный выбор избирателя, наилучшая альтернатива которого будет выбрана в качестве результата голосования. Такое правило, очевидно, не является ни диктаторским, ни манипулируемым, так как сообщать неискренние предпочтения будет невыгодно. Так, результатом работы [4] является теорема: если количество альтернатив больше трех, и правило выбора не подвержено влиянию случайности в достаточно большой степени, то оно либо диктаторское, либо манипулируемо.

Большой вклад в исследование манипулируемости был сделан Д. Келли. В работе [5] им было доказано, что не существует таких правил голосования, осуществляющих выбор из множества более чем трех альтернатив, которые были бы недиктаторскими, неманипулируемыми и выбор которых был бы представлен всегда единственной альтернативой.

Для того чтобы выяснить, насколько одно правило больше чем другое, подвержено манипулированию со стороны избирателей, нужно выделить хотя бы две степени манипулируемости. В работе [6] было предложен метод вычисления количества профилей предпочтений, в которых манипулирование возможно. Соответственно, наименее манипулируемым в этом случае будет правило, которое минимизирует количество таких профилей. Отношение числа профилей, в которых хотя бы один избиратель имеет возможность манипулировать к общему числу профилей предпочтений, получил название индекса Келли. Следующий шаг, предложенный в [6], заключается в выявлении маловероятных случаев манипулирования. Если избиратель заявляет предпочтения, которые находятся слишком «далеко» от его истинных предпочтений, то такое манипулирование может быть легко замечено и наказано, и психологические издержки, которые может понести избиратель, будут для него высоки. Для измерения расстояния между предпочтениями предлагается использовать функцию Kemeny [7]. Было введено понятие правила коллективного выбора, локально защищенного от манипулирования – если для каждого манипулирования, возможного при данном правиле, избирателю требуется изменить свое предпочтение, которое находится на расстоянии больше, чем 1, от его искреннего предпочтения.

Вопрос манипулируемости был исследован посредством численных экспериментов в работе [8], где была вычислена частота появления циклов и манипулирования для трех правил коллективного выбора: правила относительного большинства, правила Борда, и функции Kemeny [7].

Подробное изучение поведения индексов манипулируемости для различных правил голосования было начато в [1]. В этой работе впервые процедуры выбора сравниваются друг с другом по вероятности манипулирования в них. Продолжением этой линии исследований является работа [9], в которой индекс манипулируемости Келли был вычислен посредством численных экспериментов. В этой же работе для устранения несравнимости альтернатив в выборе был применен алфавитный порядок. Такой метод является одним из самых удобных, однако, в этом случае для коллективного выбора нарушается свойство нейтральности – равноправности всех альтернатив в голосовании. В дополнение к индексу Келли, в работе были предложены новые индексы манипулируемости. Расширенная версия индекса – отношение числа профилей, в которых ровно k избирателей имеют возможность манипулировать, к общему количеству профилей предпочтений. Кроме того, был предложен индекс свободы манипулирования.

Манипулируемость правил голосования коалициями избирателей была исследована в [10], [11]. Авторами была рассмотрена как Модель Независимых Предпочтений, так и Модель Независимых Анонимных и Нейтральных Предпочтений для случая трех альтернатив.

В работе [12] вопрос манипулируемости был рассмотрен с точки зрении существования возможности ответного манипулирования. Расчет индексов был произведен для трех альтернатив и числа избирателей до 40. Правило Борда, наиболее манипулируемое среди рассматриваемых ими правил коллективного выбора, оказалось наименее манипулируемым в случае, если принимаются во внимание ответные манипулирования.

Наконец в работах [13], [14], [15] авторов проекта были рассмотрены различные показатели степени манипулируемости в случае множественного выбора соответственно пяти и десяти правил. Было также использовано несколько методов расширения предпочтений, число альтернатив увеличено до 5, и количество избирателей до 100.

1.1.2 Обзор исследований по моделям IAC и IANC

В данном пункте будет рассмотрена литература, посвященная вероятностным моделям генерации предпочтений, которые имеют большое значение для нашего исследования. В теории коллективного выбора существует несколько моделей построения предпочтений, в рамках которых различные правила голосования исследуются на «устойчивость» и «надежность», вероятность возникновения различных парадоксов, непротиворечивость, манипулируемость и т.д. Модели показывают, какие коллективные предпочтения считать отличными друг от друга, а какие – эквивалентными с точки зрения принятых в модели аксиом.

В литературе подробно описаны две основные модели – модель независимых предпочтений (Impartial Culture Model – IC model) и модель независимых анонимных предпочтений (Impartial Anonymous Culture Model – IAC model). Первая из них использует само множество профилей предпочтений (все способы ранжирования n избирателями m альтернатив) для определения предпочтений участников голосования, при этом все профили считаются равновероятными. Модель независимых анонимных предпочтений основана на предположении безразличия по именам избирателей, и все анонимные профили считаются равновероятными.

Модель независимых предпочтений (IC) была представлена в [16]. В ней предполагается, что существует m альтернатив и n избирателей, и что каждый из участников голосования независимо выбирает свои предпочтения. P_i – предпочтения i-того избирателя. Вектор предпочтений n избирателей называется профилем предпочтений $\vec{P} = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$. Вероятность выбора каждого из видов предпочтений избирателем равна $1/m!$. Множество всех возможных типов предпочтений – это множество всех профилей, равное числу размещений с повторениями n элементов из $m!$, т.е. $(m!)^n$. Вероятность появления каждого из профилей предпочтений одинаковая. На основе этой модели было сделано множество исследований, (см. [17], [18] и др.).

Следующая модель предпочтений, занимающая важное место в литературе, это модель Независимых Анонимных Предпочтений – Impartial Anonymous Culture Model (IAC). Эта модель впервые была представлена в работе [19], расширена и дополнена в [18]. Модель IAC основана на предположении об анонимности избирателей, т.е. не существует различия между их именами. В этой модели профили предпочтения становятся эквивалентными с точки зрения перестановки предпочтений избирателей местами, и множество профилей предпочтений разбивается на классы эквивалентности по анонимности (Anonymous Equivalence Class – AEC). Иначе говоря, множества профилей предпочтения, которые принадлежат одному классу, могут быть получены один из другого путем перестановки имен избирателей. Любой профиль из класса может быть выбран в качестве его представителя.

В [18], [20] исследуется вероятность существования победителя Кондорсе для трех и четырех альтернатив и различного числа избирателей в модели IAC. Для этого выводится формула вычисления количества различных с точки зрения анонимности профилей для трех альтернатив

$$K(3,n,IAC)=\sum_{n_6=0}^{n}\sum_{n_5=0}^{n-n_6}\sum_{n_4=0}^{n-n_6-n_5}\sum_{n_3=0}^{n-n_6-n_5-n_4}\sum_{n_2=0}^{n-n_6-n_5-n_4-n_3}1, \tag{1.1}$$

где n_i – количество избирателей, имеющих i-ый вид предпочтений из $m!$, сумма n_i по всем предпочтениям равна общему числу избирателей n: $\sum_{i=1}^{m!} n_i = n$.

Как было показано в [21], формула (1.1) может быть записана в виде

$$K(3,n,IAC)=\frac{\prod_{i=1}^{5}(n+i)}{120}.$$

Формула для вычисления количества классов эквивалентности по анонимности для n избирателей и m альтернатив представляет собой биномиальный коэффициент

$$K(m,n,IAC)=\binom{n+m!-1}{m!-1}.$$

В [20] было проведено сравнение вероятности выбора каждого из типов предпочтений к Модели Независимых Предпочтений и Модели Независимых Анонимных Предпочтений. Если каждому из типов ранжирований присвоить номера от 1 до $m!$, число альтернатив $m=3$, вектор, i-ый элемент которого равен n_i, обозначить за $\boldsymbol{n}$ (voting situation), то вероятность при случайном выборе получить профиль с заданным $\boldsymbol{n}$, для описанных выше вероятностных моделей будет вычисляться как

$$P(\boldsymbol{n},\alpha)=\frac{n!}{\boldsymbol{A}^{[n,\alpha]}}\prod_{i=1}^{6}\frac{A_i^{[n_i,\alpha]}}{n_i!},$$

где

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{6} A_i ,$$

причем для моделей IC и IAC $\forall i \; A_i = 1$, и под записью $\boldsymbol{A}^{[k,\alpha]}$ подразумевается выражение

$$\boldsymbol{A}^{[k,\alpha]} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\alpha)(\boldsymbol{A}+2\alpha)...(\boldsymbol{A}+(k-1)\alpha) .$$

Тогда при значении параметра $\alpha = 0$, $P(\boldsymbol{n},\alpha)$ будет равна вероятности получить профиль с заданным $\boldsymbol{n}$ в модели Независимых Предпочтений:

$$P(\boldsymbol{n},0) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}\frac{1}{6^n} .$$

А при параметре $\alpha = 1$

$$P(\boldsymbol{n},1) = \frac{120}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} ,$$

т.е. $1/K(3,n,IAC)$.

Рассматриваемая модель независимых анонимных и нейтральных предпочтений (Impartial Anonymous and Neutral Culture Model, IANC Model) была описана впервые в [22]. В этой статье проведен анализ вероятности совпадения победителя Кондорсе и победителя по правилу простого большинства, а также вероятности возникновения парадокса Кондорсе.

В этой модели отражены две основные аксиомы в теории коллективного выбора: анонимность и нейтральность. Аксиома анонимности требует одинакового подхода к рассмотрению голосов для всех избирателей, а аксиома нейтральности предполагает отсутствие встроенных в правило выбора предубеждений относительно какой-либо из альтернатив. Так, для определенного числа избирателей и альтернатив, некоторые профили предпочтений эквивалентны друг другу с учетом анонимности и нейтральности, так как они могут быть получены друг из друга путем простого переименования избирателей и альтернатив. Аналогично предыдущей модели, все множество профилей предпочтений делится на классы эквивалентности по анонимности и нейтральности (Anonymous and Neutral Equivalence Classes – ANECs). Любой из профилей предпочтений в данном классе может быть выбран в качестве представителя класса, или его генератора.

В работе [22], а также в [23] была получена формула для вычисления классов эквивалентности по анонимности и нейтральности, выведенная из леммы Бернсайда о количестве орбит и свойств групп перестановок. В последней работе был построен алгоритм случайной генерации представителей классов эквивалентности с одинаковой вероятностью для всех классов.

1.2 Модель независимых предпочтений и модель независимых анонимных и нейтральных предпочтений

Данный подраздел посвящен изучению вероятностных моделей с анонимностью и нейтральностью и без них. После терминологического описания моделей, и расшифровки используемых обозначений с приведением соответствующих примеров, будет рассмотрен алгоритм генерации представителей классов эквивалентности. Как уже было сказано, в модели независимых предпочтений (IC – Impartial Culture Model), если m – количество альтернатив, а n – количество избирателей, каждый из $(m!)^n$ профилей предпочтений считается равновероятным с другими. Тип предпочтений задается самим профилем. В модели независимых анонимных и нейтральных предпочтений (IANC – Impartial Anonymous and Neutral Culture Model) иначе: если один профиль можно получить из другого при помощи перестановки столбцов и переименования альтернатив, то такие профили считаются эквивалентными. Таким образом, множество всех профилей Ω разбивается на классы эквивалентности. Все профили, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности, представляют собой один и тот же тип коллективных предпочтений. Независимость от перестановки столбцов в модели – анонимность избирателей, независимость от переименования альтернатив – нейтральность альтернатив.

1.2.1 Основные термины и обозначения [1]

В подразделе 1.1 было дано определение профиля предпочтений, который можно представить как матрицу размера $m \times n$. Предпочтения избирателей обозначают столбцы матрицы, внутри каждого столбца – ранжированные избирателями альтернативы. Множество всех профилей предпочтений – множество Ω. Рассмотрим его на примере для m=2 и n=3:

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \end{pmatrix} \; P_2 = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 \end{pmatrix} \; P_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \; P_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_1 \end{pmatrix} \; P_6 = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \; P_7 = \begin{pmatrix} a_2 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \; P_8 = \begin{pmatrix} a_2 & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Мощность множества Ω равна $|\Omega| = (m!)^n$. Пример: $|\Omega| = (2!)^3 = 8$. Некоторые профили эквивалентны с точки зрения перестановки столбцов, и множество Ω разбивается на классы эквивалентности по анонимности: $AEC_1 = \{P_1\}$, $AEC_2 = \{P_2, P_3, P_4\}$, $AEC_3 = \{P_5, P_6, P_7\}$, $AEC_4 = \{P_8\}$. Если переставить столбцы в P_2, можно получить P_3 и P_4. Количество классов эквивалентности по избирателям в общем случае равно биномиальному коэффициенту

$$\binom{n + m! - 1}{m! - 1} \equiv C_{n+m!-1}^{m!-1}.$$

Классы эквивалентности по анонимности и нейтральности: $ANEC_1 = \{P_1, P_8\}$, $ANEC_2 = \{P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$. На рисунке 1.1 показано действие перестановок столбцов и переименование альтернатив в классе $ANEC_2 = \{P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$.

[1] Определения алгебраических понятий и обозначения взяты из статьи [22].

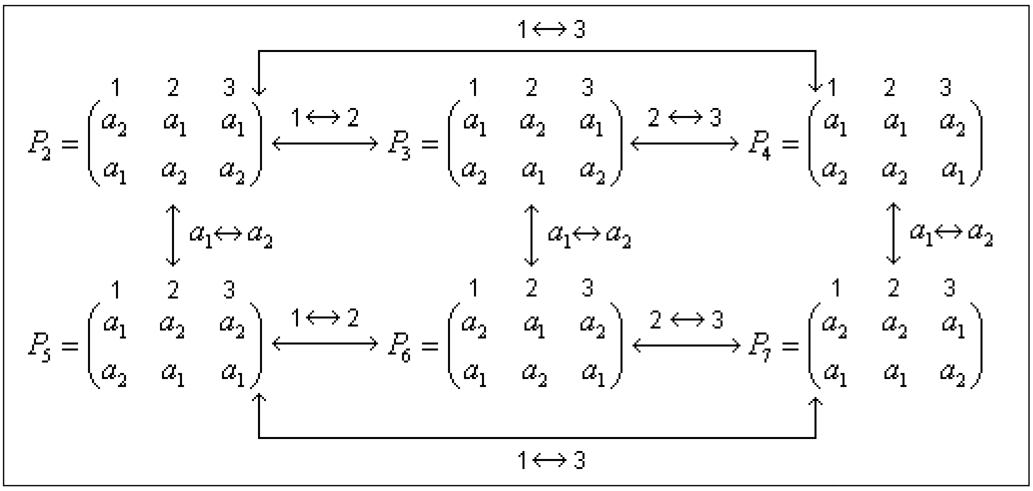


Рисунок 1.1 – Класс эквивалентности по анонимности и нейтральности

Любой представитель класса эквивалентности по анонимности и нейтральности может быть взят в качестве генерирующего элемента, из которого могут быть получены все остальные элементы класса. Число таких генераторов не всегда равно числу классов эквивалентности по анонимности, деленному на число перестановок множества из *m* элементов (*m!*). Такое равенство имеет место только когда *n* и *m!* – взаимно простые числа.

Перестановка σ на конечном множестве [*n*] – взаимно-однозначное соответствие множества [*n*] в себя. Иначе ее можно определить как изменение порядка упорядоченного набора из *n* элементов.

Множество всех перестановок [*n*] образует группу относительно операции композиции, которая называется симметрической группой степени *n* и обозначается S_n. Порядок группы – это число элементов, содержащихся в ней. Порядок группы $|S_n| = n!$. Для S_3, например, порядок равен 6

$$S_3 = \{\sigma_1=(1)(2)(3),\ \sigma_2=(12)(3),\ \sigma_3=(13)(2),\ \sigma_4=(1)(23),\ \sigma_5=(123),\ \sigma_6=(132)\}.$$

Разбиением λ множества из *n* элементов назовем такую слабо убывающую последовательность неотрицательных целых чисел $\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge ... \ge \lambda_z)$, где $n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_z$. λ_i называется частью λ. Например, $\lambda = (3,2,2)$ – разбиение множества из 7 элементов на 3 части. Если λ – разбиение множества мощности *n*, то обозначается это как $\lambda \vdash$ n.

Каждое разбиение имеет тип, обозначаемый как $1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}...n^{\alpha_n}$. Эта запись означает, что разбиение имеет α_i частей размер i для всех i из [1…n]. Например, разбиение $\lambda = (3,2,2)$ имеет тип $1^0 2^2 3^1 4^0 5^0 6^0 7^0$, или $2^2 3^1$.

Перестановка σ на множестве из n элементов определяет его разбиение – длины циклов перестановки – части разбиения. Например, для $\sigma = (142)(35)(67)$ циклический тип $2^2 3^1$.

Для разбиения λ определим число z_λ: $z_\lambda = 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}...n^{\alpha_n}\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$. Число перестановок циклического типа $1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}...n^{\alpha_n}$ равно $N_\lambda = z_\lambda^{-1} \cdot n!$. Например, в симметрической группе S_7 число перестановок типа $2^2 3^1$ равно $\dfrac{7!}{2^2 3^1 2!1!} = 210$.

Множество перестановок данного циклического типа называется классом сопряженности. Сумму $\alpha_1 + \alpha_2 + ...$ обозначим для краткости записи за α – общее количество циклов перестановки σ.

Пусть P^σ – образ профиля $P \in \Omega$ под действием перестановки σ. Подмножество множества Ω $\{P^\sigma \mid \sigma \in G\}$ – орбита элемента $P \in \Omega$. Действие группы, таким образом, делит множество Ω на орбиты, Ω – разделенное объединение своих орбит: $\Omega = \theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_t$. θ_i – орбиты, они же классы эквивалентности.

Профили P_1, P_2 называются эквивалентными, если существует такая перестановка $\sigma \in G$, что $P_1^\sigma = P_2$. Если $P^\sigma = P$, то P – неподвижная точка перестановки σ.

Нейтральной перестановкой для профиля называется перестановка, под действием которой профиль не меняется. Например, если σ_2=(12)(3) – перестановка столбцов профиля, то σ_2 – нейтральная перестановка для профилей P_1, P_4, P_7, P_8. $G_P = \{\sigma \in G \mid P^\sigma = P\}$ – стабилизатор – множество нейтральных перестановок для профиля Р. Например, для профиля P_2 множество $G_P = \{\sigma_1, \sigma_4\}$.

Логическая функция от S – утверждения

$$\chi(S) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad S - \text{истинно} \\ 0, & \text{если} \quad S - \text{ложно} \end{cases}.$$

Биномиальный коэффициент

$$\binom{x}{k} = C_x^k = \begin{cases} \dfrac{x!}{k!(x-k)!}, x \in \mathbb{Z} \\ 0, x \notin \mathbb{Z} \end{cases}.$$

В модели независимых анонимных и нейтральных предпочтений перестановкой g будем называть пару перестановок $g = (\sigma, \tau)$, где σ – перестановка столбцов, а τ – перестановка (переименование) альтернатив, $a_i \to a_{\tau(i)}$, $i = 1, 2, ..., m$.

Пример действия перестановки g

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_1 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g_1 = ((13)(24),(1)(2)) \\ g_2 = ((13)(24),(12)) \end{matrix}$$

$$P^{g_1} = \begin{pmatrix} a_2 & a_2 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \end{pmatrix}, \; P^{g_2} = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Алгоритмы генерации представителей классов эквивалентности по анонимности и нейтральности

В данном пункте будет рассмотрен алгоритм генерации представителей классов эквивалентности, т.е. профилей предпочтений, из которых при помощи перестановки столбцов и переименования альтернатив могут быть получены все остальные элементы классов. Множество представителей, или генераторов, классов будет использовано в дальнейшем для исследования манипулируемости правил коллективного выбора в модели IANC – независимых анонимных и нейтральных предпочтений.

Так называемый, «лобовой» алгоритм имеет большую вычислительную сложность. Он реализуется в два этапа: первый – нахождение эквивалентных по анонимности профилей и получение представителей классов эквивалентности по анонимности, второй – нахождение эквивалентных по нейтральности представителей классов эквивалентности по анонимности. Так как количество всех профилей предпочтений равно $|\Omega| = (m!)^n$, количество перестановок столбцов $n!$, и число классов эквивалентности по анонимности равно $\frac{(n+m!-1)!}{(m!-1)!n!}$, то количество операций первого этапа этого алгоритма будет равно:

$$(m!)^n + 1 + (m!)^n \cdot (2 + n! \cdot (n \cdot m + 2(m!)^n)) + (m!)^n \cdot \frac{(n+m!-1)!}{(m!-1)!n!}.$$

Как видно, сложность алгоритма зависит от факториала n, и, следовательно, уже для трех альтернатив и шести избирателей, количество операций становится очень велико. Тогда как классов эквивалентности по анонимности и нейтральности всего 83. Эмпирический анализ вычислительной сложности для m=3, n=5 показал время работы алгоритма равное 56 минутам.

Алгоритм рекурсивной генерации

Для уменьшения временных затрат работы программы, реализующей генерацию, был предложен и реализован рекурсивный алгоритм генерации представителей классов эквивалентности. Этот алгоритм использует множество генераторов классов для случая $m \times n$, чтобы получить множество генераторов для $m \times (n+1)$. К каждому из представителей классов $m \times n$ алгоритм приписывает $(n+1)$-ый столбец $m!$ способами. Затем получившиеся профили алгоритм проверяет на эквивалентность по анонимности и нейтральности. Сокращение времени получается за счет сужения множества перебираемых профилей. В алгоритме простого перебора для случая $m \times (n+1)$ первый этап сравнивает все $(m!)^{n+1}$. Если количество классов эквивалентности $ANEC$ равно $R(m,n)$, то множество сравниваемых профилей состоит из $R(m,n) \cdot m!$ элементов. Так как $R(m,n) < (m!)^n$, то всегда $R(m,n) \cdot m! < (m!)^{n+1}$.

Обоснование алгоритма. Для правильной работы алгоритма необходимо, чтобы из перебора не были исключены все элементы какого-либо класса эквивалентности по анонимности и нейтральности. Покажем, что они не могут быть исключены.

Множество профилей, полученных прибавлением $(n+1)$-ого столбца к генераторам для $m \times n$ обозначим за M.

Проведем доказательство от противного и предположим, что некоторый профиль предпочтений P не является элементом множества M, а также не являются элементами множества M все профили, полученные из P перестановкой столбцов и переименованием альтернатив. $(n+1)$-ый столбец профиля P – обозначим за P_{n+1} одна из $m!$ возможных перестановок альтернатив. Если $P \notin M$, то профиль P', полученный при удалении $(n+1)$-ого столбца из P, не является генератором класса для $m \times n$. Следовательно, существует другой профиль P'', принадлежащий тому же классу эквивалентности, что и P', такой, что P'' является генератором класса эквивалентности для $m \times n$. P'' может быть получен из P' перестановкой столбцов σ и переименованием альтернатив τ. Следовательно, добавляя в профиль P'' $(n+1)$-ый столбец вектор P_{n+1} с альтернативами, переименованными в соответствии с τ, получим профиль $\tilde{P}$, который может быть получен из P с помощью перестановки столбцов и альтернатив. Значит, P и $\tilde{P}$ принадлежат одному классу эквивалентности, причем $\tilde{P} \in M$ – предположение о том, что все элементы какого-либо класса эквивалентности могут не принадлежать M неверно. Доказано, что сокращение перебираемых профилей предпочтений не грозит нам потерей классов эквивалентности.

Однако время работы алгоритма может быть так же существенно сокращено путем введения некоторых упрощающих функций. Два таких упрощения были использованы в алгоритме. Первое из них – упрощение выявления эквивалентности по анонимности. Так как условием эквивалентности по анонимности является наличие у профилей одинакового набора столбцов, то сравнение профилей может быть осуществлено через сравнение таких наборов. Иными словами, не потребуется многократной проверки эквивалентности каждого профиля, измененного в соответствии с $n!$ перестановками столбцов, с каждым профилем. Для каждого профиля вводится вектор $VecCol(P)$ размерности $m!$, каждый элемент которого – число вхождений в профиль каждого из $m!$ типов столбцов. Сравнение профилей на эквивалентность по анонимности производится при помощи сравнения векторов $VecCol(P)$.

Пример. Пусть $m=3, n=4$. Вектор $VecCol(P)$ имеет размерность 6. Элементы 1-6 этого вектора обозначают число вхождений столбцов

$$1-\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, 2-\begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}, 3-\begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}, 4-\begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}, 5-\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, 6-\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

Для профилей предпочтений P^1, P^2 состав столбцов одинаковый

$$P^1=\begin{pmatrix} a & b & b & c \\ b & c & c & a \\ c & a & a & b \end{pmatrix}, P^2=\begin{pmatrix} b & a & c & b \\ c & b & a & c \\ a & c & b & a \end{pmatrix},$$

$$VecCol(P^1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$VecCol(P^2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Второе упрощение алгоритма связано с определением эквивалентности профилей по нейтральности. Перед тем, как изменить профиль $m!$ способами перестановки альтернатив, стоит исключить из рассмотрения заведомо неэквивалентные профили. Как определить неэквивалентные по нейтральности профили, не применяя к ним перестановок альтернатив? В этом случае мы будем рассматривать так называемое разбиение столбцов на типы. Если тип разбиений для двух профилей не совпадает, то они уже не могут быть эквивалентными по нейтральности. Например, в профиле P^1, есть три столбца одного типа и один столбец другого, а в профиле P^2 – нет одинаковых столбцов. Для сравнения разбиений мы вводим вектор $Columns(VecCol(P))$ размерности n, i-ый элемент которого обозначает количество вхождений в профиль групп из i одинаковых столбцов.

Теперь перейдем к пошаговому описанию самого алгоритма. Множество представителей классов эквивалентности для нулевого шага может быть взято для случая

$m \times 1$, имеющего всего один класс, где в качестве представителя может быть взята любая из $m!$ перестановок.

I Генерация множества M профилей предпочтений из представителей классов эквивалентности для $m \times n$, $ANEC(m \times n)$:

I.1 для каждого представителя класса, $ANEC(m \times n)[s]$, s от 1 до $KA(m \times n)$:

I.1.a для каждой перестановки альтернатив (каждого типа столбца) $Permute$ от 1 до $m!$:

– k увеличиваем на единицу;

– создаем новый профиль $P[k]$, $m \times (n+1)$;

– элементам профиля $P[k]$ по i от 1 до m и по j от 1 до n присваиваем значения соответствующих элементов $ANEC(m \times n)[s]$;

– элементам $(n+1)$-ого столбца профиля $P[k]$ присваиваем значение перестановки (типа столбца)

$Permute$;

I.2 для каждого профиля $P[k]$:

– находим вектор $VecCol(P[k])$;

– значение флага-индикатора $F[k]$ приравниваем к нулю.

II Нахождение эквивалентных по анонимности профилей предпочтений:

II.1 Для каждого $P[k]$ из M

II.1.a если $F[k] = 0$:

– номер класса K увеличиваем на единицу;

– значение $F[k]$ приравниваем к K – номеру класса;

– для каждого профиля $P[j]$ из M:

– если $F[j] = 0$ и векторы $VecCol(P[k])$ и $VecCol(P[j])$ эквиваленты, то $F[j]$ приравниваем к K;

II.2 Профили, имеющие одинаковое значение $F[k]$ записываем в один и тот же класс эквивалентности по анонимности AEC.

III. Нахождение эквивалентных по нейтральности представителей классов AEC
.

III.1 Для каждого представителя класса $AEC[i]$:

– флаг-индикатор принадлежности к классу $FA[i]$ приравниваем нулю;

III.2 Счетчик KA, обозначающий номер класса эквивалентности по анонимности и нейтральности приравниваем к нулю;

III.3 Для представителя каждого класса $AEC[i]$:

– если $FA[i]=0$:

– номер класса KA увеличиваем на единицу;

– для представителя каждого класса $AEC[j]$:

– если векторы $Columns(VecCol(AEC[i]))$ и $Columns(VecCol(AEC[j]))$ эквивалентны, то:

– для каждой перестановки τ множества столбцов:

– применяем перестановку τ к представителю класса $AEC[i]$, получаем $\tau(AEC[i])$;

– если $FA[j]=0$ и профили $AEC[j]$ и $\tau(AEC[i])$ равны, то $FA[j]$ приравниваем к KA;

III.4 Профили, имеющие одинаковое значение $FA[i]$ записываем в один и тот же класс эквивалентности по анонимности и нейтральности $ANEC$.

Оба приведенные алгоритма были реализованы при помощи средств программирования в пакете Maple 13.

1.3 Манипулируемость

В данном подразделе приведены результаты исследований манипулируемости правил голосования в случае множественного выбора. В первом пункте даны основные термины и понятия, такие как манипулирование, индексы манипулируемости и методы расширения предпочтений. Далее описан порядок вычисления индексов манипулируемости в вероятностных моделях предпочтений – с анонимностью и нейтральностью и без них. Затем описаны алгоритмы вычисления индексов и их программная реализация. В конце подраздела будут представлены результаты вычислений и их обоснование.

1.3.1 Основные термины и обозначения

Манипулирование результатом голосования со стороны избирателей – это искажение представляемых ими на голосовании предпочтений, имеющее целью изменить результат голосования на более выгодный для них вариант. В проекте был исследован только случай индивидуального манипулирования – избиратели не могут объединяться в коалиции и договариваться о совместном изменении предпочтений.

Вместе с этим результат голосования всегда может быть представлен несколькими альтернативами, и даже множеством всех альтернатив. Такая ситуация называется множественным выбором, и в этом случае возникает необходимость сравнивать наборы альтернатив по степени их предпочтительности для избирателя. В этом случае используются методы расширения предпочтений на множество всех подмножеств альтернатив.

Дадим определение всех используемых нами понятий в математических терминах и обозначениях, предложенных в [9], [24]. Множество альтернатив, которое состоит из m элементов, обозначим за A, $m > 2$. $\mathbf{A}$ – множество все непустых подмножеств A. Множество избирателей $N = \{1, 2, ..., n\}$ имеет мощность n. Каждый избиратель линейно упорядочивает альтернативы в соответствии со своими предпочтениями, P_i – предпочтения избирателя i.

Правило коллективного выбора ставит в соответствие каждому профилю некоторый элемент множества $\mathbf{A}$. Пусть профиль $\vec{P} = \{P_1, ..., P_i, ..., P_n\}$ представляет истинные предпочтения всех избирателей. Тогда профиль $\vec{P}_{-i} = \{P_1, ..., P_{i-1}, P_i', P_{i+1} ..., P_n\}$ представляет вектор предпочтений избирателей, в котором только i-ый избиратель искажает свои предпочтения.

Пусть EP_i – расширенное предпочтение избирателя i, представляющее собой упорядочивание на множестве $\mathbf{A}$. Пусть $C(\vec{P})$ – выбор, или результат голосования, определяемый правилом коллективного выбора.

В профиле $\vec{P}$ для правила голосования, определяющего выбор $C(\vec{P})$, возможно манипулирование, если существует избиратель i, обладающий предпочтением P_i, и искаженным предпочтением P_i', такой, что $C(\overrightarrow{P_{-i}})EP_iC(\vec{P})$. То есть выбор $C(\overrightarrow{P_{-i}})$ при искаженных предпочтениях лучше для избирателя i, чем выбор при истинных его предпочтениях.

В данном подразделе рассматриваются лексикографические методы расширения предпочтений, а именно Leximin и Leximax. Если предпочтения избирателя на множестве альтернатив aP_ibP_ic, то расширенные по Leximin предпочтения выглядят следующим образом

$$\{a\}EP_i\{a,b\}EP_i\{b\}EP_i\{a,c\}EP_i\{a,b,c\}EP_i\{b,c\}EP_i\{c\}.$$

Соответственно, для aP_ibP_ic, расширенные по Leximax предпочтения

$$\{a\}EP_i\{a,b\}EP_i\{a,b,c\}EP_i\{a,c\}EP_i\{b\}EP_i\{b,c\}EP_i\{c\}.$$

Для определения степени манипулируемости правила голосования, мы будем пользоваться методом, предложенным в [1]. Этот метод, один из самых удобных и наглядных, подразумевает подсчет количества профилей, в которых возможно манипулирование и составление отношения количества таких профилей к общему их числу. Это отношение называется индексом Келли

$$K = \frac{d_0}{(m!)^n},$$

где d_0 – количество профилей, в которых хотя бы один избиратель имеет возможность манипулировать, а $(m!)^n$ – общее количество различных профилей предпочтений.

1.3.2 Индекс манипулируемости в модели независимых предпочтений и модели независимых анонимных и нейтральных предпочтений

В проекте был произведен расчет индекса Келли для трех альтернатив и числа избирателей от трех до десяти в разных моделях предпочтений. Чем будет отличаться порядок вычисления индекса Келли в модели независимых предпочтений и модели независимых анонимных и нейтральных предпочтений?

В подразделе 1.2 были подробно рассмотрены различия этих двух моделей. В модели с анонимностью избирателей и нейтральностью альтернатив различные типы профилей предпочтений представлены генераторами классов эквивалентности по анонимности и нейтральности. Поэтому расчет индекса Келли будет производиться не по всем профилям, а только по представителям (генераторам) классов эквивалентности, т.е.

$$K_{IANC} = \frac{r_0}{R(m,n)},$$

где r_0 – количество представителей классов, в которых хотя бы один избиратель имеет возможность манипулировать (r – *root*, представитель класса), а $R(m,n)$ – общее количество классов эквивалентности.

Заметим, что если в профиле-представителе класса есть возможность манипулировать для k избирателей, то этим же свойством обладают и все остальные элементы класса, так как правила коллективного выбора предполагаются удовлетворяющими как свойству анонимности, так и свойству нейтральности и выбор $C(\vec{P})$, таким образом, не должен иметь зависеть от имен избирателей и альтернатив.

Поэтому, индекс Келли в модели независимых предпочтений может быть выражен через классы эквивалентности и их мощности

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{r_0} |\theta_i|}{\sum_{i=1}^{R(m,n)} |\theta_i|},$$

где числитель – сумма мощностей классов эквивалентности, в профилях-представителях которых возможно манипулирование со стороны хотя бы одного избирателя, а в знаменателе – сумма мощностей всех классов эквивалентности. Так как классы эквивалентности по определению не пересекаются, то общая сумма их мощностей равна $(m!)^n$. Такой способ вычисления удобен только тогда, когда нам известны представители классов и их мощности, в этом случае это может сократить время вычисления индекса Келли на несколько порядков.

1.3.3 Численные эксперименты и результаты вычислений

В предыдущем подразделе были описаны два алгоритма генерации представителей классов эквивалентности. В данном пункте используется результат генерации представителей классов для анализа манипулируемости в модели независимых анонимных и нейтральных предпочтений.

Функции правил коллективного выбора представляют собой процедуры, входным параметром которых является матрица – профиль предпочтений. Результат функции подмножество альтернатив. В исследовании использовались четыре правила голосования: правило относительного большинства, одобряющее голосование, правило Борда и процедура Блэка. Дадим математическое определение выбора по каждому из правил голосования.

Правило относительного большинства. Выбор по данному правилу определяется как множество альтернатив, являющихся наилучшими для наибольшего числа избирателей. Математически его можно задать следующим образом

$$a \in C(\vec{P}) \Leftrightarrow [\forall x \in A \quad n^+(a,\vec{P}) \geq n^+(x,\vec{P})],$$

где $n^+(a,\vec{P}) = card\{i \in N \mid \forall y \in A \quad aP_i y\}$.

Одобряющее голосование. Одобряющее голосование уровня q – правило коллективного выбора, при котором выбор определяется как множество альтернатив, которые занимают место не ниже q в предпочтениях для наибольшего числа избирателей. При $q=1$ это правило эквивалентно правилу относительного большинства.

$$a\in C(\vec{P}) \Leftrightarrow [\forall x\in A \quad n^{+}(a,\vec{P},q)\geq n^{+}(x,\vec{P},q)],$$

$$n^{+}(a,\vec{P},q)=card\{i\in N \mid card\{D_i(a)\}\leq q-1\}.$$

Правило Борда. По данному правилу для каждой альтернативы a вычисляется ранг Борда – по всем избирателям суммируется количество альтернатив, которые хуже a. Пусть

$$r_i(x,\vec{P})=card\{b\in A: xP_ib\},$$

число альтернатив в предпочтении $P_i\in\vec{P}$, худших, чем x и

$$r(a,\vec{P})=\sum_{i=1}^{n} r_i(a,\vec{P}),$$

– ранг Борда для альтернативы x. Альтернатива, имеющая максимальный ранг – входит в выбор.

$$a\in C(\vec{P}) \Leftrightarrow [\forall b\in A, \quad r(a,\vec{P})\geq r(b,\vec{P})].$$

Процедура Блэка. Если существует победитель Кондорсе, то он выбирается в качестве результата голосования, в противном случае выбор осуществляется по правилу Борда. Победитель Кондорсе определяется как альтернатива, недоминируемая по мажоритарному отношению. Если $V(a,b;\vec{P})=\{i\in N \mid aP_ib\}$ – множество всех избирателей, для которых a предпочтительнее b, то

$$a\in C(\vec{P}) \Leftrightarrow [\forall b\in A, \quad |V(a,b;\vec{P})|>|V(b,a;\vec{P})|]$$

Программы для правил коллективного выбора и сравнения двух подмножеств альтернатив по Leximin и Leximax были написаны при помощи средств программирования пакета Maple. Код программы, реализующей простой перебор профилей предпочтений для выделения классов эквивалентности, вычисление индекса манипулируемости и меры сходства предпочтений занимает объем в 338 Кб. Код рекурсивного алгоритма генерации классов и вычисления индекса манипулируемости для них занимает 336 Кб.

Были вычислены индексы манипулируемости для случая трех альтернатив и количества избирателей от 3 до 10 как в модели независимых предпочтений, так и в модели независимых анонимных и нейтральных предпочтений. Результаты вычислений представлены на рисунках.

Как видно из рисунка 1.2, индекс Келли для правила относительного большинства в модели с анонимностью и нейтральностью ниже, чем в модели Независимых Предпочтений. Это объясняется тем, что профили, в которых возможно манипулирование по данному правилу, в большинстве своем принадлежат большим по мощности классам эквивалентности.

Действительно, для таких профилей характерна высокая степень несогласованности предпочтений относительно наилучших альтернатив. Так как данный пример рассматривает случай с тремя альтернативами, то несогласованность предпочтений среди наилучших альтернатив ведет к несогласованности как минимум среди вторых наилучших альтернатив. Из определения класса эквивалентности следует, что чем меньше повторяющихся столбцов в профиле предпочтений, тем меньшее количество перестановок для него нейтрально и тем большее количество профилей содержит класс эквивалентности, которому принадлежит профиль.

Теперь обратим внимание на индекс Келли для правила одобряющего голосования при уровне $q=2$ для того же числа альтернатив и метода расширения предпочтений (рисунок 1.3). В этом случае разность индексов в моделях имеет противоположный знак. Объяснить такое поведение графиков можно следующим образом. Для профилей, в которых возможно манипулирование по одобряющему голосованию, характерно наличие нескольких альтернатив, имеющих наибольшее значение $n^{+}(a,\vec{P},q)$. Среди таких профилей много тех, которые принадлежат малым по мощности классам эквивалентности. Например, в профилях

$$\overrightarrow{P^1}=\begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ b & b & b & b & b \\ c & c & c & c & c \end{pmatrix},\ \overrightarrow{P^2}=\begin{pmatrix} a & a & a & a & b \\ b & b & b & b & c \\ c & c & c & c & a \end{pmatrix}$$

есть возможность манипулировать в $\overrightarrow{P^1}$ – у всех пяти избирателей, в $\overrightarrow{P^2}$ – у первых четырех. Мощность класса эквивалентности, которому принадлежит $\overrightarrow{P^1}$ – минимальная возможная мощность $m! = 6$. Для второго профиля мощность его класса равна 30.

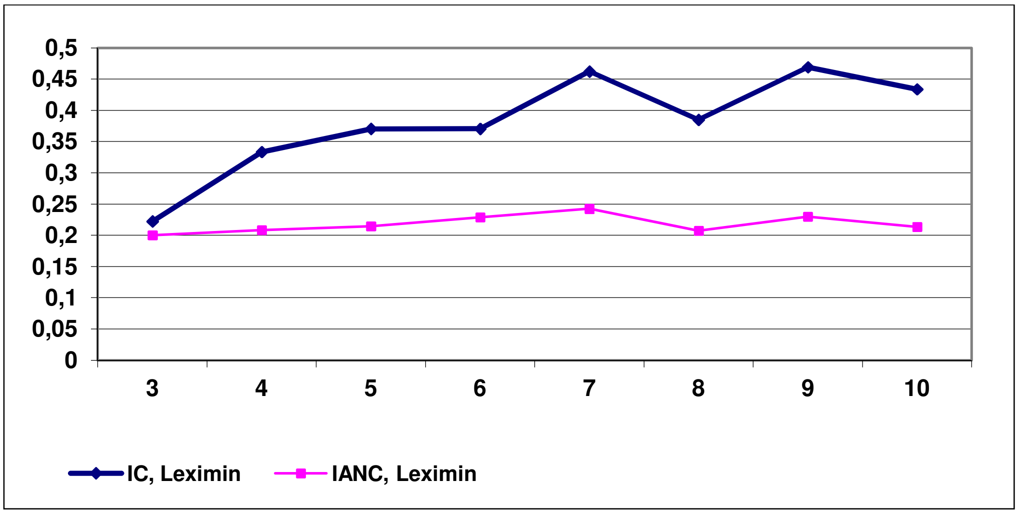


Рисунок 1.2 – Индекс Келли для правила относительного большинства, m=3 и n от 3 до 10, в модели Impartial Culture и Impartial Anonymous and Neutral Culture, метод расширения предпочтений Leximin

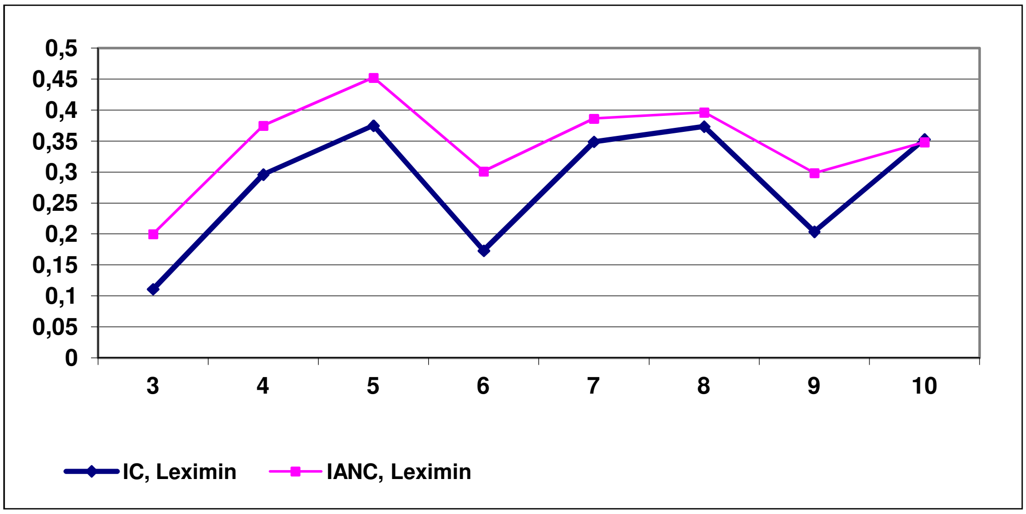


Рисунок 1.3 – Индекс Келли для одобряющего голосования, q=2, m=3 и n от 3 до 10, в модели Impartial Culture и Impartial Anonymous and Neutral Culture, метод расширения предпочтений Leximin

На рисунках 1.4 и 1.5 представлены исследование разности индексов в моделях предпочтений. На каждом из них изображены два графика – верхняя и нижняя граница разности – максимальное возможное отклонение показателей. Между ними –

фактическое отклонение индексов манипулируемости друг от друга для четырех правил коллективного выбора

Видно, что наибольшим по модулю отклонением обладает индекс манипулируемости для правила относительного большинства и наименьшим – правило одобряющего голосования. С дальнейшим ростом числа избирателей ($n > 10$) ожидается уменьшение максимального отклонения и, следовательно, отклонений индексов для правил выбора, за счет роста количества классов и увеличения числа нейтральных перестановок для максимального по мощности класса.

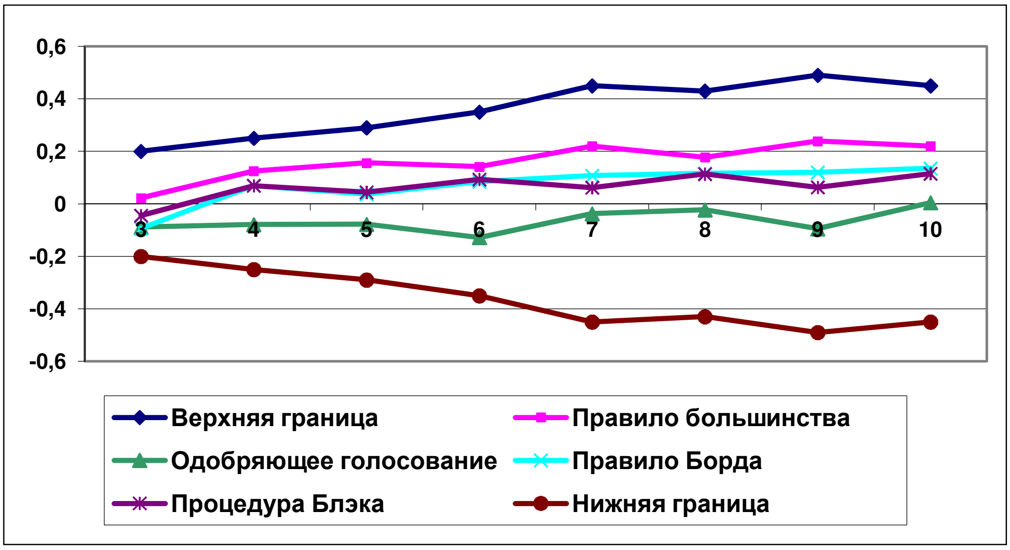


Рисунок 1.4 – Максимальная возможная разность индексов в IC и IANC и фактическая разность индексов для четырех правил коллективного выбора при методе расширения предпочтений Leximin

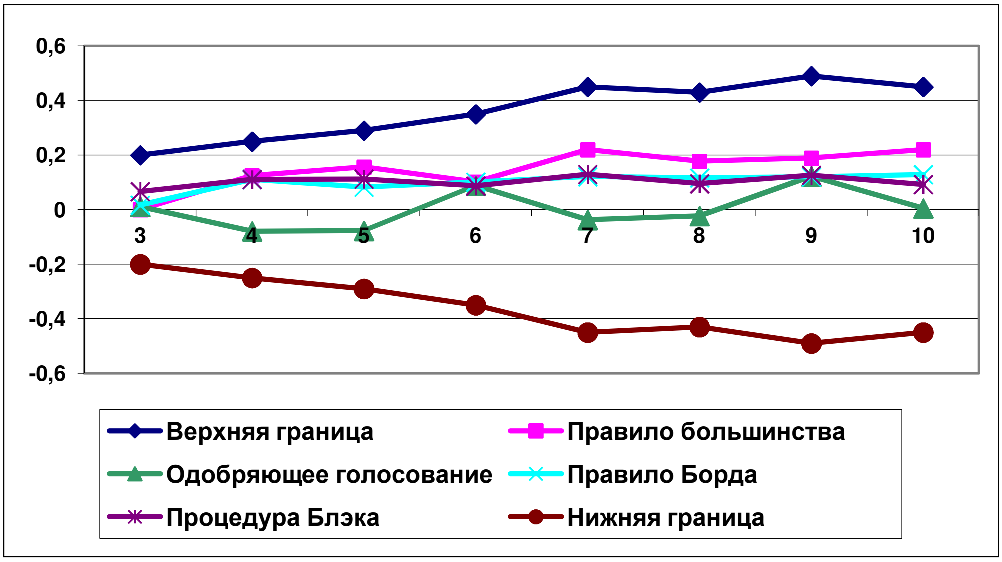


Рисунок 1.5 – Максимальная возможная разность индексов в IC и IANC и фактическая разность индексов для четырех правил коллективного выбора при методе расширения предпочтений Leximax

1.3.4 Манипулируемость и мера сходства предпочтений

В данном пункте приведены результаты исследований задача выявления взаимосвязи между наличием возможности манипулировать в конкретном профиле предпочтений и мерой согласованности индивидуальных предпочтений избирателей.

Как было показано на примере правила относительного большинства, наличие манипулирования в профиле напрямую зависит от согласованности предпочтений относительно наилучших альтернатив избирателей. Для правила одобряющего голосования эта связь не столь очевидна.

Для измерения сходства предпочтений мы воспользуемся функцией, предложенной в [25]. Эта функция ставит в соответствие профилю число из единичного отрезка, чем ближе это число к единице, тем больше согласованность предпочтений избирателей в профиле. Если $\vec{P}$ – профиль предпочтения, A – множество альтернатив, тогда множество всех пар альтернатив, таких что $x \neq y$, $\overline{K} = \{\{x, y\} \in A^2 : x \neq y\}$. Пусть $n_{x,y}(\vec{P})$ – разность между количеством избирателей, для которых x предпочтительней y, и количеством избирателей, для которых y предпочтительней x;

$\sigma_{x,y}(\vec{P}) = |n_{x,y}(\vec{P})|/n$ – доля $n_{x,y}(\vec{P})$ в общем количестве избирателей. Считаем, что $x \succ_{\vec{P}} y$, если $n_{x,y}(\vec{P}) > 0$ и $x \sim_{\vec{P}} y$, если $n_{x,y}(\vec{P}) = 0$. Пусть

$$p_x(\vec{P}) = card\{y \in A \setminus \{x\} : x \succ_P y\},$$

количество альтернатив, которые x доминирует по мажоритарному отношению, а

$$i_x(\vec{P}) = card\{y \in A \setminus \{x\} : x \sim_P y\},$$

количество альтернатив, которые эквивалентны x по мажоритарному отношению. Рассмотрим функцию

$$r_{x,y}(\vec{P}) = p_x(\vec{P}) + p_y(\vec{P}) + \frac{1}{2}(i_x(\vec{P}) + i_y(\vec{P})).$$

Тогда согласованность предпочтений в профиле вычисляется по формуле:

$$M(\vec{P}) = \frac{\sum_{\{x,y\} \in \bar{K}} \omega(r_{x,y}(\vec{P})) \cdot \sigma_{x,y}(\vec{P})}{\sum_{\{x,y\} \in \bar{K}} \omega(r_{x,y}(\vec{P}))},$$

где $\omega(v) = 1 + 2t(v-1)$. Чем выше параметр t, тем больший вес в значении функции будет иметь согласованность предпочтений относительно наилучших альтернатив. Так как эта функция удовлетворяет свойствам анонимности и нейтральности, то ее значение для всех элементов класса эквивалентности будет одинаковым.

Для численного моделирования использовалось нейтральное значение параметра t, равное единице, так как для разных правил коллективного выбора разное значение имеет согласованность предпочтений относительно наилучших альтернатив. Отрезок от 0 до 1 был поделен на 10 частей: $[0,0.1]$, $(0.1,0.2]$, $(0.2,0.3], \ldots$, $(0.9,1]$. Затем для каждого из четырех рассматриваемых правил коллективного выбора и для разного количества избирателей в каждом интервале было посчитана доля классов эквивалентности, в которых возможно манипулирование. Количество альтернатив равно трем, методы расширения предпочтений Leximin и Leximax.

Следующие графики (рисунки 1.6, 1.7, 1.8) иллюстрируют вероятность того, что в профиле, мера сходства предпочтений в котором равна числу из заданного интервала, возможно манипулирование. В данном пункте приведены только графики для правила относительного большинства, правила одобряющего голосования и процедуры Блэка для Leximin.

Как и ожидалось, манипулируемость правила одобряющего голосования мало зависит от сходства предпочтений, максимум вероятности наблюдается для классов эквивалентности со сходством предпочтений из интервала (0.5-0.6]. Самый низкий показатель манипулируемости наблюдался для процедуры Блэка, и этим объясняется низкая (до 0.6) вероятность выбора манипулируемого профиля даже в интервалах с малой степенью согласованности предпочтений. Однако в пяти интервалах с наиболее высокой мерой сходства вероятность манипулирования нулевая для всех значений количества избирателей от 5 до 10. В правиле относительного большинства нулевая вероятность для всех $5 \le n \le 10$ существует в 4 интервалах, зато в интервалах с наименьшей степенью согласованности предпочтений вероятность существования манипулирования в классе эквивалентности достигает 0.7.

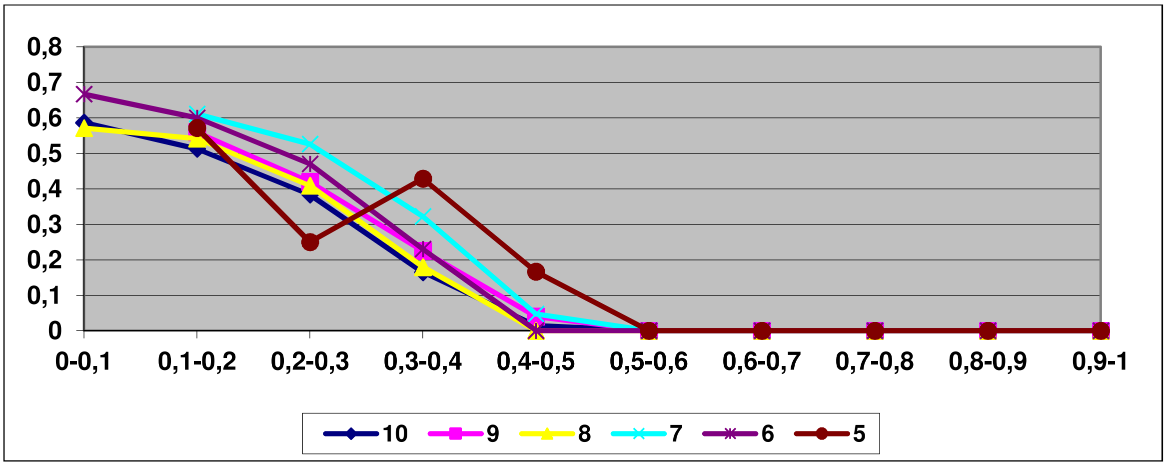


Рисунок 1.6 – Вероятность того, что в профиле, мера сходства предпочтений в котором равна числу из заданного интервала, возможно манипулирование. Правило относительного большинства, Leximin

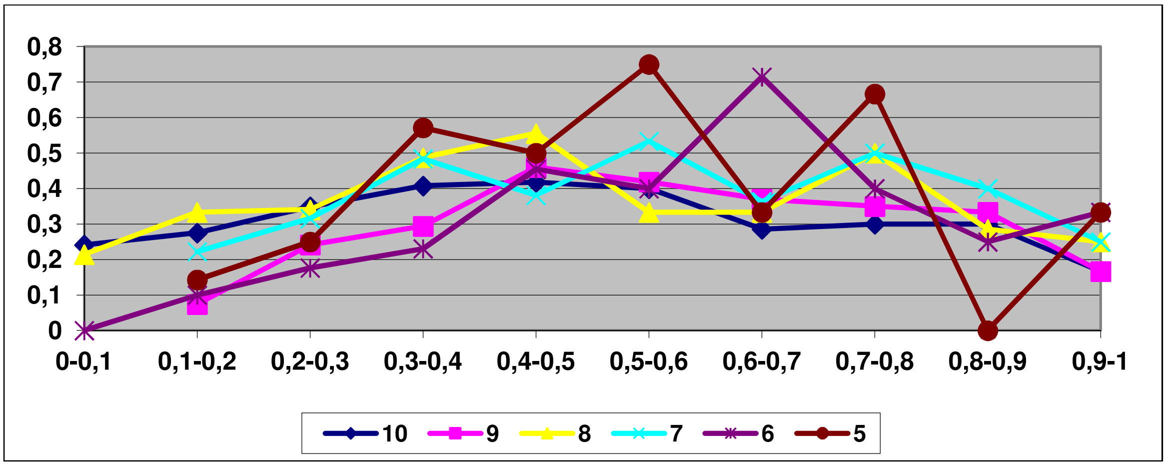


Рисунок 1.7 – Вероятность того, что в профиле, мера сходства предпочтений в котором равна числу из заданного интервала, возможно манипулирование. Одобряющее голосование, Leximin

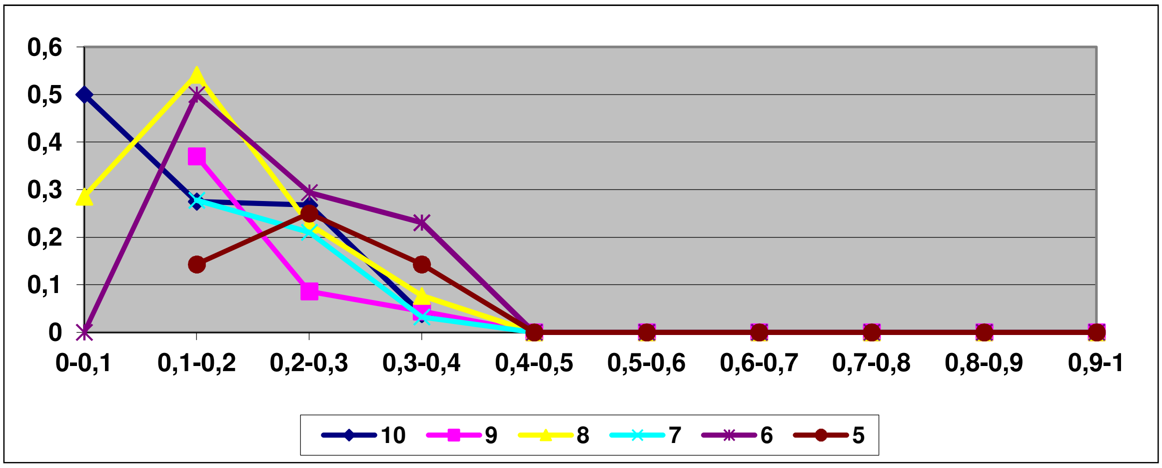


Рисунок 1.8 – Вероятность того, что в профиле, мера сходства предпочтений в котором равна числу из заданного интервала, возможно манипулирование. Процедура Блэка, Leximin

1.3.5 Манипулируемость q-Паретовских правил принятия решений

В этом пункте приведены результаты исследований манипулируемости q-Паретовских правил принятия решений. Данные правила были предложены в работе Алескерова [26] и затем были изучены им в работе 1992-го года. Интерес выбора именно этих правил состоит в том, что они являются коалиционными, поэтому их исследование является важным этапом для перехода к изучению коалиционного манипулирования. К тому же, как уже показали расчеты, степень манипулируемости некоторых из этих правил может быть меньше, чем у процедуры Блэка, которая была признана наименее манипулируемой процедурой в статье [24]. Часть данных для случая четырех альтернатив для Сильнейшего правила q-Парето представлено в работе [15]. В данном проекте было проведено сравнение как для трех, так и для четырех альтернатив и для всех правил q-Парето.

1.3.5.1 Модель манипулирования

В рамках исследования использовалась та же модель, что и в работах [24, 13, 14, 15], что обеспечивает возможность сопоставления результатов. Рассматривается конечное множество альтернатив A, состоящее из m альтернатив, где $m=3,4$. Пусть $\mathrm{A} = 2^{A} \setminus \{\varnothing\}$ есть множество всех непустых подмножеств множества альтернатив. Предполагаем, что каждый участник голосования $N=\{1,...,n\}$, имеет предпочтения P_i на альтернативах из A, которое является линейным порядком (строгое, транзитивное и связное отношение). Набор таких предпочтений для каждого агента, будем называть профилем предпочтений и обозначать $\vec{P}$. Процедура принятия решений $C(\vec{P})$ в этих терминах является отображением из множества всех возможных профилей предпочтений в множество A. Таким образом, не исключается наличие множественного выбора.

Однако для определения манипулирования необходимо определить предпочтения на множестве возможных исходов, то есть на множестве A. Будем называть данные предпочтения расширенными и обозначать EP_i.

Будем различать два типа манипулирования: сильное и слабое. При сильном манипулировании предполагается, что все множества альтернатив сравнимы, тогда как при слабом требуется сравнимость только определенных типов множеств. В проекте проводилось сравнение для случая сильного манипулирования. Сопоставления были сделаны для вероятностных методов, подробно представленных в работе [27]. Вероятностные методы предполагают упорядочивание наборов альтернатив по мере убывания вероятности наилучших альтернатив или, наоборот, возрастания вероятности наихудших альтернатив. При этом делается предположение, что альтернативы равновероятны. Например, для случая трех альтернатив и предпочтений aP_ibP_ic, расширенные предпочтения будут следующего вида:

а) вероятностный метод по убыванию вероятности наилучшей альтернативы (сокращенно далее, PBest3, где 3 – это количество альтернатив)

$$\{a\} EP_i \{a,b\} EP_i \{a,c\} EP_i \{a,b,c\} EP_i \{b\} EP_i \{b,c\} EP_i \{c\};$$

б) вероятностный метод по возрастанию вероятности наихудшей альтернативы (сокращенно далее, PWorst3, где 3 – это количество альтернатив)

$$\{a\} EP_i \{a,b\} EP_i \{b\} EP_i \{a,b,c\} EP_i \{a,c\} EP_i \{b,c\} EP_i \{c\}.$$

Считаем, что данный профиль при заданной процедуре принятия решений манипулируем, если при некоторых неискренних предпочтениях одного участника и искренних всех остальных, итоговый выбор будет лучше для этого участника с точки зрения его расширенных предпочтений чем выбор при искренних предпочтениях.

Определим три правила, которые были проанализированы в данной проекте.

Сильное q-Паретовское правило простого большинства.

Пусть $f(\vec{P};\{i\},q)=\{x\in A:|D_i(x)|\le q\}$, где $D_i(x)$ – это верхний контур альтернативы. Пусть $I=\{I\subset N:|I|=\lceil \frac{n}{2}\rceil\}$ есть семейство коалиций, обладающих простым большинством. Тогда можно определить выбор как

$$C(\vec{P})=\bigcup_{I\in I}\bigcap_{i\in I} f(\vec{P};\{i\},q).$$

Другими словами, выбирается альтернатива, которая является лучшей для каждого участника хотя бы в одной простой коалиции участников. Если такой альтернативы не существует, то рассматривается случай q=1 (смотрим на первые две лучшие альтернативы для каждого), q=2 и так далее пока не будет выбрана хотя бы одна альтернатива.

Сильное q-Паретовское правило относительного большинства.

Данное правило повторяет предыдущее с учетом следующего усиления. Если выбрано несколько альтернатив, то для каждой альтернативы считается количество коалиций, которые её выбирают. Альтернатива(ы) с максимальным числом таких коалиций и является окончательным выбором.

Прежде чем переходить к определению третьего правила, продемонстрируем предыдущие два на примере. Пусть имеются три агента со следующими предпочтениями (Таблица 1.1):

Таблица 1.1 – Предпочтения агентов

Агент 1	Агент 2	Агент 3
a	c	b
b	a	a
c	b	c

Найдем верхний контур каждой альтернативы (множество альтернатив лучшее её) для каждого агента (Таблица 1.2) и мощность каждого контура (Таблица 1.3).

Таблица 1.2 – Верхний контур альтернатив

$D_i[x]$	a	b	c
Агент 1	Пусто	a	ab
Агент 2	c	ac	Пусто
Агент 3	b	Пусто	ab

Таблица 1.3 – Мощности верхних контуров альтернатив

$\|Di[x]\|$	a	b	c
Агент 1	0	1	2
Агент 2	1	2	0
Агент 3	1	0	2

Согласно алгоритму, пользуясь предыдущими двумя таблицами, выпишем значения функции $f(\vec{P};\{i\},q)$ для каждого агента и всех q (Таблица 1.4). И в итоге найдем выбор по формуле $C(\vec{P}) = \bigcup_{I \in I} \bigcap_{i \in I} f(\vec{P};\{i\},q)$ (в Таблице 1.5 указаны альтернативы, находящиеся на пересечении для каждой коалиции и соответсвующего q, а в последней строчке находится итоговый выбор, как объединение этих пересечений).

Таблица 1.4 – Значения функции $f(\vec{P};\{i\},q)$

f	q=0	q=1	q=2
Агент 1	a	ab	abc
Агент 2	c	ac	abc
Агент 3	b	ab	abc

Таблица 1.5 – Итоговый выбор

Коалиции	q=0	q=1	q=2
{1,2}	Пусто	a	abc
{1,3}	Пусто	ab	abc
{2,3}	Пусто	a	abc
Объединение:	Пусто	ab	abc

Согласно Сильному q-Паретовскому правилу простого большинства итоговым выбором будет набор {a,b}. Согласно Сильному q-Паретовскому правилу относительного большинства необходимо посчитать количество коалиций, которые выбирают каждую из альтернатив. Альтернатива "a" выбирается 3-мя коалициями, а альтернатива "b" лишь 1-й. Таким образом по Сильному q-Паретовскому правилу относительного большинства выбором будет набор {a}.

Следующее правило усиливает требования к альтернативам, которые попадают в итоговый выбор, путем наложения требования к пересечению вехрних контуров.

Сильнейшее q-Паретовское правило простого большинства.

Пусть теперь $f(\vec{P};I,q)=\{x\in A:\left|\bigcap_{i\in I}D_i(x)\right|\le q\}$, где $I=\{I\subset N:|I|=\lceil\frac{n}{2}\rceil\}$ есть семейство коалиций, обладающих простым большинством. Тогда мы можем определить выбор как

$$C(\vec{P})=\bigcap_{I\in I}f(\vec{P};I,q).$$

Если таких альтернатив не существует, то рассматриваем случай q=1 (смотрим на пересечение контуров мощности один и меньше), q=2 и так далее пока не будет выбрана хотя бы одна альтернатива.

Продемонстрируем это правило на том же примере. В Таблице 1.6 опять находятся верхние контуры альтернатив, а в Таблице 1.7 указаны альтернативы, которые находятся в пересечении верних контуров альтернатив, указаных в столбцах, для коалиций указанных в строках. В последнем столбце указаны значения функции $f(\vec{P};I,q)$ для q=0, то есть те, для которых мощность пересечения равна нулю.

Таблица 1.6 – Верхний контур альтернатив

$D_i[x]$	a	b	C
Агент 1	Пусто	a	ab
Агент 2	c	ac	Пусто
Агент 3	b	Пусто	ab

Таблица 1.7 – Итоговый выбор

Коалиции	a	b	c	q=0
{1,2}	Пусто	a	Пусто	ac
{1,3}	Пусто	Пусто	ab	ab
{2,3}	Пусто	Пусто	Пусто	abc

Итоговый выбор есть пересечение множеств в последнем столбце. Таким образом, будет выбрано следующее множество {a}.

Для указанных выше правил ниже будут приведены расчеты индексов манипулируемости. В качестве индекса манипулируемости был использован индекс Нитцана-Келли. Согласно этому индексу, предложенному в работе [28] и затем использованому [1], степенью манипулируемости правила принятия решений является доля всех манипулируемых профилей. Иначе говоря $NK = \frac{d_0}{(m!)^n}$, где d_0 – это доля число всех манипулируемых профилей.

Результаты расчета индекса представлены в следующем подпункте.

1.3.5.2 Результаты расчета индекса манипулируемости

Представим результаты поочередно для каждого метода и для трех и четырех альтернатив. Сопоставление будем производить с тремя другими известными позиционными правилами: правилом относительного большинства (как самым популярным и распространенным правилом принятия решений), правилом Блэка (наименее манипулируемым согласно работе [24]) и процедурой Нэнсона – наименее манипулируемым правилом согласно работе [14]. На рисунках 1.9 и 1.10 представлены оценки индекса Нитцана-Келли для 6 названных выше процедур и методов PWorst3 и PBest3. Расчеты производились для 3-25 агентов, а потом для 29, 30, 39, 40 и т.д. до 100 агентов. Этим объясняется изменение поведения правил после 25 агентов.

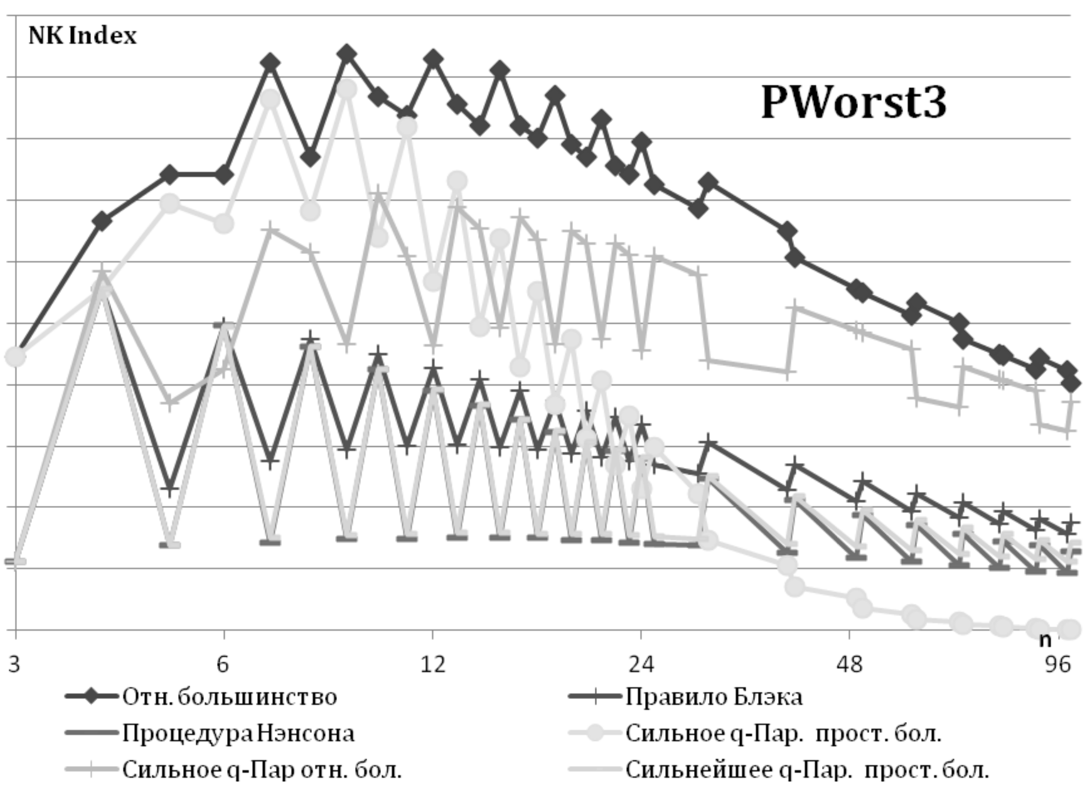


Рисунок 1.9 – Индекс Нитцана-Келли для метода PWorst3

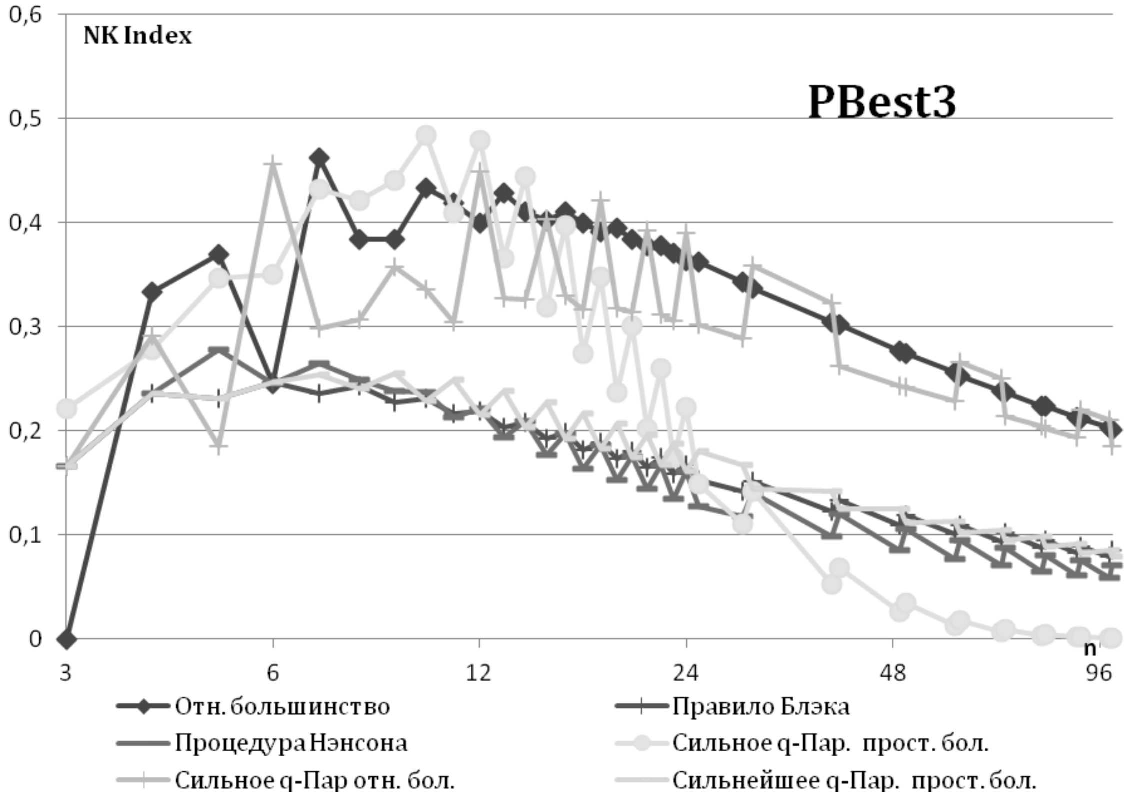


Рисунок 1.10 – Индекс Нитцана-Келли для метода PBest3

Как видно из рисунка 1.11, имеется вполне ожидаемый результат – правило относительного большинства является наиболее манипулируемым. Наименее манипулируемыми правилами являются процедура Нэнсона и Сильнейшее q-Паретовское правило. При малом числе участников голосования различий между ними почти нет, однако по точным данным все равно заметна меньшая манипулируемость процедуры Нэнсона для любого числа агентов, за исключением 6, 8 и 10. При увеличении числа агентов заметно, что процедура Нэнсона становится менее манипулируема. Оба правила являются менее манипулируемыми, чем процедура Блэка, для любого числа агентов.

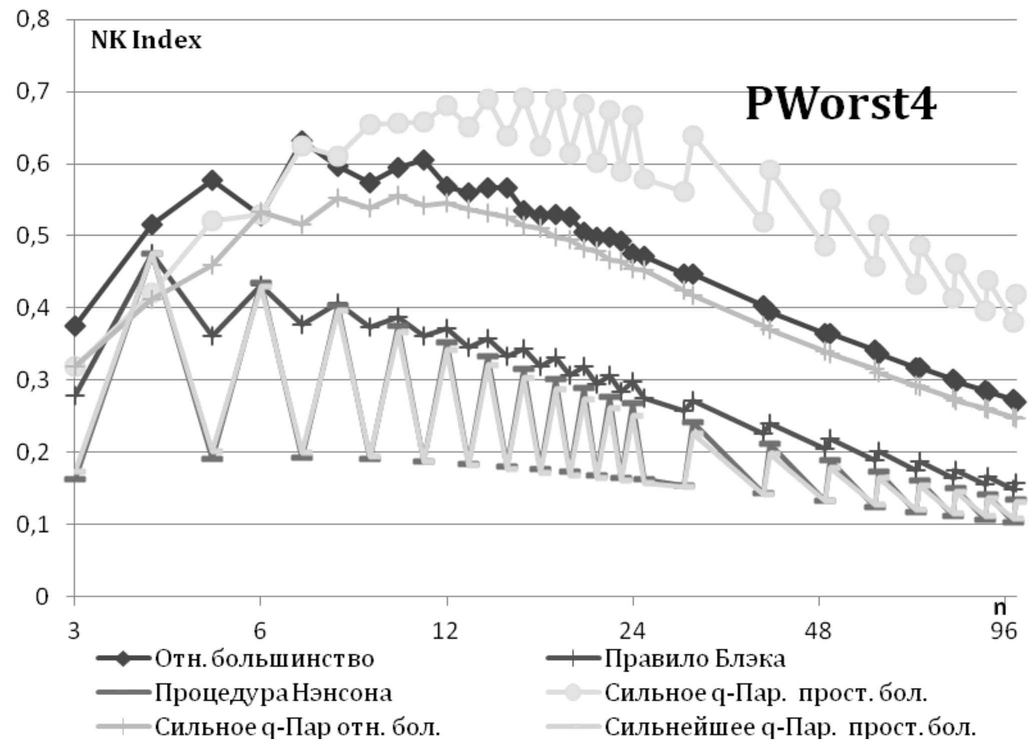


Рисунок 1.11 – Индекс Нитцана-Келли для метода PWorst4

Для случая PBest3 ситуация немножко иная. Начиная с 8 агентов, процедура Нэнсона и Сильнейшее q-Паретовское правило идут в противофазе, поэтому при нечетном числе участников минимум манипулируемости у процедуры Нэнсона, а при четном у Сильнейшего q-Паретовского правила. Данная ситуация продолжается до 23 агентов включительно, после чего процедура Нэнсона становится менее манипулируемой и для четного числа агентов, так как мера манипулируемости у правила Нэнсона убывает быстрее, чем у Сильнейшего q-Паретовского правила. Важно также отметить, что процедура Блэка для данного метода расширения предпочтений является наименее манипулируемой при 7 и 9 агентах.

Интересным и на первый взгляд необычным является поведение Сильного q-Паретовского правила простого большинства: резкий рост манипулируемости в самом начале и падение до нуля при приближении числа агентов к 100. На самом деле все объясняется другой важной характеристикой любого правила принятия решений – разрешимостью. Как было видно из определения правила и из построенного примера, последний шаг процедуры связан с объединением альтернатив для каждой коалиции. Очевидно, что чем больше участников, тем, скорее итоговый выбор будет состоять из всех альтернатив. В случае, когда независимо от предпочтения участника выбором с наибольшей вероятностью являются все альтернативы, принимающие участие в голосовании, манипулирование не имеет смысла. Подобное рассуждение подтверждается данными расчетов. Если для трех альтернатив при семи агентах набор {a,b,c} являлся результатом процедуры в 26,42% случаев, то при ста агентах уже в 99,82% случаев. Очевидно, что при такой низкой разрешимости манипулируемость практически невозможна. Если не брать в расчет тот участок, где правило не разрешимо, то все q-Паретовские правила практически во всех случаях можно проранжировать по убыванию манипулируемости в том же порядке, в котором они идут в этой работе.

Важным фактом, который объединяет эти результаты с результатами, полученными в работах [24], [13], [14], [15] является периодичность меры манипулируемости. Можно заметить, что правило относительного большинства и Сильное q-Паретовское правило относительного большинства имеют период длины 3 в изменении манипулируемости, в то время как остальные – период длины два. Это значит, что первые два правила сильно зависят от множественного выбора на который влияет кратность числа агентов числу альтернатив (именно по этому длина периода равна 3-м – числу альтернатив в данном случае), а для остальных важна четность-нечестность числа участника. Этот факт можно продемонстрировать на рисунках 1.11 и 1.12, где показана манипулируемость для случая 4-х альтернатив и методов PWorst4 и PBest4 соответственно.

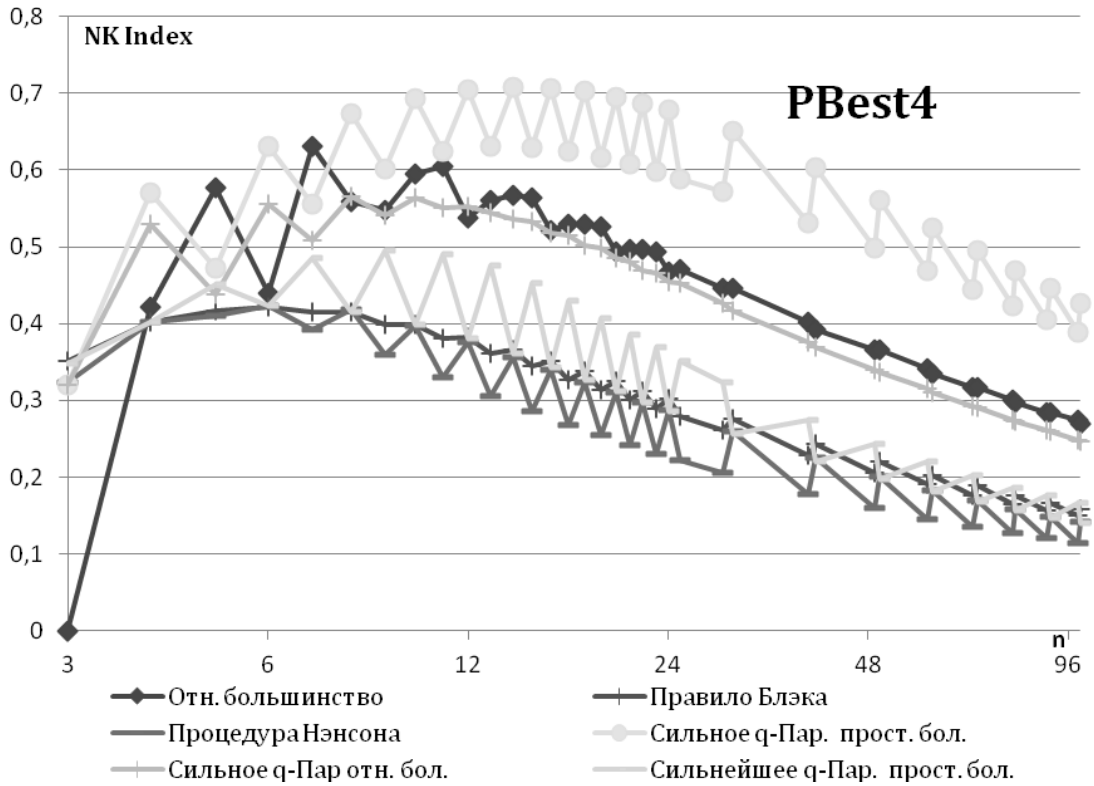


Рисунок 1.12 – Индекс Нитцана-Келли для метода PBest4

Как видно из рисунков, теперь указанные выше правила имеют длину периода равную 4-м, в то время как остальные сохранили период длины 2. Также стоит отметить, что увеличение альтернатив не сильно сказалось на выводах о манипулируемости, полученных в рамках каждого метода. Выводы, сделанные по рисунку 1.10, меняются следующим образом. Здесь заметна меньшая манипулируемость процедуры Нэнсона для нечетного числа участников, однако также видно, что убывает эта мера медленнее, чем для Сильнейшего q-Паретовского правила. Из этого следует интересный факт: для 6 и 8 участников манипулируемость Сильнейшего q-Паретовского правила меньше, подобная зависимость (меньшая манипулируемость при четном числе участников) возобновляется с 24 участников. Однако на 6 и 8 участниках наименее манипулируемой является процедура Блэка, хоть и разница очень мала.

В отличии от PBest4 в случае PWorst4 процедура Блэка никогда не является наименее манипулируемой. В тоже время при сравнении процедуры Нэнсона и Сильнейшего q-Паретовского правила можно сказать, что второе превосходит первое в большинстве случаев. Сначала наблюдается незначительно меньшая манипулируемость у правила Нэнсона для 3, 5, 7 и 9 агентов, однако затем для любого числа агентов наименьшей манипулируемостью обладает Сильнейшее q-Паретовского правило. Изменения происходят при достаточно большом числе агентов: начиная с 49 агентов для нечетного числа участников меньшей манипулируемостью обладает правило Нэнсона.

Сравним q-Паретовские правила с точки зрения индекса свободы манипулирования введенного в статье [9]. В работе [24] были предложены новые индексы, построенные на его основе. В соответствии с этой работой приведем методику расчета. Очевидно, что всего для участника i в профиле j существует $m!-1$ различных вариантов искажения предпочтений. Пусть в κ_{ij}^{+} случаях манипулирующий участник добьется улучшения коллективного выбора по сравнению со случаем искренних предпочтений, в κ_{ij}^{0} случаях результат не изменится, а в κ_{ij}^{-} случаях, соответственно, итоговый выбор будет для участника i хуже. Получаем, что $\kappa_{ij}^{+}+\kappa_{ij}^{0}+\kappa_{ij}^{-}=m!-1$. Разделив каждое κ_{ij} на $m!-1$, получим соответствующую долю. Суммируя соответствующие доли по всем участникам в рамках одного профиля и деля на n, получаем среднюю долю соответствующего результата по профилю. Затем аналогично суммируются доли по всем профилям и сумма делится на $(m!)^n$. Таким образом получаются три индекса

$$I_1=\frac{\sum_{j=1}^{(m!)^n}\sum_{i=1}^{n}\kappa_{ij}}{(m!)^n\cdot n\cdot(m!-1)},$$

где κ_{ij} равно κ_{ij}^{+}, κ_{ij}^{0} или κ_{ij}^{-} для получения соответствующего индекса. Очевидно, что $I_1^{+}+I_1^{0}+I_1^{-}=1$. Причем I_1^{+} будем называть индексом свободы манипулирования, I_1^{0} – индексом нечувствительности к изменению предпочтений, а индекс I_1^{-} – индексом возможности ухудшения результата.

На рисунке 1.13 представлены значения индекса I_1^{+} для 3-х альтернатив и упорядочения PWorst3.

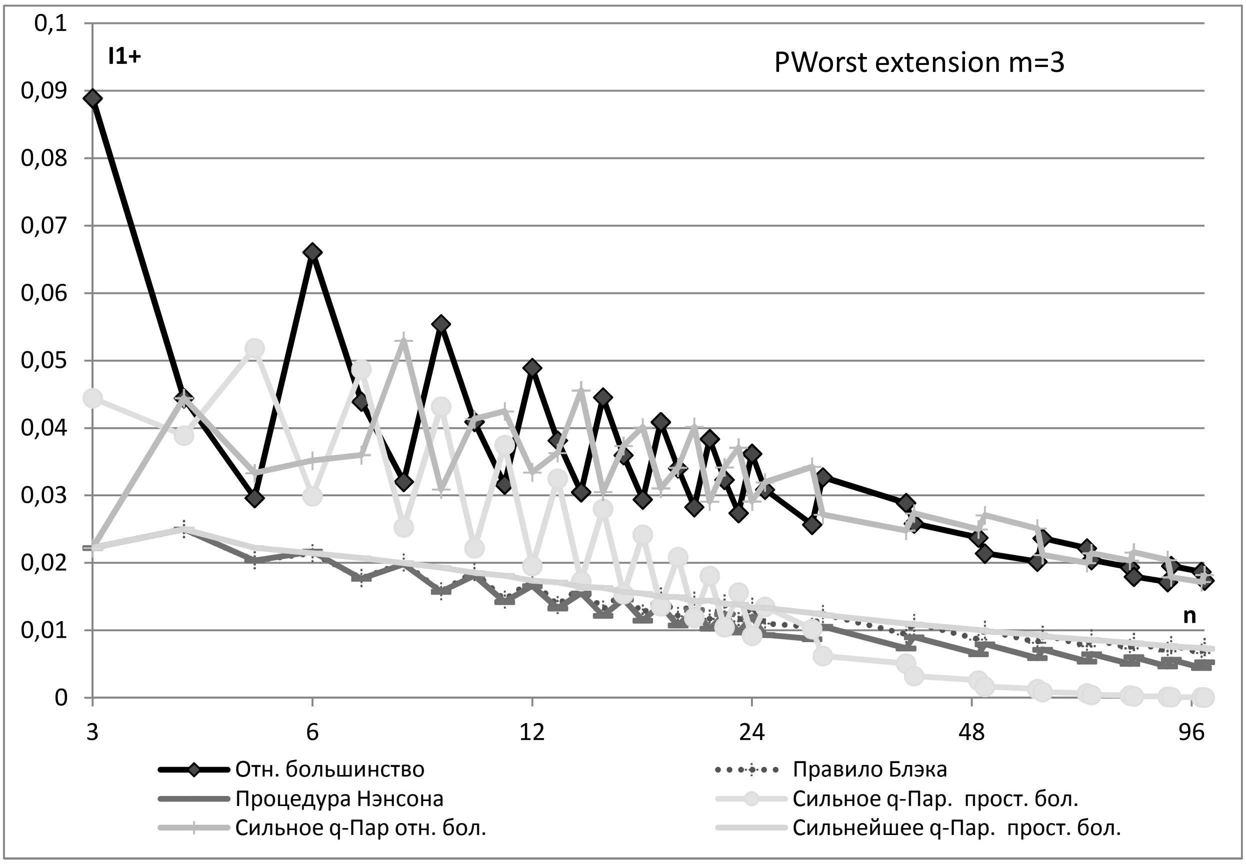


Рисунок 1.13 – Индексы I_1^+ для расширения PWorst3

Как мы можем увидеть в большинстве случаев все q-Паретовские правила можно проранжировать между собой по свободе манипулирования, поэтому главным образом стоит рассматривать Сильнейшее q-Паретовское правило простого большинства. Отдельно стоит отметить два факта. Во-первых, процедура Нэнсона и процедура Блэка в большинстве случаев обеспечивают меньшую свободу манипулируемости. Таким образом, вывод о превосходстве Сильнейшего q-Паретовского правила среди порядковых правил не подтверждается для индекса свободы манипулирования. Во-вторых, как и для случая индекса Нитцана-Келли, Сильное q-Паретовское правило простого большинства показывает более низкую свободу манипулирования для случая большого числа агентов. Это объясняется низкой разрешимостью правила для большого числа агентов.

1.4 Некоторые выводы

В направлении исследования теоретических моделей расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений были получены следующие результаты и могут быть сделаны следующие выводы:

– предложен алгоритм генерации представителей классов эквивалентности по анонимности и нейтральности профилей предпочтений в модели независимых анонимных и нейтральных предпочтений для вычисления индекса манипулируемости;

– проведены численные эксперименты: вычислены разности индексов манипулируемости в модели с анонимностью и нейтральностью и без них, вычислены вероятности возникновения манипулирования в профиле с заданной мерой сходства предпочтений в нем для случая трех альтернатив и числа избирателей от 3 до 10;

– поведение q-Паретовских правил голосования с точки зрения их манипулируемости согласуется с выделенными характеристиками поведения (кратность числу агентов или числу альтернатив) в работах [24], [13], [14], [15];

– при определенных предпосылках все q-Паретовские правила можно проранжировать между собой по свободе манипулируемости, и поэтому имеет смысл рассматривать из них главным образом Сильнейшее q-Паретовское правило простого большинства;

– исследование поведения Сильного q-Паретовского правила простого большинства с точки зрения свободы манипулирования подтвердило полученный ранее вывод, что есть другой важный критерий, который идет в разрез с меньшей манипулируемостью правил – разрешимость, что делает актуальной задачу построения обобщенных индексов для оценки правил одновременно по двум критериям;

– сопоставление q-Паретовских правил с правилами Нэнсона, Блэка и относительно большинства показало, что выбор наименее манипулируемого правила сильно зависит от того, какой метод расширения предпочтений используется; в зависимости от предпосылок, числа участника и альтернатив, в большинстве случае наименее манипулируемыми правилами становятся процедуры Нэнсона и Сильнейшее q-Паретовское правило простого большинства.

Результаты исследований этого раздела отражены в следующих публикациях ([13], [14], [15]):

Aleskerov F, Karabekyan D, Sanver R, Yakuba V (2011a) "On the degree of manipulability of multi-valued social choice rules" // *Homo Oeconomicus,* T. 28. № 1/2. C. 205—216

Aleskerov F, Karabekyan D, Sanver R, Yakuba V (2011b) "On manipulability of positional voting rules" // *SERIEs: Journal of the Spanish Economic Association* , Vol.2

Aleskerov F, Karabekyan D, Sanver R, Yakuba V (2011c) " On The Manipulability of Voting Rules: Case of 4 and 5 Alternatives" // *Mathematical Social Sciences* (to be appear)

2 Разработка аксиоматики и анализ систем пропорционального представительства, реализующих правило передачи голосов

В настоящем разделе отчета приведены результаты исследований, связанных с анализом тех процедур голосования, где реализуется так называемое правило передачи голосов. Аксиоматика Вудалла для ординальных систем пропорционального представительства, описанная ниже, не позволяет анализировать правило передачи голосов, так как все методы реализующие правило либо соответствуют аксиомам, либо все методы нарушают (например, монотонность). Для проведения различий между методами, реализующими правило передачи голосов, и выделения лучшего в некотором смысле метода необходимо создать новую аксиоматику, которая была разработана в рамках выполнения настоящего проекта. Этот раздел разбит на шесть подразделов. В первом подразделе описано правило передачи голосов и проведен обзор исследований в данной области. Второй подраздел посвящен аксиоматике Вудалла. В третьем подразделе формализовано правило передачи голосов при возможности передачи только целых значений голосов. В четвёртом подразделе доказана теорема, результатом которой является метод, соответствующий всем аксиоматическим свойствам. В пятом подразделе рассмотрено обобщение модели до случая дробных голосов. В шестом подразделе сформулированы выводы по проведенному исследованию.

2.1 Описание правил передачи голосов и обзор исследований

Правило передачи голосов (англ. Single Transferable Vote) – класс ординальных избирательных процедур, позволяющий голосующим отражать не только свои первые предпочтения, но и последующие. Среди ординальных методов правило передачи голосов не единственный метод, но наиболее распространенный на практике. Среди остальных теоретических методов можно выделить компромисс большинства, метод являющийся обобщением процедур типа q-Парето (см. работы [29], [30], [31]). Из-за сложности процедур эти методы практически не применяют в реальных выборах. Основная проблема не в подсчете, а в трудности их понимания избирателями. В данном исследовании основное внимание уделено правилам передачи голосов, использующемся на выборах во многих странах.

Это метод пропорционального представительства, который не является списочным голосованием. Избиратели голосуют за кандидатов, многие из которых пройдут в парламент. Русскоязычный термин (эквивалент англоязычного “single transferable vote”) введен в работе [32]. Избиратели указывают на бюллетенях свои предпочтения, причем необязательно ранжировать всех кандидатов, нужно отметить только тех из них, которых действительно желают видеть в парламенте.

Правило передачи голосов, являясь системой пропорционального представительства, имеет много общего с мажоритарной системой выборов. Оно дает возможность дать широкое представительство кандидатам, представляющим территории.

Преимуществом данного метода также являются предоставление большей свободы избирателям. Они не обязаны ограничиваться одним выбором, а могут проголосовать за нескольких кандидатов, в том числе и от разных партий. При этом голоса не перейдут к нежелательным кандидатам, так как избиратели их не отмечают. Таким образом, метод дает возможность дать представительство неорганизованным группам, кроме того, метод значительно уменьшает проблемы связанные с определением границ и размеров избирательных округов (джерримандеринг).

Технические рекомендации по применению и описание реального использования метода на выборах в начале XX века можно найти в работе [33]. В США начала века в отсутствии европейской системы списочного голосования правило передачи голосов являлась синонимом пропорционального представительства.

Недостатками применения метода являются сложность подсчета голосов и некоторая случайность при выборе бюллетеней, которые должны передаваться. В начале века их действительно брали случайным образом и перекладывали ящики с бюллетенями других кандидатов. Таким образом, процесс подсчета в некоторых случаях исчислялся неделями. При современной компьютерной обработке процесс убыстряется, но все равно будет намного дольше подсчета голосов, чем при обычном голосовании.

Этот метод может привести к следующему эффекту. Если большинство избирателей голосует за кандидата от партии A, а на второе место ставят кандидатов других партий, то при обычном голосовании за партии (партийные списки) эта партия A получила бы большинство, но при системе единого передаваемого голоса большинство эта партия уже не получит. Это не позволяет партиям с единственным (или несколькими) популярными политиками провести за собой ещё нескольких, никому неизвестных кандидатов. Система стимулирует политическую конкуренцию.

Далее будем акцентировать внимание на реально применявшиеся в избирательных системах варианты правила передачи голосов. В последнее время увеличился интерес к данным методам, и появилось несколько новых процедур, например [34], стремящихся исправить некоторые недостатки существующих методов. Без детального изучения реально использующихся методов правила передачи голосов, практически неизвестных в России, нельзя включиться в международную дискуссию.

В мире используется большое число модификаций правила передачи голосов [35]: классический метод Грегори – в Австралийской Столичной Территории, Тасмании [36], [37] и в Северной Ирландии, включающий метод Грегори – в австралийском сенате, регионах Южная Австралия и Западная Австралия [37], взвешенный включающий метод Грегори – в Шотландии [38], метод Мика – в Новой Зеландии [39]. Австралия является крупнейшей страной, где используется правило передачи голосов на национальном уровне (для обозначения процедур передачи голосов в Австралии используется термин система Хара-Кларка).

В странах, унаследовавших английское влияние, под пропорциональным представительством часто понимается правило передачи голосов [40]. Эта процедура используется для выборов в парламенты Австралии, Ирландии, Мальты, а также на многих выборах более низкого уровня. Интерес к правилу передачи голосов в последнее время усилился, что отражается в проведении референдумов по изменению избирательных систем. В канадской провинции Британская Колумбия в 2005 и 2009 [41], [42] проходили референдумы по переходу на правило передачи голосов, которые завершились сохранением старой системы. В Соединенном Королевстве в мае 2011 г. ставится на голосование вопрос о переходе к аналогу правила передачи голосов, при котором избирается 1 представитель от округа [43]. В Новой Зеландии в конце 2011 г. проведен референдум, на котором поставлен вопрос о переходе на новую избирательную систему, причем одним из предлагаемых вариантов является правило передачи голосов [44].

Существует большое количество методов, реализующих правило передачи голосов, но всех их объединяет общая процедура подсчета голосов и отбора кандидатов, представленная ниже. Опишем общий вид этой процедуры:

а) во время голосования избиратель ставит в соответствие кандидатам ранг, указывая какой из кандидатов для них самый лучший, какой второй по предпочтениям и т.д., при этом не все кандидаты должны быть проранжированы;

б) по известному числу мест, которые необходимо заполнить, и числу голосов определяется квота (минимальное количество голосов, которое гарантирует победу кандидату, набравшему квоту) по формуле

$$q = \left\lfloor \frac{\text{число голосов}}{\text{число мест} + 1} \right\rfloor + 1, \tag{2.1}$$

где знак $\lfloor\ \rfloor$ обозначает операцию округления снизу;

в) бюллетени раскладываются по кандидатам согласно первым предпочтениям, указанным в бюллетенях;

г) кандидат, имеющий количество голосов, превышающее квоту, считается избранным;

д) превышение количества голосов над квотой (излишек бюллетеней) передаётся остальным кандидатам согласно последующим предпочтениям, указанным в бюллетенях;

е) если ни один из кандидатов не набирает квоту, то

1) если количество оставшихся кандидатов равно количеству незаполненных мест, то все оставшиеся кандидаты объявляются избранными, иначе;

2) кандидат с наименьшим числом голосов исключается и его голоса переходят последующим по предпочтениям кандидатам;

ж) процедура продолжается, пока не будет отобрано нужное количество победителей.

Основные различия между методами, реализующими правило передачи голосов, состоят в способе определения голосов, которые будут передаваться при образовании излишка (пункт д)). Стоит отметить, что если никто из избирателей не указал вторых и последующих предпочтений, то процедура дает результат, совпадающий с решением, полученным с помощью полиномиальной мажоритарной системы (Single non-transferable vote). Эта система использовалась, например, в Японии [45].

Различие в реализации правила передачи голосов рассмотрим на примере трёх традиционных методов: метод Грегори, включающий метод Грегори и взвешенный включающий метод Грегори (подробнее см. [37],[46]).

Метод Грегори (оригинальная версия) Изначально правило передачи голосов использовалось с применением случайного отбора при определении передаваемых голосов. Процесс выборов при ручном подсчете бюллетеней с использованием правила передачи голосов, как в оригинальной версии, так и с возможными модификациями описан в [33]. Бюллетени раскладывались согласно первым предпочтениям по корзинам, объединяя голоса за каждого кандидата. Из корзины кандидата, набравшего квоту, равновероятно доставалось количество бюллетеней, равное излишку и перекладывалось в корзины других кандидатов. Как только при распределении излишка ещё один кандидат набирал квоту, то далее ему бюллетени не докладывались, а предыдущий излишек шел последующим кандидатам. По сути, выбор излишка победителя, который образовался в ходе распределения предыдущего излишка, производился не среди всех бюллетеней, а только среди последнего переданного кандидату излишка. Приведем пример выборов с 4 кандидатами, из которых необходимо выявить 3 победителей, и со следующими предпочтениями избирателей:

12 голосов $a \succ b \succ c \succ d$,

12 голосов a,

10 голосов $b \succ d$,

10 голосов c,

10 голосов d.

Всего 54 голоса.

Квота в данном случае равна

$$q = \left\lfloor \frac{54}{3+1} \right\rfloor + 1 = 14.$$

Кандидат **a** объявляется победителем. У него 24 голоса, что превышает квоту (14 голосов). Образуется излишек 10 голосов. Каждый голос с вероятностью 10/24=41,67% передаётся. Для примера возьмем наиболее вероятный исход: 5 голосов переходит кандидату **b**, 5 голосов переходят в категорию непередаваемых голосов, так как эти избиратели не указали последующих предпочтений. Ситуация после распределения излишка а выглядит следующим образом

7 голосов $a \succ b \succ c \succ d$,

7 голосов a,

5 голосов $b \succ c \succ d$ (переходит от **a**),

10 голосов $b \succ d$,

10 голосов c,

10 голосов d,

5 голосов – непередаваемые голоса.

Имея на первом этапе 10 голосов, для победы на втором этапе кандидату **b** достаточно получить 4 дополнительных голоса. Он получает от кандидата **a** 5 голосов, поэтому образуется излишек. Согласно методу Грегори этот излишек должен состоять только из голосов предыдущего излишка, т.е. в корзину кандидата **b** докладывают бюллетени до тех пор, пока он не набирает квоту, остальные голоса идут последующим кандидатам. В данном случае 1 голос переходит кандидату **c**. Кандидат **c** имеет на последнем этапе больше голосов, чем кандидат **d** и объявляется победителем. В итоге победителями являются кандидаты **a**, **b**, **c**.

Метод Грегори (современная версия). Бюллетени отбираются не случайным образом, а пропорционально количеству бюллетеней с соответствующим кандидатом на втором месте. Принцип выбора голосов для перераспределения только среди последней передачи голосов сохраняется. В данном примере на первом этапе передается 10/24=41,67% каждой группы голосов, то есть от группы избирателей в 12 голосов с одинаковыми последующими предпочтениями 10/24*12=5 голосов передаются далее. На втором этапе излишек однороден (состоит из голосов), что приводит к передаче голоса к кандидату **c**. Итог выборов: победителями являются кандидаты **a**, **b**, **c**.

Включающий метод Грегори. Он отличается от метода Грегори способом перераспределения последующих излишков (пункт д) общей схемы процедуры). В нашем примере первый этап проходит без изменений (пропорциональная постановка). На втором этапе необходимо перераспределить 1 голос от кандидата **b**. Включающий метод Грегори учитывает не только последний излишек, а все голоса отданные за **b**, т.е. 22 голоса:

12 голосов $a \succ b \succ c \succ d$,

10 голосов $b \succ d$.

Несмотря на то, что из 12 голосов часть голосов уже потрачена на избрание кандидата **a**, метод рассматривает распределение голосов по первоначальным предпочтениям. Так как надо передать 1 голос из 22, то из первой группы голосов необходимо передать 12/22=0,55 голоса, из второй группы 10/22=0,45 голоса. Так как передаются только целые количества голосов, то 1 голос передаётся кандидату **c**, который объявляется победителем. Итог выборов: победителями являются кандидаты **a**, **b**, **c**.

Взвешенный включающий метод Грегори. В этом методе при распределении возникающих излишков учитываются только те голоса, которые реально перешли к кандидату до этого этапа. Первый этап происходит также как и по методу Грегори. При необходимости на втором этапе перераспределить 1 голос от кандидата **b** взвешенный включающий метод Грегори учитывает голоса всех групп избирателей с учетом той доли голосов, которая перешла к данному кандидату на текущем этапе:

5 (=10/24*12) голосов $a \succ b \succ c \succ d$,

10 голосов $b \succ d$.

При передаче 1 голоса из 15 группа с предпочтением $b \succ d$ оказывается более многочисленной. Побеждает кандидат **d**. Итог выборов: победителями являются кандидаты **a**, **b**, **d**.

Рассмотрим вначале вариант правила передачи голосов, при котором могут передаваться только целые голоса, и квота обязательно является целым числом. Это ограничение исторически возникло из практики ручного подсчета голосов. В современном мире введение компьютеризированных способов подсчета голосов не сразу ведет к изменению процедуры, зафиксированной в избирательных законах. Сохранение традиционных методов подсчета, хотя и реализуемых на компьютерах, повышает прозрачность процедуры и доверие к результатам выборов. Этим объясняется повышенное внимание именно к случаю целого числа голосов при подсчете результатов. Кроме того, на выборах с сотнями тысяч избирателей искажения, связанные с необходимостью округления до целого, не носят значительного характера.

Существуют методы, работающие с дробными голосами, как пример можно представить взвешенный включающий метод Грегори без соответствующего округления. Метод Мика [47], [48], принципиально отличающийся от методов Грегори, использует квоту, не являющуюся целым числом, кроме того сама квота на каждом шаге процедуры пересчитывается. Постановка модели с возможностью деления голосов представлена в конце раздела.

Существенные различия всех методов становятся видны только при распределении последующих излишков, когда процедура усложняется. По историческим примерам найти наилучший метод не представляется возможным. В реальных выборах число этапов подсчета доходит до нескольких сотен, что естественно затрудняет возможность увидеть и проинтерпретировать различие методов. Методы часто менялись под воздействием некоторых политических сил, которые по итогам выборов находили применение того или иного метода несправедливым. Аксиоматический подход к изучению правил передачи голосов, представленный в работе, позволяет четко структурировать проблему и сравнить методы на основе объективных критериев.

В литературе описаны несколько примеров, показывающих нарушение правилом передачи голосов различных свойств рационального выбора. Дорон и Кроник [49] показали отсутствие монотонности правила передачи голосов. Нурми [50] продемонстрировал несколько нарушений: парадокс неявки (участие в выборах избирателей, голосующих за кандидата X, приводит к его проигрышу), нарушение критерия Кондорсе и несоответствие свойству согласованности (если выбор по двум группам бюллетеней совпадает, то и выбор по объединенному профилю должен быть таким же). Для анализа правила передачи голосов специфическая необходима система аксиом отличная от аксиоматики рационального выбора.

Миллером в [51] построен пример, названный «эффектом бабочки» – проявление некоторой хаотичности правила передачи голосов (см. также обсуждение этого примера в [52]). Кроме того, пример Миллера демонстрирует принципиальную возможность манипулирования при выборе по правилу передачи голосов, так как небольшое изменение профиля предпочтений приводит к значительному изменению результата.

Проанализируем этот пример подробнее. В Таблице 2.1 представлен исходный профиль предпочтений, числа обозначают количество избирателей в группе с данными предпочтениями. Первая строка отражает сумму голосов за кандидата по первым предпочтениям.

Таблица 2.1 – Профиль предпочтений 1 (на основе [51])

144	125		160	145	153	126	148
144	27	98	160	145	153	126	148
A	B	B	C	D	E	F	G
B	C	F	G	G	C	A	F
C	G	A	F	F		B	D
G	F	D		A		C	A
F		E		E			E

В данном профиле 1001 избиратель, 7 кандидатов конкурируют за 3 места в избирательном органе. Квота в этом случае равна $q = \left\lfloor \frac{1001}{3+1} \right\rfloor + 1 = 251$. Процесс передачи голосов представлен в Таблице 2.2 (квадратными скобками обозначены исключенные на текущем этапе кандидаты, полужирным шрифтом выделены избранные кандидаты).

Таблица 2.2 – Передача голосов при профиле предпочтений 1

	A	B	C	D	E	F	G
(1)	144	[125]	160	145	153	126	148
(2)	[144]	125-125=0	160+27=187	145	153	126+98=224	148
(3)	144-144=0	-	187+144=**331**	145	153	224	148
(4)	-	-	331-80= **251**	[145]	153	224	148+80=228
(5)	-	-	**251**	145-145=0	153	224	228+145=**373**
(6)	-	-	**251**	-	153	251+122=**346**	373-122=**251**

Исключение сначала кандидата B, затем кандидата A происходит потому, что ни один из кандидатов не набирает квоту. Их голоса полностью переходят другим кандидатам в соответствии с предпочтениями избирателей. Кандидат C первым превышает квоту, набрав 331 голос. Во всех этих бюллетенях (собственных и перешедших от A и B) после исключения уже выбывших кандидатов следующим по предпочтениям стоит кандидат G. Так как кандидат G не набирает квоту, то на следующем этапе исключается кандидат с наименьшим числом голосов (кандидат D). Его голоса передаются кандидату G, у которого образуется излишек (122 голоса), переходящий кандидату F. Победители – кандидаты {C, F, G}. При подсчете голосов не был точно указан метод, реализующий правило передачи голосов, так как данный результат получится при использовании любого варианта процедуры передачи голосов, описанной в начале раздела.

Представим, что два избирателя из первой группы изменили свои предпочтения на паре альтернатив с $A \succ B$ на $B \succ A$, при этом остальные 999 избирателей сохранили свои предпочтения неизменными (см. Таблицу 2.3). Необходимы два бюллетеня, чтобы не создавать ситуации несравнимости.

Таблица 2.3 – Профиль предпочтений 2 (на основе [51])

142	127			160	145	153	126	148
142	2	27	98	160	145	153	126	148
A	B	B	B	C	D	E	F	G
B	A	C	F	G	G	C	A	F
C	C	G	A	F	F		B	D
G	G	F	D		A		C	A
F	F		E		E			E

Так как количество избирателей осталось прежним, то квота не изменилась. Первым проходит исключение кандидата F, приводящее к избранию кандидата A. Весь образовавшийся излишек (17 голосов) переходит кандидату B. Так как на следующем этапе никто из кандидатов не набирает квоту, происходит исключение кандидата с наименьшим количеством голосов (кандидат B). Его голоса согласно последующим предпочтениям переходят кандидатам B и C. Исключение кандидата G добавляет голоса кандидату D. Во всех голосах, собранных у кандидата D, следующим по предпочтениям (при изъятии из профиля предпочтений избранных и исключенных кандидатов) стоит кандидат E. В итоге побеждают кандидаты {A, D, E}. Еще раз укажем, что в данном примере не важно, какой из методов реализации правила передачи голосов используется.

Таблица 2.4 – Передача голосов при профиле предпочтений 2

	A	B	C	D	E	F	G
(1)	142	127	160	145	153	[126]	148
(2)	142+126=**268**	127	160	145	153	126-126=0	148
(3)	268-17=**251**	127+17=[144]	160	145	153	-	148
(4)	**251**	144-144=0	160+27+17+2=206	145+98=243	153	-	[148]
(5)	**251**	-	206	243+148=**391**	153	-	148-148=0
(6)	**251**	-	206	391-140=**251**	153+140=**293**	-	-

Таким образом, минимальное изменение (у двух избирателей) профиля приводит к полному изменению множества победителей (с {C, F, G} на {A, D, E}), более того, кандидат A, потерявший часть своих голосов, становится победителем. Данный пример, показывающий немонотонность и в некотором смысле хаотичность правила передачи голосов, делает малопродуктивным использование в качестве критерия классическую аксиоматику рационального выбора.

2.2 Анализ аксиоматики из [53]

В литературе существует по крайней мере одна система аксиом для ординальных систем голосования [53], автор которой указывает на её значимость именно для правил передачи голосов. В этой работе на основе примера доказывается теорема о невозможности создания метода, который бы удовлетворял следующим принципам (далее аксиомы приводятся неформализованными):

а) увеличение поддержки кандидата, который и без этого был избран, должно также привести к его избранию;

б) последующие предпочтения не должны оказывать отрицательное влияние, то есть мнение избирателей учитывается только как голосование «за»;

в) последующие предпочтения не могут быть учтены, пока не учтены предшествующие. (В частности, если единственным отличием бюллетеней с кандидатом **x** в качестве первой альтернативы в двух профилях является наличие вторых предпочтений в этих бюллетенях, то **x** должен быть избран при первом профиле, тогда и только тогда, когда **x** избран при втором профиле);

г) если никто не указал вторых предпочтений, то кандидат с наибольшим количеством голосов по первым предпочтениям должен быть избран;

д) если сумма бюллетеней с кандидатом **x** на первом месте и кандидатом **y** на втором месте и бюллетеней, где **y** – первый, а **x** – второй, составляет больше половины голосов, то хотя бы один из этих кандидатов должен быть избран.

Вудалл доказывает несовместимость этих аксиом на примере, в котором избирается 1 кандидат. Доказательство строится не для класса правил передачи голосов, а для процедур выбора вообще. Стоит отметить, что эта система аксиом не позволяет выделить какие-либо правила передачи голосов.

Покажем, что этим аксиомам либо удовлетворяют все правила передачи голосов, либо ни одно из них. Как показывает пример Миллера (описан в предыдущем подразделе) аксиоме а) не удовлетворяет ни одно известное правило передачи голосов. Аксиома б) выполнена, так как избиратель не может уменьшить шансы избрания какого-либо кандидата, проголосовав за него, все голоса считаются только «за». Иначе говоря, аксиома б) выполнена, так как процедура последовательно углубляется «вглубь» предпочтений и не может учесть вторые предпочтения до первых и т.д. Аксиома г) выполнена, так как кандидаты с наименьшим количеством голосов будут исключаться, что гарантирует избрание кандидата с наибольшим количеством голосов. Аксиома д) выполнена, так как при числе победителей более 2 либо кандидат **x**, либо кандидат **y** набирают квоту. При выборе двух победителей 33%+1 голосов гарантируют прохождение с помощью правил передачи голосов. Для нарушения свойства д) необходимо, чтобы победили 2 кандидата в сумме набравшие менее половины голосов. Это может быть, если победителем будет объявлен кандидат с менее чем 25% голосов, что невозможно, так как либо кандидат **x**, либо кандидат **y** будут иметь большее число голосов. При выборе одного победителя если ни **x**, ни **y** не набирают квоту 50%+1 голос, то процедура исключит кандидата с наименьшим количеством голосов. Если это один из кандидатов **x** и **y**, то оставшейся побеждает. Третий кандидат не может победить, так как максимум, что может набрать этот кандидат, это 50%-1 голос.

2.3 Формализация правила передачи голосов

Для анализа методов, реализующих правило передачи голосов, запишем процедуру формально и сформулируем свойства, которые разумно требовать именно в этом классе систем пропорционального представительства.

Обозначим:

$V_0 = \{v_1, ..., v_n\}$ – множество избирателей, индекс k;

$C_0 = \{c_1, ..., c_m\}$ – множество кандидатов, индекс j;

s – число мест, которые должны быть заполнены (будем считать, что s<m<n);

i – индекс этапа;

$V_i \subseteq V_0$ – множество избирателей на i-том этапе подсчета голосов;

$C_i \subseteq C_0$ – множество кандидатов на i-том этапе подсчета голосов;

E_i – множество избранных кандидатов на i-том этапе подсчета голосов;

$E(V_0, C_0, s)$ – множество победителей после последнего этапа подсчета;

$\overline{P}$ – профиль предпочтений избирателей;

$\overline{P}_i$ – профиль предпочтений, соответствующий множеству кандидатов и множеству избирателей на i-том этапе избирателей;

$\sigma(c_j, V_i, C_i) \subseteq V_i$ – коалиция (множество) избирателей, ставящих кандидата c_j на первое место по предпочтениям;

$\sigma^{\max}(c_j, V_i, C_i)$ – максимальная коалиция, т.е. все остальные избиратели голосуют за других кандидатов;

$q(n, s)$ – квота, т.е. необходимое минимальное число голосов для избрания.

Для целого числа голосов квота определяется следующим образом

$$q(n, s) = \left\lfloor \frac{n}{s+1} \right\rfloor + 1. \qquad (2.2)$$

Если $\left|\sigma(c_j, V_i, C_i)\right| = q(n, s)$, то такая коалиция будет выигрывающей, т.е. обеспечивающей победу кандидату c_j.

Опишем формально правило передачи голосов, являющееся процедурой, которая итеративно выполняется до полного определения состава победителей. Знаком «:=» здесь будет обозначаться присвоение значения.

В начале процедуры определяется квота по формуле (2.2) и полагаем

$$i \coloneqq 0,\ E_0 \coloneqq \varnothing .$$

Этап $i \geq 0$.

а) Если существует выигрывающая коалиция $\sigma\left(c_j, V_i, C_i\right)$ для некоторого кандидата c_j, то кандидат c_j, поддержанный этой коалицией, объявляется избранным. Тогда

$$E_{i+1} \coloneqq E_i \cup \left\{c_j\right\}.$$

Если $\left|E_{i+1}\right| < s$, то

$$V_{i+1} \coloneqq V_i \setminus \sigma\left(c_j, V_i, C_i\right),\ C_{i+1} \coloneqq C_i \setminus \left\{c_j\right\},\ i \coloneqq i+1,$$

переход к началу нового этапа, иначе процедура передачи голосов заканчивается.

б) Если выигрывающей коалиции не существует, то алгоритм продолжается следующим образом. Если $\left|s - E_i\right| = \left|C_i\right|$, то все кандидаты объявляются избранными $E_{i+1} \coloneqq E_i \cup C_i$ и процедура завершается. В противном случае, т.е. если $\left|s - E_i\right| < \left|C_i\right|$, построим разбиение множества избирателей на коалиции $\sigma^{\max}\left(c_j, V_i, C_i\right)$ для всех $c_j \in C_i$. Кандидат $c_j \in C_i$ с наименьшей мощностью максимальной коалиции $\left|\sigma^{\max}\left(c_j, V_i, C_i\right)\right|$ объявляется проигравшим и

$$E_{i+1} \coloneqq E_i,\ V_{i+1} \coloneqq V_i,\ C_{i+1} \coloneqq C_i \setminus \left\{c_j\right\},\ i \coloneqq i+1,$$

переход к началу следующего этапа.

Заметим, что на некотором этапе у избирателя может не быть предпочтений на множестве оставшихся кандидатов. Это означает, что данный бюллетень переходит в категорию непередаваемых голосов. Они не вошли в выигрывающие коалиции тех кандидатов, за которых эти избиратели проголосовали и не имеют возможности както повлиять на исход голосования после исключения их кандидатов. Формально до конца процедуры эти избиратели остаются во множестве избирателей текущего этапа.

Опишем метод Грегори в новых терминах. Максимальная коалиция за кандидата c_j определяется следующим образом

$$\sigma^{\max}\left(c_j,V_i,C_i\right)=\sigma^{\max}\left(c_j,V_{i-1},C_{i-1}\right)\cup\sigma^{\max}\left(C_{i-1}\setminus C_i,V_{i-1},C_{i-1}\right),$$

если нет выигрывающей коалиции, и

$$\sigma^{\max}\left(c_j,V_i,C_i\right)=\sigma^{\max}\left(c_j,V_{i-1},C_{i-1}\right)\cup\sigma^{\max}\left(C_{i-1}\setminus C_i,V_{i-1},C_{i-1}\right)\setminus\sigma\left(C_{i-1}\setminus C_i,V_{i-1},C_{i-1}\right),$$

где $\left|\sigma\left(C_{i-1}\setminus C_i,V_{i-1},C_{i-1}\right)\right|=q(n,s)$, если на последней итерации некоторый кандидат был избран.

В методе Грегори только бюллетени из последней передачи должны передаваться. Таким образом, выигрывающая коалиция должна полностью включать максимальную коалицию с предыдущей итерации

$$\sigma^{\max}\left(c_j,V_{i-1},C_{i-1}\right)\subseteq\sigma\left(c_j,V_i,C_i\right),$$

где $\left|\sigma\left(c_j,V_i,C_i\right)\right|=q(n,s)$.

Разберем пример с 3 кандидатами и 5 избирателями, иллюстрирующий сокращение множества кандидатов и избирателей при избрании кандидата. Начальный профиль предпочтений представлен в Таблице 2.5.

Таблица 2.5 – Профиль предпочтений

	Избиратели 1 2 3 4 5
Первые предпочтения	a a a b c
Вторые предпочтения	c b c c b
Третьи предпочтения	b c b a a

При s=2 для победы необходимо набрать 2 голоса, q=2. Кандидат **a** имеет выигрывающую коалицию из избирателей {1, 2} (в Таблице 2.5 выделена подчеркиванием) и поэтому объявляется победителем. Бюллетени этих избирателей и кандидат **a** исключаются из профиля избирателей. В таблице 2.6 представлен измененный профиль предпочтений избирателей, с которым работает процедура на следующем этапе.

Таблица 2.6 – Измененный профиль предпочтений

	Избиратели 3 4 5
Первые предпочтения	c b c
Вторые предпочтения	b c b

Остались избиратели {3, 4, 5} и кандидаты {**b**, **c**}. За счет исключения кандидата **a** бюллетень 3 перешел от кандидата **a** к кандидату **c**. В профиле имеется выигрывающая коалиция за кандидата **c** (избиратели {3, 5}), гарантирующая его победу. Процедура заканчивается, кандидаты {**a**, **c**} являются победителями голосования.

Методы, реализующие правило передачи голосов, различаются по способу выбора выигрывающей коалиции, который определяет, какие голоса сохранятся у кандидата, а какие будут переданы и окажут влияние на выбор победителя и выигрывающей коалиции на следующем этапе. Определение выигрывающей коалиции влияет на всю последующую траекторию передачи голосов, поэтому способ выбора выигрывающей коалиции на каждом этапе надо продумать заранее. Некоторые естественные требования позволяют ограничить класс методов.

2.4 Аксиомы и теорема о представлении

В этом подразделе приведена новая система аксиом, показана их независимость и доказана теорема о представлении. Аксиомы для метода выбора выигрывающей коалиции следующие:

Аксиома 1. Независимость от предыстории.

Для любого этапа i, если вместо продолжения подсчета начать процедуру как бы с самого начала, но сохраняя текущее распределение голосов, выбор коалиции не должен измениться.

Аксиома 2. Независимость от последующих предпочтений.

Изменение тех предпочтений избирателей, которые ещё не были учтены в процедуре, то есть всех последующих, кроме первых предпочтений на данном этапе, не должно влиять на выбор выигрывающей коалиции.

Эта аксиома может быть рассмотрена как аналог аксиомы независимости от посторонних альтернатив (НПА) Эрроу [54]. Действительно, согласно НПА коллективный выбор между альтернативами ***a*** и ***b*** не должен зависеть от предпочтений между альтернативами ***a*** и ***c***, ***b*** и ***d***, ***c*** и ***d***, и так далее. Аксиома 2 требует, чтобы выбор коалиции на i-той итерации учитывал только первые предпочтения индивидуальных предпочтений на этой итерации. Традиционный метод Грегори со случайным отбором бюллетеней естественно не рассматривает последующие предпочтения и удовлетворяет данной аксиоме.

Аксиома 3. Анонимность.

Независимость от имен избирателей.

Аксиома 4. Нейтральность.

Независимость от имен альтернатив.

Необходимым условием выполнения аксиомы 1 является пересчет квоты на каждом этапе по формуле

$$q_i = \left\lfloor \frac{|V_i|}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor + 1. \tag{2.3}$$

Если квоту не пересчитывать, то на некотором этапе первоначальная квота и квота, посчитанная по количеству голосов и мест на текущем этапе, не будут равны, что естественно нарушит аксиому 1. Множество избирателей, как и количество оставшихся мест к распределению меняются только в момент избрания очередного кандидата. На тех этапах процедуры, в которых не произошло избрания кандидата, квота не меняется. Непередаваемые голоса учитываются при подсчете квоты. Оказывается, что пересчет квоты не вносит существенных изменений в процедуру, так как квота может уменьшиться только 1 раз за всю процедуру на 1.

Лемма 2.1. Квота, посчитанная по формуле (2.3), не может увеличиться ни на каком этапе процедуры.

Доказательство. По определению квоты количество кандидатов равное числу мест, могут набрать квоту, но большее количество кандидатов не могут, т.е.

$$s - |E_i| \le \frac{|V_i|}{q_i} < s - |E_i| + 1. \tag{2.4}$$

Допустим, что после избрания на этапе i очередного кандидата квота увеличилась. Это означает, что старая квота приводила к избранию большего количества кандидатов, чем $s - |E_i| - 1$,

$$\frac{|V_i| - q_i}{q_i} \ge s - |E_i| \Rightarrow \frac{|V_i|}{q_i} \ge s - |E_i| + 1.$$

что противоречит (2.4). Таким образом, на каждом этапе квота может только уменьшаться или не измениться:

$$q_i - q_0 \le 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. Для квоты, посчитанной по формуле (2.3) на последнем этапе процедуры $q_l = \left\lfloor \frac{|V_l|}{s - |E_l| + 1} \right\rfloor + 1$, выполняется $-1 \le q_l - q_0 \le 0$.

Доказательство. По лемме 2.1 на каждом этапе квота может только уменьшаться или не измениться

$$q_i - q_0 \le 0.$$

Покажем, что она не может уменьшиться более чем на 1 за всю процедуру. Общее изменение квоты с начала процедуры равно

$$q_i - q_0 = \left\lfloor \frac{|V_i|}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{|V_0|}{s + 1} \right\rfloor.$$

На каждом этапе, когда произошло избрание кандидата, множество избирателей сокращается, тогда

$$q_i - q_0 = \left\lfloor \frac{|V_0| - \sum_{j \in J_i} q_j}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{|V_0|}{s+1} \right\rfloor,$$

где J_i – множество этапов до этапа i, которые закончились избранием кандидата, $|J_i| = |E_i|$. Без знака округления вниз до ближайшего целого выражение увеличится менее чем на 1. Таким образом, целая часть разности не превышает разности целых частей

$$q_i - q_0 \geq \left\lfloor \frac{|V_0| - \sum_{j \in J_i} q_j}{s - |E_i| + 1} - \frac{|V_0|}{s+1} \right\rfloor,$$

$$q_i - q_0 \geq \left\lfloor \frac{|E_i||V_0| - (s+1)|E_i| q_0 - (s+1)\sum_{j \in J_i}(q_j - q_0)}{(s - |E_i| + 1)(s+1)} \right\rfloor.$$

Используя определение q_0, получим

$$q_i - q_0 \geq \left\lfloor \frac{\frac{|E_i||V_0|}{s+1} - |E_i|\left(\frac{|V_0|}{s+1} + 1 - \left\{\frac{|V_0|}{s+1}\right\}\right) - \sum_{j \in J_i}(q_j - q_0)}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor,$$

где фигурные скобки обозначают операцию $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Так как $|J_i| = |E_i|$, получим

$$q_i - q_0 \geq \left\lfloor \frac{\sum_{j \in J_i}\left(q_0 - q_j - 1 + \left\{\frac{|V_0|}{s+1}\right\}\right)}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor.$$

Обозначим последний этап, когда выполнено $q_i = q_0$, за этап d, тогда, начиная с этапа d+1, выражение $\left\lfloor \frac{\sum_{j \in J_i}\left(q_0 - q_j - 1 + \left\{\frac{|V_0|}{s+1}\right\}\right)}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor$ не убывает.

Рассмотрим процедуру, в которой этап d будет этапом 0, т.е. начинающуюся в условиях этапа d. В такой постановке будут распределяться $s - |E_d|$ мест при

$q'_0 = q_d = q_0$. Так как это продолжение прежней процедуры, квоты не изменились и значение $q'_{i-d} = q_i$ осталось прежним, $|V_d| = |V'_0|$. Для этой процедуры будет верно

$$\left\lfloor \frac{\sum_{j\in J'_{i-d}} \left(q'_0 - q'_j - 1 + \left\{ \frac{|V_0|}{s - |E_d| + 1} \right\} \right)}{s - |E_d| - |E'_{i-d}| + 1} \right\rfloor \le q'_{i-d} - q'_0 .$$

В сумме, стоящей в числителе, только первое слагаемое отрицательно. Оно равно

$$q'_0 - q'_j - 1 + \left\{ \frac{|V_0|}{s - |E_d| + 1} \right\} \ge -1 .$$

Таким образом,

$$-1 \le \left\lfloor \frac{\sum_{j\in J'_{i-d}} \left(q'_0 - q'_j - 1 + \left\{ \frac{|V_0|}{s - |E_d| + 1} \right\} \right)}{s - |E_d| - |E'_{i-d}| + 1} \right\rfloor \le q'_{i-d} - q'_0 .$$

Получаем $-1 \le q_i - q_0 \le 0$, что верно и для последнего этапа $-1 \le q_l - q_0 \le 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Единственным методом, удовлетворяющим аксиомам 1-4, будет метод со случайным равновероятным на каждом этапе способом выбора выигрывающей коалиции с пересчетом квоты на каждом шаге по формуле (2.3).

Доказательство. Так как выбор не зависит от последующих альтернатив (аксиома 2) и на каждом этапе выбор эквивалентен выбору на нулевом этапе (аксиома 1), не имеющем предыстории, то избиратели отличаются только именами и первой в предпочтениях альтернативой на i-том шаге. Из анонимности (аксиома 3) следует, что каждый избиратель, а, следовательно, и каждая коалиция априори (до начала процедуры) имеет равные шансы быть выигрывающей, из аксиомы 1 первый и последующие этапы не должны различаться, следовательно, равные независимые шансы сохранятся на каждом этапе. Единственный метод, создающий равные шансы это равновероятный на каждом этапе способ выбора коалиции. Чтобы величина выигрывающей коалиции не зависела от этапа, квоту необходимо и достаточно пересчитывать по формуле (2.3). Таким образом, единственный метод удовлетворяющий аксиомам 1-3 это случайный равновероятный на каждом этапе способ выбора выигрывающей коалиции с пересчетом квоты на каждом шаге по формуле (2.3). По построению этот метод является нейтральным (аксиома 4). Теорема доказана.

По сути, описанный метод – это взвешенный включающий метод Грегори в вероятностной версии с пересчетом квоты на каждом этапе. Очевидно, что случайный метод выбора выигрывающей коалиции может приводить к различным результатам выборов.

Если ввести дополнительное ограничение на детерминированный выбор выигрывающей коалиции, то согласно теореме 2.2 не существует метода, удовлетворяющего аксиомам 1-4.

Так как на некотором этапе может создаться ситуация, при которой несколько кандидатов наберут квоту, то необходимо определить правило, по которому будет определяться очередность избрания этих кандидатов. Следующие две аксиомы отражают требования к правилу определения выигрывающего кандидата:

Аксиома 5. Наследие.

Если из множества кандидатов, набравших квоту, выбран кандидат **x**, то этот кандидат должен быть выбран в любом подмножестве кандидатов, включающем данного кандидата.

Аксиома 6. Независимость от других кандидатов.

Правило выбора кандидата из множества кандидатов, набравших квоту должно зависеть только от информации о предпочтениях тех избирателей, которые ставят этих кандидатов на первое место.

Существует много способов выбора выигрывающего кандидата из множества кандидатов, набравших квоту, также удовлетворяющих аксиомам 1-6. Например, выбор кандидата с наибольшим числом голосов или наименьшим числом голосов.

Покажем, что аксиомы 1, 2, 3 независимы, так как можно построить примеры, нарушающие только одну аксиому из трёх. Приведем примеры методов, нарушающих в отдельности аксиомы 1, 2, 3.

Метод 1. Случайным образом раздаются номера избирателям один раз на нулевом этапе. Лексикографическим способом пронумеровываются коалиции. Выбираем коалицию с наименьшим номером. Выполняются аксиомы 2, 3, 4, но нарушается 1.

Метод 2. На каждом этапе пересчитывается квота и случайно упорядочиваются альтернативы. Коалиция образуется из тех избирателей, у которых следующая по предпочтениям альтернатива наиболее близка к избранной. При неразличимости коалиций по данному критерию, выбираем среди этих коалиций равновероятно. Выполняются аксиомы 1, 3, 4, но нарушается 2.

Метод 3. По существующим именам избирателей лексикографически упорядочим коалиции. На каждом этапе пересчитываем квоту и выбираем коалицию с наименьшим номером. Выполняются аксиомы 1, 2, 4, но нарушается 3.

Метода, удовлетворяющего аксиомам 1, 2, 3, но не удовлетворяющего аксиоме 4, не существует. Это следует из теоремы 2.2.

Покажем, что метод Грегори, как в постановке со случайным отбором, так и с пропорциональным отбором, не удовлетворяет аксиоме 1.

Вернёмся к примеру, разобранному в начале раздела. После распределения излишка кандидата **a** образовалась следующая ситуация

5 голосов $b \succ c \succ d$ (перешло от а),

10 избирателей $b \succ d$,

10 избирателей c,

10 избирателей d.

Квота равна 14. Избирается кандидат **b**, по методу Грегори 1 голос переходит кандидату **c**.

Если бы такая ситуация сложилась на первом этапе, то голоса выбирались равновероятно среди всех бюллетеней, а именно с вероятностью 5/15 перераспределялись голоса первой группы и с вероятностью 10/15 – второй. Выбор голосов для передачи следующему кандидату изменился. Таким образом, метод Грегори не удовлетворяет свойству независимости от предыстории (аксиома 1). При пропорциональном определении бюллетеней для перераспределения метод Грегори также в этом примере будет нарушать аксиому 1. Включающий метод Грегори тоже нарушает аксиому 1, но взвешенный включающий метод Грегори дополненный пересчетом квоты на каждом шаге будет удовлетворять аксиоме 1.

Метод Грегори со случайным отбором бюллетеней для передачи удовлетворяет свойству независимости от последующих предпочтений (аксиома 2), так как изменение профиля предпочтений никак не повлияет на вероятности выбора выигрывающей коалиции. Аналогично, вероятностные варианты усложненных методов Грегори будут удовлетворять аксиоме 2.

Метод Грегори с пропорциональным отбором бюллетеней для передачи не удовлетворяет свойству независимости от последующих предпочтений (аксиома 2). Рассмотрим следующий пример. Пусть, количество избирателей и мест таково, что квота равна 6. В Таблице 2.7 приведена ситуация на первом этапе голосования относительно предпочтений избирателей голосующих за кандидата **a**. Остальные голоса таковы, что кандидат **a** набирает максимум голосов.

Таблица 2.7 – Выбор выигрывающей коалиции

	Голоса за кандидата а 1 2 3 4 5 6 7 8	Остальные голоса
Первые предпочтения	a a a a a a a a	…
Вторые предпочтения	c c c c d d d d	…

Вторые предпочтения (относительно кандидатов **c** и **d**) ещё не учтены процедурой. Процедура выбирает выигрывающую коалицию из 6 некоторых бюллетеней, составляющих квоту (голоса {1, 2, 3, 6, 7, 8}, выделены подчеркиванием), пропорционально вторым предпочтениям. Так как бюллетеней, в которых на вторых местах стоят кандидаты **c** и **d**, соответственно, равное количество, то и в коалиции они должны быть представлены поровну. Пример такой коалиции представлен в Таблице 2.3. Голоса 4 и 5, передаются соответственно кандидатам **c** и **d**. Но если в этих бюллетенях поменять вторые предпочтения, то в предыдущей коалиции распределение вторых мест не пропорционально, что можно увидеть из Таблицы 2.8.

Таблица 2.8 – Изменение вторых предпочтений

	Голоса за кандидата a 1 2 3 4 5 6 7 8	Остальные голоса
Первые предпочтения	a a a a a a a a	…
Вторые предпочтения	d c c c c d d d	…

После изменения вторых предпочтений выигрывающая коалиция должна измениться, что отражено в Таблице 2.9. Это демонстрирует нарушение аксиомы 2.

Таблица 2.9 – Выбор выигрывающей коалиции

	Голоса за кандидата a 1 2 3 4 5 6 7 8	Остальные голоса
Первые предпочтения	a a a a a a a a	…
Вторые предпочтения	d c c c c d d d	…

Аналогичные рассуждения верны и для усложненных методов Грегори, так как на первом этапе они не различаются.

2.5 Случай дробных голосов

При голосовании каждый избиратель имеет по одному голосу. Далее при передаче голосов необходимо выбрать некоторое количество бюллетеней, но в принципе можно передавать не целые голоса, а разделять каждый голос, или некоторые из них между кандидатами. Если позволить передавать дробное число голосов, то можно расширить множество методов, реализующих правило передачи голосов.

Оставшиеся голоса на i-м этапе будут обозначаться вектором $v_i = \left(v_{i1},...,v_{in}\right)$, где $v_i \in [0,1]$. Единица обозначает полный голос, $v_0 = (1,...,1)$.

Характеристический вектор коалиции – это вектор $w_{ij} = \left(w_{ij1},...,w_{ijn}\right)$, где $w_{ijk} \in [0,1]$. Единица обозначает принадлежность к коалиции k-того избирателя на этапе i за j-того кандидата, кроме того, если $v_{ik} = 0$, то и $w_{ijk} = 0$.

Пусть $w_{ij}^{\max}$ – максимальная коалиция, т.е. все остальные избиратели голосуют за других кандидатов.

Коалиция будет выигрывающей, если число голосов (скалярное произведение указанных векторов) будет равно квоте

$$v_i \cdot w_{ij} = q(n,s). \qquad (2.5)$$

Описание процедуры правила передачи голосов.

В начале процедуры определяется квота. Квота может определяться, как и в случае с целыми голосами $q_0 = \left\lfloor \frac{n}{s+1} \right\rfloor + 1$, но может определяться как $q_0 = \left\lfloor \frac{n}{s+1} \right\rfloor + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное малое число. Кроме того, на нулевом этапе полагаем $i := 0$, $E_0 := \varnothing$.

Этап $i \geq 0$.

а) если существует выигрывающая коалиция w_{ij} для некоторого кандидата c_j, то кандидат c_j, поддержанный этой коалицией, объявляется избранным. Тогда

$$E_{i+1} := E_i \cup \{c_j\}.$$

Если $|E_{i+1}| < s$, то

$$v_{i+1,k} := v_{ik} \cdot (1 - w_{ijk}),\ C_{i+1} := C_i \setminus \{c_j\},\ i := i+1,$$

переход к началу нового этапа, иначе процедура передачи голосов заканчивается.

б) если выигрывающей коалиции не существует, то алгоритм продолжается следующим образом. Если $|s - E_i| = |C_i|$, то все кандидаты объявляются избранными $E_{i+1} := E_i \cup \{C_i\}$ и процедура завершается. В противном случае, т.е. если $|s - E_i| < |C_i|$ кандидат $c_j \in C_i$ с наименьшим $v_i \cdot w_{ij}^{\max}$ объявляется проигравшим и

$$E_{i+1} := E_i,\ v_{i+1} := v_i,\ C_{i+1} := C_i \setminus \{c_j\},\ i := i+1,$$

переход к началу нового этапа.

Кроме равновероятного метода аксиомам 1, 2, 3 удовлетворяет взвешенный включающий метод Грегори с пересчетом квоты (если квота определяется также как в случае с целыми голосами $q_i = \left\lfloor \frac{|V_i|}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor + 1$, то она изменится не более чем на 1, если как $q_i = \left\lfloor \frac{|V_i|}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor + \varepsilon$, то не более чем на ε) распределяющий излишек равномерно, т.е. распределяющий равную долю каждого голоса. Взвешенный включающий метод Грегори распределяет равные доли каждого голоса, а именно из каждого голоса полного или неполного оставляет в выигрывающей коалиции ту часть k-того голоса, которую составляет доля квоты во всей выигрывающей коалиции

$$w_{ijk} = \frac{q_i}{w_{ij}^{\max} \cdot v_i}. \tag{2.6}$$

Такая постановка определяет включенность в коалицию вне зависимости от последующих предпочтений (аксиома 2) и не зависит от этапа (аксиома 1). Учет всех избирателей в равной доле создает анонимную процедуру (аксиома 3).

Теорема 2.3. В постановке с дробными голосами существует метод, удовлетворяющий аксиомам 1-3, но не удовлетворяющий аксиоме 4.

Доказательство. Построим этот метод. Выберем некоторого кандидата **x**. Все выигрывающие коалиции описываются формулой (2.5) при условии, что $w_{ijk} \le w_{ijk}^{\max}$. Если побеждает кандидат **x**, то будем выбирать выигрывающую коалицию равновероятно из множества всех возможных выигрывающих коалиций. Если побеждает любой другой кандидат, то будем определять выигрывающую коалицию по формуле (2.6), т.е. передавать равные доли каждого голоса. Решение по этому методу явно зависит от имени кандидатов, что нарушает аксиому 4. При пересчете квоты на каждой итерации по формуле (2.3) этот метод будет удовлетворять аксиоме 1. При любом победившем кандидате выбор не зависит от имён избирателей и последующих предпочтений, т.е. удовлетворяет аксиомам 2 и 3. Таким образом, построен метод, удовлетворяющий аксиомам 1, 2, 3, но нарушающий аксиому 4. Теорема доказана.

Требование выполнения всех аксиом 1-4 образует класс методов, комбинирующих равновероятное распределение и передачу равных долей, независимо ни от чего или в зависимости от распределения голосов в первых предпочтениях.

Метод Мика [47], [48], как и другие методы, построенные на его основе, не подпадают под описанную в данном разделе формализацию правила передачи голосов, так как основными принципами работы этих методов являются передача голосов уже победившим кандидатам, уменьшение квоты из-за непередаваемых голосов с соответствующим пересчетом голосов уже победивших кандидатов, то есть постоянное изменение выигрывающих коалиций уже победивших кандидатов. Метод Мика в силу своей сложности не получает распространения и в настоящее время используется только на выборах в Новой Зеландии [55].

2.6 Некоторые выводы

Построено обобщение различных методов, реализующих правило передачи голосов на практике, в виде формальной процедуры. Существующие методы можно рассматривать как частные случаи этой процедуры. Аксиоматика этих методов по своей сути не устанавливает ни одной из компонент определения победителей – ни имен кандидатов, ни имен избирателей, ни имен коалиций, ни номера итерации. Это с необходимостью приводит к случайному отбору коалиций на каждом шаге, что и отражено в теореме 2.2.

Предложен новый метод, основанный на правиле передачи голосов, и построено его аксиоматическое описание. Этот метод назван взвешенным включающим методом Грегори, дополненным пересчетом квоты на каждом этапе, с передачей голосов с равной вероятностью, либо с передачей равных долей голосов, если процедура позволяет передавать дробное число голосов.

Пересчет квоты не вносит существенных изменений в процедуру, так как по теореме 2.1 квота за всю процедуру подсчета может измениться не более чем на 1 в сторону уменьшения. Оказывается, что если квота не пересчитывается, то реализация процедуры на шаге i отличается от реализации на нулевом шаге. Иначе говоря, процедура в зависимости от номера итерации «работает» по-разному. Именно желание избежать этой «зависимости от пути» привело к формулировке аксиомы «независимости от предыстории».

Отметим, что пересчет квоты в реальных выборах с большим количеством избирателей, скорее всего, не сыграет существенной роли, но, очевидно, увеличит прозрачность процедуры, так как сотрет различия между первым и последующими этапами подсчета голосов.

Результаты исследований этого раздела отражены в следующих публикациях [56], [46]:

Алескеров Ф.Т., Карпов А.В. Аксиоматическое описание правила передачи голосов// Экономический журнал Высшей школы экономики, 2011. № 2. С. 135-154.

Вольский В.И., Карпов А.В. Применение различных вариантов правила передачи голосов// Полития, 2011. № 2. С. 162-174.

3 Сравнительный анализ аксиоматических систем теории важности критериев и теории аддитивных функций ценности, обоснование многокритериальных решающих правил

В этом разделе приведены результаты исследований, выполненных в ходе реализации проекта по сравнительному анализу аксиоматических систем теории важности критериев и теории аддитивных функций ценности.

Подавляющее большинство применяемых на практике методов анализа многокритериальных задач принятия решений использует информацию об относительной важности критериев, причем обычно в виде коэффициентов важности, или же «весов», входящих в состав аддитивной функции ценности (или приводимой к таковой), однако само понятие важности критериев не определяется [57].

Математическая теория важности критериев была создана в России (историю и библиографию см. в [58]). Её базовый раздел – теория качественной важности критериев – опирается на строгие определения понятий «один критерий важнее другого» и «критерии равноважны». Эти определения не предполагают, что предпочтения могут быть описаны при помощи функции ценности; более того, допускается, что отношение предпочтения может быть лишь частичным. Поскольку в большинстве известных методов анализа многокритериальных задач информация о важности критериев представляется обычно в виде коэффициентов важности, или же «весов», входящих в состав аддитивной функции ценности (или приводимой к таковой), то значительный теоретический и практический интерес представляет вопрос о том, могут ли быть критерии упорядочены по важности (в смысле строгих определений из теории важности критериев), если функция ценности не аддитивна или даже если она вовсе не существует, хотя отношение нестрогого предпочтения является полным?

Базовое для теории количественной важности определение понятия «Один критерий важнее другого во столько-то раз» опирается на построение так называемой N-модели и также не использует понятия аддитивной функции ценности. Поэтому встает вопрос о том, как взаимосвязаны допущение о возможности количественного оценивания важности критериев в соответствии с теорией важности критериев и допущение о существовании аддитивных функций ценности.

В ходе исследований, проведенных в рамках выполнения проекта, были получены ответы на эти важные вопросы.

3.1 Математическая модель

Дальнейшее изложение опирается на следующую математическую модель ситуации принятия индивидуального решения в условиях определенности:

$$\mathbb{M} = < \tau, X, f, Z, P>,$$

где τ – тип постановки задачи (выбрать один наилучший или несколько лучших вариантов, упорядочить все варианты по предпочтительности, и т.д.), X – множество вариантов, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ – векторный критерий, f_i – частные критерии ($m \geq 2$), Z – область значений векторного критерия, P – модель предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР). Каждый вариант x из *множества* всех *вариантов* X характеризуется значениями критериев f_i. Под *критерием* f_i понимается функция с областью определения X и областью значений (множеством оценок) Z_i. Будем полагать, что большие значения критерия предпочтительнее меньших. Таким образом, каждый вариант x характеризуется m числами – значениями $f_i(x)$ всех критериев, образующими *векторную оценку* этого варианта $y = f(x) = (f_1(x), \ldots , f_m(x))$. Поэтому сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их векторных оценок. *Множество* всех *векторных оценок* (как реальных, т.е. соответствующих вариантам из X, так и гипотетических) есть $Z = Z_1 \times \ldots \times Z_m$.

Предпочтения ЛПР моделируются на Z при помощи *отношения нестрогого предпочтения* R или же *функции ценности* v: $Z \to (-\infty, +\infty)$, т.е $\mathsf{P} = \{R\}$ или $\mathsf{P} = \{v\}$ соответственно, так что yRz или же $v(y) \geq v(z)$ означает, что векторная оценка y не менее предпочтительна, чем z. Пара $<Z, R>$ или, соответственно, пара $<Z, v>$ называется *структурой предпочтений* (*с отношением нестрогого предпочтения* или *с функцией ценности*).

Отношение R порождает *отношение безразличия* I и (строгого) *предпочтения* P: $yIz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy$; $yPz \Leftrightarrow yRz \wedge z\not{R}y$ (запись $z\not{R}y$ означает, что zRy неверно). Отношение R называется (*частичным*) *квазипорядком*, если оно рефлексивно (zRz верно для любой векторной оценки z) и транзитивно (для любых $y, z, u \in Z$ из yRz и zRu следует yRu).

Функция ценности v порождает на Z отношение нестрогого предпочтения – квазипорядок R^v: $yR^vz \Leftrightarrow v(y) \geq v(z)$. Этот квазипорядок является *связным*, или *полным*: для любых $y, z \in Z$ верно, по крайней мере, одно из двух: yR^vz или zR^vy. Функции ценности v' и v'' называются *стратегически эквивалентными*, если они порождают одно и то же отношение нестрогого предпочтения: $R^{v'} = R^{v''}$.

Функция ценности v^R представляет связный квазипорядок R, когда $v^R(y) \geq v^R(z) \Leftrightarrow yRz$. Условия существования таких функций ценности приведены в [59], [60], [61].

Определение 3.1. *Аддитивной* называется функция ценности вида $v(y) = v_1(y_1) + \ldots + v_m(y_m)$.

Определение 3.2. Структура предпочтений <Z, v> называется *аддитивной*, если существует аддитивная функция ценности, стратегически эквивалентная v.

Необходимым условием существования аддитивной функции ценности, представляющей связный квазипорядок, (и необходимым условием аддитивности структуры предпочтений) является *взаимонезависимость критериев по предпочтению* (при m = 2 необходимым является и *условие соответственных замещений*) [59], [60]. Если указанное условие нарушено, то структура предпочтений с функцией ценности не является аддитивной (не существует аддитивной функции ценности, представляющей квазипорядок).

3.2 Необходимые сведения из теории качественной важности

В теории важности полагается, что все критерии однородны или приведены к таковым. Это означает, что критерии имеют общую шкалу (которая может быть всего лишь порядковой) и, в частности, у них общая область значений Z_0, так что множество векторных оценок $Z = Z_0^m$.

Пусть A, $B \in \{1, \ldots, m\}$ – два непустых непересекающихся набора номеров критериев, которым соответствуют группы критериев $\{f_i\}_{i\in A}$ и $\{f_i\}_{i\in B}$. Обозначим через y^{AB} векторную оценку, полученную из векторной оценки y, в которой все компоненты y_i с номерами из A равны между собой и все компоненты y_i с номерами из B равны между собой (т.е. $f_i = f_j$ при $i, j \in A$ и при $i, j \in B$), заменой каждой компоненты y_i, $i\in B$, на любую компоненту y_i, $i\in A$, и заменой каждой компоненты y_i, $i\in A$, на любую компоненту y_i, $i\in B$. Например, если y = (2, 4, 4, 3, 2, 2), A = {1, 5, 6}, B = {2, 3}, то y^{AB} = (4, 2, 2, 3, 4, 4).

Определение 3.3 ([62]). Группы критериев $\{f_i\}_{i\in A}$ и $\{f_i\}_{i\in B}$ *равноважны,* или *одинаково важны*, когда векторные оценки y и y^{AB} одинаковы по предпочтительности.

Определение 3.4 ([62])**.** Группа критериев $\{f_i\}_{i\in A}$ f_i *важнее* группы критериев $\{f_i\}_{i\in B}$, когда из пары векторных оценок y и y^{AB} первая предпочтительнее второй, если компонента y_i с номером из A больше компоненты y_i с номером из B.

Отметим, что если множества A и B одноэлементны, то определения 3.3 и 3.4 говорят об упорядочении по важности отдельных критериев.

В теории важности критериев разработаны способы получения и анализа информации о важности критериев, основанные на этих определениях, и методы использования такой информации для решения многокритериальных задач. При этом предполагается, что отношение нестрогого предпочтения R является частичным квазипорядком.

3.3 Качественная важность и функции ценности

Следующий пример показывает, что все критерии могут быть упорядочены по важности даже в случае связного квазипорядка R, для которого не существует представляющей его функции ценности.

Пример 3.1. Рассмотрим структуру предпочтений $\langle Z, R^L \rangle$, где $Z = (-\infty, +\infty)^m$, а R^L – лексикографический квазипорядок, определяемый следующим образом: $yR^Lz \Leftrightarrow (y_1 > z_1) \vee (y_1 = z_1, y_2 > z_2) \vee \ldots \vee (y = z)$. Лексикографический порядок P^L определяется этим условием при $y \neq z$. Пусть векторная оценка $(y \,\|\, y_i = a, y_j = b)$ (соответственно векторная оценка $(y \,\|\, y_j = a, y_i = b)$ получена из векторной оценки y заменой компоненты y_i числом a и компоненты y_j числом b (соответственно, компоненты y_j числом a и компоненты y_i числом b). Если $a > b$ и $i < j$, то верно $(y \,\|\, y_i = a, y_j = b)$ P^L $(y \,\|\, y_j = a, y_i = b)$. Это, согласно определению 3.4, означает, что критерий f_i важнее критерия f_j. Известно, однако, что R^L нельзя представить функцией ценности [60].

Обратимся к случаю существования функции ценности.

Пример 3.2. В трехкритериальной задаче ($m = 3$) задана структура предпочтений $\langle Z, v \rangle$, где $Z = Z_0^3$, $Z_0 = [1, +\infty)$, $v(y) = (y_3+½)y_1 + y_2 + y_3$. Для пары векторных оценок $y' = (2, 1, y_3)$ и $y'' = (1, 3, y_3)$ имеем:

$$\text{если } y_3 = 1, \text{ то } v(y') = 5 < v(y'') = 5½; \ \text{ если } y_3 = 2, \text{ то } v(y') = 8 > v(y'') = 7½.$$

Следовательно, из пары векторных оценок y', y'' с равными третьими компонентами при $y_3 = 1$ предпочтительнее вторая из них, а при $y_3 = 2$ – первая. Таким образом, соотношение по предпочтительности между этими векторными оценками зависит от фиксированного значения компоненты y_3. Это означает, что первые два критерия зависят по предпочтению от третьего, так что критерии не являются взаимонезависимыми по предпочтению. Поэтому структура предпочтений не аддитивна.

Пусть $a, b \in Z_0$ и $a > b$. Имеем:

$$v(b,y_2,a)-v(a,y_2,b)=\tfrac{1}{2}(a-b)>0, \tag{3.1}$$

$$v(y_1,b,a)-v(y_1,a,b)=(a-b)y_1>0, \tag{3.2}$$

$$v(a,b,y_3)-v(b,a,y_3)=(y_3-\tfrac{1}{2})(a-b)>0, \tag{3.3}$$

$$v(a,a,b)-v(b,b,a)=\tfrac{1}{2}(a-b)>0, \tag{3.4}$$

$$v(a,b,a)-v(b,a,b)=(a-b)(a+b+\tfrac{1}{2})>0, \tag{3.5}$$

$$v(b,a,a)-v(a,b,b)=\tfrac{3}{2}(a-b)>0. \tag{3.6}$$

Согласно определению 3.4:

из (3.1) следует, что третий критерий важнее первого;

из (3.2) следует, что третий критерий важнее второго;

из (3.3) следует, что первый критерий важнее второго;

из (3.4) следует, что группа из первого и второго критериев важнее третьего критерия;

из (3.5) следует, что группа из первого и третьего критериев важнее второго критерия;

из (3.6) следует, что группа из второго и третьего критериев важнее первого критерия.

Таким образом, все непересекающиеся группы критериев, включая отдельные критерии, оказываются упорядоченными по важности.

Пример 3.3. Пусть в условиях примера 3.2 множество Z_0 заменено на $\{1, 2, 3\}$. Легко видеть, что все выводы, полученные в примере 3.1, остаются в силе.

Пример 3.4. В двухкритериальной задаче ($m = 2$) задана структура предпочтений $\langle Z, v\rangle$, где $Z = Z_0^2$, $Z_0 = (0, +\infty)$, $v(y) = 2y_1 + y_1y_2 + y_2$. Проверим выполнение условия соответственных замещений, которое для рассматриваемой структуры предпочтений можно сформулировать следующим образом. Пусть y^1 и y^2 – произвольные фиксированные векторные оценки, компоненты которых удовлетворяют неравенствам $y_1^2 > y_1^1,\ y_2^2 > y_2^1$, δ_1 – положительное число, а положительные величины ε_1, ε_2, δ_2 и ε_3 последовательно определяются уравнениями:

$$v(y_1^1+\delta_1, y_2^1) = v(y_1^1, y_2^1+\varepsilon_1); \tag{3.7}$$

$$v(y_1^1+\delta_1, y_2^2) = v(y_1^1, y_2^2+\varepsilon_2); \tag{3.8}$$

$$v(y_1^2+\delta_2, y_2^1) = v(y_1^2, y_2^1+\varepsilon_1); \tag{3.9}$$

$$v(y_1^2+\delta_2, y_2^2) = v(y_1^2, y_2^1+\varepsilon_3). \tag{3.10}$$

Тогда должно выполняться равенство $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

Положив $y^1 = (1, 1)$, $y^2 = (3, 3)$ и $\delta_1 = 1$, из (3.7) – (3.10) получим: $\varepsilon_1 = 2, \varepsilon_2 = 3, \delta_2 = 1, \varepsilon_3 = 5/2$. Поскольку $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, то условие соответственных замещений не выполняется, и поэтому структура предпочтений аддитивной не является. Однако для $a, b \in Z_0$ при $a > b$ имеем: $v(a,b) - v(b,a) = a - b > 0$, так что, согласно определению 4, первый критерий важнее второго.

3.4 Необходимые сведения из теории количественной важности

Определение понятия «Критерий f_i важнее критерия f_j в h_{ij} раз» (записывается $i \succ^{h_{ij}} j$) предложено в [63], [64]. Оно основано на понятии N-модели и не использует понятия функции ценности. Количественная информация о важности Θ, состоящая из сообщений вида $i \succ^{h_{ij}} j$, называется *полной* и *непротиворечивой*, если на её основе можно рассчитать *величины важности критериев* β_i – положительные числа, обладающие свойством $h_{ij} = \beta_i/\beta_j$, $i, j = 1, \ldots, m$. Эти величины определяются с точностью до положительного множителя; если их сумма равна единице, то они называются *коэффициентами важности* и обозначаются α_i.

В случае однородных критериев аддитивная функция ценности имеет вид [60]:

$$v_\Sigma(y \mid \beta, v_0) = \beta_1 v_0(y_1) + \ldots + \beta_m v_0(y_m),$$

где v_0 – определенная на Z_0 функция ценности градаций шкалы критериев, β_i – величины важности критериев (в роли β_i могут выступать α_i) [63], [64].

Далее полагается, что множество градаций конечно: $Z_0 = \{1, \dots, q\}$, $q \geq 2$, и предпочтения вдоль Z_0 возрастают, так что значения ценностей $v_0(k)$ градаций k удовлетворяют неравенствам:

$$v_0(1) < v_0(2) < \dots < v_0(q), \tag{3.11}$$

т.е. функция ценности v_0 является возрастающей. Больше никаких ограничений на значения этой функции нет. Это и означает, что шкала критериев является порядковой.

Для фиксированного вектора важности критериев $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ пусть

$$\beta_{ik}(y)=\begin{cases}\beta_i, & y_i=k,\\ 0, & y_i\neq k;\end{cases} \quad \mathrm{B}_k^{\leq}(y) = \sum\nolimits_{j=1}^{k}\sum\nolimits_{i=1}^{m}\beta_{ij}(y),$$

$$\mathrm{B}_k^{\geq}(y) = \sum\nolimits_{j=k}^{q}\sum\nolimits_{i=1}^{m}\beta_{ij}(y),\ k = 1, \dots, q. \tag{3.12}$$

Решающее правило, задающее отношение нестрогого предпочтения – квазипорядок $R(\beta)$, порождаемое информацией Θ, с использованием соответствующего ей вектора важности β критериев с порядковой шкалой, можно представить одним из следующих двух равносильных способов [63], [64]:

$$yR(\beta)z \Leftrightarrow \mathrm{B}_k^{\leq}(y) \leq \mathrm{B}_k^{\leq}(z),\ k=1,\dots,q-1; \quad yR(\beta)z \Leftrightarrow \mathrm{B}_k^{\geq}(y) \geq \mathrm{B}_k^{\geq}(z),\ k=2,\dots,q; \tag{3.13}$$

при этом $yP(\beta)z$, когда среди неравенств в (3.13) есть строгое, и $yI(\beta)z$, когда все неравенства в (3.13) суть равенства.

Предположим теперь, что дополнительно получена информация о том, что рост предпочтений вдоль шкалы критериев замедляется (при этом $q \geq 3$), т.е. значения функции ценности удовлетворяют неравенствам:

$$v_0(2) - v_0(1) > v_0(3) - v_0(2) > \dots > v_0(q) - v_0(q-1), \tag{3.14}$$

или же, напротив, ускоряется:

$$v_0(2) - v_0(1) < v_0(3) - v_0(2) < \dots < v_0(q) - v_0(q-1), \tag{3.15}$$

так что критерии имеют шкалу первой порядковой метрики [65]. Обозначим через $V^{\downarrow}$ и $V^{\uparrow}$ множества функций v_0, удовлетворяющих неравенствам (3.11), (3.14) и (3.11), (3.15) соответственно.

Решающие правила, задающие отношения нестрогого предпочтения – квазипорядки $R^{\downarrow}(\beta)$ и $R^{\uparrow}(\beta)$, порождаемые информацией Θ с использованием соответствующего ей вектора важности β критериев со шкалой первой порядковой метрики, выглядят так [66], [67]:

$$yR^{\downarrow}(\beta)z \Leftrightarrow \sum\nolimits_{j=1}^{k} \mathrm{B}_j^{\leq}(y) \leq \sum\nolimits_{j=1}^{k} \mathrm{B}_j^{\leq}(z),\ k=1,\ldots,q-1, \tag{3.16}$$

при этом $yP^{\downarrow}(\beta)z$, если среди неравенств в (3.16) есть строгое, и $yI^{\downarrow}(\beta)z$, если все нестрогие неравенства в (3.16) суть равенства;

$$yR^{\uparrow}(\beta)z \Leftrightarrow \sum\nolimits_{j=k}^{q} \mathrm{B}_j^{\geq}(y) \geq \sum\nolimits_{j=k}^{q} \mathrm{B}_j^{\geq}(z),\ k=2,\ldots,q, \tag{3.17}$$

при этом $yP^{\uparrow}(\beta)z$, если среди неравенств в (3.17) есть строгое, и $yI^{\uparrow}(\beta)z$, если все нестрогие неравенства в (3.17) суть равенства.

3.5 Количественная важность критериев с порядковой шкалой и аддитивные функции ценности

Пусть шкала критериев порядковая и V^0 – множество определенных на Z_0 функций v_0: $Z_0 \to (-\infty, +\infty)$, удовлетворяющих неравенствам (3.11).

Теорема 3.1. Для произвольного фиксированного вектора важности β справедливы утверждения:

$$yR(\beta)z \Leftrightarrow \forall v_0 \in V^0\colon\ v_\Sigma(y|\beta,v_0) \geq v_\Sigma(z|\beta,v_0),$$

$$yI(\beta)z \Leftrightarrow \forall v_0 \in V^0\colon\ v_\Sigma(y|\beta,v_0) = v_\Sigma(z|\beta,v_0). \tag{3.18}$$

Доказательство. Согласно (3.12) можно записать:

$$v_\Sigma(y|\beta,v_0) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \beta_i v_0(y_i) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \sum\nolimits_{k=1}^{q} \beta_{ik}(y) v_0(k). \tag{3.19}$$

С учетом (3.19) введем обозначение:

$$\Delta(y,\, z|\beta,\, v_0) = v_\Sigma(y|\beta) - v_\Sigma(z|\beta) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \beta_i v_0(y_i) - \sum\nolimits_{i=1}^{m} \beta_i v_0(z_i) = \sum\nolimits_{k=1}^{q} a_k b_k\,, \qquad (3.20)$$

где

$$a_k = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \beta_{ik}(y) - \sum\nolimits_{i=1}^{m} \beta_{ik}(z)\,,\ b_k = v_0(k)\,,\ k = 1\ \ldots,\, q. \qquad (3.21)$$

Доказательства будет опираться на тождество Абеля, справедливое для любых чисел $a_1, \ldots, a_q, b_1, \ldots, b_q$ (см. [65], [68]):

$$\sum\nolimits_{k=1}^{q} a_k b_k = \sum\nolimits_{k=1}^{q-1} \Big(\sum\nolimits_{j=1}^{k} a_j \Big)(b_k - b_{k+1}) + b_q \sum\nolimits_{k=1}^{q} a_k\,. \qquad (3.22)$$

Для величин (3.21) с учетом (3.20) имеем:

$$\sum\nolimits_{k=1}^{q} a_k = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \Big(\sum\nolimits_{k=1}^{q} \beta_{ik}(y) - \sum\nolimits_{k=1}^{q} \beta_{ik}(z) \Big) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} (\beta_i - \beta_i) = 0\,, \qquad (3.23)$$

$$b_k - b_{k+1} = v_0(k) - v_0(k+1) < 0,\ \ k = 1,\ \ldots,\ q-1. \qquad (3.24)$$

Докажем вначале теорему 3.1 в части необходимости. При справедливости $yR(\beta)z$ согласно (3.13) имеем:

$$\sum\nolimits_{j=1}^{k} a_j = \sum\nolimits_{i=1}^{m} (\sum\nolimits_{j=1}^{k} \beta_{ij}(y) - \sum\nolimits_{j=1}^{k} \beta_{ij}(z)) = \mathrm{B}_k^{\le}(y) - \mathrm{B}_k^{\le}(z) \le 0,\, k = 1, \ldots, q-1. \qquad (3.25)$$

При этом если k-е нестрогое неравенство в (3.13) выполняется как строгое, то соответствующая сумма в (3.25) меньше нуля, а если оно выполняется как равенство, то эта сумма равна нулю. Следовательно, с учетом (3.20) − (3.24), видим, что для любой функции $v_0 \in V^0$ верно $\Delta(y,\, z|\beta,\, v_0) \ge 0$, причем если все неравенства в (3.13) выполняются как равенства, то $\Delta(y,\, z|\beta,\, v_0) = 0$, а если хотя бы одно из них выполняется как строгое, то $\Delta(y,\, z|\beta,\, v_0) > 0$.

Теперь докажем достаточность. Для этого допустим, что для некоторой функции $v_0 \in V^0$ справедливо неравенство $\Delta(y,\, z|\beta,\, v_0) \ge 0$, но $y\not R(\beta)z$. Тогда, согласно (3.13), существует число $k^* \in \{1, \ldots, q-1\}$ такое, что

$$\mathrm{B}_{k^*}^{\le}(y) > \mathrm{B}_{k^*}^{\le}(z)\,. \qquad (3.26)$$

Введем обозначение:

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j\,,\ k = 1,\ \ldots,\ q. \tag{3.27}$$

Ранее было выяснено (см. (3.23)), что $c_q = 0$. С учетом (3.26) видим, что:

$$c_{k*} = \mathrm{B}^{\leq}_{k*}(y) - \mathrm{B}^{\leq}_{k*}(z) > 0\,. \tag{28}$$

Пусть ε – произвольное положительное число. Положим:

$$b_k - b_{k+1} = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c_k}, & c_k < 0, \\ -\varepsilon, & c_k = 0, \\ \dfrac{-\varepsilon}{c_k}, & c_k > 0,\ k \neq k^*, \\ \dfrac{-\varepsilon(q-1)}{c_k}, & k = k^*, \end{cases} \quad k = 1,\ \ldots,\ q-1.$$

Тогда с учетом (3.20) – (3.23), (3.27) и (3.28) получим:

$$\Delta(y,\, z \,|\, \beta,\, v_0) = \sum_{k=1}^{q-1} c_k (b_k - b_{k+1}) + b_q \sum_{k=1}^{q} a_k =$$

$$\sum_{k:\, c_k<0} \varepsilon + \sum_{\substack{k:\, c_k>0 \\ k\neq k^*}} (-\varepsilon) + (-\varepsilon(q-1)) \leq \varepsilon(q-2) - \varepsilon(q-1) = -\varepsilon < 0\,,$$

а это противоречит допущению о выполнении неравенства $\Delta(y,\, z \,|\, \beta,\, v_0) \geq 0$. Следовательно, $yR(\beta)z$ должно выполняться.

Если $v_\Sigma(y \,|\, \beta, v_0) = v_\Sigma(z \,|\, \beta, v_0)$, т.е. справедливы два нестрогих неравенства $v_\Sigma(y \,|\, \beta, v_0) \geq v_\Sigma(z \,|\, \beta, v_0)$ и $v_\Sigma(y \,|\, \beta, v_0) \leq v_\Sigma(z \,|\, \beta, v_0)$, то должны, как только что было доказано, выполняться одновременно два соотношения $yR(\beta)z$ и $zR(\beta)y$, так что верно $yI(\beta)z$.

Теорема 3.1 полностью доказана.

Из теоремы 3.1 как следствие вытекает

Теорема 3.2. Для произвольного фиксированного вектора важности β справедливы утверждения:

$$yR(\beta)z \Leftrightarrow \inf_{v_0\in V^0} \Delta(y,\, z \,|\, \beta, v_0) \geq 0\,, \quad yI(\beta)z \Leftrightarrow \Delta(y,\, z \,|\, \beta, v_0) \underset{v_0\in V^0}{\equiv} 0\,. \tag{3.29}$$

Рассмотрим теперь случай, когда для вектора важности β известно лишь непустое множество его возможных значений В. Поскольку вектор β задается с точностью до положительного множителя, то множество В является конусом. Отношение нестрогого предпочтения – квазипорядок R(В), задаваемое множеством В, определяется следующим образом

$$yR(\mathrm{B})z \Leftrightarrow \forall\beta\in \mathrm{B} : yR(\beta)z,$$

так что $yI(\mathrm{B})z \Leftrightarrow \forall\beta\in \mathrm{B} : yI(\beta)z$.

Нетрудно видеть, что следующие две теоремы являются следствиями теорем 3.1 и 3.2.

Теорема 3.3. Справедливы утверждения:

$$yR(\mathrm{B})z \Leftrightarrow \forall(\beta,v_0)\in \mathrm{B}\times V^0\!:\; v_\Sigma(y|\beta,v_0) \ge v_\Sigma(z|\beta,v_0),$$

$$yI(\mathrm{B})z \Leftrightarrow \forall(\beta,v_0)\in \mathrm{B}\times V^0\!:\; v_\Sigma(y|\beta,v_0) = v_\Sigma(z|\beta,v_0).$$

Теорема 3.4. Справедливы утверждения:

$$yR(\mathrm{B})z \Leftrightarrow \inf_{(\beta,v_0)\in \mathrm{B}\times V^0} \Delta(y,z|\beta,v_0) \ge 0, \quad yI(\mathrm{B})z \Leftrightarrow \Delta(y,z|\beta,v_0) \underset{(\beta,v_0)\in \mathrm{B}\times V^0}{\equiv} 0.$$

3.6 Количественная важность критериев со шкалой первой порядковой метрики и аддитивные функции ценности

Пусть $V^{\downarrow}$ и $V^{\uparrow}$ – множества определенных на Z_0 функций v_0: $Z_0 \to (-\infty, +\infty)$, удовлетворяющих неравенствам (3.11), (3.14) и (3.11), (3.15) соответственно.

Теорема 3.5. Для произвольного фиксированного вектора важности β справедливы утверждения:

$$yR^{\downarrow}(\beta)z \Leftrightarrow \forall v_0\in V^{\downarrow}\!: v_\Sigma(y|\beta,v_0) \ge v_\Sigma(z|\beta,v_0),$$

$$yI^{\downarrow}(\beta)z \Leftrightarrow \forall v_0\in V^{\downarrow}\!: v_\Sigma(y|\beta,v_0) = v_\Sigma(z|\beta,v_0); \qquad (30)$$

$$yR^{\uparrow}(\beta)z \Leftrightarrow \forall v_0\in V^{\uparrow}\!: v_\Sigma(y|\beta,v_0) \ge v_\Sigma(y|\beta,v_0),$$

$$yI^{\uparrow}(\beta)z \Leftrightarrow \forall v_0\in V^{\uparrow}\!: v_\Sigma(y|\beta,v_0) = v_\Sigma(z|\beta,v_0). \qquad (31)$$

Эта теорема в предположении, что компоненты вектора важности критериев β являются рациональными числами, была доказана в [66], [67] при помощи результатов из теории мажоризации [69]. В рассматриваемом общем случае она доказывается при помощи тождества Абеля аналогично теореме 3.1. Поскольку доказательство довольно громоздко, оно здесь не приводится.

Из теоремы 3.5 как следствие вытекает

Теорема 3.6. Для произвольного фиксированного вектора важности β справедливы утверждения:

$$yR^{\downarrow}(\beta)z \Leftrightarrow \inf_{v_0\in V^{\downarrow}} \Delta(y, z|\beta, v_0) \geq 0, \quad yI^{\downarrow}(\beta)z \Leftrightarrow \Delta(y, z|\beta, v_0) \equiv_{v_0\in V^{\downarrow}} 0; \tag{3.32}$$

$$yR^{\uparrow}(\beta)z \Leftrightarrow \inf_{v_0\in V^{\uparrow}} \Delta(y, z|\beta, v_0) \geq 0, \quad yI^{\uparrow}(\beta)z \Leftrightarrow \Delta(y, z|\beta, v_0) \equiv_{v_0\in V^{\uparrow}} 0. \tag{3.33}$$

Рассмотрим теперь случай, когда для вектора важности β известно лишь непустое множество возможных значений – конус В. Нетрудно видеть, что следующие утверждения являются следствиями теорем 3.5 и 3.6.

Теорема 3.7. Справедливы утверждения:

$$yR^{\downarrow}(\mathrm{B})z \Leftrightarrow \forall(\beta, v_0)\in \mathrm{B}\times V^{\downarrow}: v_{\Sigma}(y|\beta, v_0) \geq v_{\Sigma}(z|\beta, v_0),$$

$$yI^{\downarrow}(\mathrm{B})z \Leftrightarrow \forall(\beta, v_0)\in \mathrm{B}\times V^{\downarrow}: v_{\Sigma}(y|\beta, v_0) = v_{\Sigma}(z|\beta, v_0).$$

Теорема 3.8. Справедливы утверждения:

$$yR^{\downarrow}(\mathrm{B})z \Leftrightarrow \inf_{(\beta,v_0)\in \mathrm{B}\times V^{\downarrow}} \Delta(y, z|\beta, v_0) \geq 0, \quad yI^{\downarrow}(\mathrm{B})z \Leftrightarrow \Delta(y, z|\beta, v_0) \equiv_{(\beta,v_0)\in \mathrm{B}\times V^{\downarrow}} 0;$$

$$yR^{\uparrow}(\mathrm{B})z \Leftrightarrow \inf_{(\beta,v_0)\in \mathrm{B}\times V^{\uparrow}} \Delta(y, z|\beta, v_0) \geq 0, \quad yI^{\uparrow}(\mathrm{B})z \Leftrightarrow \Delta(y, z|\beta, v_0) \equiv_{(\beta,v_0)\in \mathrm{B}\times V^{\uparrow}} 0.$$

3.7 Некоторые выводы

Приведенные примеры 3.1 – 3.4 показывают, что отдельные критерии и группы критериев могут быть упорядочены по важности (в смысле точных определений из теории важности критериев), даже если структура предпочтений с функцией ценности не является аддитивной или даже если функции ценности вовсе не существует, хотя отношение нестрогого предпочтения является связным. Это обстоятельство расширяет возможности корректного применения подходов и методов теории важности критериев к анализу прикладных многокритериальных задач принятия решений. С другой стороны, эти же примеры доказывают, что для упорядоченности критериев по важности вовсе не обязаны выполняться аксиомы, обеспечивающие существование функций ценности, в том числе аддитивных.

Теоремы 3.1 – 3.8 показывают, что предположение о существовании параметрического семейства аддитивных функций ценности при конечном множестве шкальных градаций и предположение о существовании количественных величин важности критериев с вычислительной точки зрения эквивалентны.

Это следует учитывать при практическом применении, в том числе в составе систем поддержки принятия многокритериальных решений [70], известных решающих правил из теории важности критериев, использующих информацию о важности критериев и изменении предпочтений вдоль их шкалы (см., например, [71]), а также при разработке новых решающих правил, использующих такую информацию.

Полученные результаты опубликованы в работах [72], [73]:

Подиновский, ВВ 2011 ‘Качественная важность критериев и аддитивность многокритериальной структуры предпочтений’, *Открытое образование*. № 2. Ч. 2. С. 189-192.

Podinovski, VV 2011 ‘Qualitative importance of criteria and additive preference structure’, in: *Informational and Communication Technologies – Theory and Practice: Proceedings of the International Scientific Conference ICTMC Devoted to the 80th Anniversary of I.V. Prangishvili*, Nova, USA, pp. 499-500.

4 Разработка методов принятия решений в задачах интеллектуального анализа данных

В этом разделе приведем результаты исследований, проведенных в рамках выполнения проекта, связанных с принятием решений в задачах интеллектуального анализа данных. Речь пойдет, прежде всего, о:

– разработке методов построения нечетких профилей текстовых и иных объектов в терминах заданной таксономии;
– иерархическая концептуальная классификация документов
– разработке методов обобщения и интерпретации четких и нечетких множеств запроса в таксономиях.

4.1 Методы создания нечетких профилей публикаций на основе заданных экономических факторов и мультифасетной классификации экономических факторов

В данном подразделе рассматривается задача построения нечетких профилей публикаций и их использования для построения мультифасетной классификации. Профиль текста состоит из числовых показателей, выражающих, насколько характерен тот или иной экономический фактор для публикации. Мультифасетная классификация является сложной структурой, в которой классы, соответствующие факторам, образованы как единство нескольких составляющих и содержат в себе публикации, по-разному связанные с данным фактором.

В этом подразделе представлено несколько методов вычисления профилей, описана их программная реализация и способ формирования мультифасетной классификации. Особое внимание уделено описанию разработанных утилит для работы с веб-документами. Таким образом, новизна работы заключается в объединении нескольких методов анализа текстов и классификации для решения поставленной задачи.

Мультифасетная классификация позволяет построить граф связей между заданными факторами. Для обоснованного построения классификаций обоих типов используется таблица «публикация-фактор», в которой для каждого фактора и каждой публикации указывается степень «выраженности» фактора в данной публикации. Построение такой таблицы осуществляется с помощью технологии аннотированных суффиксных деревьев и альтернативной модели «мешок слов», программное обеспечение которых разработано в группе. Таким образом, вся работа протекает в три этапа:

а) загрузка публикаций и факторов;

б) формирование таблицы «публикация-фактор» несколькими способами;

в) формирование классификации искомого типа по каждой таблице.

4.1.1 Загрузка текстов публикаций

Для загрузки была написана специальная утилита на языке программирования Python. Написанная утилита не использовала сторонних библиотек, а только встроенные возможности языка программирования. Эта утилита:

– из данного списка ссылок на непосредственно публикации и порталы выбирала ссылки на публикации (всего было выделено 1880 ссылок, из них – 870 не имеют непосредственного отношения к задаче; 1010 ссылок на публикации – так называемые "источники" публикаций, эти страницы были рассмотрены в дальнейшем);
– скачивала программный код страницы по найденным 1010 ссылкам;
– в программном коде выделяла все слова на русском языке, т.е. все слова, написанные кириллицей в кодировках Unicode-8 и Windows-1251 (в среднем, 1200-1500 слов);
– сохраняла список найденных слов в отдельный файл для каждой публикации;
– создавала списки корректных и некорректных ссылок.

При этом часть адресов не приводили к публикациям, во-первых, из-за ошибок сервера (сервер, на котором расположена публикация не отвечает), опечаток в ссылках или ошибок считывания (42 адреса); во-вторых, из-за того, что по ссылкам находятся файлы расширения doc или pdf (1 и 18 адресов), в-третьих, публикации были на английском языке (18 адресов). Таким образом, было обработано 931 публикация.

4.1.2 Формирование таблицы публикация-фактор

Таблица публикация-фактор содержит числа, характеризующие близость фактора к публикации. Чем больше оценка фактора, тем ближе содержание текста к фактору. Для формирования таблицы публикация-фактор было использовано несколько методов, имеющих принципиальные различия:

а) метод аннотированного суффиксного дерева (АСД), примененный к текстам публикаций без предобработки;

б) метод АСД, примененный к предобработанным текстам публикаций;

в) метод «мешок слов», примененный к предобработанным текстам публикаций.

При применении метода АСД к необработанным текстам публикаций возникла дополнительная задача выбора ограничений на глубину суффиксного дерева.

Все таблицы, построенные методами а) – в), были постобработаны следующим образом: значения, меньшие определённого порога считались незначительными и были обнулены. Порог определялся для каждого из факторов, как квантиль определённого уровня. Были проведены эксперименты с использованием 10%, 20%, 30% и т.д. квантилей в качестве пороговых значений, вычисленными для каждого фактора по отдельности.

4.1.2.1 Описание методов

1. Метод АСД, примененный к предобработанным текстам публикаций.

Каждая публикация, без какой-либо предобработки, представлялась аннотированным суффиксным деревом (на кириллических буквах), каждая вершина которого была аннотирована соответствующей буквой и условной вероятностью ее появления в данном тексте в зависимости от предыдущего фрагмента (пути от корня к вершине). Для ускорения процесса применялись следующие ограничения:

– глубина дерева, т.е. длина пути от корня до самой дальней вершины была ограничена (в одном варианте 10, в другом 12);

– внутри предложений фрагменты были ограничены двумя соседними словами (в другом варианте – тремя соседними словами).

После формирования суффиксного дерева текст фактора накладывался на него, также по-суффиксно, и подсчитывалась суммарная условная вероятность, приходящаяся на один суффикс совпадающего фрагмента. Эта величина и подставлялась в таблицу «публикация-фактор». Факторы рассматривались как тексты без всякой предобработки. Таким образом, было составлено четыре таблицы «публикация-фактор». Заметим, что, с точки зрения метода АСД, лучшая таблица построена при следующих ограничениях: глубина дерева – 12, фрагменты представлены тремя словами. Поэтому, именно эта таблица была подвергнута постобработке (обнулению малых значений).

На данных публикациях суммарные условные вероятности принимают значения в интервале от 0 до 4.

2. Метод АСД, примененный к предобработанным текстам публикаций

Предобработка текстов состоит из двух последовательных этапов:

– извлечение основ (стемов) всех слов, как из текстов публикаций, так и из экономических факторов;
– выбор из текстов публикаций только тех слов, чьи основы встречаются среди основ экономических факторов, т.е. фильтрация входных слов.

Для нахождения стеммов был использован алгоритм Портера. Алгоритм был реализован на языке программирования Python. Корректность реализации подтверждена тестированием на тестовых данных для русского языка, предоставленных в свободное пользование проектом Snowball.

Стеммер Портера – это эвристический метод удаления суффиксов различных частей речи. В ходе алгоритма для входного слова в четыре шага определяется часть речи, к которой слово принадлежит и способ его образования по суффиксам слова. Стеммер Портера не удаляет приставок и не учитывает чередований в корне, т.е. не проводит основы к нормальной форме. Это затрудняет сличение двух основ, которое выполняется на втором шаге процедуры предобработки текстов. Следовательно, для выбора основ из публикаций требуется оценивать нечеткое совпадение между двумя основами (первая – из экономических факторов, вторая – из публикаций). Для решения этой проблемы была использована мера mbi на триграммах основ (подпоследовательностей основ из трех букв). Если значение коэффициента было достаточно велико, например, больше 2/3, то основы считались одинаковыми. Из списка основ, полученных для каждой публикации, были выбраны только схожие по мере mbi на какую-либо из основ экономических факторов. По отобранным основам из публикаций было построено АСД. После построения АСД, основы из факторов посуффиксно накладывались на него. Оценка каждого фактора была вычислена как средняя оценка основ, в него входящих,

Таким образом, число слов, используемых для построения АСД, было уменьшено более чем в 10 раз: в среднем, в каждой публикации было отфильтровано 100-120 слов, с основами из экономических факторов. АСД такого объема строится значительно быстрее, чем АСД ограниченной глубины для всей публикации.

На отфильтрованных данных суммарные условные вероятности принимали значения от 0 до 3.

Построенная таблица была постобработана, как описано выше. В результате было получено девять таблиц с обнуленными значениями. Суммарно, с использованием метода АСД на обеих совокупностях слов было построено 23 таблицы. Все суффиксные деревья, построенные по обоим методам, равно как и таблица «публикация-фактор», нами сохранены и могут быть предоставлены при необходимости.

3.Метод «мешок слов» на предобработанных словах

Метод «мешок слов» основан на подсчете частот слов или стэммов (основ) в тексте в предположении, что текст – это неупорядоченный набор слов, несвязанных грамматическими правилами. Этот метод часто используется в задачах классификации документов.

Согласно этому методу, оценка экономического фактора f может быть вычислена как сумма скорректированных частот основ его слов в отфильтрованном списке основ слов (из публикации). Коррекция – это предположение, что все основы из фактора хотя бы один раз встречаются в тексте публикации. При вычислении частот это означает добавление 1 к числителю. Например, пусть основы экономического фактора f – это a, b, и c. В тексте публикации слова, похожие на a употребляли 7 раз, на c – 5, и всего 100 слов, похожих на слова из всех факторов. Тогда оценка f = (7+1) / 100 + 1/100 + (5+1)/100.

По этой методике были рассчитаны оценки для всех факторов во всех текстах и построена таблица публикация-фактор. В последующем, таблица была постобработана, как описано выше (часть значений меньше квантильных порогов была обнулена).

4.1.3 Мультифасетная классификация по таблице

Мультифасетная классификация образована 40 классами, отвечающими отдельным факторам, и еще одним, «посторонним», классом, содержащим публикации, не относящиеся к делу.

Мультифасетная классификация была построена по таблице, полученной первым методом АСД, как самым точным и достоверным.

Каждый класс образован как единство трех составляющих:

– моноядро, т.е. публикации, для которых только один, соответствующий классу, фактор является характерным (это определяется тем, что оценка данного фактора в публикации превышает 1,5);

– мультиядро, т.е. публикации, для которых несколько факторов, включая тот, что соответствует классу, получили оценку не ниже 1,5;

– оболочка (примыкающие), т.е. публикации, для которых оценка данного фактора, хотя и ниже 1,5, но превышает 0,65.

«Посторонний» класс состоит из публикаций, значения оценки в которых не превышают 0,66.

Кроме того, может быть указан граф продукций между классами: класс А влечет класс Б, если доля класса Б в А превышает порог. При пороге 90% у нас не получилось ни одной продукции, связывающей факторы, что говорит об определенной независимости факторов на данном материале. Когда же порог был понижен до 60%, были получены продукции, приведенные в следующем пункте.

4.1.4 Результаты мультифасетной классификации и построение графа значимых связей между факторами по массиву интернет-документов 2009-2010

Классы интернет-документов были созданы[2] по превалированию в них каждого из следующих 40 факторов, всего 40 классов:

1) ввод автоматизированного производства;

2) ввод новых технологий;

3) ввод опционной программы для топ-менеджмента;

4) выплата купона;

5) выпуск облигаций;

6) выпуск пресс-релизов (с положительными отрицательными новостями);

7) выход на международный рынок[3];

8) завершение сделки/выход;

9) изменение команды менеджмента;

10) изменение организационно-правовой формы;

11) изменение размера пакета акций, принадлежащего институциональному инвестору;

12) изменение уровня концентрации собственности;

13) новый СЕО (генеральный директор);

14) объявление о затратах НИОКР;

15) объявление о первичном размещении;

16) объявление ценового диапазона IPO;

17) открытие филиалов;

18) первичное размещение на зарубежной бирже;

19) переход на новое программное обеспечение;

20) повышение квалификации персонала;

[2] Все расчеты проведены студентками ОПМИ Е. Черняк и О. Чугуновой с использованием разработанного ими программного обеспечения.

[3] Вообще-то в теории бизнес-менеджмента принято говорить о мировом, а не международном рынке.

21) повышение эффективности управления затратами;

22) погашение кредита;

23) погашение облигаций;

24) присвоение кредитного рейтинга;

25) проведение LBO;

26) проведение вертикального слияния;

27) проведение операций купли-продажи бренда;

28) продажа активов (сужение бизнеса);

29) продажа франшиз;

30) публикация финансовой отчетности;

31) раскрытие ошибок отчетности;

32) расширение модельного ряда продукции;

33) расширение региональной сети;

34) реструктуризация кредита;

35) смена генерального директора;

36) смена финансового директора;

37) создание дочернего предприятия;

38) технический дефолт;

39) уход из регионов;

40) участие в судебных разбирательствах.

Эти классы вполне могут пересекаться, поскольку в одном документе могут затрагиваться несколько тем.

Были найдены все продукции с уровнем доверия 60% или больше – связь от класса А к классу Б формируется, если 60% или более документов класса А также принадлежат классу Б. Эти продукции образуют граф на множестве факторов, представленный на рисунке 4.1.

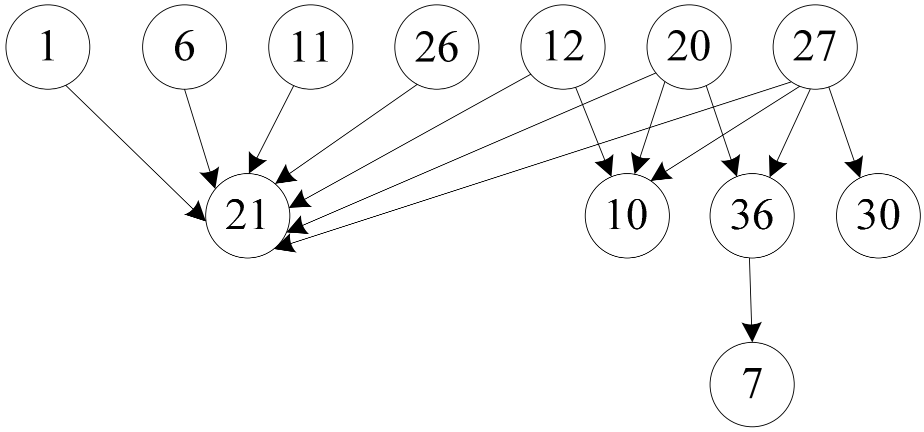


Рисунок 4.1 – Граф значимых (на уровне 60%) связей между факторами по массиву документов

Расшифровка номеров.

Источники (верхний уровень):

1 – ввод автоматизированного производства;

6 – выпуск пресс-релизов (с положительными/отрицательными новостями);

11 – изменение размера пакета акций, принадлежащего институциональному инвестору;

12 – изменение уровня концентрации собственности;

20 – повышение квалификации персонала;

26 – проведение вертикального слияния;

27 – проведение операций купли-продажи бренда.

Цели (нижний уровень):

7 – выход на международный рынок;

10 – изменение организационно-правовой формы;

21 – повышение эффективности управления затратами;

30 – публикация финансовой отчетности;

36 – смена финансового директора (промежуточная).

Обращают на себя внимание следующие структурные особенности диаграммы связей на рисунке 4.1:

а) **простота**: мало вершин (только 12 из общего числа 40) и мало связей;

б) **однонаправленность** связей (нет контуров);

в) наличие **двух основных уровней** – источники (вершины первого ряда) и цели (вершины второго ряда; «36 – смена финансового директора» можно считать просто промежуточным этапом, необходимым для цели «7 – выход на международный рынок»);

г) **«ядерность» структуры** – все 7 «источников» работают на цель 21; из них 3 работают еще и на цель 10 (т.е. на 2 цели); из них два работают еще и на цель 7 (т.е. на 3 цели); из них один работает еще и на цель 30 (т.е. на все 4 цели). Другими словами, источники разделяются на группы по числу связанных с ними целей, причем эти группы вложены друг в друга.

4.1.5 Содержательный анализ графа значимых связей между факторами по массиву документов

С содержательной точки зрения[4], граф с большой точностью отражает процессы кризисного и пост-кризисного развития бизнеса в России – уменьшение издержек (21, 36), изменение организационно-правовой формы (10), повышение прозрачности (30, 36), выход на мировые рынки (7) – именно таковы цели передового бизнеса, обеспечивающие не только его выживание и развитие, но и высокое качество в будущем. Основными факторами этого процесса являются: проведение операций купли-продажи брендов, приводящих к развитию сетевых структур (27), автоматизация производства (1) и повышение квалификации персонала, часто за счет массовых увольнений и отбора кандидатов, более отвечающих задачам бизнеса (20), а также передача государственных активов в частные руки (12).

Вместе с тем, в графе не отражены некоторые другие наметившиеся тенденции. Отсутствует, например, формирование различных партнерств и альянсов, прежде всего из-за отсутствия этого понятия в исходном множестве 40 факторов. Кроме того, можно утверждать, что процессы, отраженные в 28 факторах, не попавших в граф, действительно не столь занимали бизнесменов и менеджеров в данный пери-

[4] Этот и последующие комментарии сделаны д.э.н Н.В. Высоцкой.

од. Например, действительно затормозилось введение опционных программ для топ-менеджеров (3), реализация программ IPO (16), проведение LBO (25) и т. п.

Использование данной методики (формирование мультифасетной классификации и графа связей между классами для множества документов) предоставляет возможность постановки и решения таких задач по сравнению понятийных структур, как:

– сравнение структуры системы факторов российского бизнеса со структурой подобной системы факторов для международного бизнеса;
– сравнение структуры факторов в российском практическом бизнесе со структурой системы факторов, используемых в практике государственного управления;
– сравнение структуры факторов регионального и национального бизнесов.

Результаты такого анализа могут помочь не только в выявлении расхождений и общего в этих структурах, но и обнаружить такие понятийные связи в реальных процессах, которые напрямую можно использовать для корректировки и формирования стратегий бизнес-структур.

4.2 Иерархическая концептуальная классификация документов

В данном подразделе отчета представлены результаты работы в рамках выполнения задачи формирования иерархической классификации естественно-языковых документов на основе заданных типов экономических факторов, присутствующих в документах.

Для построения иерархической классификации использовался метод классификационного решающего дерева, согласно которому каждое разделение осуществляется на основе одного из факторов, а не более общего признака. На входе метод получает таблицу «публикация-фактор», полученную одним из нескольких способов на предыдущем этапе работы. Построение такой таблицы осуществляется с помощью технологии аннотированных суффиксных деревьев (АСД). Кроме того, был рассмотрен метод «мешка слов», позволяющий построить таблицу «публикация-фактор» не используя АСД (сам метод подробно описан в подразделе 4.1). Ниже приведены результаты построения иерархической классификации в соответствии с методом формирования таблицы, проведен сравнительный анализ результатов и методов.

4.2.1 Иерархическая классификация

Иерархическая классификация строится по таблице «публикация-фактор» по методике решающих деревьев и является формой, так называемого монотетического кластер-анализа, популярного на заре развития дисциплины. Наш метод основан на так называемом «линейном погружении» данных в линейные подпространства, соответствующие корневым бинарным деревьям, и может рассматриваться как дивизимный метод кластер-анализа, в определенной степени аналогичный методу главных компонент. При этом роль квадрата максимального сингулярного значения играет так называемое расстояние Уорда между двумя частями, на которые разбивается каждый класс, начиная со всего множества анализируемых публикаций. Это расстояние определяется как произведение двух сомножителей, один из которых – квадрат Евклидова расстояния между центрами отделяемых частей, а второй – произведение численностей частей, деленное на их сумму. Данный критерий не зависит от выбора точки отсчета. Евклидово расстояние зависит от выбора масштабов, но в данном случае масштаб оценки всех факторов один и тот же, так что никакой стандартизации этих данных не предполагается.

4.2.2 Реализация метода

Программа, реализующая построение иерархической классификации, получает на вход таблицу «публикация-фактор» и выдает в качестве результатов информацию о построенной классификации. Для каждого класса эта информация включает в себя

– номер класса и номер соответствующего листа построенного дерева классификации;
– содержание класса, представляющее собой перечисление индексов URL публикаций;

– вклад рассматриваемого класса в процентном отношении к начальному разбросу данных.

Помимо информации о каждом классе, приводятся также общие данные о построенной классификации: общее число узлов дерева, количество листьев (классов), глубина построенного дерева (число уровней), а также вклад найденных классов в исходный разброс данных (в процентах), который является показателем качества полученной классификации.

Ниже на рисунке 4.2 представлен фрагмент (три верхних уровня) примерного дерева классификации.

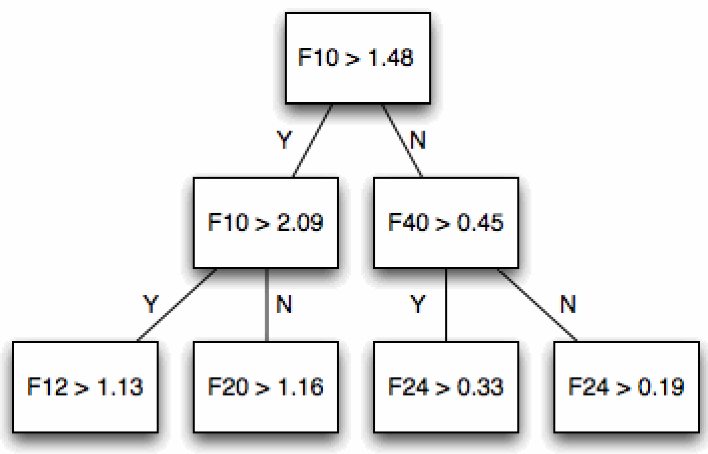


Рисунок 4.2 – Фрагмент дерева классификации (первые три уровня)

Решающие правила.

По своей дихотомической структуре, метод может на разных ступенях использовать различные значения одного и того же признака, что многократно происходило в данном расчете и можно увидеть на фрагменте дерева классификации на рисунке 4.2. В отчете приведены только финальные классификации, у которых эта множественность редуцирована за счет естественной упорядоченности чисел, для чего была написана отдельная функция. Например, если класс выделен путем четырех отделений по одному и тому же признаку, допустим «больше, чем 5; больше, чем 8; меньше, чем 30; меньше, чем 10 », то в финальной классификации останется только интервал «больше 8, но меньше 10».

4.2.3 Результаты расчетов

Как отмечалось ранее, результаты будут приведены в соответствии с методами построения таблицы «публикация-фактор». Эти методы могут быть структурированы следующим образом:

– метод АСД на данных без предобработки;

a) по полной информации;

b) по контрастной информации;

c) с использованием квантилей;

– метод АСД на предобработанных данных;

– метод «мешок слов» на предобработанных данных.

4.2.3.1 Метод АСД на данных без предобработки

Проведём расчеты как по полной таблице (по 931 публикации), так и по ее части, использующей только «контрастные» публикации, в которых оценка хотя бы одного фактора равна, по меньшей мере, 2. Таких публикаций оказалось порядка 63 %, точнее 587 штук.

a. По полной информации

Для расчетов было предоставлено пять вариантов полной таблицы в соответствии со способами формирования суффиксного дерева (см. отчет предыдущего подраздела).

Из пяти построенных классификаций наибольшим вкладом листьев в исходный разброс данных (66.7%) обладает классификация, построенная по таблице при следующих ограничениях: глубина дерева – 12, фрагменты представлены 3 словами.

Приведем общие характеристики этой классификации:

– общее число узлов дерева: 51;

– число листьев (классов): 26;

– число уровней (глубина дерева): 7;

– суммарный вклад листьев в исходный разброс данных: 66.7%.

b. По контрастной информации

Как было отмечено ранее, в таблицу с контрастной информацией были включены только те публикации, в которых оценка хотя бы одного фактора больше порогового значения. Таким образом, сюда вошло 587 статей. В результате была получена классификация со следующими параметрами:

– общее число узлов дерева: 59;

– число листьев (классов): 30;

– число уровней (глубина дерева): 10;

– суммарный вклад листьев в исходный разброс данных: 64%.

Хотя общие данные не сильно отличаются от приведенных результатов по таблице с полной информацией, предполагается, что в рассматриваемой классификации по контрастной информации структура классов более четкая. В обоих случаях (и по полной, и по контрастной информации) критерии остановки метода иерархической классификации были следующие: останавливаем процесс разделения очередного узла дерева, если:

– число его элементов меньше порогового значения, равного 30;

– разброс данных в узле меньше 5% от исходного разброса данных.

Следует отметить, что из общего числа 40 факторов для классификации использовано не более 10 факторов:

10 – изменение организационно правовой формы;

12 – изменение уровня концентрации собственности;

21 – повышение эффективности управления затратами;

35 – смена генерального директора;

40 – участие в судебных разбирательствах;

24 – присвоение кредитного рейтинга;

7 – выход на международный рынок;

30 – публикация финансовой отчетности;

34 – реструктуризация кредита;

18 – первичное размещение на зарубежной бирже;

По-видимому, эти факторы наиболее информативны на данном уровне грануляции. При этом последний признак использовался только в контрастной классификации. Это говорит об определенной устойчивости результатов.

Если понизить порог на разброс данных в листьях с 5% до 3% от исходного разброса данных, получается более подробная классификация. В случае классификации по полной информации дерево углубилось на один уровень, общее число узлов возросло до 75, число листьев (классов) – до 38; суммарный вклад листьев упал до 62.6%; к использованным при классификации признакам добавились:
18 – первичное размещение на зарубежной бирже;
16 – объявление ценового диапазона IPO.

В контрастной классификации тоже добавился еще один уровень классификации, число узлов увеличилось до 69, число листьев (классов) – до 35, вклад листьев в разброс данных уменьшился до 62.4%. К использованным признакам добавились:
1 – ввод автоматизированного производства;
32 – расширение модельного ряда продукции.

c. С использованием квантилей

Основная идея этого метода заключается в избавлении от шума в данных. Согласно этому методу, в первоначальной таблице обнуляются значения признаков, не превышающие порогового значения.

В Таблице 4.1 ниже приведена зависимость основных показателей построенной классификации от значений квантиля.

На уровне порогового значения разброса 0.05:

Таблица 4.1 – Зависимость основных показателей классификации от значений квантиля

	Q_0.0	Q_0.1	Q_0.2	Q_0.3	Q_0.4	Q_0.5	Q_0.6	Q_0.7	Q_0.8	Q_0.9
Number of nodes	49	49	59	51	51	45	45	49	55	49
Number of levels	8	8	10	8	8	6	7	8	12	15
Number of leaves	25	25	30	26	26	23	23	25	28	25
Contribution	66.706	67.771	67.03	69.167	68.811	**69.937**	67.184	64.296	60.477	53.247

Наибольшее значение общего вклада соответствует значению квантиля, равному 0.5. Стоит отметить, что это – наибольшее значение общего вклада полученных классов, полученное в трех сериях экспериментов. Кроме того, при таком значении квантиля число уровней (глубина дерева) и листьев (классов) принимает наименьшее значение. Ниже на рисунке 4.3 можно увидеть зависимость числа уровней и общего вклада классов от значения квантиля.

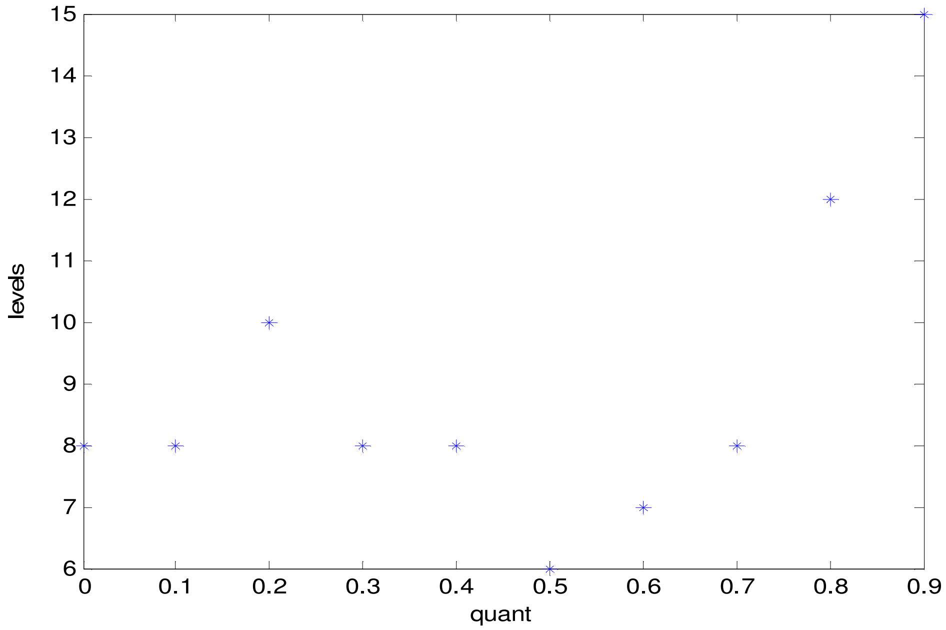


Рисунок 4.3 – Зависимость числа уровней и общего вклада классов от значения квантиля

На рисунке 4.4 приведена зависимость общего вклада классов от значения квантиля.

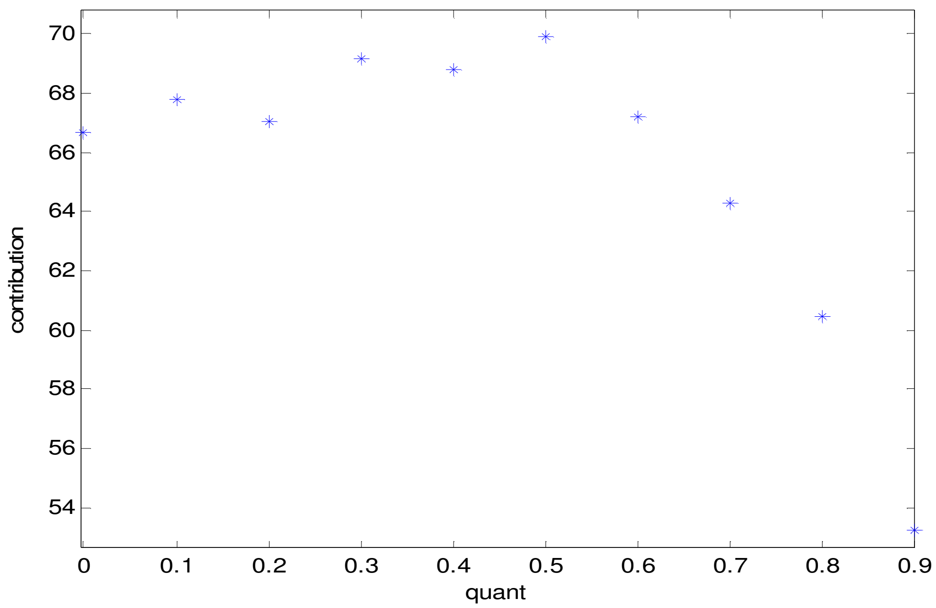


Рисунок 4.4 – Зависимость общего вклада классов от значения квантиля

Из последнего графика на рисунке 4.4 видно, что значение общего вклада найденных классов начинает убывать после значения квантиля 0.5. Это можно объяснить тем, что при значениях квантиля, больших 0.5, удаляется существенный объем данных и классификация становится менее объясненной.

Состав полученных классов не сильно отличается от эксперимента без введения порога. Факторы же, по которым проходило деление, совпадают полностью.

В целом, стоит отметить, что классификации, построенные по данным с пороговым значением от 0.1 до 0.5 по основным характеристикам немного превосходят классификации, построенные без удаления шума, что говорит о целесообразности введения такого порога.

4.2.3.2 Метод АСД для обработанных данных

По предобработанным данным (предобработка описывается в предыдущем подразделе) были построены классификации со следующими характеристиками (Таблица 4.2).

Таблица 4.2 – Зависимость основных показателей классификации от значений квантиля

	Q_0.0	Q_0.1	Q_0.2	Q_0.3	Q_0.4	Q_0.5	Q_0.6	Q_0.7	Q_0.8	Q_0.9
Number of nodes	45	51	47	47	51	45	49	47	55	63
Number of levels	9	9	8	8	8	10	8	9	11	22
Number of leaves	23	26	24	24	26	23	25	24	28	32
Contribution	67.132	65.452	67.252	67.505	67.776	67.823	66.989	67.974	64.941	53.971

Общие характеристики не сильно отличаются от полученных в предыдущем эксперименте, но максимальное значение общего вклада найденных классов немного меньше, хотя достигается также при значении квантиля 0.5.

Стоит отметить, что факторы, использованные при построении дерева, отличаются:

34 – реструктуризация кредита;

1 – ввод автоматизированного производства;

38 – технический дефолт;

30 – публикации финансовой отчетности;

26 – проведение вертикального слияния;

12 – изменение уровня концентрации собственности;

9 – изменение команды менеджмента;

35 – смена генерального директора;

24 – присвоение кредитного рейтинга.

Таким образом, совпали 4 признака из девяти: 30, 12, 35, 24.

Тем не менее, рассматриваемый метод имеет значительное преимущество в скорости ввиду предобработки данных.

4.2.3.3 Метод «мешок слов» для обработанных данных

Результаты, полученные по технологии «мешок слов», описанной в предыдущем разделе отчета, оказались не самыми удачными: как можно видеть в приведенной Таблице 4.3 – значение общего вклада даже не превышает 50.

Таблица 4.3 – Зависимость основных показателей классификации от значений квантиля

	Q_0.1	Q_0.2	Q_0.3	Q_0.4	Q_0.5	Q_0.6	Q_0.7	Q_0.8	Q_0.9
Number of nodes	47	35	39	37	43	39	43	43	37
Number of levels	9	10	9	10	9	9	10	14	14
Number of leaves	24	18	20	19	22	20	22	22	19
Contribution	43.044	42.498	46.055	38.526	42.224	41.511	39.196	38.588	24.728

Из факторов, использованных при построении дерева, с предыдущими совпали только 30 и 24.

4.3 Некоторые выводы

В ходе выполнения работы были использованы несколько способов построения таблицы «публикация-фактор»: с помощью метода аннотированного суффиксного дерева, примененного к двум совокупностям входных данных (полному списку слов и отфильтрованному) и с помощью альтернативного метода «мешок слов». В результате были получены профили публикаций трех видов, вместе образующие три таблицы «публикация-фактор». По одной из таблиц, признанной наиболее точной в ходе дальнейшей работы (см. следующий пункт) была построена мультифасетная классификация.

В ходе дальнейшей работы была проведена последующая обработка таблиц «публикация-фактор», косвенным образом позволяющая оценить их качество. На основе этих оценок, можно сделать вывод, что результаты применения метода АСД к различным совокупностям слов не сильно различаются. Однако, метод АСД примененный к отфильтрованным данным работает значительно быстрее, что делает его более привлекательным и целесообразным для дальнейшего использования. Таким образом, не сильно проигрывая в качестве классификации, мы сокращаем время и объем перебора.

Введение порогов по квантилям представляется целесообразным, что также было подтверждено в ходе дальнейшей экспериментальной работы. Используя разумные пороги, мы избавляемся от шума в данных и получаем лучшие показатели качества.

Следует отметить, что аннотированное суффиксное дерево, в нашей интерпретации, не обязательно наиболее удачная структура. Например, Фактор 4 в мультифасетной классификации оказался пустым, по-видимому, потому, что он сформулирован как «Выплата купонов» тогда как в публикациях используется «Выплата по купонам» – использование этого дало бы двойной вес фактору, и его класс бы не оказался пустым. Вероятно, это преодолевается, если исключить короткие слова из рассмотрения на этапе построения АСД.

В качестве альтернативы методу АСД был использован метод «мешок слов». Неудовлетворительные результаты этого метода показывают, что данный метод не подходит для решения подобных задач.

Совершенствование представленного метода видится на путях:

– формирования обобщенных факторов;

– уточнения использования АСД для лучшего отражения факторов;

– автоматизация выбора порогов.

4.4 Построение таксономии дисциплин «Математика», «Информатика» и «Прикладная математика» на основе классификации специальностей ВАК РФ

Для решения проблемы оптимального обобщения и интерпретации четких и нечетких кластеров в иерархической структуре онтологии была разработана вычислительная схема и программа для метода обобщения нечетких кластеров в иерархической структуре понятий путем оптимального «лифтинга» к наиболее общим вершинам дерева таксономии. Программа была применена к кластерам учебных программ, полученным с применением разработанного обеспечения. К сожалению, результаты оказались далеки от ожидаемых – кластеры «не поднялись» высоко, что в определенной степени связано с их фрагментарностью (студентов учат «всему понемногу»), однако в значительно большей степени с фрагментарностью и несовершенством самой таксономии математики, поддерживаемой Реферативным журналом ВИНИТИ «Математика». Например, в ней отсутствуют такие базовые категории как «Дискретная математика» и множество других; она крайне несбалансированна, достигая глубины 7 в отдельных областях алгебраической топологии и едва лишь покрывая три уровня в более современных областях информатики; вызывает нарекания и система кодировки, имеющая повторы, с одной стороны, и пробелы, с другой стороны.

В связи с этим было принято решение воспользоваться системой паспортов специальностей Высшей Аттестационной Комиссии России для разработки более современной и сбалансированной таксономии математики, информатики и прикладной математики. В Приложении А приводится разработанная на этой основе паспортов специальностей ВАК РФ (2011) таксономия дисциплин «Математика», «Информатика» и «Прикладная математика».

Полученные результаты опубликованы в работах [74], [75], [76], [77], [78], [79], [80]:

Chernyak E., Chugunova O., Askarova J., Nascimento S., Mirkin B. Abstracting concepts from text documents by using an ontology // Proc. of Workshop CDUD'11 – Concept Discovery in Unstructured Data, June 2011, Moscow, Russia. CEUR-Workshop series, V.757, p.21-30.

Mirkin B., Nascimento S., Fenner T., Felizardo R. How to Visualize a Crisp or Fuzzy Topic Set over a Taxonomy// Pattern Recognition and Machine Intelligence, Springer, Series: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6744, p.3-12.

Mirkin B., Kramarenko A. Approximate bicluster and tricluster boxes in the analysis of binary data / Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing, Series: Lecture Notes in Computer Science, Springer, Vol. 6743, p.249-257.

Mirkin B., Nascimento S. Developing Additive Spectral Approach to Fuzzy Clustering // Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing, Series: Lecture Notes in Computer Science, Springer, Vol. 6743, p.274-278.

Mirkin B.G. Core Concepts in Data Analysis: Summarization, Correlation, Visualization. – London, Springer, 2011, 388 p.

Mirkin B.G. Choosing the number of clusters // WIREs Data Mining and Knowledge Discovery, 2011. – 3. – p.252-260.

Миркин Б.Г. Методы кластер-анализа для поддержки принятия решений: обзор (“Methods of cluster analysis for decision making support: a review”)// Препринт WP7/2011/03. – М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2011. – 88 с.

5 Применение нечеткостных и неточностных методов к нахождению информативных и устойчивых представлений и описаний недетерминистских систем

В проекте рассматривается два подхода к нахождению информативных и устойчивых представлений и описаний недетерминистских систем. Первый подход основан на нечеткой кластеризации. Второй – на применение монотонной меры для агрегирования признаков системы. Оба подхода рассматриваются применительно к задаче нахождения минимального полигонального представления плоской оцифрованной (дискретной) кривой, хотя может быть применим и к другим недетерминистским системам с двухуровневой моделью описания неопределенности (например, неопределенность выбора системы признаков – неопределенность значений признаков).

5.1 Нахождение минимального полигонального представления кривой методом нечеткой кластеризации

Для решения задач анализа и распознавания изображений объектов, как правило, выделяют на этом изображении некоторое множество его особенностей. Различают низкоуровневые и высокоуровневые особенности изображений. Под низкоуровневыми обычно понимают такие особенности [81], которые могут быть выделены на изображении без использования информации о форме объекта или, другими словами, о пространственном расположении отдельных частей объекта. Напротив, для выделения высокоуровневых признаков используется информация о пространственном расположении как объекта, так и отдельных его частей. Можно сказать, что низкоуровневые особенности являются в некотором смысле локальными признаками объекта, а высокоуровневые – глобальными.

Для получения компактных представлений объектов изображения осуществляется агрегирование низкоуровневых признаков изображения. В результате получаются высокоуровневые представления и описания изображений объектов, в частности, кривых. Необходимость в компактном представлении кривых возникает при сжатии изображений, векторизации изображений объектов, в компьютерной графике и др. В общем случае оцифрованная точечная кривая Γ зависит от множества параметров, число которых может быть равно количеству точек кривой. Тогда задача представления кривой состоит в нахождении кривой Γ', зависящей от меньшего числа параметров, которая сохраняла бы основную информацию о форме кривой Γ. Множество методов решения этой задачи можно условно разбить на две группы – группу аппроксимативных методов и группу интерполяционных методов.

Методы первой группы основаны на замене оцифрованной кривой Γ такой кривой из некоторого фиксированного класса, которая удовлетворяла бы определенным условиям «близости». Наиболее популярными аппроксимативными способами представления кривой являются методы, использующие многочлены Безье и B-сплайны [82], [83]. Применение этих методов требует предварительного определения узлов сплайнов или точек-ориентиров, а эта задача практически равносильна общей постановке задачи представления кривой.

Методы второй группы предполагает выбор некоторого множества точек на кривой Γ и замену каждого участка кривой между двумя соседними точками другой кривой из фиксированного класса, исходя из определенных условий оптимальности. В качестве класса интерполяционных кривых чаще всего рассматриваются отрезки прямых, дуги окружностей [84], алгебраические кривые небольшого порядка. Кусочно-линейная интерполяция в литературе называется полигональным представлением кривой.

Таким образом, задача получения полигонального представления кривой (в том числе замкнутой кривой – контура) состоит в построении ломаной (многоугольника в случае полигональной аппроксимации замкнутого контура) с вершинами на кривой, которая сохраняла бы основную информацию о форме кривой.

Существуют два основных подхода решения этой задачи: эвристический и оптимизационный. К алгоритмам первого подхода относят алгоритмы, основанные на выделении доминантных точек, алгоритмы, основанные на применении процедур слияния и разбиения сторон многоугольника (например, методы, использующие «подбор концевых точек» – алгоритмы Douglas-Peucker и др.), генетические алгоритмы [85], алгоритмы многократного сглаживания [86], алгоритмы, использующие нечеткую логику [87] и др. Эти алгоритмы, как правило, являются быстрыми, но не оптимальными.

Во втором подходе находится такая аппроксимирующая ломаная, которая удовлетворяла бы определенному условию оптимальности. В качестве критериев оптимальности рассматриваются, например, следующие:

а) многоугольник с фиксированным числом вершин должен иметь наименьший периметр [88];

б) максимальное расстояние от точек кривой до сторон многоугольника должно быть минимальным [89], [90], [91];

в) число сторон многоугольника вместе с погрешностью аппроксимации должно быть минимальным [92], [93], [94], [95];

г) площадь симметрической разности между множеством, ограниченным замкнутой кривой и множеством, ограниченным многоугольником, должна быть минимальной [96], [97];

д) погрешность аппроксимации многоугольником с фиксированной длиной стороны должна быть минимальной [98].

Таким образом, алгоритмы второго подхода являются алгоритмами нелинейной оптимизации с ограничениями. Заметим, что большинство из указанных выше алгоритмов являются субоптимальными. Как правило, для улучшения сходимости и уменьшения числа итераций оптимизационных алгоритмов предварительно строится «хорошее» полигональное приближение к оптимальному решению путем определенного выбора точек высокой кривизны. После чего «запускается» тот или иной метод нелинейного программирования. Следует отметить, что лучшие из оптимизационных алгоритмов при нахождении оптимальных полигональных представлений замкнутых оцифрованных кривых, содержащих n точек, имеют вычислительную сложность порядка $O(n^3)$ [99].

Практически все подходы к нахождению компактного представления кривой предполагают предварительное определение так называемого базового множества точек кривой и последующую его оптимизацию в соответствии с выбранным критерием. В качестве базового множества, как правило, выбирается множество точек высокой кривизны.

В данном подразделе рассмотрим подход к нахождению полигонального представления кривой с помощью методов нечеткой кластеризации. Основная идея такого подхода основана на том, что количественные низкоуровневые локальные особенности кривой в данной точке можно рассматривать как степень принадлежности этой точки полигональному представлению. Саму кривую можно считать нечетким множеством. Тогда может быть поставлена задача нахождения минимального представления нечеткого множества как решение задачи нечеткой кластеризации.

5.1.1 Постановка задачи

Будем рассматривать плоскую дискретную кривую $\Gamma = \left(\mathbf{g}_k\right)_{k=0}^{n-1}$, $\mathbf{g}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j}$. В первичных контурах, получаемых при обработке оцифрованных изображений, точки $\mathbf{g}_k \in \mathbb{Z}^2$, $k = 0,...,n-1$, и удовлетворяют условиям связности. Множество точек кривой Γ будем считать упорядоченным. Предположим, что мы хотим выделить такое подмножество $B = \left\{\mathbf{g}_{i_1},...,\mathbf{g}_{i_l}\right\}$ точек кривой Γ, которое «хорошо» представляло бы Γ

.

Минимальное полигональное представление кривой должны состоять из тех точек $\mathbf{g}$ кривой Γ, которые обладают высокой информативностью относительно заданного множества признаков $\{\omega_i\}_{i\in I}$. Будем рассматривать только локальные признаки – низкоуровневые особенности кривой. Тогда их можно считать некоторыми функциями точек кривой: $\omega_i(\mathbf{g})$, $\mathbf{g} \in \Gamma$, $i \in I$. Предположим, что $\omega_i(\mathbf{g}) \in [0,1]$ для всех

$\mathbf{g}\in\Gamma$, $i\in I$ и $\omega_i(\mathbf{g})\le\omega_i(\mathbf{h})$, если точка $\mathbf{h}\in\Gamma$ является более информативной, чем точка $\mathbf{g}\in\Gamma$ относительно признака ω_i. Примерами таких признаковых функций могут быть нормированная оценка кривизны, нормированное изменение длины контура при удалении точки $\mathbf{g}$ и т.д. [100]. Функция $\omega_i(\mathbf{g})$ характеризует степень принадлежности точки $\mathbf{g}$ множеству информативных точек кривой Γ относительно $i-$го признака. Поэтому множество информативных точек кривой Γ относительно $i-$го признака можно рассматривать как нечеткое множество $\{(\mathbf{g},\mu_\Gamma(\mathbf{g})),\mathbf{g}\in\Gamma\}$ с функцией принадлежности $\mu_\Gamma(\mathbf{g})=\omega_i(\mathbf{g})$. Если рассматривать информативность точек кривой Γ по множеству признаков $\{\omega_i\}_{i\in I}$, то Γ можно считать нечетким множеством с функцией принадлежности $\mu_\Gamma(\mathbf{g})=T\left(\omega_i(\mathbf{g})\right)$, где $T\left(\cdot\right)$ – t-норма на $[0,1]^I$ [101]. Например, $T\left(\omega_i\right)=\min\limits_i\omega_i$ или $T\left(\omega_i\right)=\prod_{i\in I}\omega_i$. В общем случае в качестве функции принадлежности можно использовать некоторую неотрицательную функцию от признаковой функции: $\mu_\Gamma(\mathbf{g})=f(\omega(\mathbf{g}))$. В частности, если $\omega(\mathbf{g})$ – оценка кривизны дискретной кривой Γ, то будем считать, что $f(\omega(\mathbf{g}))=\omega(\mathbf{g})\left|\Gamma\right|$.

Тогда можно поставить задачу о нахождении такого минимального нечеткого подмножества В множества Γ, чтобы множество $\left\{\omega(\mathbf{g})\right\}_{\mathbf{g}\in\mathrm{B}}$ наилучшим бы образом представляло множество $\left\{\omega(\mathbf{g})\right\}_{\mathbf{g}\in\Gamma}$. Уточним постановку задачи. Для некоторого фиксированного значения $\alpha\in\left[0,1\right]$ рассмотрим $\alpha-$срез нечеткого множества Γ – множество $\mathrm{B}_\alpha=\left\{\mathbf{g}\in\Gamma\colon\omega(\mathbf{g})\ge\alpha\right\}$. Множество B_α является некоторым представлением контура Γ. Необходимо найти такое значение параметра $\alpha\in\left[0,1\right]$, чтобы представление B_α было, с одной стороны, минимальным, а с другой – “хорошим”. Вычисление минимального представления нечеткого множества является задачей нечеткой кластеризации. Основные пути решения задач нечеткой кластеризации были рассмотрены в ряде работ E.H. Ruspini [102], [103], J.C. Dunn [104], J.C. Bezdek [105] и др. Обзор методов нечеткой кластеризации можно найти в работе [106], а современное состояние проблемы в [107]. Один из подходов к нечеткой кластеризации состоит в определении на множестве всех возможных представлений некоторых функционалов, которые затем оптимизируются для получения желаемой кластеризации.

5.1.2 Использование отношения похожести

Будем рассматривать представление B_α контура Γ, $\alpha \in [0,1]$ с функцией принадлежности $\mu_\alpha^\omega(\mathbf{g}) = \begin{cases} \omega(\mathbf{g})\left|\mathrm{B}_\alpha\right|, \mathbf{g} \in \mathrm{B}_\alpha, \\ 0, \qquad \mathbf{g} \notin \mathrm{B}_\alpha. \end{cases}$ Для построения идентифицирующего функционала введем в рассмотрение так называемое нечеткое отношение похожести $r(\mathbf{g},\mathbf{h})$ на Γ, то есть рефлексивное, симметричное нечеткое отношение, удовлетворяющее неравенству $\left|r(\mathbf{g},\mathbf{h}) - r(\mathbf{g},\mathbf{e})\right| \le 1 - r(\mathbf{h},\mathbf{e})$ для всех $\mathbf{e},\mathbf{g},\mathbf{h} \in \Gamma$. Последнее неравенство равносильно условию сильной Δ-транзитивности strongly Δ-transitive relation (относительно t-нормы $a\Delta b = \max\{a+b-1,0\}$) [108]. В [108] было показано, что отношение сильной Δ-похожести (т.е. рефлексивное, симметричное, сильно Δ-транзитивное отношение) равносильно отношению Δ-похожести. Несколько более слабым является отношение согласованной близости (coherent nearness) [109]. Следуя E.H. Ruspini, назовем множество B_α нечетким $r-$представлением множества Γ, если

$$\sum_{\mathbf{h}\in\Gamma} r(\mathbf{g},\mathbf{h})\mu_\alpha^\omega(\mathbf{h}) \ge \mu_\Gamma(\mathbf{g}) \text{ для всех } \mathbf{g}\in\Gamma. \qquad (5.1)$$

Эффективность такой кластеризации зависит от используемого нечеткого отношения похожести $r(\mathbf{g},\mathbf{h})$, а выбор этого отношения определяется признаками, по которым осуществляется классификация. В частности, в качестве отношения похожести можно использовать функцию $r(\mathbf{g},\mathbf{h}) = 1 - n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \rho_i(\omega_i(\mathbf{g}),\omega_i(\mathbf{h}))$, где $\omega_i(\mathbf{g})$ – функция информативности i-го признака точки $\mathbf{g}$, ρ_i – такая метрика в R^1, что $\rho_i(a,b) \le 1$ для всех $a,b \in [0,1]$. Ниже будем рассматривать отношение похожести $r(\mathbf{g},\mathbf{h}) = 1 - \left|\omega(\mathbf{g}) - \omega(\mathbf{h})\right|$. Такое отношение похожести использовалось, в частности, для нечеткой кластеризации в работе [110]. Тогда (5.1) примет вид

$$\left|\mathrm{B}_{\alpha}\right|\sum_{\mathbf{h}\in\mathrm{B}_{\alpha}}\left(1-\left|\omega(\mathbf{g})-\omega(\mathbf{h})\right|\right)\omega(\mathbf{h})\geq\omega(\mathbf{g})\left|\Gamma\right| \text{ для всех } \mathbf{g}\in\Gamma. \tag{5.2}$$

Нетрудно видеть, что если $\mathrm{B}_{\alpha}=\Gamma$, то (5.2) заведомо выполняется. Таким образом, задача состоит в максимальном уменьшении мощности множества B_{α} (при увеличении α) до тех пор, пока (5.2) не перестанет выполняться. Множество B_{α} минимальной мощности, для которого выполняется условие (5.2), будем называть минимальным $r-$представлением множества Γ и обозначать через $\underline{\mathrm{B}}_{\alpha}$. Для $\mathbf{g}\in\Gamma\setminus\mathrm{B}_{\alpha}$, учитывая, что $\omega(\mathbf{g})<\alpha$, из (5.2) получим

$$\sum_{\mathbf{h}\in\mathrm{B}_{\alpha}}(1-\omega(\mathbf{h}))\omega(\mathbf{h})\geq\left(\frac{|\Gamma|}{\left|\mathrm{B}_{\alpha}\right|}-\sum_{\mathbf{h}\in\mathrm{B}_{\alpha}}\omega(\mathbf{h})\right)\max_{\mathbf{g}\in\Gamma\setminus\mathrm{B}_{\alpha}}\omega(\mathbf{g}). \tag{5.3}$$

Таким образом, справедливо предложение.

Предложение 5.1. Если множество B_{α} является нечетким $r-$представлением множества Γ, то верно (5.3).

Обратное утверждение может быть, вообще говоря, неверным. Алгоритм нахождения минимального представления $\underline{\mathrm{B}}_{\alpha}$ будет состоять из двух шагов:

а) на первом шаге найдем множество $\mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}$ минимальной мощности, для которого выполняется условие (5.3);

б) на втором шаге дополним, если это необходимо множество $\mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}$ такими точками $\mathbf{h}\in\Gamma\setminus\mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}$, чтобы выполнялось (5.2).

Пусть $\widehat{\Gamma}=\{\mathbf{h}_i\}_{i=1}^{|\Gamma|}$ – множество точек контура Γ, упорядоченное по убыванию весов $\omega(\mathbf{h})$, $\mathbf{h}\in\Gamma$. Вычислим функции

$$Q(p):=\sum\nolimits_{i=1}^{p}(1-\omega(\mathbf{h}_i))\omega(\mathbf{h}_i)$$

и

$$R(p):=\left(\frac{|\Gamma|}{p}-\sum\nolimits_{i=1}^{p}\omega(\mathbf{h}_i)\right)\max_{p+1\leq j\leq|\Gamma|}\omega(\mathbf{g}_j)$$

для $p=1,2,...,|\Gamma|$. Тогда, согласно (5.3), минимальное p, для которого $Q(p)\ge R(p)$, будет определять границу разбиения множества $\widehat{\Gamma}$ на два класса $\mathrm{B}_\alpha^{(1)} := \left\{\mathbf{h}_i \in \widehat{\Gamma} : i=1,2,...,p\right\}$ и $\Gamma \setminus \mathrm{B}_\alpha^{(1)}$. На втором шаге найдем такую точку $\mathbf{h}\in \Gamma\setminus \mathrm{B}_\alpha^{(1)}$, для которой $\left(1-|\omega(\mathbf{g})-\omega(\mathbf{h})|\right)\omega(\mathbf{h})\to \max$ для всех $\mathbf{g}\in \Gamma\setminus\left(\mathrm{B}_\alpha^{(1)}\cup\{\mathbf{h}\}\right)$. Для множества $\mathrm{B}_\alpha^{(2)}=\mathrm{B}_\alpha^{(1)}\cup\{\mathbf{h}\}$ проверим выполнение условия (5.2). Если оно не выполняется, дополним множество $\mathrm{B}_\alpha^{(2)}$ новой точкой из $\Gamma\setminus \mathrm{B}_\alpha^{(2)}$ и т.д.

Возникает вопрос, получим ли мы с помощью предложенного алгоритма действительно минимальное нечеткое $r-$представление кривой Γ? Оказывается, что в некоторых случаях, уже после выполнения первого шага алгоритма мы получим такое представление.

Предложение 5.2. *Если после выполнения первого шага алгоритма мы получим такое представление* $\mathrm{B}=\mathrm{B}_\alpha^{(1)}$, *что*

$$\sum_{\mathbf{h}\in \mathrm{B}}(1-\omega(\mathbf{h}))^2 \le 1+|\mathrm{B}|-\tfrac{|\Gamma|}{|\mathrm{B}|+1} \tag{5.4}$$

и $|\Gamma|\max\limits_{\mathbf{g}\in\Gamma}\omega(\mathbf{g})\le \alpha^2|\mathrm{B}|^2$, *то* $\mathrm{B}_\alpha^{(1)}$ *– минимальное нечеткое* $r-$*представление дискретной кривой* Γ.

Доказательство. Сначала покажем, что представление $\mathrm{B}=\mathrm{B}_\alpha^{(1)}$, найденное на первом шаге алгоритма, является минимальным, удовлетворяющим неравенству (5.3). Для этого рассмотрим функцию множеств

$$\varphi(\mathrm{B})=\frac{\sum\limits_{\mathbf{h}\in \mathrm{B}}(1-\omega(\mathbf{h}))\omega(\mathbf{h})}{\dfrac{|\Gamma|}{|\mathrm{B}|}-\sum\limits_{\mathbf{h}\in \mathrm{B}}\omega(\mathbf{h})},$$

где $\mathrm{B} \subseteq \Gamma$ такое, что $\sum_{\mathbf{h}\in\mathrm{B}} \omega(\mathbf{h}) < \frac{|\Gamma|}{|\mathrm{B}|}$. Пусть $\varphi(\varnothing) = 0$. Покажем, что φ – монотонная функция множеств. Пусть $S_i = \sum_{\mathbf{h}\in\mathrm{B}} \omega^i(\mathbf{h})$, $\delta_i = \frac{|\Gamma|}{|\mathrm{B}| + i - 1}$, $i = 1,2$. Тогда $\varphi(\mathrm{B}) = \frac{S_1 - S_2}{\delta_1 - S_1}$. И для любого $\mathbf{g} \in \Gamma \setminus \mathrm{B}$, такого что $\omega(\mathbf{g}) + \sum_{\mathbf{h}\in\mathrm{B}} \omega(\mathbf{h}) < \frac{|\Gamma|}{|\mathrm{B}| + 1}$, имеем

$$\psi(\omega(\mathbf{g})) = \varphi(\mathrm{B} \cup \{\mathbf{g}\}) = \frac{S_1 - S_2 + \omega(\mathbf{g}) - \omega^2(\mathbf{g})}{\delta_2 - S_1 - \omega(\mathbf{g})}.$$

Тогда $\varphi(\mathrm{B} \cup \{\mathbf{g}\}) - \varphi(\mathrm{B}) = \frac{\omega(\mathbf{g}) - \omega^2(\mathbf{g})}{\delta_2 - S_1 - \omega(\mathbf{g})} + \frac{(S_1 - S_2)(\delta_1 - \delta_2 + \omega(\mathbf{g}))}{(\delta_2 - S_1 - \omega(\mathbf{g}))(\delta_2 - S_1)} \geq 0$, поскольку $S_1 \geq S_2$, $\delta_1 \geq \delta_2$. Таким образом, φ – монотонная функция множеств. Кроме того, функция $\psi(x)$ – монотонна на $[0,1]$. Действительно, $\psi'(x) = \frac{x^2 - 2x(\delta_2 - S_1) + \delta_2 - S_2}{(\delta_2 - S_1 - x)^2}$. Возможны два случая: если $\delta_2 - S_1 > 1$, то наименьшее значение числителя производной $\psi'(x)$ достигается при $x = 1$ и $\psi'(x) \geq 0$, если $\delta_2 \leq 1 + 2S_1 - S_2 \Leftrightarrow$ (4). Если же $0 \leq \delta_2 - S_1 \leq 1$, то наименьшее значение числителя производной $\psi'(x)$ достигается при $x = \delta_2 - S_1$ и $\psi'(x) \geq 0$, если $\delta_2 - S_2 - (\delta_2 - S_1)^2 \geq 0$. Последнее неравенство всегда верно, поскольку $\delta_2 - S_2 - (\delta_2 - S_1)^2 \geq \delta_2 - S_1 - (\delta_2 - S_1)^2 = (\delta_2 - S_1)\left(1 - (\delta_2 - S_1)^2\right) \geq 0$.

Таким образом, φ – монотонная функция множеств и $\varphi(\mathrm{B} \cup \{\mathbf{g}'\}) \geq \varphi(\mathrm{B} \cup \{\mathbf{g}''\})$, если $\omega(\mathbf{g}') \geq \omega(\mathbf{g}'')$. При формировании множества $\mathrm{B}_\alpha^{(1)}$ возможны два случая: 1) $\sum_{\mathbf{h}\in\mathrm{B}_\alpha^{(1)}} \omega(\mathbf{h}) < \frac{|\Gamma|}{|\mathrm{B}_\alpha^{(1)}|}$; 2) существует такая точка $\mathbf{g} \in \mathrm{B}_\alpha^{(1)}$, что $\frac{|\Gamma|}{|\mathrm{B}_\alpha^{(1)}|} - \omega(\mathbf{g}) < \sum_{\mathbf{h}\in\mathrm{B}_\alpha^{(1)}\setminus\{\mathbf{g}\}} \omega(\mathbf{h}) < \frac{|\Gamma|}{|\mathrm{B}_\alpha^{(1)}|}$. Так как множество $\mathrm{B}_\alpha^{(1)}$ в первом случае и множество $\mathrm{B}_\alpha^{(1)} \setminus \{\mathbf{g}\}$ во втором случае, формируется из точек $\mathbf{h} \in \Gamma$ с максимальным значением признака $\omega(\mathbf{h})$, то $\mathrm{B}_\alpha^{(1)}$ будет минимальным по мощности множеством, удовлетворяющим неравенству (5.3).

Для завершения доказательства предложения, достаточно показать, что при выполнении условия предложения, для множества $\mathrm{B}_\alpha^{(1)}$ будет выполняться неравенство (5.2). Если $\mathbf{g}\in\Gamma\setminus\mathrm{B}_\alpha^{(1)}$, то неравенство (5.2) равносильно неравенству (5.3) и, следовательно, будет верным. Пусть $\mathbf{g}\in\mathrm{B}_\alpha^{(1)}$. Тогда $\left|\omega(\mathbf{g})-\omega(\mathbf{h})\right|\le 1-\alpha$ для любого $\mathbf{h}\in\mathrm{B}_\alpha^{(1)}$. Поэтому

$$\sum_{\mathbf{h}\in\mathrm{B}_\alpha^{(1)}}\left(1-\left|\omega(\mathbf{g})-\omega(\mathbf{h})\right|\right)\omega(\mathbf{h})\ge\alpha\sum_{\mathbf{h}\in\mathrm{B}_\alpha^{(1)}}\omega(\mathbf{h})\ge\alpha^2\left|\mathrm{B}_\alpha^{(1)}\right|\ge\frac{|\Gamma|}{\left|\mathrm{B}_\alpha^{(1)}\right|}\max_{\mathbf{g}\in\Gamma}\omega(\mathbf{g})\ge\frac{|\Gamma|}{\left|\mathrm{B}_\alpha^{(1)}\right|}\omega(\mathbf{g})$$

и предложение доказано.

Если же на первом шаге алгоритма мы получим множество $\mathrm{B}_\alpha^{(1)}$, не удовлетворяющее условиям предложения, то необходимо будет выполнить второй шаг алгоритма, при этом, вообще говоря, мы можем получить множество B_α, близкое по мощности к минимальному.

Замечание. В качестве отношения похожести можно использовать также функцию $r_s(\mathbf{g},\mathbf{h})=1-\left|\omega(\mathbf{g})-\omega(\mathbf{h})\right|^s$, $s\in(0,1]$, которая, в силу справедливости неравенства $(a+b)^s\le a^s+b^s$ для $a,b\ge 0$, $0\le s\le 1$, удовлетворяет всем условиям отношения похожести. Так как $r_{s_1}\le r_{s_2}$ при $0<s_1\le s_2\le 1$, то очевидно, для минимального r_s-представления $\underline{\mathrm{B}}_\alpha(s)$ будет справедливо включение $\underline{\mathrm{B}}_\alpha(s_1)\supseteq\underline{\mathrm{B}}_\alpha(s_2)$, если $0<s_1\le s_2\le 1$.

5.1.3 Использование отношения различия

Кроме отношения похожести в задаче нечеткой кластеризации могут быть использованы и другие отношения. Например, желательно, чтобы точки минимального полигонального представления достаточно далеко располагались друг от друга на кривой Γ. Для учета этого требования можно ввести нечеткое отношение различия, т.е. симметричное, антирефлексивное нечеткое отношения $\tau(\mathbf{g},\mathbf{h})$, удовлетворяющее условию $\left|\tau(\mathbf{g},\mathbf{h})-\tau(\mathbf{g},\mathbf{e})\right|\le\tau(\mathbf{h},\mathbf{e})$ для всех $\mathbf{e},\mathbf{g},\mathbf{h}\in\Gamma$. Заметим, что приведенное здесь определение нечеткого отношения различия согласуется с используемым выше определением нечеткого отношения похожести. Пусть $f(\mathbf{g})$ – функция принадлежности точки $\mathbf{g}\in\Gamma$ множеству информативных точек. По аналогии, назовем множество $\mathrm{B}_\beta=\{\mathbf{g}\in\Gamma:\ \mu_\beta^f(\mathbf{g})\ge\beta\}$ с функцией принадлежности $\mu_\beta^f(\mathbf{g})$ нечетким $\tau-$ представлением множества Γ, если

$$\sum_{\mathbf{h}\in\Gamma}\left(1-\tau(\mathbf{g},\mathbf{h})\right)\left(\max\mu_\beta^f(\mathbf{h})-\mu_\beta^f(\mathbf{h})\right)\ge\max f(\mathbf{g})-f(\mathbf{g})\ \text{для всех}\ \mathbf{g}\in\Gamma. \quad (5.5)$$

Будем считать, что условие (5.5) выполняется, если $\mathrm{B}_\beta=\varnothing$ и не выполняется, если $\mathrm{B}_\beta=\Gamma$. Таким образом, задача состоит в максимальном увеличении мощности множества B_β (при уменьшении β) до тех пор, пока (5.5) не перестанет выполняться. Множество B_β максимальной мощности, для которого выполняется условие (5.5), будем называть максимальным $\tau-$представлением множества Γ и обозначать через $\overline{\mathrm{B}}_\beta$.

В качестве отношения различия можно использовать функцию $\tau(\mathbf{g},\mathbf{h})=l(\mathbf{g},\mathbf{h})$, численно равную наименьшей длине дуги кривой Γ, заключенной между точками $\mathbf{g},\mathbf{h}\in\Gamma$, нормированную длиной всей кривой Γ. В качестве функции принадлежности кривой $f(\mathbf{g})$ можно взять нормированную функцию информативности кривой в данной точке: $f(\mathbf{g})=\omega(\mathbf{g})|\Gamma|$, а в качестве функции принадлежности множеству B_β функцию $\mu_\beta^f(\mathbf{g})=\left|\Gamma\setminus\mathrm{B}_\beta\right|\begin{cases}1, & \mathbf{g}\notin\mathrm{B}_\beta\\ \omega(\mathbf{g}), & \mathbf{g}\notin\mathrm{B}_\beta\end{cases}$ Тогда (5.5) примет вид

$$\left|\Gamma\setminus\mathrm{B}_\beta\right|\sum_{\mathbf{h}\in\Gamma\setminus\mathrm{B}_\beta}\left(1-l(\mathbf{g},\mathbf{h})\right)\left(1-\varpi(\mathbf{h})\right)\ge|\Gamma|(1-\varpi(\mathbf{g}))\ \text{для всех}\ \mathbf{g}\in\Gamma. \quad (5.6)$$

Теперь из (5.2) и (5.6) следует новая постановка задачи о нахождении $(r,\tau)-$ представления кривой Γ: необходимо найти такое множество B, которое удовлетворяет системе неравенств

$$\sum_{\mathbf{h}\in\mathrm{B}}\left(1-\left|\omega(\mathbf{g})-\omega(\mathbf{h})\right|\right)\omega(\mathbf{h})\ge\frac{|\Gamma|}{|\mathrm{B}|}\omega(\mathbf{g}),\quad \sum_{\mathbf{h}\in\Gamma\setminus\mathrm{B}}\left(1-l(\mathbf{g},\mathbf{h})\right)\left(1-\omega(\mathbf{h})\right)\ge\frac{|\Gamma|}{|\Gamma\setminus\mathrm{B}|}\left(1-\omega(\mathbf{g})\right)$$

для всех $\mathbf{g} \in \Gamma$.

Возникает вопрос, в каком случае с помощью рассмотренного выше алгоритма, мы получим минимальное $(r,\tau)-$представления кривой Γ? Из предложения 5.2 вытекает следующее утверждение.

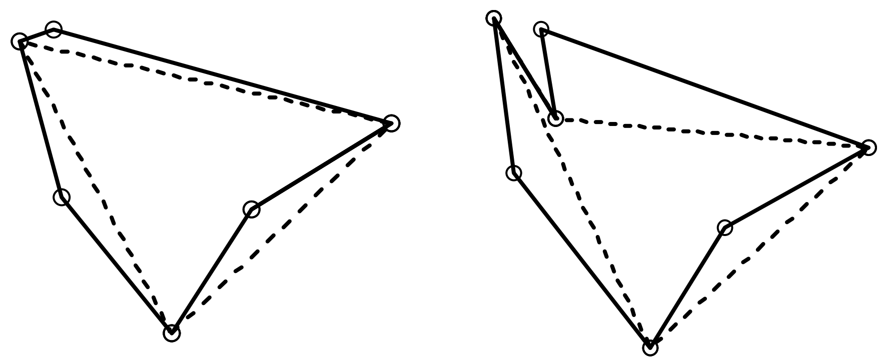
Предложение 5.3. *Если после выполнения первого шага алгоритма мы получим такое представление* $\mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}$, *что верно (5.4),* $|\Gamma|\max\limits_{\mathbf{g}\in\Gamma}\omega_l(\mathbf{g}) \le \alpha^2 \left|\mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}\right|^2$, $|\Gamma|\min\limits_{\mathbf{g}\in\Gamma}\omega_l(\mathbf{g}) \ge |\Gamma| - 0.5(1-\alpha)\left|\Gamma \setminus \mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}\right|^2$, *то* $\mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}$ *– минимальное нечеткое* $(r,\tau)-$*представление замкнутой дискретной кривой* Γ.

Доказательство. Действительно, то, что при выполнении условий предложения $\mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}$ является минимальное нечетким $r-$представлением, было доказано в предыдущем предложении. Покажем, что $\mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}$ будет и нечетким $\tau-$представлением. Так как для замкнутой кривой $\sum_{\mathbf{h}\in A} l(\mathbf{g},\mathbf{h}) \le 0.5|A|$ для любой точки $\mathbf{g}\in\Gamma$ и $A \in 2^{\Gamma}$, то

$$\sum_{\mathbf{h}\in\Gamma\setminus\mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}} \big(1-l(\mathbf{g},\mathbf{h})\big)\big(1-\omega_l(\mathbf{h})\big) \ge (1-\alpha) \sum_{\mathbf{h}\in\Gamma\setminus\mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}} \big(1-l(\mathbf{g},\mathbf{h})\big) \ge$$

$$0.5(1-\alpha)\left|\Gamma\setminus\mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}\right| \ge \frac{|\Gamma|}{\left|\Gamma\setminus\mathrm{B}_{\alpha}^{(1)}\right|}\left(1-\min_{\mathbf{g}\in\Gamma}\omega(\mathbf{g})\right)$$

и предложение доказано.



a) b)

Рисунок 5.1 – Исходный контур и минимальное полигональное представление, найденное методом нечеткой кластеризации

Результаты работы алгоритма получения минимального полигонального представления контура продемонстрированы на рисунке 5.1. На рисунке 5.1.а показано минимальное представление, найденное методом нечеткой кластеризации с использованием только отношения похожести или различия. На рисунке 5.1.б показано минимальное представление, найденное методом нечеткой кластеризации с совместным использованием отношений похожести и различия. В качестве признаковой функции $\omega(\mathbf{g})$ была использована нормированная оценка кривизны (см. [111]). Заметим, что качество работы алгоритма, разработанного на основе метода нечеткой кластеризации, значительно повышается, если осуществлять нечеткую кластеризацию по нескольким признакам.

5.1.4 Некоторые выводы

Таким образом, в этом разделе отчета подробно описан и исследован новый способ нахождения минимального полигонального представления плоской кривой методом нечеткой кластеризации. При этом сама процедура кластеризации осуществляется с помощью нечетких отношений похожести и различия. С помощью отношение похожести мы объединяем «похожие» элементы в один кластер, а с помощью отношения различия мы «непохожие» элементы относим к разным кластерам. В качестве кластеров в задаче получения полигонального представления плоских кривых рассматриваются точки принадлежащие (один кластер) и не принадлежащие (другой кластер) полигональному представлению. Вычислительные эксперименты показали работоспособность метода. Вместе с тем, качество кластеризации может существенно зависеть от конкретного выбора отношений похожести и различия. Кроме того, остается открытым вопрос о получении вычислительно эффективных процедур такой кластеризации и полного исследования предложенного в данном разделе алгоритма нечеткой кластеризации (т.е. исследования алгоритма в тех случаях, когда условия предложений 5.1-5.3 не выполняются).

5.2 Устойчивое выделение признаков с помощью мер информативности

При описании работы недетерминистской системы необходимо учитывать характер ее неопределенности. В задачах распознавания образов неопределенность может иметь как вероятностный характер, задаваемый некоторой аддитивной мерой, так и более «неточный» характер, который можно описать, например, с помощью монотонных неаддитивных мер. Одной из таких задач является задача выбора из множества признаков, информативность образа по которым оценивается, того минимального набора самих признаков или их комбинаций, который обладал бы достаточной интегральной информативностью при решении данной задачи распознавания (feature extraction). Для решения этой проблемы существуют такие традиционные подходы, как корреляционный анализ данных (метод главных компонент и др.), дискриминантный анализ [112].

В данном подразделе общую постановку задачи выделения множества наиболее информативных признаков конкретизируем следующим образом. Предположим, что образ X определяется упорядоченным множеством элементов $X=\{x_0,...,x_{n-1}\}$. Любое подмножество $A\in 2^X$ назовем *представлением* образа X. Требуется найти такое представление A, которое было бы с одной стороны минимальным, а с другой стороны – «близким» в некотором смысле к X. Элементы в X могут иметь разные приоритеты или, другими словами, обладать разной информативностью. Поэтому с каждым элементом $x\in X$ свяжем неотрицательное число – признак $\omega(x)$, который характеризует степень важности элемента x для представления образа X. Насколько «хорошим» представлением образа X является множество $A\in 2^X$ будем определять с помощью функции множеств $\mu(A)$. От функции множеств μ будем требовать, чтобы она удовлетворяла всем аксиомам монотонной меры: 1) $\mu(\varnothing)=0$, $\mu(X)=1$ (нормировка); 2) $\mu(A)\le\mu(B)$, если $A\subseteq B$, $A,B\in 2^X$ (монотонность). Кроме того, от меры μ будем требовать выполнения и некоторых дополнительных условий, связанных с конкретной задачей распознавания образов. Такие монотонные меры будем называть мерами информативности. В работе [100] меры информативности использовались для постановки и решения задачи нахождения минимального наиболее информативного полигонального представления кривой.

В некоторых задачах теории распознавания образов, в частности, в задачах обработки, анализа и распознавания изображений, случайный характер признаков изображений может быть обусловлен некоторыми шумовыми эффектами. Например, если образ – это дискретная кривая, выделенная на изображении, а признаками являются некоторые характеристики точек кривой (например, признак это оценка кривизны дискретной кривой в данной точке [111]), то случайный характер признаков (например, кривизны) будет обусловлен зашумлением изображения. В этом случае математическое ожидание $\mathbf{E}[\mathrm{M}(A)]$ будет характеризовать степень информативности представления $A \in 2^X$, а дисперсия $\boldsymbol{\sigma}^2[\mathrm{M}(A)]$ – степень его устойчивости к зашумлению образа. Тогда возникает задача нахождения наиболее устойчивого и информативного представления $A \in 2^X$ образа X. Сложность решения указанной задачи будет определяться степенью зависимости случайных признаков друг от друга. Если признаки являются независимыми случайными величинами, то стохастическая меры информативности M будет аддитивной мерой. В противном случае – неаддитивной мерой. В данном подразделе указанная задача будет рассмотрена и решена в случае вероятностной независимости случайных признаков.

5.2.1 Усредненные функции информативности образа

В общем случае признак может зависеть от всех или некоторых элементов того представления A, относительно которого он вычисляется, т.е. $\omega(x) = \omega(x, A)$. Например, пусть $X = \Gamma$ – дискретная плоская замкнутая кривая: $\Gamma = (\mathbf{g}_k)_{k=0}^{n-1}$, $\mathbf{g}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j}$, и $\omega(\mathbf{g}, A) = \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_+(A)\|$, где $\mathbf{g}_+(A)$ – точка, следующая за точкой $\mathbf{g}$ в упорядоченном представлении A или $\omega(\mathbf{g}, A) = k_\varepsilon[A](\mathbf{g})$ – некоторая оценка кривизны плоской дискретной кривой, вычисленная в ε –окрестности точки $\mathbf{g}$ [111].

Степень полноты представления $A \in 2^X$ при описании образа X относительно признака $\omega(x) = \omega(x, A)$ можно задать с помощью следующей функции множеств

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \omega(x, A) \Big/ \sum_{x \in X} \omega(x, X)\,, \quad A \in 2^X\,, \tag{5.7}$$

которую назовем *усредненной функцией информативности* образа X (относительно признака ω). Если для множества A значения $\omega(x, A)$ не определяются, то положим $\mu(A) = 0$ (в частности, $\mu(\varnothing) = 0$).

Пример 5.1. Пусть $X = \Gamma$ – дискретная плоская замкнутая кривая: $\Gamma = \left(\mathbf{g}_k\right)_{k=0}^{n-1}$, $\mathbf{g}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j}$ и $B = \left\{\mathbf{g}_{i_1}, \ldots, \mathbf{g}_{i_l}\right\} \subseteq \Gamma$. Введем в рассмотрение функции множеств $\mu_L(B) = L(B)/L(\Gamma)$ и $\mu_S(B) = S(B)/S(\Gamma)$, где $L(B)$ и $S(B)$ – периметр и площадь соответственно фигуры, ограниченной многоугольником с вершинами в точках упорядоченного множества B. Тогда μ_L и μ_S – усредненной функцией информативности кривой Γ, причем $\omega(\mathbf{g}, A) = \left\|\mathbf{g} - \mathbf{g}_+(A)\right\|$ для функции множеств μ_L и $\omega(\mathbf{g}, A) = \pm 0.5\left|\boldsymbol{\rho}_O(\mathbf{g}) \times \boldsymbol{\rho}_O(\mathbf{g}_+(A))\right|$ для функции множеств μ_S, где $\boldsymbol{\rho}_O(\mathbf{g})$ – радиус вектор точки $\mathbf{g} \in A$ относительно произвольной точки O (знак $+$ или $-$ выбирается в зависимости от ориентации тройки $\mathbf{g}, \mathbf{g}_+, \mathbf{k}$). Заметим, что μ_L является монотонной мерой, а если область, ограниченная многоугольником с вершинами в точках дискретной кривой Γ, является выпуклой, то и μ_S – монотонная мера.

Возникает вопрос, когда усредненная функция информативности будет монотонной мерой? Нетрудно показать справедливость следующего предложения.

Предложение 5.4. Усредненная функция информативности μ на 2^X вида (5.7) является монотонной мерой тогда и только тогда, когда для любого $A \in 2^X$ и $y \in X \setminus A$ справедливо условие

$$\sum_{x \in A} \left(\omega(x, A) - \omega(x, A \cup \{y\})\right) \le \omega(y, A \cup \{y\})\,. \tag{5.8}$$

Следствие 5.1. Если $\omega(x, A) = \omega(x, X)$ для всех $x \in A$ и $A \in 2^X$, то функция множеств μ вида (5.7) является аддитивной мерой на 2^X.

Пусть $A=\left\{x_{i_1},...,x_{i_s},x,x_{i_{s+1}},...,x_{i_l}\right\}\subseteq X$ – некоторое представление образа X. Введем обозначение $A_{k,m}(x)=\left\{x_{i_{s-k+1}},...,x_{i_s},x,\,x_{i_{s+1}},...,x_{i_{s+m}}\right\}\subseteq X$, $k+m\le l$.

Следствие 5.2. Если $\omega(x,A)=\omega(x,A_{k,m}(x))$ для всех $x\in A$ и $A\in 2^X$, $|A|>k+m$, то функция множеств μ вида (5.7) является монотонной мерой тогда и только тогда, когда

$$\sum_{r=0}^{k-1}\left(\omega(x_{i_{s-r}},A)-\omega(x_{i_{s-r}},A\cup\{y\})\right)+\sum_{r=1}^{m}\left(\omega(x_{i_{s+r}},A)-\omega(x_{i_{s+r}},A\cup\{y\})\right)\le\omega(y,A\cup\{y\})$$

для всех $A\in 2^X$ и $y\in X\setminus A$. В частности, если $\omega(x,A)=\omega(x,A_{0,1}(x))$ для всех $x\in A$ и $A\in 2^X$, $|A|>1$, то функция множеств μ вида (5.7) является монотонной мерой тогда и только тогда, когда

$$\omega(x_+(A),A)\le\omega(x_+(A),A\cup\{y\})+\omega(y,A\cup\{y\})$$

для всех $A\in 2^X$ и $y\in X\setminus A$, где $x_+(A)$ – точка, следующая за точкой x в упорядоченном представлении A.

5.2.2 Стохастическая аддитивная усредненная мера информативности

Пусть μ – усредненная мера информативности на 2^X вида (5.7) и $\omega(x,A)=\omega(x,X)=\omega(x)$ для всех $x\in A$ и $A\in 2^X$. Другими словами, значение признака в точке x не зависит от того, какое представления рассматривается. Примером такого признака является оценка кривизны $\omega(\mathbf{g},A)=k_\varepsilon[\Gamma](\mathbf{g})$ в ε-окрестности точки $\mathbf{g}$ дискретной плоской кривой $\Gamma=(\mathbf{g}_k)_{k=0}^{n-1}$. Тогда (см. следствие 5.1) мера $\mu(A)=\sum_{x\in A}\omega(x)/\sum_{x\in X}\omega(x)$, $A\in 2^X$, является аддитивной.

Предположим, что признаковые характеристики будут независимыми случайными величинами $\Omega(x)$, $x\in X$. В этом случае значение меры информативности $\mathrm{M}(A)=\sum_{x\in A}\Omega(x)/\sum_{x\in X}\Omega(x)$ для фиксированного $A\in 2^X$ также будет случайной величиной. Для каждого случайного исхода функция множеств $\mathrm{M}(A)$ будет аддитивной мерой. Примером такой ситуации является следующий. Предположим, что дискретная плоская кривая $\Gamma = (\mathbf{g}_k)_{k=0}^{n-1}$, $\mathbf{g}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j}$, подвергнута аддитивному вероятностному некоррелированному зашумлению. В результате получим случайную кривую $\tilde{\Gamma} = (\mathbf{G}_k)_{k=0}^{p-1}$, $\mathbf{G}_k = X_k\mathbf{i} + Y_k\mathbf{j}$, где $X_k = x_k + \eta_k$, $Y_k = y_k + \xi_k$, η_k, ξ_k – случайные некоррелированные величины, причем $\mathbf{E}[\eta_k] = \mathbf{E}[\xi_k] = 0$, $\boldsymbol{\sigma}^2[\eta_k] = \sigma^2_{x,k}$, $\boldsymbol{\sigma}^2[\xi_k] = \sigma^2_{y,k}$. Предположим, что существует такое базовое множество $\mathrm{B} \subseteq \Gamma$, что случайные величины $\Omega(\mathbf{g})$, $\mathbf{g} \in \mathrm{B}$, независимы. В этом случае признаковые характеристики $\omega(\mathbf{G}) = \Omega(\mathbf{g})$ будут случайными величинами, также как и значение меры $\mathrm{M}(A)$, $A \in 2^{\mathrm{B}}$.

Пусть $\mathbf{E}[\Omega(x)] = m_x$, $\boldsymbol{\sigma}^2[\Omega(x)] = \sigma_x^2$. Исследуем числовые характеристики случайной аддитивной меры $\mathrm{M}(A)$, $A \in 2^X$.

5.2.2.1 Числовые характеристики стохастической аддитивной меры информативности

Найдем математическое ожидание случайной величины $\mathrm{M}(A)$ при фиксированном $A \in 2^X$. Случайная величина $\mathrm{M}(A)$ равна отношению двух случайных величин $X_1 = \sum_{x\in A}\Omega(x)$ и $X_2 = \sum_{x\in X}\Omega(x)$.

Лемма 5.1. Пусть X_1 и X_2 две случайные величины, принимающие значения в интервалах l_1, l_2 соответственно положительных полуосей и $l_2 \subseteq \left((1-\delta)\mathbf{E}[X_2], (1+\delta)\mathbf{E}[X_2]\right)$, $l_1 \subseteq \left(\mathbf{E}[X_1] - \delta\mathbf{E}[X_2], \mathbf{E}[X_1] + \delta\mathbf{E}[X_2]\right)$. Тогда справедливы следующие формулы для среднего значения и дисперсии отношения X_1/X_2 соответственно

$$\mathbf{E}\left[\tfrac{X_1}{X_2}\right] = \tfrac{\mathbf{E}[X_1]}{\mathbf{E}[X_2]} + \tfrac{\mathbf{E}[X_1]}{\mathbf{E}^3[X_2]}\boldsymbol{\sigma}^2[X_2] - \tfrac{1}{\mathbf{E}^2[X_2]}\mathbf{K}[X_1, X_2] + r_1, \qquad (5.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2\left[\tfrac{X_1}{X_2}\right] = \tfrac{1}{\mathbf{E}^2[X_2]}\boldsymbol{\sigma}^2[X_1] + \tfrac{\mathbf{E}^2[X_1]}{\mathbf{E}^4[X_2]}\boldsymbol{\sigma}^2[X_2] - \tfrac{2\mathbf{E}[X_1]}{\mathbf{E}^3[X_2]}\mathbf{K}[X_1, X_2] + r_2, \qquad (5.10)$$

где $\mathbf{K}[X_1, X_2]$ – ковариация случайных величин random X_1 и X_2, т.е. $\mathbf{K}[X_1, X_2] = \mathbf{E}\left[(X_1 - \mathbf{E}[X_1])(X_2 - \mathbf{E}[X_2])\right]$; r_1, r_2 – остатки, зависящие от числовых характеристик случайных величин X_1 и X_2. Причем $|r_1| \le \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{\mathbf{E}[X_1]+\mathbf{E}[X_2]}{\mathbf{E}^3[X_2]} \boldsymbol{\sigma}^2[X_2] \le \frac{\mathbf{E}[X_1]+\mathbf{E}[X_2]}{(1-\delta)\mathbf{E}[X_2]} \delta^3$, $|r_2| \le C\delta^3$.

Доказательство. Докажем формулу (5.9). Формула (5.10) доказывается аналогично. Разложим функции $\varphi(x,y) = \frac{x}{y}$ в ряд Тейлора в точке $(\mathbf{E}[\xi],\mathbf{E}[\eta])$, получим

$$\varphi(x,y) = \tfrac{x}{y} = \varphi(\mathbf{E}[\xi],\mathbf{E}[\eta]) + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n \varphi(\mathbf{E}[\xi],\mathbf{E}[\eta]) =$$

$$\varphi(\mathbf{E}[\xi],\mathbf{E}[\eta]) - \tfrac{\mathbf{E}[\xi](y-\mathbf{E}[\eta])-\mathbf{E}[\eta](x-\mathbf{E}[\xi])}{\mathbf{E}^2[\eta]} \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{E}[\eta]-y}{\mathbf{E}[\eta]}\right)^{n-1}.$$

Последний ряд сходится в точке $(x,y) \in l_\xi \times l_\eta$. Тогда $\mathbf{E}\left[\frac{\xi}{\eta}\right] = \frac{\mathbf{E}[\xi]}{\mathbf{E}[\eta]} + \frac{\mathbf{E}[\xi]}{\mathbf{E}^3[\eta]} \boldsymbol{\sigma}^2[\eta] - \frac{1}{\mathbf{E}^2[\eta]} \mathbf{K}[\xi,\eta] + r_1$, где $r_1 = -\mathbf{E}\left[\frac{\mathbf{E}[\xi](\eta-\mathbf{E}[\eta])-\mathbf{E}[\eta](\xi-\mathbf{E}[\xi])}{\mathbf{E}^2[\eta]} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{E}[\eta]-\eta}{\mathbf{E}[\eta]}\right)^{n-1}\right]$ и $|r_1| \le \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{\mathbf{E}[\xi]+\mathbf{E}[\eta]}{\mathbf{E}^3[\eta]} \boldsymbol{\sigma}^2[\eta] \le \frac{\mathbf{E}[\xi]+\mathbf{E}[\eta]}{(1-\delta)\mathbf{E}[\eta]} \delta^3$. Последнее неравенство следует из оценки $\boldsymbol{\sigma}[\eta] \le \delta \mathbf{E}[\eta]$. Лемма доказана.

Пусть $X_1 = \sum_{x\in A} \Omega(x)$ и $X_2 = \sum_{x\in X} \Omega(x)$. Тогда

$$\mathbf{K}[\xi,\eta] = \mathbf{K}\left[\textstyle\sum_{x\in A} \Omega(x), \sum_{y\in X} \Omega(y)\right] = \sum_{x\in A} \mathbf{K}[\Omega(x),\Omega(x)] + \sum_{x\in A,\, y\in X | x\ne y} \mathbf{K}[\Omega(x),\Omega(y)].$$

Поскольку случайные величины $\Omega(x)$, $x\in X$ независимы, то $\mathbf{K}[\Omega(x),\Omega(y)] = 0$ для $x \ne y$ и $\mathbf{K}[\Omega(x),\Omega(x)] = \sigma_x^2$. Следовательно, $\mathbf{K}[\xi,\eta] = \sum_{x\in A} \sigma_x^2$. Используя обозначения $S(A) = \sum_{x\in A} m_x$, $D(A) = \sum_{x\in A} \sigma_x^2$, мы можем переписать (3) и (4) следующим образом

$$\mathbf{E}[\mathrm{M}(A)] = \frac{S(A)}{S(\mathrm{B})} + \frac{S(A)}{S^3(\mathrm{B})} D(\mathrm{B}) - \frac{D(A)}{S^2(\mathrm{B})} + r_1, \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2[\mathrm{M}(A)] = \frac{D(A)}{S^2(\mathrm{B})} + \frac{S^2(A)}{S^4(\mathrm{B})} D(\mathrm{B}) - \frac{2S(A)D(A)}{S^3(\mathrm{B})} + r_2. \tag{5.12}$$

Заметим, что $\boldsymbol{\sigma}^2[\mathrm{M}(\varnothing)] = \boldsymbol{\sigma}^2[\mathrm{M}(\mathrm{B})] = 0$ и $\boldsymbol{\sigma}^2[\mathrm{M}(A)] = \boldsymbol{\sigma}^2[\mathrm{M}(\mathrm{B} \setminus A)]$, $A \in 2^{\mathrm{B}}$. Далее будем использовать формулы (5.11) и (5.12) без их остатков. Соответствующие значения $\tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{M}(A)] = \mathbf{E}[\mathrm{M}(A)] - r_1$, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^2[\mathrm{M}(A)] = \boldsymbol{\sigma}^2[\mathrm{M}(A)] - r_2$ будем называть оценками числовых характеристик.

Заметим, что семейство случайных величин $\{\mathrm{M}(A): A \in 2^{\mathrm{B}}\}$ удовлетворяет всем условиям определения конечно-аддитивной стохастической меры [113]: 1) $\mathbf{E}[\mathrm{M}^2(A)] < \infty$ для всех $A \in 2^{\mathrm{B}}$; 2) $\mathrm{M}(A)$ – конечно-аддитивна почти наверное.

Заметим, что функция множеств $\tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{M}(A)]$ является аддитивной.

5.2.2.2 Нахождение оптимального устойчивого представления образа

Поставим задачу о нахождении такого представления B образа X, мощности не больше заданного числа $k \geq 3$, для которого суммарная дисперсия $\sum_{A \subseteq B} \boldsymbol{\sigma}^2[\mathrm{M}(A)]$ по всем подмножествам представления B была бы минимальной, а сумма квадратов математических ожиданий всех представлений $\sum_{A \subseteq B} \mathbf{E}^2[\mathrm{M}(A)]$ была бы максимальной. Величина суммарной дисперсии характеризует устойчивость представления и всех его подмножеств к уровню зашумления образа и зависит также от количества элементов в представлении. Чем больше элементов в представлении, тем величина суммарной дисперсии будет больше. Для упрощения выкладок вместо математических ожиданий нормированных мер информативности $\mathbf{E}[\mathrm{M}(A)]$, $A \subseteq X$, будем использовать математические ожидания ненормированных мер $S(A)$, $A \subseteq X$. Введем следующий критерий:

$$f(X) = \sum_{A \subseteq X} \boldsymbol{\sigma}^2[\mathrm{M}(A)] \Big/ \sum_{A \subseteq X} S^2(A), \quad |X| \leq k.$$

Тогда требуется найти такое множество B, $3 \leq |B| \leq k$, для которого $f(B) \to \min$. Упростим функцию $f(B)$. Пусть $S_2(B) = \sum_{x \in B} m_x^2$, $SD(B) = \sum_{x \in B} \sigma_x^2 m_x$.

Предложение 5.5. Если признаковые характеристики образа X имеют допустимое зашумление и являются независимыми случайными величинами, то для любого $B \in 2^X$ справедливо равенство

$$f(B) = \tfrac{1}{S^4(B)} \left\{ D(B) - \tfrac{2S(B)}{S_2(B) + S^2(B)} SD(B) \right\}.$$

Следствие 5.3. Если $\sigma_x^2 = \sigma^2 = const$ для всех $x \in B$, то

$$f(B)=\frac{1}{S^4(B)}\left\{|B|-\frac{2S^2(B)}{S_2(B)+S^2(B)}\right\}\sigma^2 .$$

Так как $S^2(B)/|B| \le S_2(B) \le S^2(B)$, то верно следствие.

Следствие 5.4. *Если* $\sigma_x^2=\sigma^2=const$ *для всех* $x\in B$, *то*

$$\frac{|B|^2-|B|}{(|B|+1)S^4(B)}\sigma^2 \le f(B) \le \frac{|B|-1}{S^4(B)}\sigma^2 .$$

Для нахождения оптимального представления образа, минимизирующего значение функции $f(B)$, будем использовать процедуру «включение-исключение». Оценим, насколько изменится значение функции $f(B)$ при исключении из представления B элемента x и включении в него элемента $y\in X\setminus B$.

Теорема 5.1. Если признаковые характеристики образа X имеют допустимое зашумление и являются независимыми случайными величинами, то для любого $x\in B$ и $y\in X\setminus B$ имеет место следующее асимптотическое равенство

$$f\left((B\setminus\{x\})\cup\{y\}\right)-f(B)=\frac{1}{S^4(B)}\left(Q_1(B)(m_y-m_x)+\sigma_y^2-\sigma_x^2\right)+o(\tau),$$

где $Q_1(B)=\frac{2\left(3S_2(B)+5S^2(B)\right)}{\left(S_2(B)+S^2(B)\right)^2}SD(B)-\frac{4}{S(B)}D(B)$, $\tau=\sqrt{\frac{1}{S^2(B)}\left(m_y^2+m_y^2\right)+\frac{1}{D^2(B)}\left(\sigma_x^4+\sigma_y^4\right)}$.

Следствие 5.5. *Если* $\sigma_x^2=\sigma^2=const$ *для всех* $x\in X$, *то для любого* $x\in B$ *и* $y\in X\setminus B$

$$f\left((B\setminus\{x\})\cup\{y\}\right)-f(B)=Q_2(B)\sigma^2\left(m_y-m_x\right)+o(\tau),$$

где $Q_2(B)=\frac{2}{S^3(B)}\left(\frac{3S_2(B)+5S^2(B)}{\left(S_2(B)+S^2(B)\right)^2}-\frac{2|B|}{S^2(B)}\right)$, $\tau=\sqrt{\frac{1}{S^2(B)}\left(m_y^2+m_y^2\right)+\frac{1}{D^2(B)}\left(\sigma_x^4+\sigma_y^4\right)}$ *и* $Q_2(B)<0$ *для всех* $B\subseteq X: |B|\ge 3$.

Асимптотические формулы из теоремы 5.1 и следствия 5.5 могут быть использованы для построения алгоритмических процедур нахождения представления B образа X, минимизирующего функцию критерия f. Пусть

$K_B(x,y) = Q_1(B)(m_y - m_x) + \sigma_y^2 - \sigma_x^2$. Тогда алгоритм нахождения представления B мощности k, минимизирующего функцию f (при условии, что случайные величины $\Omega(x)$, $x \in X$, независимы), будет состоять из следующих шагов:

а) в качестве начального представления выберем множество B_0 из k элементов образа X с максимальным значением информативности $\mathbf{E}\left[\Omega(x)\right] = m_x$, $x \in X$;

б) вычислим величину $Q_1(B_0)$ из теоремы 5.1 и найдем

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \arg\min\left\{K_{B_0}(x,y) : x \in B,\ y \in X \setminus B,\ K_{B_0}(x,y) < 0\right\},$$

если такая пара существует. Тогда $B_1 = (B_0 \setminus \{\tilde{x}\}) \cup \{\tilde{y}\}$ – новое представление, для которого с точностью до малых $f(B_1) \le f(B_0)$. Этот шаг повторяем до тех пор, пока будут находиться пары (x,y): $K_B(x,y) < 0$.

Если $\sigma_x^2 = \sigma^2 = const$ для всех $x \in X$, то, пренебрегая малыми величинами, из следствия 5.5 можно сделать вывод, что оптимальное представление B мощности не больше k, минимизирующее функцию f, будет состоять из элементов с наибольшими значениями $\mathbf{E}\left[\Omega(x)\right] = m_x$ (при условии, что случайные величины $\Omega(x)$, $x \in X$, независимы).

5.3 Некоторые выводы

В этом подразделе введена и исследована усредненная мера информативности, определенная на множестве признаков образа. Исследованы условия монотонности такой меры. Исследована задача нахождения наиболее устойчивого представления относительно усредненной меры информативности в том случае, когда признаки являются случайными величинами. Эта задача решается путем минимизации функции критерия относительно числовых характеристик случайной меры. Установлены свойства функции критерия.

Полученные результаты опубликованы в работах [114], [115]:

Lepskiy A. Stable Feature Extraction with the Help of Stochastic Information Measure // Pattern Recognition and Machine Intelligence, Springer, Series: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6744, p.54-59.
Lepskiy A. Obtaining the Minimal Polygonal Representation of a Curve by Means of a Fuzzy Clustering // International Workshop on Soft Computing Applications and Knowledge Discovery (SCAKD-2011), Moscow, U-HSE, p.63-71.

6 Исследование манипулирования в задаче дележа для двух участников

В данном разделе приведены результаты исследования манипулирования в задаче дележа для двух участников, выполненного в рамках работы над проектом.

Задача дележа имеет столь же долгую историю, как и само человечество. В Ветхом Завете говорится об Аврааме и Лоте, которые странствовали вместе, и попали в страну, где не хватало пропитания для их семей. Начались ссоры между их пастухами. Решение, предложенное Авраамом Лоту, было простым:

«…да не будет раздора между мною и тобою, и между пастухами моими и пастухами твоими, ибо мы родственники; не вся ли земля перед тобою? отделись же от меня: если ты налево, то я направо; а если ты направо, то я налево» (Быт. 13:8—9).

Лот выбрал долину Иордана, а Авраам остался на земле Ханаанской. Таким образом, не только была поставлена задача, но и описан способ ее решения, который позже стал называться процедурой "дели и выбирай".

Похожая трактовка задачи дележа рассматривалась в ходе выполнения настоящего проекта и изложена в этом разделе отчета. Есть несколько объектов, которые надо поделить между участниками, причем ценность объектов может быть разной для разных участников дележа.

Наиболее естественно в эту трактовку вписываются задачи дележа наследства или раздела имущества после развода супругов [116].

Задачу нахождения устраивающего всех решения на переговорах также можно воспринимать как задачу дележа. Роль делящихся предметов здесь играют пункты переговоров. После дележа по каждому из пунктов принимается предложение той стороны, которой упомянутый пункт достался. Если пункт предлагается разделить между сторонами, принимается компромиссное решение.

В [117] этот подход применяется к трудовым спорам, а в [118] — к проблеме слияния фирм.

Возникает вопрос, всегда ли можно найти решение, удовлетворяющее обоих участников, и как это понятие формализовать. Наиболее известна концепция справедливого дележа, предложенная С. Брамсом и А. Тейлором [119],[120].

Если участников дележа двое (а при дележе имущества при разводе, трудовых спорах и слиянии фирм это обычно именно так), а компромиссное решение можно принять по любому пункту, справедливый дележ существует всегда и строится с помощью простой и прозрачной процедуры, названной С. Брамсом и А. Тейлором "подстраивающийся победитель" ([119]).

Если некоторые пункты разделить нельзя, задача сложнее и возможны ситуации, в которых устраивающий всех участников дележ невозможен. Исчерпывающий ответ на вопрос, при каких условиях можно найти справедливые дележи для двух участников, дан в препринте [121].

Предположим теперь, что одна из сторон узнала предпочтения другой. Как использовать эту информацию с наибольшей пользой? Оказывается, вопрос можно разбить на два:

а) оппоненту придется отдать как минимум половину (с его точки зрения), иначе он не согласится на дележ. Как при этом сделать так, чтобы оставшаяся часть была (с моей точки зрения) максимально ценной?

б) какие предпочтения необходимо сообщить вместо истинных, чтобы в результате процедуры дележа был предложен дележ из пункта а)?

Ответ на первый вопрос — решение задачи максимизации. Цель настоящего исследования — ответить на второй вопрос.

6.1 Основные обозначения и определения

Обозначим через $N = \{1,\ldots,n\}$ множество из n предметов (пунктов), которые делят между собой игроки $A_1,\ldots,A_k$. Каждый из пунктов может быть поделен между всеми игроками (тогда он называется делимым) или отдан только одному из игроков (неделимый пункт). Дележом называется набор n-мерных векторов $X_{A_1},\ldots,X_{A_k}$, таких что для любого пункта j:

$$\sum_{i=1}^{k} X_{A_i,j} = 1 \qquad \text{для любого пункта } j,$$
$$X_{A_i,j} \in [0,1] \qquad \text{для делимых пунктов,}$$
$$X_{A_i,j} \in \{0,1\} \qquad \text{для неделимых пунктов,}$$

Первое равенство удобно записать как

$$\sum_{i=1}^{k} X_{A_i} = 1,$$

где 1 — вектор, состоящий из одних единиц. Вектор X_A называется долей игрока A. Дележ называется чистым, если каждый из пунктов полностью достается какому-либо из игроков, т.е. $\forall i, j\ X_{A_i,j} \in \{0,1\}$.

В этой статье, по большей части, рассматривается дележ между двумя игроками (которые всегда будут обозначаться A и B). В этом случае дележ определяется долей A (X_A). Будем обозначать ее просто X, тогда $X_B = 1 - \mathbf{X}$.

Следующий вопрос — оценки выигрышей игроков. Будем подходить к постановке задачи классически, в стиле, например, [119]. Каждый из участников дележа может численно оценить полезность каждого пункта и эти полезности для разных пунктов складываются, т.е. любому игроку A сопоставляется вектор полезностей пунктов w_A такой, что сумма его координат равна 1. Выигрыш игрока A_i (W_{A_i}) при дележе X вычисляется по формуле

$$W_{A_i}(X) = \sum_{j \in N} w_{A_i,j} x_{A_i,j}.$$

6.2 Аксиомы справедливого дележа

Определение 6.1 [119] Дележ X называется:

– пропорциональным, если каждый из игроков считает, что получил не менее $1/k$ от всего делимого (в случае двух игроков — не менее половины):

$$\forall A \ W_A(X_A) \ge \frac{1}{n};$$

– свободным от зависти, если каждый из игроков считает, что получил не меньше любого из остальных:

$$\forall A, B \ W_A(X_A) \ge W_A(X_B);$$

– равноценным, если выигрыши всех игроков равны:

$$\forall A, B \ W_A(X_A) = W_B(X_B);$$

– эффективным или Парето-оптимальным, если не существует никакого другого дележа, который был бы лучше для одного из участников, не будучи хуже для другого участника;

– справедливым, если он удовлетворяет условиям равноценности, эффективности и отсутствия зависти.

Эффективные дележи существуют всегда — достаточно отдать все пункты одному из игроков. А вот остальные 3 условия могут не выполняться ни для одного дележа: простейший пример — дележ единственного неделимого пункта.

В случае двух участников верно следующее утверждение. Его доказательство можно найти, например, в [116], но, поскольку оно очень просто и полезно для дальнейшего, имеет смысл привести его здесь.

Предложение 6.1. Пусть дележ происходит между двумя игроками. Тогда:

а) если существует равный дележ, то существует и равный пропорциональный дележ;

б) если дележ равноценный и пропорциональный, то он свободен от зависти.

Доказательство. а) Пусть $W_A(X) = W_B(X)$. Если выигрыш A меньше половины, рассмотрим дележ $1 - \mathbf{X}$, если не меньше, то — просто X. Рассматриваемый дележ будет пропорциональным, поскольку выигрыш A не меньше половины, а выигрыш B равен выигрышу A.

б) В этом случае оба игрока считают, что получили не меньше половины, а значит, доля оппонента по их оценкам не больше половины. Поэтому дележ свободен от зависти.

Замечание 6.1. Если игроков два, то из определения справедливого дележа можно убрать условие отсутствия зависти.

Если игроков больше двух, то утверждение неверно и упомянутые свойства дележа (пропорциональность, равноценность, отсутствие зависти) независимы.

6.3 Процедуры дележа

Самая простая и, вероятно самая древняя из процедур — "дели и выбирай". Первый из игроков делит весь возможный выигрыш на равные, с его точки зрения, доли, а второй выбирает из любую из них.

Этот способ дележа единственно возможен в намного более общей ситуации — у игроков нет оценок, но каждый умеет делить весь выигрыш пополам (в случае более чем двух игроков — на произвольное число равных, с его точки зрения, частей).

Полученный по правилу "дели и выбирай" дележ будет пропорциональным и удовлетворяет условию отсутствия зависти (с точки зрения A части равноценны, а B считает, что выбрал лучшую), но не равноценным (A считает, что получил половину, B — что больше половины) и не обязательно эффективным (в случае делимых пунктов A может просто предложить поделить все пункты пополам, что, скорее всего, не Парето-оптимально).

Кроме того, задание предпочтений игроков неоднозначно определяет результат дележа — у первого может быть много вариантов выбора.

Во многих случаях справедливый дележ позволяет получить процедура "подстраивающийся победитель", предложенная С. Брамсом и А. Тейлором [119].

Упорядочим ресурсы по убыванию величины a_i / b_i, т.е. будем считать, что $a_1 / b_1 \geq a_2 / b_2 \geq \ldots \geq a_n / b_n$ (здесь предполагается, что все ресурсы имеют некоторую ценность, т.е. $a_i > 0$ и $b_i > 0$). Пусть r — максимальное i, для которого $a_i / b_i \geq 1$.

На первом шаге процедуры «подстраивающийся победитель» участнику A приписывают все ресурсы G_i, где $1 \le i \le r$, а участнику B — ресурсы G_i, где $r+1 \le i \le n$.

Если выигрыши сторон равны, то процедура закончена. Иначе изучается, как нужно переделить ресурс G с наиболее близким к единице отношением a_i / b_i, чтобы стороны были одинаково удовлетворены: это ресурс G_r, если по результатам первого шага больше очков набрал участник A, или G_{r+1}, если больше очков набрал B. Возможно, что даже если передать весь этот ресурс G пока проигрывающему участнику, то он останется проигрывающим. Тогда необходимо передать ему весь этот ресурс и перейти к следующему (G_{r-1} или G_{r+2} соответственно), пока не будет достигнуто равенство очков, получаемых участниками.

В результате получается следующий дележ: существует некоторое k, $1 \le k \le n$, такое что ресурсы с первого по $(k-1)$-й получает A, с $k+1$ по n-й — B, а k-й ресурс делится между A и B так, чтобы было достигнуто равенство очков.

Верна следующая теорема.

Теорема 6.1. [120] Если процедура "подстраивающийся победитель" срабатывает, то полученный дележ — справедливый. Более того, если нет пунктов с таким же отношением a_i / b_i, как у делящегося пункта, то найденный справедливый дележ — единственный.

Процедура "подстраивающийся победитель" работает только в случае, когда делим один из пунктов, но поскольку, не зная предпочтений игроков, нельзя сказать заранее, какой это пункт, приходится, как и в процедуре "дели и выбирай" предполагать, что все пункты делимы.

Если же часть пунктов неделима, задача нахождения справедливого дележа сложнее и не всегда разрешима. Критерий существования справедливого дележа приведен в [121], здесь же рассмотрим несколько примеров.

Пример 6.1. Делится 2 пункта, из которых неделим первый. Оценки игроков:

	1	2
A	0,7	0,3
B	0,6	0,4

Здесь нет ни равного, ни пропорционального дележа. Кто-то должен забрать первый пункт и получить не менее 0,6, тогда его оппонент получит второй пункт (или, возможно, его часть), т.е. менее 0,5).

Идеи двух следующих примеров взяты из препринта [121].

Пример 6.2. Делятся четыре пункта, из которых делим только последний. Оценки игроков:

	1	2	3	4
A	0,4	0,1	0,45	0,05
B	0,49	0,01	0,45	0,05

Единственный равный и пропорциональный дележ — отдать A первый и второй пункты, а B — остальные. Оба игрока получат по 0,5. Но этот дележ неэффективен. Если отдать A второй и третий пункты, его выигрыш станет равным 0,55, а у B — 0,54.

Пример 6.3. Делятся три пункта, из которых делим только последний. Оценки игроков:

	1	2	3
A	0,52	0,43	0,05
B	0,38	0,52	0,1

Для того чтобы дележ был пропорциональным, игрок A должен получить первый пункт, а B — второй. Любой из дележей с таким свойством эффективен, и среди них есть только один равный — игрок A получает 2/3 третьего пункта, игрок B — 1/3, т.е. справедливый дележ существует, но не находится по процедуре "подстраивающийся победитель", поскольку по ней на первом шаге B отдаются второй и третий пункты, а затем часть второго (а не третьего!) пункта передается A.

Далее не будем подробно останавливаться на конкретной процедуре дележа, но предполагаем, что какая-то из них выбрана, т.е. игроки сообщают свои предпочтения, и по заранее известному правилу строится дележ. Дополнительно потребуем только выполнения двух правил:

– если в задаче существуют пропорциональные дележи, то выбирается один из них; если их нет, т.е. поделить так, чтобы оба игрока получили не менее половины, невозможно, никакой дележ не выбирается;

– если в задаче существует справедливые дележи, то выбирается один из них.

Игроки обладают той же информацией. Они могут не знать, как работает правило, но уверены, что предложенный дележ будет справедливым, если такая возможность вообще есть.

6.4 Манипулирование

Рассмотрим оптимальную для игрока B ситуацию: B знает предпочтения A и уверен, что A сообщит свои истинные предпочтения. В этом случае B может пытаться манипулировать, т.е. увеличить свой выигрыш, сообщив вместо своих истинных предпочтений измененные. Исследуется вопрос, к чему это может привести.

Определение 6.2. Назовем дележ B-оптимальным, если:

– он пропорционален — и A, и B получают не меньше половины;

– выигрыш B максимален среди всех возможных при первом условии дележей.

Обозначим через W_B^* выигрыш B при B-оптимальном дележе.

Замечание 6.2. W_B^* — верхняя оценка для выигрыша B с помощью манипулирования. Действительно, если процедура дележа выдает какой-нибудь результат, то этот дележ будет пропорциональным с точки зрения истинных предпочтений A и измененных B, т.е. A получит не меньше половины. В этом случае либо B получает меньше половины (с точки зрения истинных предпочтений), либо — больше, но тогда дележ пропорционален уже и с точки зрения истинных предпочтений игроков. В обоих случаях выигрыш B не превышает W_B^*.

Докажем лемму о свойствах B-оптимального дележа.

Лемма 6.1.

а) B-оптимальные дележи существуют тогда и только тогда, когда в задаче есть хотя бы один пропорциональный дележ;

б) если выигрыш A больше половины, то искомый дележ чистый и, более того, все делимые пункты забирает B;

в) если выигрыш A — ровно половина, то дележ может происходить только по пунктам с равными отношениями a_i / b_i и существует дележ с теми же выигрышами A и B, в котором делится только один из этих пунктов.

Доказательство.

а) Множество всех дележей замкнуто и ограничено. Поскольку функция выигрыша A непрерывна, также замкнутым и ограниченным будет множество дележей, в которых выигрыш A не меньше половины. Функция выигрыша B также непрерывна на компактном множестве и следовательно, достигает на нем максимума.

б) Если A получает больше половины и среди его выигрыша есть какая-то делимая часть, то маленькую часть этой части можно передать B, не уменьшив выигрыш B и не нарушив ограничения, т.е. выигрыш B был не максимален. Противоречие.

в) Пусть делятся два пункта. Обозначим их через i и j. Будем считать, что $a_i / b_i \geq a_j / b_j$. Сравним оценку A части, доставшейся B при дележе пункта i ($a_i(1-x_i)$) и выигрыш A от дележа пункта j ($a_j x_j$). Возможны два случая:

1) $a_i(1-x_i) > a_j x_j$. Отнимем у A всю его часть пункта j и передадим ему ($a_j x_j / a_i$) часть пункта i. Выигрыш A изменится на $-a_j x_j + a_i \cdot (a_j x_j / a_i) = 0$, а выигрыш B — на $b_j x_j + b_i \cdot (a_j x_j / a_i) \geq 0$.

2) $a_i(1-x_i) \leq a_j x_j$. Отнимем у B всю его часть пункта i и передадим ему ($a_i(1-x_i) / a_j$) часть пункта j. Выигрыш A изменится на $a_i(1-x_j) + a_j \cdot (a_i(1-x_i) / a_j) = 0$, а выигрыш B — на $-b_i(1-x_j) + b_j \cdot (a_i(1-x_i) / a_j) \geq 0$.

Если отношения оценок пунктов i и j игроками не совпадают, т.е. $a_i / b_i > a_j / b_j$, то в результате описанного выше обмена выигрыш A не изменится, а выигрыш B увеличится, что противоречит максимальности выигрыша B.

Если отношения оценок пунктов i и j игроками равны ($a_i / b_i = a_j / b_j$), то в результате обмена выигрыши A и B не изменится, но число пунктов, по которым происходит дележ, уменьшится на один. Будем повторять обмен до тех пор, пока не останется только один делящийся пункт.

Следствие 6.1. Среди B-оптимальных дележей существует дележ, в котором делится не более одного пункта.

Для описания "оптимального манипулирования" B потребуется несколько лемм.

Лемма 6.2. Пусть $X=(x_1,\ldots,x_n)$ — чистый дележ, при котором A получает более половины, но не все. Тогда можно подобрать оценки B: $(b_1\ldots b_n)$ такие, что X будет единственным справедливым дележом.

Доказательство. 1. Пусть $\Delta=(\sum a_i x_i)-0{,}5$, а k — число пунктов, которые достаются B при дележе X. Поскольку A получает не все, то $k>0$. Определим

$$b_i=\begin{cases} a_i-\dfrac{2\Delta}{n-k}, \text{если } x_i=1, \\ a_i+\dfrac{2\Delta}{k}, \text{если } x_i=0. \end{cases}$$

Вычислим выигрыш B при данных оценках и дележе X:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(1-x_i)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+\frac{2\Delta}{k})(1-x_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{2\Delta}{k}(1-x_i)+\sum_{i=1}^{n}a_i(1-x_i)=$$
$$=\frac{2\Delta}{k}k+\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a_i x_i=2\Delta+1-(0{,}5+\Delta)=0{,}5+\Delta,$$

поэтому дележ — равноценный. С другой стороны сумма выигрышей A и B при дележе X равна $1+2\Delta$, а максимально возможная сумма выигрышей при любом дележе равна

$$\sum_{i=1}^{n}\max(a_i b_i)=\frac{2\Delta}{k}k+\sum_{i=1}^{n}a_i=1+2\Delta,$$

поэтому дележ эффективен. Более того, X — единственный дележ с суммой выигрышей $1+2\Delta$, поэтому X — единственный равный и эффективный, а значит, и справедливый дележ.

Лемма 6.3. Пусть $X=(x_1,\ldots,x_n)$ — дележ, при котором A получает ровно половину, делится не нацело не более одного пункта и B получает какую-то часть делимого пункта. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такие оценки B: $(b_1 \ldots b_n)$, что существует единственный справедливый дележ, выигрыш B от которого меньше выигрыша B от X не более чем на ε.

Доказательство. Пронумеруем пункты так: первые m в дележе X достаются A, $(m+1)$-й — либо пункт, делящийся не нацело (если он есть), либо один из делимых пунктов, достающихся B, а оставшиеся k пунктов достаются B (т.е. $m+k+1=n$).

В любом случае будем считать, что $(m+1)$-й пункт делится: $1-p$ от него достается А, а p достается B, $p>0$, но возможно $p=1$. По условию

$$W_A(X) = (1-p)a_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} a_i = 0{,}5, \tag{6.1}$$

$$W_B(X) = pb_{m+1} + \sum_{i=m+2}^{n} b_i. \tag{6.2}$$

Выберем положительное $\delta < \min(pa_{m+1}, \frac{\varepsilon}{a_{m+1}})$ и рассмотрим три случая:

а) $k, m > 0$. Определим

$$b_i = \begin{cases} a_i - \dfrac{\delta}{m}, & \text{если} \quad i \le m, \\ a_i + \dfrac{\delta}{k}, & \text{если} \quad i > m+1. \\ a_i, \text{ если} \quad i = m+1, \end{cases}$$

Применим процедуру "подстраивающийся победитель". На первом шаге пункты с первого по $m+1$-й достаются A, с $m+2$ по n-й — B. У A

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_i = a_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} a_i = pa_{m+1} + \left((1-p)a_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} a_i \right) = pa_{m+1} + 0{,}5 > 0{,}5$$

В последнем равенстве использовалась формула (6.1). B (исходя из измененных предпочтений) получает

$$\sum_{i=m+2}^{n} (a_i + \frac{\delta}{k}) = \delta + \sum_{i=m+2}^{n} a_i = \delta - pa_{m+1} + \left(pa_{m+1} + \sum_{i=m+2}^{n} a_i \right) = \delta - pa_{m+1} + 0.5 < 0.5,$$

Поскольку $\delta < pa_{m+1}$. В последнем равенстве использовалась формула (6.2). Поэтому для уравнивания долей надо передать часть ($m+1$)-го пункта от A к B, поскольку для этого пункта отношение $a_i / b_i = 1$, а у всех доставшихся A пунктов — больше единицы. Пусть q — часть, передаваемая B. Получим уравнение

$$\begin{aligned}
&0{,}5 + pa_{m+1} - qa_{m+1} = \delta - pa_{m+1} + 0{,}5 + qa_{m+1},\\
&2pa_{m+1} = \delta + 2qa_{m+1},\\
&q = p - \frac{\delta}{2a_{m+1}},
\end{aligned}$$

q меньше p, следовательно, $q < 1$. Из начального уравнения видно также, что q положительно. Поскольку ($m+1$)-й пункт делим, получился корректный дележ. Обозначим его Y. Тогда

$$\begin{aligned}
W_B(Y) &= qb_{m+1} + \sum_{i=m+2}^{n} b_i = \left(p - \frac{\delta}{2a_{m+1}} \right) b_{m+1} + \sum_{i=m+2}^{n} b_i = \\
&= -\frac{\delta b_{m+1}}{2a_{m+1}} + pb_{m+1} + \sum_{i=m+2}^{n} b_i = -\frac{\delta b_{m+1}}{2a_{m+1}} + W_B^* > W_B^* - \varepsilon,
\end{aligned}$$

поскольку $\delta < \varepsilon / a_{m+1}$, т.е. $W_B^* - W_B(Y) < \varepsilon$.

б) $k = 0$. Поскольку в задаче не менее двух пунктов, $m = n - 1 > 0$. Определим:

$$b_i = \begin{cases} a_i - \dfrac{\delta}{n-1}, & \text{если} \quad i < n, \\ a_i + \delta, & \text{если} \quad i = n. \end{cases}$$

Применим процедуру "подстраивающийся победитель". На первом шаге все пункты кроме последнего достаются A, n-й — B. У A будет

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + (1-p)a_n - (1-p)a_n = 0{,}5 - (1-p)a_n \le 0{,}5.$$

B (исходя из измененных предпочтений) получает $a_n + \delta = pa_n + \delta + (1-p)a_n = 0{,}5 + \delta + (1-p)a_n > 0{,}5$. Поэтому для уравнивания долей надо передать часть n-го пункта от B к A. Пусть q — часть, которая достанется A. Получим уравнение

$$0{,}5 - (1-p)a_n + qa_n = 0{,}5 + \delta + (1-p)a_n - q(a_n + \delta).$$

Находим q:

$$q = \frac{2(1-p)a_n + \delta}{2a_n + \delta}.$$

Поскольку $0 \le q \le 1$ и n-й пункт делим, получился корректный дележ. Обозначим его Y. Тогда

$$W_B(Y) = (1-q)b_n = pb_n - (p-(1-q))b_n = W_B^* - \left(-(1-p) + \frac{2(1-p)a_n + \delta}{2a_n + \delta}\right)b_n =$$

$$= W_B^* - \left(\frac{p\delta}{2a_n + \delta}\right)b_n > W_B^* - \left(\frac{\delta}{2a_n}\right).$$

Поскольку $\delta < \varepsilon / a_n$, $W_B^* - W_B(Y) < \varepsilon$.

в) $m = 0$. Поскольку в задаче не менее двух пунктов, $k > 0$. Определим:

$$b_i = \begin{cases} a_i - \delta, \text{если} & i = 1, \\ a_i + \dfrac{\delta}{n-1}, \text{если} & i > 1. \end{cases}$$

Применим процедуру "подстраивающийся победитель". На первом шаге все пункты кроме первого достаются B, первый — A. Выигрыш A: $W_A(X) = a_1 = (1-p)a_1 + pa_1 = 0{,}5 + pa_1 > 0{,}5$. B (исходя из измененных предпочтений) получает:

$$\sum_{i=2}^{n}\left(a_i + \frac{\delta}{n-1}\right) = \delta + -pa_1 + pa_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i = 0{,}5 + \delta - pa_1 \le 0{,}5,$$

поскольку $\delta < pa_1$. Поэтому для уравнивания долей надо передать часть первого пункта от A к B. Пусть q — часть, которая достанется B. Получим уравнение

$$0{,}5 + pa_1 - qa_1 = 0{,}5 + \delta - pa_1 + q(a_1 - \delta).$$

Находим q:

$$q = \frac{2pa_1 - \delta}{2a_1 - \delta}.$$

Поскольку $0 \le q \le 1$ и первый пункт делим, получился корректный дележ. Обозначим его Y. Тогда

$$W_B(Y) = qb_1 + \sum_{i=2}^{n} b_i = (qb_1 - pb_1) + pb_1 + \sum_{i=2}^{n} b_i = \left(\frac{2pa_1 - \delta}{2a_1 - \delta} - p \right) b_1 + W_B^* =$$

$$= W_B^* - \frac{b_1(1-p)\delta}{2a_1 - \delta} > W_B^* - \frac{\delta}{a_1}.$$

Поскольку $b_1 \le 1$, $1 - p < 1$ и $\delta < pa_1 \le a_1$. Наконец, поскольку $\delta < \varepsilon / a_n$, $W_B^* - W_B(Y) < \varepsilon$.

Во всех трех случаях делящийся пункт имеет уникальное среди всех пунктов дележа отношение a_i / b_i. Поэтому по теореме 6.1 в каждом случае полученный дележ — единственный справедливый. Доказательство закончено.

Из результатов лемм 6.1-6.3 собирается основная теорема о манипулировании.

Теорема 6.2. Пусть в задаче дележа существует пропорциональный дележ. Тогда:

а) существуют B-оптимальные дележи;

б) B с помощью манипулирования не может получить больше W_B^*;

в) если среди B-оптимальных дележей есть такой дележ X, что $W_A(X) > 0{,}5$, то B с помощью манипулирования может добиться выигрыша W_B^*;

г) если такого дележа нет, но есть B-оптимальный дележ, при котором B получает какую-то часть какого-то делимого пункта, то для любого $\varepsilon > 0$ B с помощью манипулирования может добиться выигрыша $W_B^* - \varepsilon$.

Доказательство. а) — часть утверждения леммы 6.1.

б) — в точности утверждение замечания 6.2.

в) По лемме 6.1 дележ X чистый. Следовательно, по лемме 6.2 B может сообщить такие предпочтения, что X будет единственным справедливым дележом, который и будет выбран. Выигрыш B будет ровно W_B^*.

г) По лемме 6.2 B может сообщить такие предпочтения, что единственным справедливым дележом будет дележ Y такой, что для любого $\varepsilon > 0$ имеем $W_B^* - W_B(Y) < \varepsilon$. Именно дележ Y и будет выбран.

Замечание 6.3. В оставшемся случае (выигрыш A во всех B-оптимальных дележах — ровно половина, причем B достаются только неделимые пункты) манипулирование может быть неэффективным. Приведем пример. Пусть в задаче два пункта, а неделим первый. Оценки игроков:

	1	2
A	0,5	0,5
B	0,6	0,4

B-оптимальный дележ здесь единственный: B забирает первый пункт, A — второй. Но добиться близкого к нему результата манипулированием B удастся, если заявить, что первый пункт для него предпочтительней второго, то не будет равных дележей, если наоборот, первый пункт достанется A, а B получит не более, чем весь второй (т.е. 0,4). Если, наконец, B заявит предпочтения 0,5 на 0,5, то оба чистых дележа (первый пункт отдать A, второй — B или наоборот) будут единственными равными и при этом неотличимыми друг от друга с точки зрения процедуры дележа.

6.5 Некоторые выводы

Если при B-оптимальном дележе A получает ровно половину, оптимальное манипулирование лишено практического смысла, поскольку оценки B почти совпадают с оценками A. В этом случае все дележи практически равноценны, и может быть выбран любой из них, в том числе и крайне невыгодный для B.

Или если A также знает предпочтения B, то он, пытаясь оптимально манипулировать, выдает оценки, мало отличающиеся от оценок B, в результате A и B "меняются" своими оценками и, как следствие, долями при дележе, что невыгодно для обоих.

Естественно, встает вопрос о возможных равновесиях Нэша в "игре дележа", в условия которой входит правило, по которому строится дележ, и о существовании неманипулируемых правил. Вероятно, это станет предметом следующего исследования.

Полученные результаты опубликованы в работе [122]:

Шварц Д.А. Манипулирование в задаче дележа для двух участников // Автоматика и телемеханика, 2011. № 1. с.130-140.

7 Применение методов оптимального коллективного выбора и ранжирования альтернатив к построению агрегированных рейтингов и разработке самообучающихся ранжирующих алгоритмов для фильтрации записей

В этом разделе отчета приведены исследования по применению методов оптимального коллективного выбора и ранжирования альтернатив, основанных на коллективных предпочтениях, моделируемых мажоритарным отношением к:

– построению агрегированных рейтингов научных журналов по экономике методами теории коллективного выбора;
– разработке самообучающихся ранжирующих алгоритмов для фильтрации записей в поисковых системах.

7.1 Построение агрегированных рейтингов научных журналов по экономике методами теории коллективного выбора

Для объективной оценки качества научных журналов используются различные библиометрические показатели, такие как импакт-фактор, индекс оперативности, индексы SNIP и SJR и другие. На основании расчета значений этих индексов строятся рейтинги, отражающие сравнительную значимость журнала, как средства внутринаучной коммуникации. Однако множественность показателей приводит к несовпадению оценок влиятельности журналов, сделанных на их основе.

Данное исследование явилось продолжением исследования прошлого года, результаты которого, а также используемая в настоящем исследовании модель опубликованы в работе [123] В отчетном году целью исследования было применение разработанной методологии количественной оценки степени (не)согласованности различных библиометрических показателей, и построения рейтингов, агрегирующих информацию об их сравнительной значимости, которую дают ранжирования по отдельным показателям, для анализа массива эмпирических данных о 172 международных научных журналах по экономике.

В настоящем исследовании был использован аналогичный подход к построению таких рейтингов, основанный на использовании методов ранжирования, впервые предложенных в теории коллективного выбора, а затем примененных в задачах многокритериального оценивания. Различными критериями, по которым оцениваются журналы, в данном случае, являются те же библиометрические показатели, что и при оценке журналов по менеджменту: двух- и пятилетний импакт-факторы, индекс оперативности, индекс влияния статьи, индекс Хирша, индексы SNIP и SJR. Критериальные оценки агрегируются на основании мажоритарного правила (правила большинства). Результатом агрегирования становится бинарное отношение, называемое мажоритарным. Это отношение содержит информацию о парных сравнениях журналов, то есть дает ответ на вопрос – какой из двух сравниваемых журналов лучше по большинству критериев. С помощью мажоритарного отношения определялись те журналы, которые следует считать наилучшими с точки зрения всей совокупности показателей. Для этого использовались правила выбора, основанные на обобщении принципа выбора максимального элемента отношения, такие как правило выбора альтернатив, принадлежащих непокрытому множеству, и правило выбора альтернатив, принадлежащих минимальному внешнеустойчивому множеству. Агрегированный рейтинг получался с помощью многоступенчатой процедуры сортировки: по правилу выбора, основанному на мажоритарном отношении, из совокупности журналов, еще не получивших места в рейтинге, выбирались наилучшие; выбранные журналы помещались на первую незанятую позицию рейтинга; затем эти журналы исключались из числа журналов, еще не получивших места в рейтинге, и далее процедура повторялась для оставшейся совокупности.

Анализ степени согласованности оценок влиятельности научного журнала, получаемых с помощью семи вышеописанных библиометрических показателей (импакт-фактора, 5-летнего импакт-фактора, индекса оперативности, индекса влияния, индекса Хирша, индексов SNIP и SJR), на этапе исследования, соответствующем отчетному периоду, проводился для научных журналов по экономике. Полный набор значений вышеперечисленных индексов есть для 172 журналов, из которых были отобраны для предварительного анализа 24 журнала.

На основании значений библиометрического показателя строился рейтинг журналов, то есть ранжирование, состоящее из позиций (мест, на которые можно поставить один или несколько журналов). Журналы с совпадающими значениями показателя соответствуют одной позиции ранжирования, т.е. одинаковому месту в рейтинге, а несовпадающие – разным. Позиции упорядочиваются по «ухудшению» (в нашем случае – убыванию) значения показателя и нумеруются натуральными числами, начиная с позиции, соответствующей «наилучшему» значению.

Номер позиции является ранговой переменной, поэтому для оценки согласованности двух различных рейтингов журналов использовались ранговые коэффициенты корреляции.

Рассмотрим пару журналов и сравним их позиции в двух рейтингах. Если позиция одного из журналов выше позиции другого журнала как в одном рейтинге, так и в другом, или если номера позиций обоих журналов совпадают как в одном рейтинге, так и в другом, то говорят, что данные рейтинги строго согласуются в оценке данной пары. Соответственно, мерой согласия рейтингов является доля (в процентах) тех (неупорядоченных) пар журналов, в оценке которых рейтинги строго согласуются друг с другом, $R_{strict}=100*(N_{+}+N_{0})/N$, где N_{+} – число пар, в которых позиция одного из журналов выше позиции другого журнала как в одном рейтинге, так и в другом, N_0 – число пар, в которых номера позиций обоих журналов совпадают как в одном рейтинге, так и в другом, N – общее число пар. Величина R_{strict} принимает значения от 0% до 100%, и достигает 100%, когда оба рейтинга полностью совпадают. Результаты вычислений величины R_{strict} приведены в Таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Доля строго согласующихся пар R_{strict}

	5-летний импакт-фактор	индекс оперативности	индекс влияния	индекс Хирша	SNIP	SJR
импакт-фактор	92	71	83	76	84	82
5-летний импакт-фактор		71	86	78	84	83
индекс оперативности			66	63	68	66
индекс влияния				75	83	82
индекс Хирша					75	76
SNIP						80

Величина R_{strict} слишком жестко оценивает расхождения между двумя ранжированиями, ведь если в одном рейтинге журналы стоят на одной позиции, а в другом – на разных, то нет необходимости трактовать эту ситуацию как противоречие. Можно считать, что в данном случае первый рейтинг «уточняет» второй, поскольку различие журналов он «видит» лучше, чем рейтинг, с точки зрения которого журналы одинаковы. Соответственно, с помощью вышеописанного «принципа уточнения» из двух различных рейтингов можно построить один, согласованный рейтинг, учитывающий оценки журналов как по одному, так и по другому критерию. Но сделать это можно только при условии, что между рейтингами нет действительных противоречий, то есть нет таких пар, которые оцениваются противоположным образом (в одном рейтинге первая альтернатива стоит выше второй, тогда как в другом – вторая выше первой). Таким образом, если в оценке данной пары журналов два рейтинга строго согласуются или если хотя бы в одном из них журналы стоят на одной позиции, то будем говорить, что эти рейтинги в оценке данной пары согласуются нестрого. Соответственно, мерой согласия рейтингов является доля пар, в оценке которых они согласуются нестрого. Она вычисляется по формуле R_{weak}=100*(1 – (N_-/N)), где N_- – это число противоречий (пар, ранжированных противоположным образом). Величина R_{weak} принимает значения от 0% до 100%, и достигает 100%, когда два рейтинга можно объединить в один на основании принципа уточнения. Результаты вычислений величины R_{weak} приведены в Таблице 7.2. Очевидно, что для любой пары показателей $R_{weak} \geq R_{strict}$.

Таблица 7.2 – Доля нестрогого согласующихся пар R_{weak}

	5-летний импакт-фактор	индекс оперативности	индекс влияния	индекс Хирша	SNIP	SJR
импакт-фактор	92	72	83	84	84	84
5-летний импакт-фактор		72	86	86	84	85
индекс оперативности			67	71	68	69
индекс влияния				83	83	84
индекс Хирша					82	85
SJR						82

Также были рассчитаны значения двух коэффициентов ранговой корреляции: τ_b Кендалла [124] и Г («гамма») Гудмана-Краскала [125]. Если число позиций в обоих рейтингах равно числу журналов, то τ_b=1 и Г=1 означает, что эти рейтинги полностью совпадают, а τ_b=-1 и Г=-1 имеет место в случае, когда они абсолютно противоположны. Коэффициенты Г и τ_b вычисляются по формулам:

$$\Gamma=(N_+-N_-)/(N_++N_-),$$

$$\tau_b=(N_+-N_-)/\mathrm{Sqrt}((N-n_1)*(N-n_2)),$$

где n_1 и n_2 – это число пар журналов с совпадающими рангами в первом и втором рейтинге, соответственно. Результаты вычислений Г и τ_b приведены в Таблицах 7.3 и 7.4, соответственно.

Таблица 7.3 – Коэффициент Г

	5-летний импакт-фактор	индекс оперативности	индекс влияния	индекс Хирша	SNIP	SJR
импакт-фактор	0,84	0,43	0,66	0,65	0,68	0,68
5-летний импакт-фактор		0,44	0,73	0,69	0,69	0,69
индекс оперативности			0,34	0,37	0,36	0,36
индекс влияния				0,63	0,66	0,66
индекс Хирша					0,62	0,67
SNIP						0,63

Таблица 7.4 – Коэффициент τ_b

	5-летний импакт-фактор	индекс оперативности	индекс влияния	индекс Хирша	SNIP	SJR
импакт-фактор	0,84	0,43	0,66	0,62	0,68	0,68
5-летний импакт-фактор		0,43	0,73	0,66	0,69	0,68
индекс оперативности			0,34	0,35	0,36	0,35
индекс влияния				0,61	0,66	0,66
индекс Хирша					0,60	0,64
SNIP						0,63

Практически все величины показывают наличие сильной положительной корреляции рассматриваемых библиометрических показателей. Если исключить из рассмотрения индекс оперативности, который, как и в прошлый раз, хуже всего коррелирует со всеми другими показателями, то для любой пары индексов значение Г снова будет больше 0,6. Это вполне предсказуемо, поскольку в экономике, как и в менеджменте, знание воспринимается достаточно медленно, и число цитирований, полученных статьями непосредственно в год их выхода, невелико.

Наибольшую корреляцию, по прежнему, демонстрируют два импакт-фактора — двухлетний и пятилетний τ_b=Г=0,84). Это еще одно свидетельство того, что по среднему числу ссылок на статьи журнала, вышедшие в течение двух предыдущих лет, можно делать хорошие предсказания о цитируемости более глубокого архива издания. За этой парой снова следует пара пятилетний импакт-фактор/индекс влияния (τ_b=Г=0,74). Сильную корреляцию этой пары, как было отмечено на предыдущем этапе исследования, можно объяснить ем, что для расчета обоих индикаторов используется одна и та же база данных Web of Science (Journal Citation Reports) и одинаковое (пятилетнее) окно цитирования. Наиболее «самобытный» показатель, индекс Хирша, также как и в прошлый раз, имеет максимальную корреляцию с пятилетним импакт-фактором (τ_b=Г=0,69), что также может быть объяснено равной глубиной (5 лет) и одинаковой базой данных (Web of Science).

Поиск минимальных значений τ_b и Г (при исключении из рассмотрения индекса оперативности) дает отличные от предыдущего этапа исследования результаты. Самую слабую корреляцию демонстрирует индекс Хирша: τ_b=0,60 (с индексом SNIP), τ_b=0,61 (с индексом влияния), τ_b=0,62 (с импакт-фактором), а пара SNIP/SJR, дававшая для журналов по менеджменту второе по величине значение Г (0,77), теперь коррелирует значительно слабее: Г=0,64. Дальнейший анализ этих расхождений должен углубить наше понимание поведения исследуемых библиометрических показателей.

Аналогичные закономерности демонстрируют коэффициенты R_{strict} и R_{weak} (Таблицы 7.1 и 7.2), с незначительными вариациями. Это опять свидетельствует о хорошем согласии между собой различным образом построенных коэффициентов ранговой корреляции. В целом, за исключением индекса оперативности, степень корреляции оценок, получаемых журналами по различным библиометрическим показателям, может быть оценена как высокая, а в ряде случаев даже как очень высокая.

Полученные значения коэффициентов ранговой корреляции показывают, что использование различных показателей приводит к схожим, но отнюдь не совпадающим ранжированиям журналов. Даже наиболее близкие друг к другу индексы, двух- и пятилетний импакт-факторы, дают противоположные оценки в 8% случаев, и, следовательно, основанные на них рейтинги не могут быть согласованы с помощью принципа уточнения. Поскольку мы предполагаем, что расхождения между индексами могут быть обусловлены не сравнительной ущербностью одного из них, а тем, что они связаны с измерением различных сторон такого многомерного понятия, как значимость журнала, возникает необходимость найти способ построения рейтинга журналов на основании информации, которую дает об их значимости каждый из индексов. Таким образом, ранжирование журналов превращается в проблему оценки на основании нескольких критериев, т.е. в многокритериальную задачу.

Классическим решением задачи ранжирования альтернатив, оцениваемых по нескольким критериям, является вычисление взвешенной суммы значений критериев для каждой из альтернатив и их упорядочение по этой величине. Однако у этого метода есть серьезное ограничение – необходимо теоретически обосновать возможность суммирования. Для рассматриваемой задачи такого обоснования пока нет, следовательно, мы не можем быть уверены в том, что суммирование взвешенных значений библиометрических показателей является корректной процедурой, дающей логически осмысленные результаты. Выходом из положения является возможность использования в многокритериальных задачах методов, разработанных в теории коллективного выбора.

Основной задачей теории коллективного выбора является описание способов определения альтернатив, которые или *будут* выбраны, или *должны быть* выбраны из числа имеющихся в наличии вариантов на основании мнения о них индивидуальных участников процесса принятия коллективных решений. Применить методы теории коллективного выбора в задаче многокритериального оценивания можно, если оценку альтернатив по каждому из критериев считать мнением одного из членов группы, от каждого из которых зависит выбор коллектива. Соответственно, в задаче построения агрегированного рейтинга журналов альтернативами считаются журналы, а мнением индивидуального участника процесса принятия коллективных решений – их оценки по определенному показателю цитируемости.

Использовалась следующая математическая модель коллективного выбора: дано множество доступных для выбора альтернатив A, $|A|=m\geq 3$, и группа N, $|N|=n\geq 2$, лиц, участвующих в процессе принятия коллективного решения, которое сводится к выбору определенных альтернатив из A. Мнение отдельного участника i, $i\in N$, об альтернативах из A, определяющее его индивидуальный выбор, моделируется бинарным отношением P_i на A, $P_i\subseteq A\times A$, фиксирующим результаты попарного сравнения альтернатив. Если при сравнении пары альтернатив x и y участник i отдает предпочтение альтернативе x, то говорят, что упорядоченная пара (x, y) принадлежит отношению P_i, $(x, y)\in P_i$, или, что альтернатива x доминирует альтернативу y по отношению P_i, xP_iy. Если выбирающий не способен решить, какая из двух альтернатив лучше, или считает их равноценными, то будем полагать, что он не предпочитает ни одну из них другой, т.е. что имеет место $(x, y)\notin P_i$ & $(y, x)\notin P_i$.

Если известны предпочтения того, кто делает выбор (т.е. бинарное отношение на A), и если задано правило выбора, определенное как функция, отображающая множество бинарных отношений на A в множество непустых подмножеств A, то можно предсказать, какие альтернативы должны стать результатом выбора. Таким образом, зная индивидуальные предпочтения, задачу коллективного выбора можно решить, если, во-первых, определить бинарное отношение μ, $\mu\subseteq A\times A$, моделирующее коллективные предпочтения (мнение коллектива об альтернативах из A), а во-вторых, задать правило выбора $S(\mu, A)$: $\{\mu\}\rightarrow 2^A\backslash\varnothing$, называемое также решением. Обычно отношение μ строится из отношений предпочтений индивидуальных участников с помощью мажоритарного правила и поэтому называется мажоритарным отношением.

Выбор в качестве способа агрегирования мажоритарного правила однозначно диктуется рядом естественных условий [126], справедливых и для рассматриваемой задачи построения агрегированного рейтинга журналов. Кроме того, в многокритериальных задачах использование мажоритарного правила является способом получать агрегированные оценки альтернатив, не прибегая к арифметическим действиям над критериями, обосновать законность которых, как было сказано выше, затруднительно или вообще невозможно.

Для проведения компьютерных вычислений мажоритарное отношение μ представляется с помощью мажоритарной матрицы $M=[m_{ij}]$, определяемой так:

$$m_{xy}=1 \Leftrightarrow (x, y)\in \mu,\ m_{xy}=0 \Leftrightarrow (x, y)\notin \mu.$$

Аналогично мажоритарной матрице M можно построить матрицу T, представляющую отношение равенства голосов τ.

Одним из наиболее простых способов построения рейтинга альтернатив является правило Коупленда [127]. В основе этого правила лежит следующее соображение: чем больше число альтернатив, которые хуже (при парном сравнении), чем альтернатива x, тем лучше данная альтернатива в целом. Можно рассуждать и так: чем меньше число альтернатив, которые лучше (при парном сравнении), чем альтернатива x, тем лучше данная альтернатива в целом, а также можно комбинировать эти правила. Нижний срез L(x) альтернативы x – это множество альтернатив, которые хуже, чем x по мажоритарному отношению, $L(x)=\{y \mid x\mu y\}$, верхний срез D(x) – это множество альтернатив, которые, соответственно, лучше, $D(x)=\{y \mid y\mu x\}$. Агрегированное ранжирование по Коупланду есть

упорядочение альтернатив по числу очков s(x), которые присуждаются одним из трех способов:

– версия 1: $s_1(x)=|L(x)|-|D(x)|$;

– версия 2: $s_2(x)=|L(x)|$;

– версия 3: $s_3(x)=|A|-|D(x)|$.

В настоящем исследовании, кроме второй версии правила, использовавшейся на предыдущем этапе, была также использована третья версия. Векторы $\mathbf{s}_2$ и $\mathbf{s}_3$ очков, получаемых журналами по второй и третьей версии правила Коупленда, вычисляется по формулам $\mathbf{s}_2=\mathbf{M}\cdot\mathbf{a}$ и $\mathbf{s}_3=(\mathbf{I}-\mathbf{M}^{tr})\cdot\mathbf{a}$, соответственно, где **I** и **a** – это матрица и вектор, все компоненты которых равны 1.

Для построения рейтинга также можно использовать известное решение задачи выбора наилучших альтернатив. Рассмотрим следующую итерационную процедуру. Решение $S(\mu, A)$ определяет множество $B_{(1)}$ наилучших альтернатив в A, $B_{(1)}=S(\mu, A)$. По сравнению со всеми остальными альтернативами варианты из $B_{(1)}$ – это альтернативы «первого сорта». Если повторить процедуру выбора для множества $A\backslash B_{(1)}$, то будет определено множество $B_{(2)}=S(\mu, A\backslash B_{(1)})=S(\mu, A\backslash S(\mu, A))$, содержащее альтернативы, которые можно назвать альтернативами «второго сорта» (они хуже альтернатив из $B_{(1)}$, но лучше альтернатив из $A\backslash(B_{(1)}\cup B_{(2)})$). Повторяя операцию удаления наилучших альтернатив, определенных на предыдущем этапе, за конечное число шагов мы разделим все множество A на группы альтернатив разных сортов, $B_{(k)}=S(\mu, A\backslash B_{(k-1)})$, что и будет искомым ранжированием.

В данном исследовании для построения агрегированного рейтинга были выбраны два решения: вторая версия непокрытого множества UC^{II} [128] и минимальное внешнеустойчивое множество MES [129], [130], [9], [131].

Непокрытое множество и объединение минимальных внешнеустойчивых множеств могут быть вычислены с помощью матрицы M. Формулы, выражающие UC^{II} и MES через M, приведены в работе [132].

Агрегированные рейтинги первых 10-ти журналов, построенные на основании парных сравнений по семи библиометрическим показателям с помощью правила Коупленда, правила выбора альтернатив, принадлежащих непокрытому множеству и правила выбора альтернатив, принадлежащих минимальному внешнеустойчивому множеству, даны в Таблице 7.5.

Таблица 7.5 – Номер журнала в рейтинге по показателю или в агрегированном рейтинге

	Impact factor	5-year impact factor	Immediacy Index	Article influence	Индекс Хирша	SNIP	SJR	Copeland (2) score	Copeland (3) score	UC^{II}	MES
Число рангов	163	168	133	166	23	167	68	117	122	55	35
JOURNAL OF ECONOMIC LITERATURE	1	1	4	3	7	1	2	1	1	1	1
QUARTERLY JOURNAL OF ECONOMICS	2	2	6	1	3	2	4	2	2	2	2
JOURNAL OF POLITICAL ECONOMY	6	3	48	2	4	4	8	3	3	3	3
JOURNAL OF FINANCE	7	4	18	5	2	3	16	4	4	4	4
JOURNAL OF FINANCIAL ECONOMICS	3	5	41	6	2	5	18	5	5	5	5
ECONOMETRICA	4	7	61	4	4	7	7	6	6	6	6
JOURNAL OF ECONOMIC PERSPECTIVES	9	6	5	9	5	6	9	7	7	7	7
REVIEW OF ECONOMIC STUDIES	14	13	12	7	5	9	17	8	8	8	8
REVIEW OF ECONOMICS AND STATISTICS	18	10	21	11	6	10	15	9	9	9	9
AMERICAN ECONOMIC REVIEW	19	11	43	10	1	11	12	10	10	10	10

Таблицы 7.6 и 7.7 содержат результаты вычисления коэффициентов ранговой корреляции Г и τ_b для четырех агрегированных рейтингов и семи ранжирований по значению одного индекса.

Таблица 7.6 – Коэффициент ранговой корреляции Г

	правило Коупленда (2 версия)	правило Коупленда (3 версия)	непокрытое множество UC	минимальное внешнеустойчивое множество MES
импакт-фактор	0,85	0,85	0,86	0,85
5-летний импакт-фактор	0,89	0,89	0,90	0,90
индекс оперативности	0,45	0,45	0,46	0,47
индекс влияния	0,76	0,77	0,77	0,81
индекс Хирша	0,75	0,75	0,76	0,78
SNIP	0,76	0,76	0,77	0,78
SJR	0,76	0,76	0,77	0,80
правило Коупленда (2 версия)		0,99	0,98	0,97
правило Коупленда (3 версия)			0,98	0,97
непокрытое множество UC				0,97

Таблица 7.7 – Коэффициент ранговой корреляции τ_b

	правило Коупленда	правило Коупленда	непокрытое множество UC	минимальное внешнеустойчиво

	(2 версия)	(3 версия)		е множество MES
импакт-фактор	0,85	0,85	0,85	0,82
5-летний импакт-фактор	0,88	0,89	0,89	0,87
индекс оперативности	0,45	0,45	0,46	0,46
индекс влияния	0,76	0,76	0,76	0,79
индекс Хирша	0,72	0,72	0,73	0,73
SNIP	0,75	0,75	0,76	0,76
SJR	0,76	0,75	0,76	0,77
правило Коупленда (2 версия)		0,99	0,96	0,94
правило Коупленда (3 версия)			0,96	0,94
непокрытое множество UC				0,94

В целом можно заметить, что величины индексов корреляции τ_b и Г для любого из трех построенных ранжирований с ранжированиями по библиометрическим показателям выше, чем при сравнении последних между собой. Иначе говоря, введенные ранжирования хорошо соотносятся с совокупностью библиометрических показателей и могут служить в качестве интегральных показателей для построения рейтинга журналов.

Еще одним преимущество предложенного подхода состоит в том, что он дает более «грубое» разбиение журналов, что больше соответствует интуитивным представлениям об их значимости.

Естественным продолжением данного исследования является применение для построения агрегированных рейтингов других решений и других способов ранжирования альтернатив на основании отношения мажоритарного доминирования, а также применение данного анализа к другим объектам ранжирования (например, государствам мира) или к другим совокупностям журналов.

Полученные результаты опубликованы в работе [123]:

Алескеров Ф.Т., Писляков В.В., Субочев А.Н., Чистяков А.Г. Построение рейтингов журналов по менеджменту с помощью методов теории коллективного выбора // WP7/2011/04 «Математические методы анализа решений в экономике, бизнесе и политике», М.: ГУ ВШЭ, 2011. – 44 с.

7.2 Алгоритм надпорогового выбора для фильтрации записей в поисковых системах

7.2.1 Постановка задачи

Задачей исследования этого пункта является разработка самообучающегося ранжирующего алгоритма для фильтрации записей с возможностью последующего применения в поисковых системах.

В качестве объекта исследования был взят класс поисковых систем. Основной принцип работы большинства поисковых систем заключается в индексировании веб-страниц, документов, прочих данных сети Интернет *(далее – объекты)*, создании хранилища данных, а затем формировании выборки в соответствии с запросом пользователя и ранжировании полученных записей с последующим выводом.

Каждый объект характеризуется некоторым набором факторов. Эти факторы могут быть поделены на три группы:

– факторы, не зависящие от запроса. Они непосредственно описывают статические свойства (характеристики) объекта. Примером могут служить такие факторы, как *размер веб-страницы, ее PageRank, длина URL*;

– факторы, зависящие только от запроса, например, *длина запроса*;

– факторы, зависящие как от запроса, так и от самого объекта и представляющие динамические характеристики последнего. Пример – *частота слов из запроса в заголовке документа, в его теле, либо во всем документе*.

Каждый фактор может быть рассчитан согласно специальной математической модели.

Ниже описывается структура данных в выборке (предполагается, что система уже проиндексировала данные):

В самом начале формируется обучающая выборка. Для этого производится N запросов и некоторое количество объектов n_i оцениваются по каждому запросу. Каждому объекту машина ставит в соответствие вектор $\{α1, α2, …, αm\}$, где m – количество факторов, αj – значение j-ого фактора. Специально обученный эксперт анализирует объекты $n_1,…,n_n$ и проставляет их степень релевантности запросу N согласно специальным инструкциям. Таким образом, обучающая выборка представляется в виде набора из Ntotal = $\sum_{i=1}^{N} n_i$ векторов. В Таблице 7.8 описывается формат обучающей выборки.

Таблица 7.8 – Формат обучающей выборки

<table>
<tr><th>Степень релевантности</th><th>Номер запроса</th><th>Факторы, зависящие от запроса</th><th>Факторы, зависящие не только от запроса</th><th colspan="2">Факторы, не зависящие от запроса</th></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>α_{1kj}</td><td>α_{1kj}</td><td>α_{kj}</td><td rowspan="3">N Total</td></tr>
<tr><td colspan="5">…</td></tr>
<tr><td>3</td><td>N</td><td>α_{Nkj}</td><td>α_{Nkj}</td><td>α_{kj}</td></tr>
<tr><td colspan="5">M</td></tr>
</table>

Здесь:

N – количество запросов;

i=1..N – номер запроса;

n_i – количество документов в i-ом запросе;

k=1...n_i – номер документа в i-ом запросе;

M – количество факторов;

j=1…M – номер фактора;

α – значение некоторого фактора.

По этой обучающей выборке строится некоторая ранжирующая математическая модель обучения системы, на базе которой становится возможным поставить релевантность некоторой странице на других данных, не входящих в обучающую выборку.

Концепция функционирования поисковой системы заключается в том, что пользователь вводит некоторый запрос, в результате чего происходит вычисление значений факторов (векторов) и с помощью ранжирующей математической модели присваивается релевантность каждому объекту. В итоге формируется список наиболее релевантных объектов.

Основной задачей работы является построение ранжирующей математической модели по обучающей выборке, с помощью которой можно ранжировать страницы, список которых получен согласно запросу пользователя.

7.2.1.1 Описание данных

Для построения ранжирующей модели были выбрана обучающая выборка, предоставляемая подразделением Microsoft Research корпорации Microsoft (версия выборки – LETOR 4.0). Набор данных содержит 10000 запросов. Выборка составлялась следующим образом: набор данных был поделен на 5 равных частей, 3 из которых используются для обучения ранжирующей модели, одна - для проверки правильности модели и последняя – для оценки эффективности обученной модели.

В данной выборке каждый объект характеризуется по 136 факторам, а релевантность ставится в диапазоне от 0 до 4, где 0 означает низкую релевантность, 4 – высокую.

7.2.1.2 Обработка файла

Для построения модели перерабатывается исходная выборка. Факторы, нуждающиеся в уменьшении эффекта масштаба, логарифмируются. После этого производится нормализация значений факторов в диапазоне от 0 до 1 по следующей формуле

$$V\_нов = \frac{V\_стар - V\min}{V\max - V\min},$$

где

V_нов – новое значение после нормализации данных;

V_стар – старое значение до нормализации данных;

Vmin – минимальное значение фактора;

Vmax – максимальное значение фактора.

7.2.1.3 Выявление значимых и незначимых факторов

Процедура отбрасывания факторов проводиться на основе построения матрицы корреляции, ее последующей диагонализации и построении регрессии с объектами, имеющими релевантность 3 и 4. Их всего 6012.

Шаг 1. Вычисление индекса корреляции: для 136 факторов строится матрица значений индекса парной корреляции (индекса Пирсона);

Шаг 2. Диагонализация матрицы связи с помощью алгоритма “Объединение” по корреляционной матрице.

Диагонализация матрицы связи позволяет получать группы с высоким уровнем корреляции между факторами в группе. Проведение этой процедуры обусловлено необходимостью исключения лишних факторов, то есть таких, которые хорошо коррелированы и одновременное использование которых приводит к избыточности векторного представления исходных данных. Иными словами, сжимается размерность векторов факторов без потери уникальности описания объектов. Используемый уровень значимости при диагонализации – 0,85. В результате было получено 54 группы, перечисленные в Таблице 7.9.

Таблица 11.9 – Группы сильно коррелирующих факторов

Номер группы	Фактор	С какими факторами находится в одной группе
Группа №1	1	5
Группа №2	2	107, 7, 102, 22, 72, 37, 87, 32, 82
Группа №3	3	108, 8, 103
Группа №4	4	49, 109, 24, 34, 74, 84, 9, 39, 89, 104
Группа №6	6	101, 96
Группа №10	10	105, 10
Группа №11	11	15
Группа №12	12	
Группа №13	13	
Группа №14	14	127
Группа №16	16	20
Группа №17	17	18, 19
Группа №21	21	25, 31, 35, 36, 40
Группа №23	23	73
Группа №26	26	30
Группа №27	27	77, 97
Группа №28	28	98, 78
Группа №29	29	99, 79, 54, 64
Группа №33	33	83, 38, 88
Группа №41	41	45
Группа №42	42	92
Группа №43	43	93
Группа №44	44	94
Группа №46	46	56, 61
Группа №47	47	57, 62
Группа №48	48	
Группа №50	50	
Группа №51	51	

Группа №52	52	
Группа №53	53	63, 58
Группа №55	55	60, 65
Группа №59	59	
Группа №66	66	
Группа №67	67	
Группа №68	68	
Группа №69	69	
Группа №70	70	
Группа №71	71	75, 81, 85
Группа №76	76	80, 86, 90
Группа №91	91	95
Группа №106	106	110
Группа №112	112	122, 117, 114, 124, 119
Группа №113	113	123
Группа №116	116	120, 118, 111, 121, 115, 125
Группа №126	126	
Группа №128	128	
Группа №129	129	
Группа №130	130	
Группа №131	131	
Группа №132	132	
Группа №133	133	
Группа №134	134	
Группа №135	135	
Группа №136	136	
Число групп – 54		

Шаг 3. Выбор по одному фактору из каждой группы. В качестве критерия выбора был использован следующий метод: проведение регрессии по факторам внутри каждой группы и выбор фактора с наибольшим значимым коэффициентом регрессии. Таким было выбрано 54 фактора.

Шаг 4. Проведение регрессии по 54 факторам. По оставшимся 54 факторам выборки проведена регрессия, проверена их значимость, незначимые факторы убраны.

Шаг 5. Исключение факторов при уровне доверия 5 %.

Убираются все факторы, незначимые на 5%. Остается значимых – 12 факторов. Далее проводится повторная регрессия, все факторы оказываются значимыми на уровне 5%. В Таблице 7.10 приведен итоговый результат.

Таблица 7.10 – Факторы значимые на уровне 5%

13	3,311	stream length	title
15	-0,44	stream length	whole document
16	0,307	IDF	body
23	-0,822	sum of term frequency	title
48	1,787	sum of stream length normalized term frequency	title
57	-0,175	max of stream length normalized term frequency	anchor
118	-10,321	LMIR.DIR	title
122	12,98	LMIR.JM	anchor
126	-1,901	Number of slash in URL	
131	0,222	SiteRank	
132	0,113	QualityScore	The quality score of a web page. The score is outputted by a web page quality classifier.
133	-0,181	QualityScore2	The quality score of a web page. The score is outputted by a web page quality classifier, which measures the badness of a web page.

7.2.2 Алгоритм надпороговой суперпозиции

Надпороговая модель

Все *объекты* представляются как *точки в N-мерном пространстве*, где N–1 измерений – это факторы оценки запросов и еще одно – релевантность. Осуществляется переход к пространству критериев (N–1 измерений), точки располагаются в нем. Далее выбирается одно из измерений (ось) по следующему правилу: разброс координат релевантных (релевантность в нашем случае равна 4) точек по этой оси должен быть наименьшим, то есть выбирается наиболее «кучный» показатель. Рассмотрим пример, изображенный на рисунке 7.1. Поскольку расстояние d1 меньше расстояния d2, то ось №1 предпочтительнее.

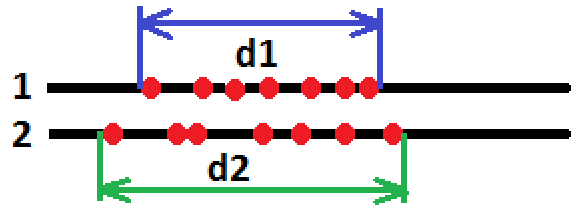


Рисунок 7.1 – Пример сравнения двух измерений

Таким образом, выбирается одна ось и обозначается как *. Далее выбирается любая другая ось, *выделяются те точки, значения которых выше границы* в случае, если регрессия по этому фактору положительна *или ниже границы*, если регрессия по этому фактору отрицательна.

Отобранные точки помечаются на заранее выбранную эталонную ось (*), на которой происходит вычисление разброса высоко релевантных. Подобная процедура повторяется по всем критериям кроме эталонного (*). Ниже приведен иллюстративный пример таких процедур для трехмерного пространства (1 – эталонный фактор, по 2 и 3 считается граница, выбираются точки, помечаются на 1 оси и считаются разбросы (d2 и d3)):

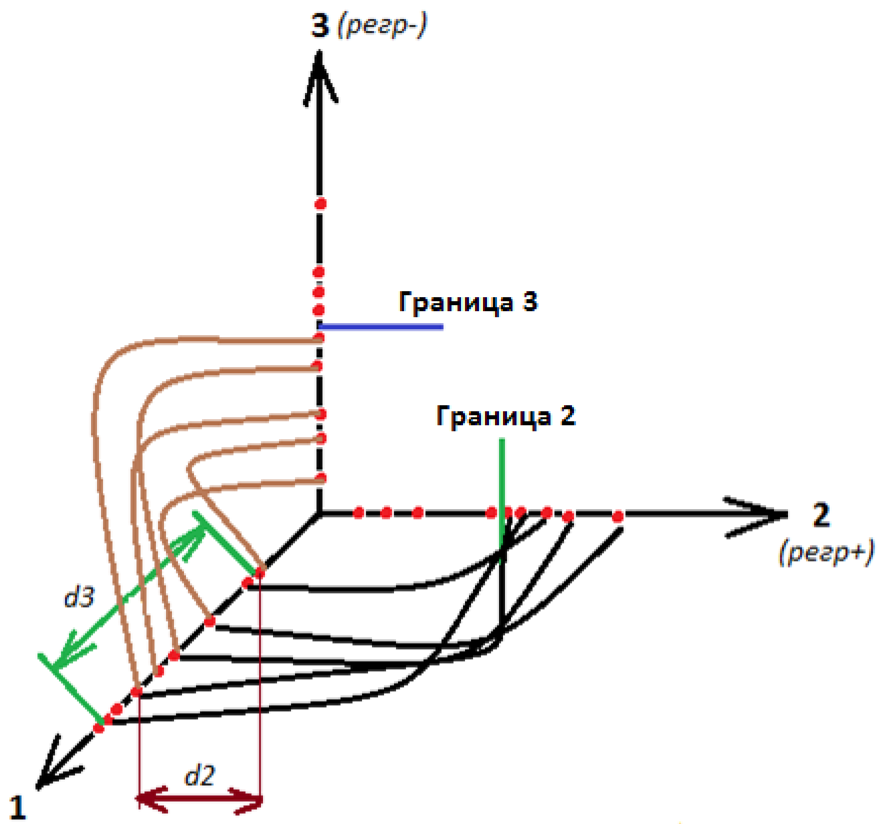


Рисунок 7.2 – Пример сравнения разбросов

Происходит сравнение всех посчитанных разбросов (на рисунке 7.2 сравниваются d2 и d3), выбирается фактор с наименьшим разбросом, заносится в итоговую цепочку (результат) и исключается из рассмотрения. Также из рассмотрения исключаются все точки, оказавшиеся ниже границы по исключенному фактору. Далее процедура поиска наиболее «кучной» оси по оставшимся точкам, а также вычисления разбросов повторяется заново. Действия итеративно повторяются до тех пор, пока не закончатся релевантные/нерелевантные точки или все оси не будут пройдены. В конечном итоге получается цепочка последовательных отсечений, а также группа точек, которая будет достигаться при применении этих отсечений. На рисунке 2 результатом прохождения алгоритма является цепочка последовательных отсечений сначала по 2-му, а затем по 3-ему фактору.

7.2.3 Алгоритм определения эффективных границ

Целью данного алгоритма является нахождение значений границ по каждому фактору, отделяющих релевантные объекты от нерелевантных. Алгоритм используется в модели обучения.

На вход алгоритма поступает некоторая выборка объектов с посчитанными значениями факторов и релевантностью по каждому объекту. Выборка разбивается на две части по признаку релевантности объекта. По каждому фактору выполняется построение распределения долей объектов в подвыборках по следующему правилу: в двухмерном пространстве на оси абсцисс располагается значение фактора (Fv), а на оси ординат – доля объектов от общего количества в подвыборке (Ф) (то есть доля релевантных в подвыборке релевантных и доля нерелевантных в подвыборке нерелевантных) при текущем значении фактора. Под долей объектов подразумевается отношение числа объектов в диапазоне от 0 до текущего значения границы. После этого выполняется проход по значению фактора от начального до конечного (в нашем случае от 0 до 1) с заданным шагом. На каждом шаге вычисляется разность значений функций распределения Фd = Фr – Фc, а затем выбирается Fv:Фd $\rightarrow$ max.

На рисунке 7.3 показаны функции распределения релевантных (Фr) и нерелевантных (Фс) объектов в зависимости от значения фактора Fv. На выходе алгоритма получается вектор (F;L;Фd(L)), где F – номер фактора, L – значение фактора при максимальной разности функций распределения Фd, а Фd(L) – значение разности функций распределения при границе L.

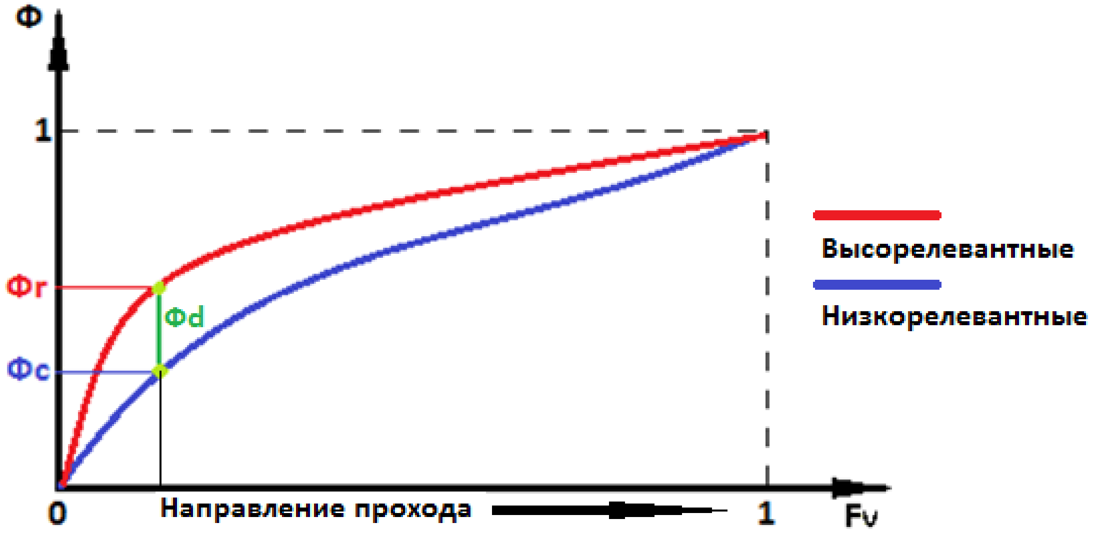


Рисунок 7.3 – Функции распределения релевантных и нерелевантных объектов

7.2.4 Кластеризация запросов qid

Туннельный метод кластеризации

Для классификации запросов применяется туннельный метод кластеризации. Выбор этого метода обусловлен его преимуществами по сравнению с иными методами кластерного анализа, а именно:

– эндогенное определение количества кластеров и их состава по результатам решения определенной оптимизационной задачи. Этот подход позволяет выявить однородные совокупности без начального определения количества кластеров и их состава;

– возможность проведения кластеризации в случае, когда система показателей для разных объектов имеет одну и ту же структуру, но отличается по абсолютному значению.

Предварительно из каждого запроса выбирается эталонная страница, то есть такая, которая наибольшим образом похожа на другие страницы этого запроса.

Суть метода заключается в следующем: на оси абсцисс откладываются номера факторов, которые характеризуют свойства веб-страницы, ось ординат представляет собой ось значений этих факторов. Таким образом, для каждой эталонной страницы получается набор точек, соответствующий ее свойствам. Далее строится кусочно-линейная функция путем соединения этих точек прямыми линиями. Такая процедура производится для каждой страницы. Таким образом, для n станиц будет построено n функций (кривых). Кластеры формируются по результатам применения специального алгоритма исходя из похожести этих функций.

На данный момент был рассмотрен следующий алгоритм: выбирается некоторый i-ый объект, который мы будем считать средним элементом кластера C (i∈C). Далее выбирается некоторый j-ый объект. Если разница между значениями факторов этих объектов лежит в пределах заранее заданного значения ε, то эти объекты будут принадлежать одной группе:

$$\text{если } i \in C, \forall k \in M : \left|\alpha_{ik} - \alpha_{jk}\right| \leq \varepsilon \Rightarrow j \in C,$$

где M – множество факторов.

Интервальная кластеризация

Интервальная кластеризация является модификацией алгоритма туннельной кластеризации. Преимуществом метода интервальной кластеризации по сравнению с туннельной является то, что в этом случае не требуется выбирать эталонную страницу для каждого запроса. Суть данного метода заключается в следующем: каждый запрос по каждому фактору представляется не одной точкой, а некоторым интервалом. На оси абсцисс откладываются номера факторов, которые характеризуют свойства запроса, ось ординат представляет собой ось интервальных значений этого запроса. Запросы считаются схожими, если при наложении интервалов по каждому фактору не менее k-процентов объектов находятся в одном и том же диапазоне.

7.2.5 Другие методы

5-градационное разбиение и замена исходного значения для перехода к ранговой модели

Одним из шагов исследования стало построение пяти градационного разбиения гистограмм. То есть, был осуществлен переход к дискретной модели. Гистограмма по каждому фактору была проанализирована, были выявлены диапазоны факторов и их количество в каждом диапазоне. В зависимости от близости по диапазону и числу элементов каждом из них, вся выборка была поделена на 5 классов. Пример деления показан на рисунке 7.4:

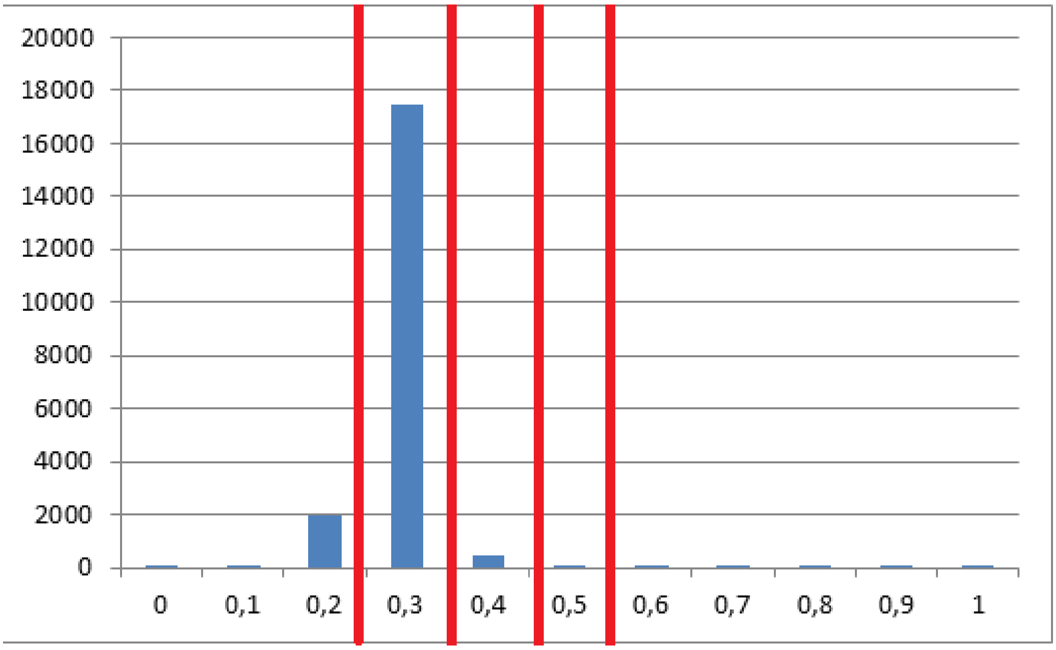


Рисунок 7.4 – Пример разделения выборки на классы

Полученные группы разбиения: 0-0,2 (1); 0,3(2); 0,4(3); 0,5(4); 0,6-1(5).

Рассмотрим другой пример (рисунок 7.5):

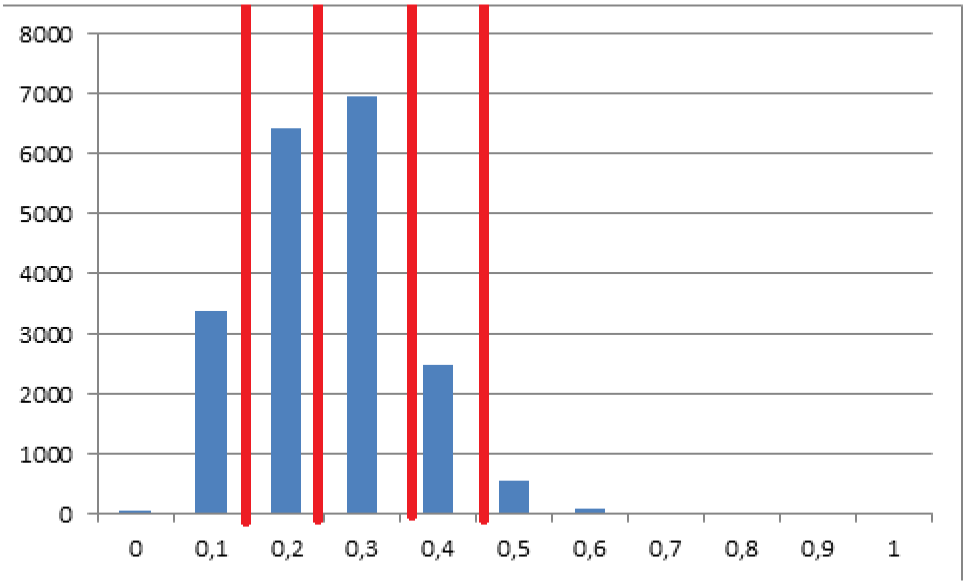


Рисунок 7.5 – Пример разделения выборки на классы

Полученные группы разбиения: 0—0,1(1); 0,2 (2); 0,3 (3); 0,4 (4); 0,5-1 (5).

Далее была произведена замена значений факторов в соответствии с построенными группами разбиения. Результаты замены указаны в Таблицах 7.11 и 7.12.

Таблица 7.11 – Замена значений факторов в соответствии с группами разбиения

1	2	3	4	5
0	0,1	0,2	0,3	0,4-1

Таблица 7.12 – Замена значений факторов в соответствии с группами разбиения

Значение до замены	Значение после замены
0,119033	2
1	5
0,199595	3
0,18349	3
0,134135	2
0,116565	2
0,89479	5

Модель с многомерным кубом

Целью этой модели является деление пространства на мелкие подпространства с целью выявить скопления высоко релевантных объектов, а также найти значения границ по каждому фактору, чтобы можно было бы четко определить эти скопления.

В данной моделью была использована подвыборка из 20000 случайно выбранных объектов.

Был построен n-мерный куб (в нашем случае размерность n=12), чтобы увидеть, где распределены точки с высокой релевантностью. Пусть по каждому фактору будет 10 различных значений. Таким образом, n-мерный куб можно поделить на 10^n более мелких кубиков. Приведем значения каждого фактора к 10 мерной шкале, то есть 0-0,1: 0, 0,1-0,2:1,...., 0,9-1,0:9.

В результате выборка из 20000 точек поместилась в 14806 кубиков. Ниже представлена статистика по объектам с релевантностью 3 и 4.

По объектам с релевантностью 4 (всего 135 объектов): располагаются в 130 кубиках: в 89 из которых в кубике всего 1 точка, в 11 из которых – 2 точки, в остальных количество элементов колеблется от 3 до 122 (процент 4-ок колеблется от 1,5% до 33% прямо пропорционально уменьшению количества элементов в кубике). Видно, что большая часть 4-ок находится отдельно друг от друга.

По группе точек с релевантностью 3 и 4:

Количество объектов – 489, находятся в 457 кубиках, в 331 из которых по одному объекту (либо 4 либо 3), в 3-х кубиках по 2 объекта (4 и 3), еще в 3-х по 3, из которых две 3-ки и 4-ка. В оставшихся 122 кубиках находятся от 2 до 122 объект (процент высоко релевантных от 3,1 % до 50%).

Были опробованы алгоритмы кластеризации (описаны в пункте "Кластеризация запросов QID") данных кубиков, чтобы получить места уплотнения точек с высокой релевантностью. Приведем их краткую характеристику.

Объединение кубов 1. Из множества выбирается два n-мерных куба, которые вписываются в параллелепипед. Если в нем найдется хотя бы один непустой куб, не принадлежащий ни одному из выбранных, то эти два куба не объединяются, иначе строится новый куб, который представляет собой рассматриваемый параллелепипед.

Объединение кубов 2. Объединение происходит как в случае 1, однако последующее объединение рассматривается относительно первого куба.

Построение графиков с учетом значений булевых переменных

В наборе присутствуют 5 особых факторов – булевых (Boolean Model, номера факторов в исходной выборке 96-100). Было решено проверить теорию, что эти факторы являются «флагами», то есть такими показателями, по которым машина может фильтровать данные и делать выбор о применении того или иного алгоритма к полученной после фильтрации подвыборке. Для этого были построены диаграммы рассеяния по каждому из 12 факторов в зависимости от значения булевой переменной. По всем факторам кроме 26 (min of term frequency (body)) и 51 (min of stream length normalized term frequency (body)) никакого значительного результата получено не было. На рисунке 7.6 изображена общая картина.

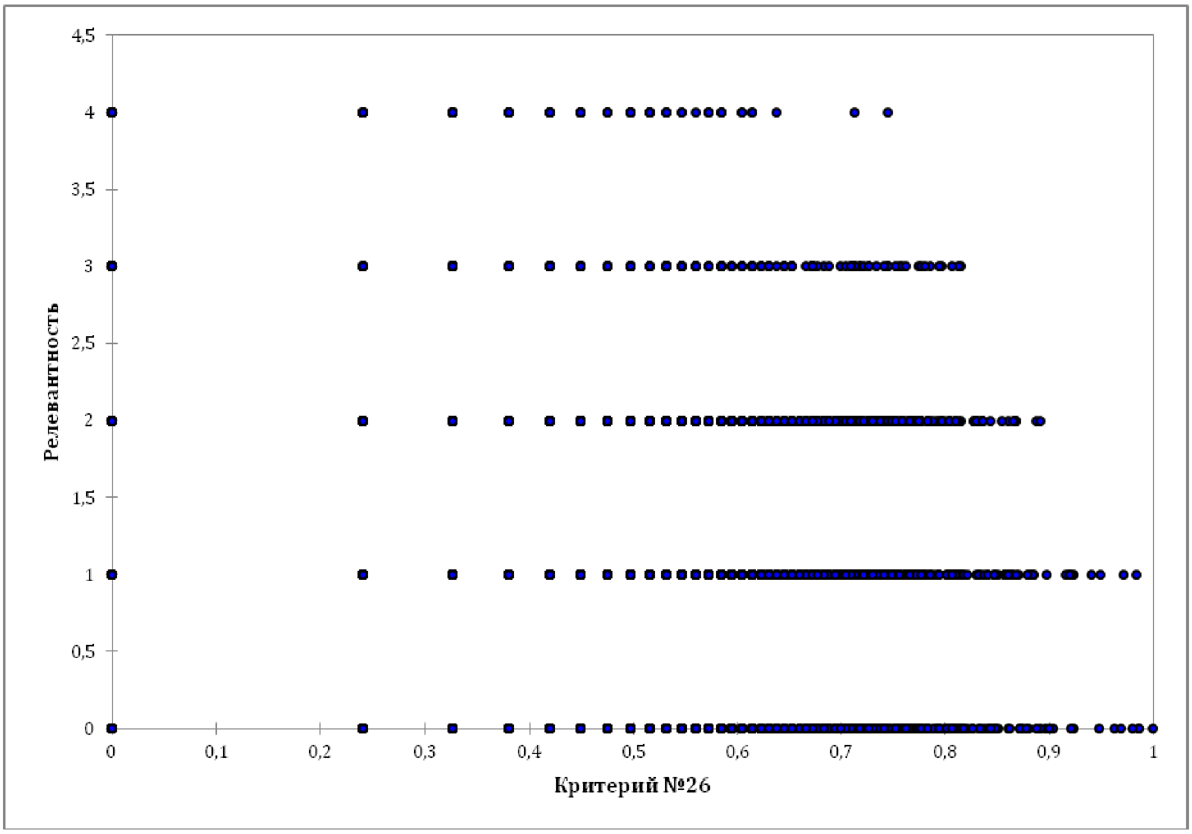


Рисунок 7.6 – Общая картина

На рисунке 7.7 изображен график для случая, когда значение показателя №96 равно 0.

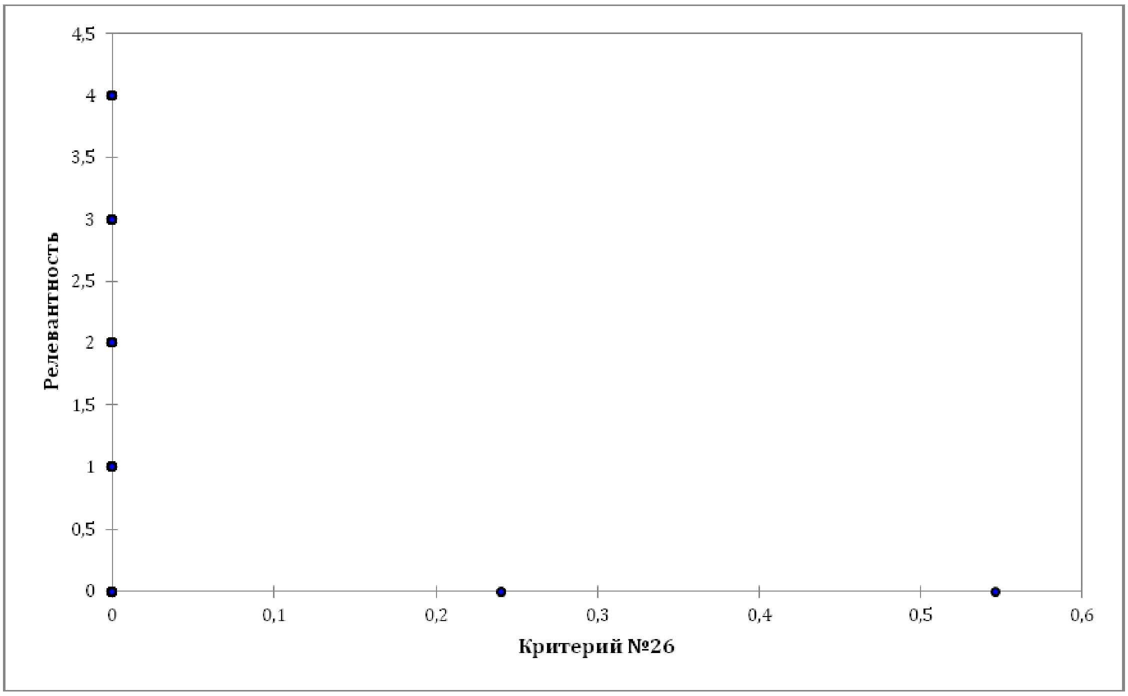


Рисунок 7.7 – График для случая, когда значение показателя №96 равно 0

Как видно, при значении показателя 96 равном нулю, точки в количестве 6088 принимают всего 3 значения: 0, 0,24 и 0,546.

В случае, когда значение фактора №96 равно 1, имеется 13912 точек (рисунок 7.8).

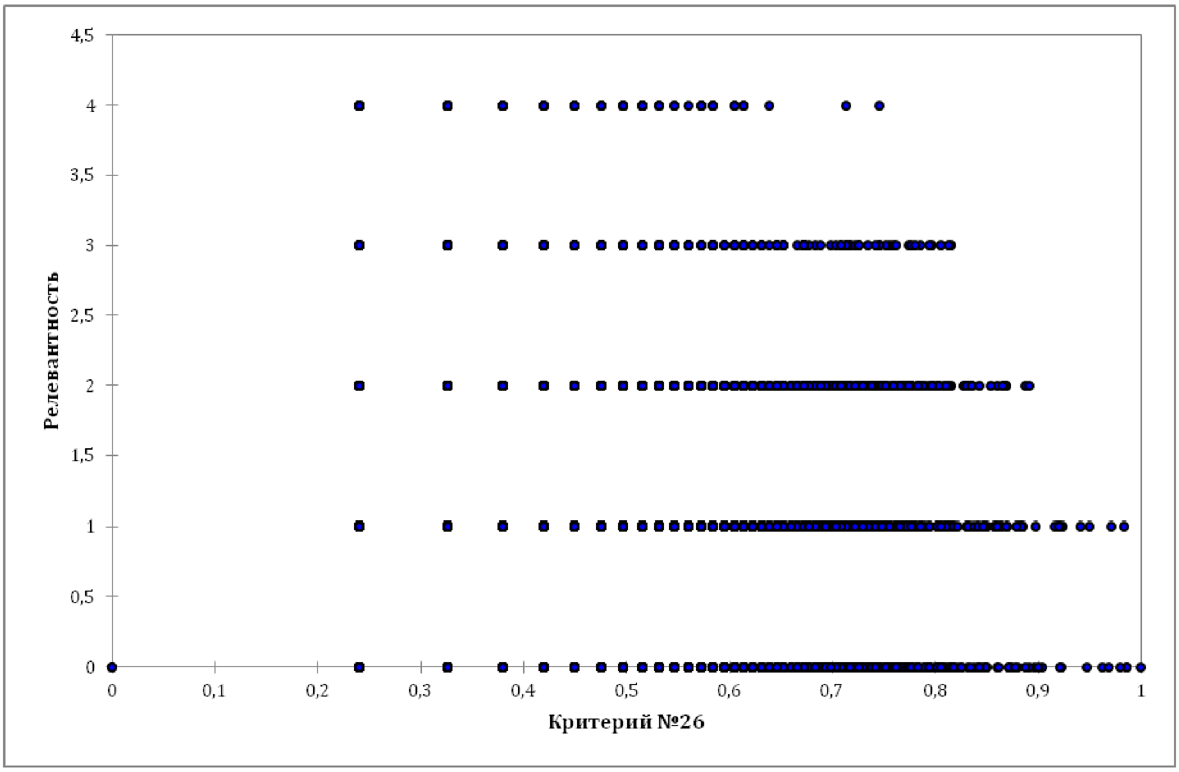


Рисунок 7.8 – График для случая, когда значение показателя №96 равно 1

Для критерия 51 общая картина изображена на рисунке 7.9.

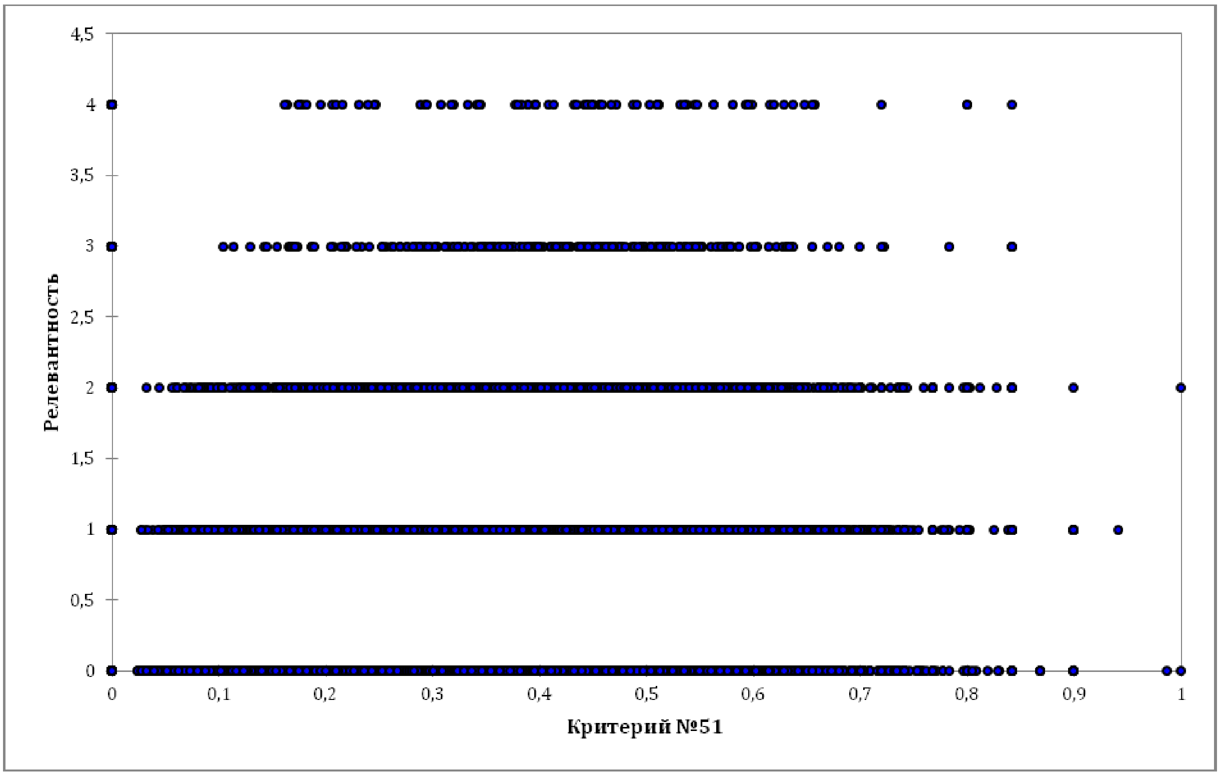


Рисунок 7.9 – Общая картина для показателя №51

Случаи, когда показатель №51 равен 0 и 1, изображены на рисунках 7.10 и 7.11, соответственно.

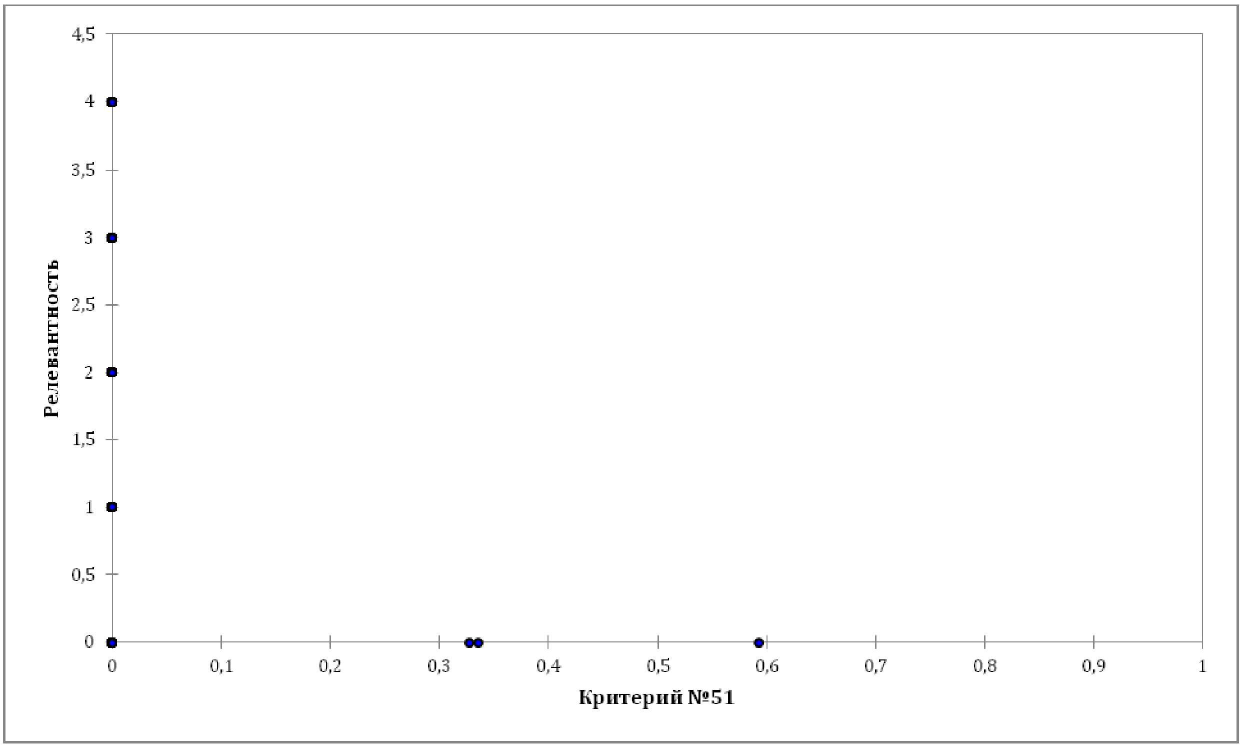


Рисунок 7.10 – График для случая, когда значение показателя №51 равно 0

Точки принимают всего 4 значения: 0, 0.327, 0.335 и 0.592.

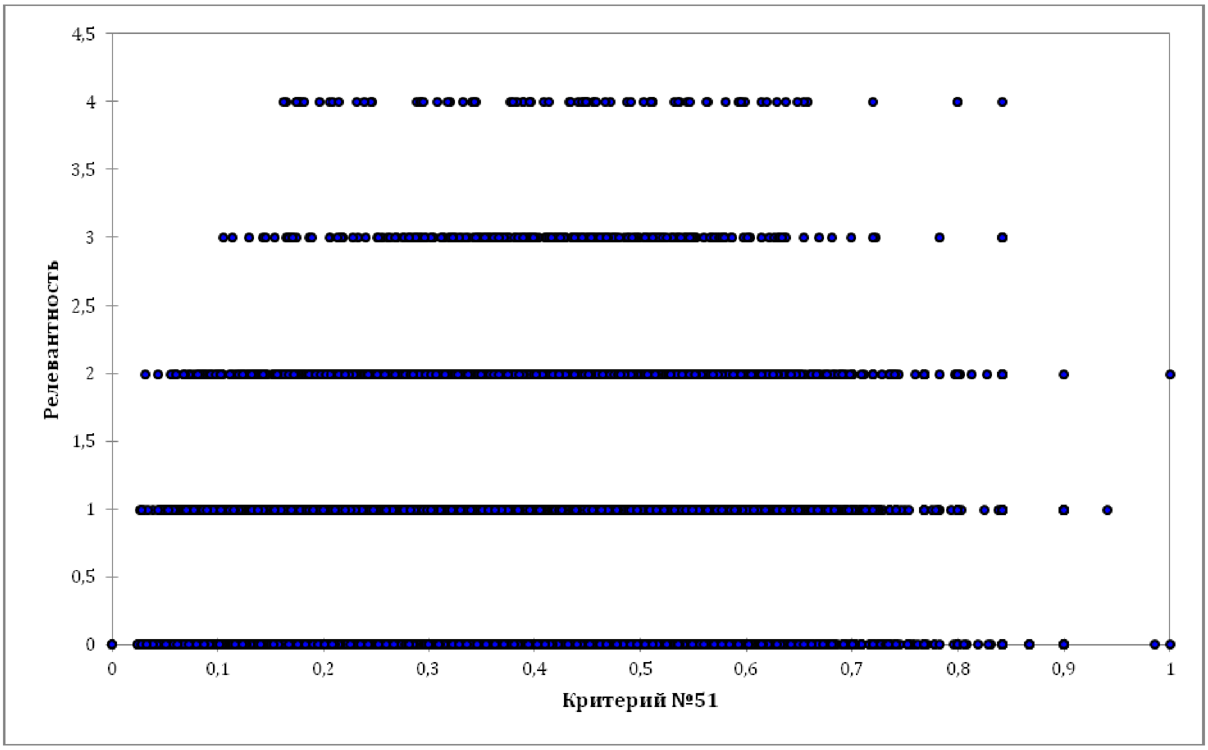


Рисунок 7.11 – График для случая, когда значение показателя №51 равно 1

8 Исследование математической модели выбора абитуриентом вуза

В этом разделе приведены результаты исследований математической модели выбора абитуриентами вуза. Это исследование продолжает ранее начатую работу.

Для целей моделирования сделано предположение о том, что все ВУЗы и все абитуриенты разделены на некоторое количество категорий, в зависимости от их «качества»; причем деление на категории известно всем участникам в модели. Выбор абитуриента в рамках приемной кампании ограничен пятью ВУЗами. При подаче документов абитуриент ориентируется на качество ВУЗа и ожидаемую вероятность поступления в этот ВУЗ. При предположении о квадратичных функциях полезности абитуриента и экспоненциальном падении ожидаемой вероятности поступления при росте качества ВУЗа оказывается, что абитуриент будет всегда подавать документ в ВУЗ, поступление в который он считает гарантированным («качество» такого ВУЗа считаем соответствующим качеству абитуриента), а также, в зависимости от параметров, в один или два ВУЗа качеством выше на три «ступени», от одного до трех ВУЗов качеством выше на две «ступени» и один ВУЗ на одну ступень выше. В результате при существующей системе приема (которая подробно описана ниже) сильно пострадают ВУЗы уровня «выше среднего»: они недоберут студентов, так как сильные абитуриенты уйдут в наиболее привлекательные ВУЗы, а более слабые будут лишены возможности перейти на освободившиеся места из-за ограниченного количества шагов. Кроме того, возможны «несправедливые» ситуации, когда относительно более слабые абитуриенты получат места в более сильных ВУЗах, чем относительно более сильные.

8.1 Организация приемной кампании в российских государственных ВУЗах в 2010 году

Приемная кампания включает три основных этапа, которые будут описаны ниже. Стоит отметить, что несущественные для дальнейшего исследования детали намеренно опущены.

На первом этапе абитуриенты подают заявления в интересующие их ВУЗы. В 2010 году число ВУЗов, в которые мог подавать заявление абитуриент, было ограничено 5-ю. В каждом ВУЗе абитуриент мог подавать заявление не более чем на 3 специальности. Заявления принимались приемными комиссиями ВУЗов до середины 25 июля. Заявление на определенную специальность принимается при наличии копии аттестата о полном среднем образовании и результатов ЕГЭ по трем или четырем предметам, сдаваемым при приеме на эту специальность. Таким образом, если абитуриент подает заявление на одну и ту же специальность в разные ВУЗы, он имеет одинаковое количество баллов.

После окончания приема заявлений производится так называемая первая волна зачислений. Вузы объявляют списки абитуриентов, которых они готовы принять. Список всех подавших заявления на некоторую специальность сортируется по сумме баллов ЕГЭ. Список принимаемых абитуриентов включает верхнюю часть списка подавших заявления, при этом число принимаемых должно соответствовать числу мест. Если заявления подало меньше абитуриентов, чем имеется мест в ВУЗе, то все подавшие заявления включаются в список принимаемых абитуриентов. До 4 августа абитуриенты должны были принести подлинник аттестата в один из ВУЗов, включивших их в список. Если до установленного срока рекомендованный абитуриент не принес подлинник, то он выбывает из дальнейшего конкурса на эту специальность в этом ВУЗе. Абитуриенты, принесшие подлинник, переходят в разряд официально рекомендованных к зачислению. На втором этапе из списков вычеркиваются все, кто мог бы быть принят, но не принес подлинник. Вузы формируют новые списки принимаемых абитуриентов, опять в соответствии с суммой баллов ЕГЭ абитуриента. Абитуриент, который принес подлинник аттестата в первой волне зачислений, имеет право забрать его и принести в другой ВУЗ, принявший его только во второй волне, но более для этого абитуриента предпочтительный. В остальном правила те же – до установленного централизованно срока (9 августа) ВУЗы ждут абитуриентов с подлинниками аттестатов. После этого централизованная приемная кампания заканчивается, и ВУЗы зачисляют тех абитуриентов, которые принесли подлинники.

Математические модели и анализ механизмов зачисления абитуриентов в вузы давно развиваются в литературе по обобщенным паросочетаниям. Ключевые результаты получены в [133], [134], [135]. Основные положения теории обобщенных паросочетаний изложены в [116]. Также с обзором исследований по данной тематике можно ознакомиться в [136].

8.2 Математическая постановка задачи

8.2.1 Описание ситуации

Рассматривается прием абитуриентов на одну группу специальностей в государственные ВУЗы в соответствии с описанными выше правилами. Пусть:

A – множество всех абитуриентов;

B – множество всех ВУЗов;

A_i – множество абитуриентов уровня подготовки i, $i=\overline{\{1.M\}}$. Таким образом, абитуриенты разбиты на M категорий по уровню подготовки. Чем выше номер категорий, тем выше уровень подготовки абитуриента (результат ЕГЭ);

B_j – множество ВУЗов качества j, j=$i = \overline{\{1.M+1\}}$. Таким образом, ВУЗы разбиты на $M+1$ категорию по качеству (репутации). Чем выше номер категории, тем выше качество образования входящих в нее ВУЗов.

Обозначим число абитуриентов в каждой группе через k_i, а число ВУЗов в каждой категории через n.

Число мест в каждом ВУЗе примем одинаковым и равным L. Относительно числа мест в вузе мы придерживаемся предположения о том, что при невозможности сравнить между собой нескольких абитуриентов ВУЗ вынужден зачислить их всех, даже если это приводит к превышению первоначальной квоты.

8.2.2 Предпочтения ВУЗов

Все ВУЗы имеют одинаковые предпочтения на множестве абитуриентов, устроенные следующим образом: группы абитуриентов упорядочены по предпочтительности зачисления в вуз. При этом абитуриенты, сравнить которых между собой ВУЗы не могут, попадают в одну категорию A_i по уровню подготовки. Внутри группы с одинаковым уровнем подготовки ВУЗ не может сравнить абитуриентов, т.е. считает их одинаковыми.

Предположение об одинаковых предпочтениях ВУЗов является жизнеспособным в том случае, если мы рассматриваем прием только на одну группу специальностей, на которой в разных ВУЗах требуется одинаковый набор результатов ЕГЭ, и, следовательно, абитуриенты имеют одинаковую сумму баллов с точки зрения любого ВУЗа.

8.2.3 Предпочтения абитуриентов

Сделанные в работе предположения о предпочтениях и способе принятия решений абитуриентами исходят из неполноты информации, имеющейся у абитуриентов, и их ограниченной рациональности. Абитуриенты не используют всю полноту имеющейся у них информации для принятия решения о подаче заявлений.

Отказ от использования теоретико-игровой модели обусловлен тем, что равновесным случаем соответствующей игры является единственно возможное в данном случае (попарно-стабильное) паросочетание. Для моделирования ситуации приближенно к реальности:

– вузы из более высокой группы предпочтительнее ВУЗов из более низкой группы для любого абитуриента;

– каждый абитуриент ранжирует ВУЗы внутри группы ВУЗов одинакового качества в индивидуальном порядке;

– полезность от поступления в ВУЗ $b \in B_j$ для некоторого абитуриента a оценивается в $(j+s_a)^2$, $0 < s_a \le 1$;

– s_a определяется местом ВУЗа в ранжировке данного абитуриента: если ВУЗ является l-ым по предпочтительности в этой группе, то $s_a = \dfrac{n+1-l}{n}$, $l = 1,\dots,n$ (то есть любой вуз категории $j+1$ был заведомо предпочтительнее любого вуза из категории j);

– кроме полезности от поступления, ВУЗы оцениваются абитуриентами по вероятности поступления, которая зависит от уровня подготовки абитуриента (прямо) и качества ВУЗа (обратно)

$$p = \begin{cases} 2^{i-j}, & j \ge i \\ 1, & j < i \end{cases}.$$

Таким образом, абитуриенту $a \in A_i$ невыгодно подавать документы в ВУЗ $b \in B_j$, если $i > j$, так как это будет заведомой потерей по сравнению с гарантированным ВУЗом из категории $j = i$.

8.2.4 Выбор ВУЗа абитуриентом

Каждый абитуриент должен выбрать набор из 5 ВУЗов. Для каждого набора оценивается ожидаемая полезность, абитуриент выбирает набор с наибольшей ожидаемой полезностью. Будем считать, что все абитуриенты придерживаются следующего разумного принципа: «если я зачислен сразу в несколько ВУЗов, то выбираю лучший, т.е. приносящий наибольшую полезность от поступления».

Рассмотрим абитуриента a из группы A_i и его набор, состоящий из 5-ти ВУЗов. Вузы в наборе упорядочены по предпочтительности для абитуриента a: первый ВУЗ (категория j_1) самый лучший, последний (категория j_5) – самый худший.

Оценим ожидаемую полезность поступления в лучший ВУЗ набора:

$$\overline{u_a}(j_1, s_1) = 2^{i-j_1}(j_1 + s_1)^2.$$

Если абитуриент не поступит в лучший ВУЗ (а это произойдет с вероятностью $p = 1 - 2^{i-j_1}$), то он будет рассматривать следующий ВУЗ в своем наборе.

Абитуриент считает события «поступил в ВУЗ j1» и «поступил в ВУЗ j2» независимыми, поэтому вероятность того, что абитуриент не поступил в первый ВУЗ, но поступил во второй, оценивается как произведение вероятностей этих событий.

Тогда ожидаемая полезность поступления во второй ВУЗ набора равна:

$$\overline{u_a}(j_2, s_2) = (1 - 2^{i-j_1})2^{i-j_2}(j_2 + s_2)^2.$$

При этом, естественно, выполняется условие $j_1+s_1 > j_2+s_2$.

Ожидаемая полезность поступления в 3-ий, 4-ый и 5-ый ВУЗы в наборе вычисляется аналогичным образом. Итоговое выражение для ожидаемой полезности абитуриента a выглядит так:

$$\overline{u_a}(j_2, s_2) = 2^{i-j_1}(j_1 + s_1)^2 + (1 - 2^{i-j_1})(2^{i-j_2}(j_2 + s_2)^2 + (1 - 2^{i-j_2})(2^{i-j_3}(j_3 + s_3)^2 +$$

$$+(1 - 2^{i-j_3})(2^{i-j_4}(j_4 + s_4)^2 + (1 - 2^{i-j_4})2^{i-j_5}(j_5 + s_5)^2))).$$

8.3 Какой выбор сделает абитуриент?

После того, как сделаны предположения о функции полезности абитуриента, можно определить, в какие ВУЗы он будет подавать заявления. Для поиска наилучшего набора ВУЗов мы будем решать задачу максимизации приведенной выше функции полезности, пользуясь принципом динамического программирования. При этом справедливо следующее утверждение.

Предложение 8.1. Абитуриент всегда выбирает ровно один ВУЗ, поступление в который считает гарантированным, а остальные ВУЗы – из более сильных категорий.

Доказательство. Абитуриент должен выбрать пять ВУЗов так, чтоб максимизировать свою ожидаемую полезность. Упорядочим ВУЗы в наборе так, что на первом месте будет стоять лучший ВУЗ из пяти, а на пятом месте – худший. Тогда процесс выбора ВУЗов может быть описан как задача динамического программирования из 5 шагов. Будем решать эту задачу с конца, начиная с выбора самого слабого ВУЗа в наборе.

На пятом шаге выбор наименее предпочтительного ВУЗа в нашем наборе зависит от предпочтений абитуриентов и от того, какой ВУЗ был выбран на 4-ом шаге (так как ВУЗ на 5-ом шаге не может быть лучше 4-го и не может совпадать с ним). Выбирать ВУЗ из категории хуже, чем i, абитуриент не может. Поэтому выбор абитуриента будет решением следующей задачи:

$$u = 2^{i-j_5}\left(j_5 + \frac{x_5}{n}\right)^2 \to \max,$$

$$j_4 + \frac{x_4}{n} \geq j_5 + \frac{x_5}{n} + \frac{1}{n}, \tag{8.1}$$

$$j_4 \geq j_5, \tag{8.2}$$

$$j_5 \geq i, \tag{8.3}$$

$$1 \leq x_5 \leq n, \tag{8.4}$$

$$j_5, x_5 \in N, \tag{8.5}$$

при каждых заданных j_4, x_4, n и i. Сначала найдем решение задачи без учета ограничений (8.2) и (8.3) (то есть без учета решений относительно подачи заявлений в другие, более сильные вузы).

Оптимальное значение $x_5^* = n$ (с учетом ограничения (8.4)). Тогда функция полезности примет вид $u = 2^{i-j_5} * (j_5 + 1)^2$ Эта функция имеет единственную точку максимума при $j_5^* = \frac{2}{\ln 2} - 1$. Таким образом, при всех $i \geq 3$ функция полезности для пятого шага является строго убывающей на луче (8.3). А значит, максимум с учетом ограничения (8.3) достигается при $j_5=i$. Можно показать, что при $i=2$ максимальное значение (с учетом целочисленности j_5) также достигается при $j_5=i$.

Таким образом, максимум целевой функции этой задачи без учета ограничений, связанных с решением на шаге 4, достигается в точке $j_5 = i; x_5 = n$ при всех $i \geq 2$. Выбор более одного ВУЗа из категории $j=i$ заведомо невыгоден, поскольку поступление в ВУЗ категории i абитуриент считает гарантированным, $p_i=1$. То есть выбор более одного вуза из категории i не может увеличить ожидаемую полезность абитуриента. Следовательно, на четвертом и предыдущих шагах абитуриент не будет выбирать гарантированный вуз и, какими бы ни были решения на первых четырех шагах, в качестве пятого ВУЗа будет выбран гарантированный ВУЗ из категории B_i. Предложение доказано.

Ниже приводятся полученные результаты выбора.

Первое, что может быть обнаружено при таком подходе – это то, что в качестве самого слабого ВУЗа в наборе все абитуриенты $a \in A_i$, при $i \geq 2$, будут выбирать свой «любимый» ВУЗ из соответствующей группы B_i, поступление в который абитуриент считает гарантированным.

При дальнейшем анализе оказывается, что абитуриенты разных уровней подготовки не единодушны в своем выборе. Они выбирают различные наборы ВУЗов в зависимости от своего уровня i и числа ВУЗов в каждой категории n, то есть степени неопределенности.

Параметр n, напомним, показывает число ВУЗов в одном классе качества. Если это число мало, значит, общество имеет хорошо детализированные представления о качестве ВУЗов. Если же это число, напротив, достаточно велико, то общество и, в частности, абитуриенты, находятся в ситуации существенной неопределенности, так как вынуждены опираться только на свои личные впечатления при сравнении больших групп ВУЗов. Теперь покажем, как уровень неопределенности влияет на выбор абитуриентов. Сначала рассмотрим общую картину выбора абитуриентов при разных n. Мы будем рассматривать ситуации, начиная с n = 3. Ситуация n = 2 – неинтересная и в некотором смысле вырожденная, так как предполагает очень высокий уровень «определенности» в представлениях абитуриентов о ВУЗах.

Также заметим, что мы изначально не задаем фиксированное число уровней подготовки и групп абитуриентов, а лишь говорим, что это число одинаково. Ясно, что абитуриенты самых сильных групп оказываются в особом положении в силу ограниченности выбора, поэтому их поведение должно быть рассмотрено отдельно (см. [136]).

8.4 Выбор при разных уровнях неопределенности

Итак, было выявлено четыре ступени неопределенности с разным поведением групп.

Первая ступень неопределенности: n = 3, 4

Таблица 8.1 – Первая ступень неопределенности

ВУЗ 1	ВУЗ 2	ВУЗ 3	ВУЗ 4	ВУЗ 5	n=3	n=4
$(i+3, 1)$	$(i+3, \frac{n-1}{n})$	(i+2,1)	$(i+1,1)$	$(i,1)$	$i \geq 6$	$i \geq 3$
$(i+4,1)$	$(i+3,1)$	$(i+2,1)$	$(i+1,1)$	$(i,1)$	$2 \leq i \leq 5$	$i=2$

Если абитуриентам известно очень подробное разбиение ВУЗов на группы по качеству образовательных услуг (каждая группа содержит три или четыре ВУЗа одного качества), то абитуриенты с низким уровнем подготовки выберут свои «любимые» ВУЗы из категорий от B_i до B_{i+4}. Абитуриенты с более высокими уровнями подготовки выберут два ВУЗа из категории B_{i+3} и по одному ВУЗу из категорий B_{i+2}, B_{i+1}, B_i (см. Таблицу 8.1).

Уже здесь проявляется закономерность, которая будет наблюдаться все время: при каждом конкретном n, чем слабее группа абитуриентов, тем более рискованный набор они выбирают. Например, при n = 3 абитуриенты уровня i = 5 выберут набор (i + 4; i + 3; i + 2; i + 1; i), в то время как абитуриенты уровня i = 6 выберут менее рискованный набор (i + 3; i + 3; i + 2; i + 1; i).

Вторая ступень неопределенности: $5 \le n \le 14$.

На второй ступени неопределенности абитуриенты разбиваются на три группы (Таблица 8.2).

Таблица 8.2 – Вторая ступень неопределенности

ВУЗ 1	ВУЗ 2	ВУЗ 3	ВУЗ 4	ВУЗ 5	n = 5	n = 14
$(i+3, 1)$	$(i+2,1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$(i+1,1)$	$(i,1)$	$i \ge 47$	$i \ge 13$
$(i+3, 1)$	$(i+3, \frac{n-1}{n})$	$(i+2,1)$	$(i+1,1)$	$(i,1)$	$4 \le i \le 46$	$i = 12$
$(i+3, 1)$	$(i+3, \frac{n-1}{n})$	$(i+2,1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$(i,1)$	$2 \le i \le 3$	$i \le 11$

Заметим, что при $n \ge 5$ абитуриенты всегда выбирают лучший ВУЗ из категории B_{i+3} и худший ВУЗ из (гарантированной) категории B_i. Различия в выборе абитуриентов разных уровней подготовки заключаются только в выборе трех «средних» ВУЗов.

Назовем три группы абитуриентов условно сильными, средними и слабыми. Граница уровня подготовки, отсекающая слабых от средних, сдвигается вверх с увеличением n, а граница, отделяющая средних от сильных, сдвигается вниз с увеличением n. Таким образом, средняя группа сжимается и, в конце концов, исчезает.

Абитуриент из слабой группы выбирает два ВУЗа из категории B_{i+3}, два ВУЗа из категории B_{i+2} и гарантированный ВУЗ своей категории Bi. Абитуриенты среднего уровня подготовки вместо второго ВУЗа из категории B_{i+2} выбирают ВУЗ из категории B_{i+1} и рискуют меньше, чем слабые абитуриенты. Наконец, сильные абитуриенты выбирают вместо второго ВУЗа из категории B_{i+3} второй ВУЗ из категории B_{i+2}. Таким образом, сильные абитуриенты рискуют в наименьшей степени.

Третья ступень неопределенности: $15 \le n \le 37$.

Таблица 8.3 – Третья ступень неопределенности

ВУЗ 1	ВУЗ 2	ВУЗ 3	ВУЗ 4	ВУЗ 5	n = 15	$32 \le n \le 37$
$(i+3, 1)$	$(i+2,1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$(i+1, 1)$	$(i, 1)$	$i \ge 12$	$i \ge 16$
$(i+3, 1)$	$(i+3, \frac{n-1}{n})$	$(i+2,1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$(i, 1)$	$2 \le i \le 11$	$2 \le i \le 15$

При дальнейшем увеличении n, а значит, росте неопределенности, исчезает средняя группа абитуриентов (Таблица 8.3). Сильные и слабые абитуриенты делают тот же выбор, что и соответствующие группы при меньших n.

Сильные абитуриенты рискуют меньше и выбирают один ВУЗ из категории B_{i+3}, два ВУЗа из категории B_{i+2}, один ВУЗ из категории B_{i+1} и гарантированный ВУЗ категории B_i. Слабая часть абитуриентов выбирает гораздо более рискованный набор – два ВУЗа из категории B_{i+3} и два ВУЗа из категории B_{i+2}.

Заметим, что граница сильные-слабые смещается вверх с увеличением n, то есть все больше абитуриентов попадают в группы слабых и больше рискуют.

Четвертая ступень неопределенности: $n \geq 38$

Таблица 8.4 – Четвертая ступень неопределенности

ВУЗ 1	ВУЗ 2	ВУЗ 3	ВУЗ 4	ВУЗ 5	n = 38,39	$47 \leq n \leq 58$
$(i + 3, 1)$	$(i+2,1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$(i+1,1)$	$(i,1)$	$i \geq \frac{n}{2} - 2$	
$(i + 3, 1)$	$(i+2,1)$	$(i+2,1)$	$(i+1,1)$	$(i,1)$	$16 \leq i \leq \frac{n}{2} - 3$	$14 \leq i \leq \frac{n}{2} - 3$
$(i + 3, 1)$	$(i+3, \frac{n-1}{n})$	$(i+2,1)$	$(i+2, \frac{n-1}{n})$	$(i,1)$	$2 \leq i \leq 15$	$2 \leq i \leq 13$

Эта, последняя, ступень характеризуется очень высоким уровнем неопределенности и, по всей видимости, должна быть рассмотрена в большей степени для законченности анализа, нежели для практического применения результатов. На этой ступени снова выделяются три группы абитуриентов (Таблица 8.4) с разным поведением: сильные, средние, слабые. Естественно, границы групп будут отличаться от таковых на второй ступени неопределенности. При увеличении n граница средние-слабые, как ни странно, опускается вниз, а граница сильные-средние ползет вверх.

Средняя группа выбирает один ВУЗ из категории B_{i+3} и три ВУЗа из категории B_{i+2}. Сильная и слабая группы делают тот же выбор, что и в предыдущих случаях. Здесь соблюдается закономерность: чем сильнее абитуриент, тем менее рискованный набор он выбирает.

8.5 Моделирование приемной кампании

Теперь, когда мы определили ожидаемое поведение абитуриентов, можно предсказать развитие приемной кампании. Для этого придется задать следующие параметры:

– параметр M, определяющий число групп качества ВУЗов и абитуриентов;

– параметр n, определяющий число ВУЗов в каждой группе одинакового качества и характеризующий уровень неопределенности;

–количество абитуриентов разного уровня подготовленности.

Поскольку в нашей модели считается одинаковым число ВУЗов в группе и число мест в ВУЗе, то места будут распределены равномерно по качеству.

Относительно предпочтений абитуриентов будем предполагать, что каждый ВУЗ встречается на первом, втором и т.д. месте в ранжировке абитуриентов одинаковое число раз. Таким образом, в данной модели мы не будем вводить случайную составляющую, связанную с предпочтениями абитуриентов.

8.5.1 Равномерное распределение абитуриентов

Рассмотрим следующий пример. Пусть:

– M = 10, то есть 10 категорий абитуриентов и 11 категорий ВУЗов;

– n = 20, число ВУЗов в категории;

– число абитуриентов совпадает с числом мест в ВУЗах;

– абитуриенты распределены по категориям равномерно.

Общее число ВУЗов будет равно 20·11 = 220, а мест – 220·L. Абитуриенты распределены по категориям равномерно, поэтому $\forall i \; A_i = \dfrac{220L}{10} = 22L$.

На первом этапе каждый абитуриент категорий $2 \le i \le 8$ подаст заявление в ВУЗ своей категории, в два ВУЗа категории B_{i+2} и два ВУЗа категории B_{i+3}. Абитуриенты из двух верхних категорий, в принципе не имеющие категории ВУЗов B_{i+3}, также сделают выбор, максимизирующий их ожидаемую полезность. Для абитуриента из лучшей категории A_{10}набор будет включать ВУЗ своей категории и четыре ВУЗа категории B_{11}. Для абитуриента из категории A_9 набор будет включать один ВУЗ своей категории, один ВУЗ категории B_{10} и три ВУЗа категории B_{11}. Для абитуриента из группы A_1 наилучшим будет выбор, не включающий гарантированный ВУЗ: один ВУЗ из B_2, два ВУЗа из B_3 и два ВУЗа из B_4.

Иллюстрация (рисунок 8.1) демонстрирует ожидаемое число заявлений в одном вузе каждой категории. После того, как спрогнозировано поведение абитуриентов, можно легко смоделировать проведение приемной кампании в соответствии с принятым в настоящее время механизмом (см. подраздел 8.1). Ожидаемые результаты приемной кампании представлены на рисунке 8.2. В соответствии с этим прогнозом, каждый вуз, кроме вузов из категории B_8, получит по 1,1·L абитуриентов, а вузы девятой и первой категорий останутся без абитуриентов вовсе.

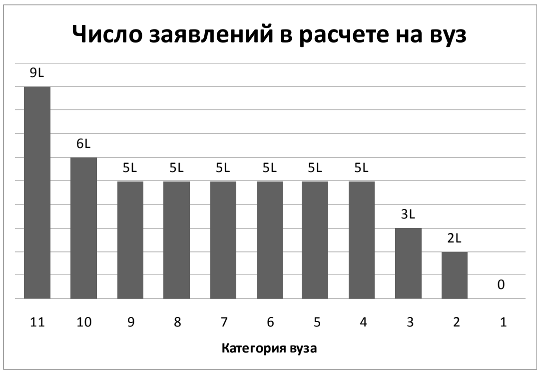


Рисунок 8.1 – Число заявлений в расчете на вуз

Рисунок 8.2 – Окончательное зачисление

Таким образом, абитуриентов не набирают не только самые слабые ВУЗы, но и ВУЗы уровня выше среднего.

8.5.2 Неполная информация о распределении абитуриентов

Рассмотрим теперь модификацию исходной модели. Пусть:

– M = 10, то есть 10 категорий абитуриентов и 11 категорий ВУЗов;

– n = 20, число ВУЗов в категории;

– абитуриенты распределены по категориям равномерно;

– число абитуриентов меньше числа мест в ВУЗах, а именно равно 0,75*220L.

Однако теперь мы предположим, что ВУЗы могут более четко оценить уровень подготовки абитуриента, чем сами абитуриенты. С точки зрения ВУЗов каждая из категорий абитуриентов разделяется на три разноуровневые группы. Например, среди всех абитуриентов, считающих себя принадлежащими уровню 7, ВУЗами выделяются три подгруппы, сравнимые между собой.

Содержательно можно пояснить наше предположение следующим образом: абитуриенты, набравшие 60,61 или 62 баллов на ЕГЭ по математики, считают себя абитуриентами примерно одного уровня подготовки (поскольку не располагают точной информацией о своих конкурентах). В то же время ВУЗы способны отличить этих абитуриентов и, при наличии ограничения по числу мест, отказать первому и второму абитуриенту в пользу третьего.

При сделанном предположении предпочтения абитуриентов, таким образом, не изменятся, поскольку они не получат дополнительной информации о ВУЗах, соответственно, все приведенные ранее выводы будут верны и в этой модели.

Для данного примера на рисунке 8.3 графически представлен результат приемной кампании.

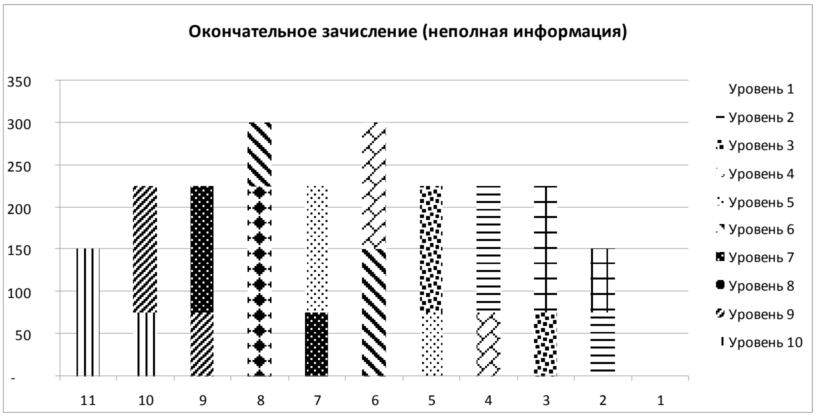


Рисунок 8.3 – Оптимальное зачисление

Здесь разными штриховками представлены абитуриенты из групп разного уровня подготовки (для упрощения иллюстрации абитуриенты из подгрупп внутри одной группы выделены одинаковой штриховкой). Отметим, что в такой ситуации будет наблюдаться «несправедливое» зачисление, например, абитуриенты уровня 6 зачислены в ВУЗы группы 8, в то время как некоторые абитуриенты уровня 7 (более сильные, чем уровень 6) попали в ВУЗы более слабой группы 7.

8.6 Некоторые выводы

В данном исследовании предложен способ моделирования поведения абитуриента при выборе набора вузов для подачи заявлений, а также смоделирован ход приемной кампании для различных ситуаций – при разной имеющейся у вузов и абитуриентов информации и разном соотношении числа мест и числа абитуриентов. Данная модель позволяет высветить слабые места существующего в России механизма распределения абитуриентов по вузам. Простой пример из пункта 8.5.2 иллюстрирует ситуацию, когда абитуриентов недобирают не только самые слабые (как следовало бы ожидать) вузы, но и вузы уровня «выше среднего». Такая невыгодная и вузам, и абитуриентам ситуация возникает из-за ограничения количества шагов (два в 2011 г.) механизма зачисления. Эта ситуация приводит к тому, что ВУЗам выгодно нарушать правила зачисления (фактически нарушая тем самым законодательства), чтобы не остаться без абитуриентов вовсе.

Дальнейшее развитие данного исследование предполагает два направления. Во-первых, это моделирование зачисления в течение нескольких лет, при котором абитуриенты второго и последующих лет получают дополнительную историческую информацию. Второе направление – моделирование поведения вузов как активных игроков, которое позволило бы описать и предсказать случаи и характер манипулирования механизмом зачисления.

Полное доказательство всех сформулированных утверждений является достаточно громоздким, поэтому не включено в данный отчет. С текстом доказательства можно ознакомиться в [136].

Результаты исследований этого раздела отражены в работе [136]:
Кисельгоф С.Г. Выбор вузов абитуриентами с квадратичной функцией полезности. Препринт WP7/2011/01. – М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2011. – 44 с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При выполнении проекта получены следующие основные результаты, могут быть сделаны следующие выводы и рекомендации:

– предложен алгоритм генерации представителей классов эквивалентности по анонимности и нейтральности профилей предпочтений в модели независимых анонимных и нейтральных предпочтений для вычисления индекса манипулируемости;

– проведены численные эксперименты: вычислены разности индексов манипулируемости в модели с анонимностью и нейтральностью и без них, вычислены вероятности возникновения манипулирования в профиле с заданной мерой сходства предпочтений в нем для случая трех альтернатив и числа избирателей от 3 до 10;

– поведение q-Паретовских правил голосования с точки зрения их манипулируемости согласуется с выделенными характеристиками поведения (кратность числу агентов или числу альтернатив) в работах [24, 13-15];

– при определенных предпосылках все q-Паретовские правила можно проранжировать между собой по свободе манипулируемости, и поэтому имеет смысл рассматривать из них главным образом Сильнейшее q-Паретовское правило простого большинства;

– исследование поведения Сильного q-Паретовского правила простого большинства с точки зрения свободы манипулирования подтвердило полученный ранее вывод, что есть другой важный критерий, который идет вразрез с меньшей манипулируемостью правил, – разрешимость, что делает актуальной задачу построения обобщенных индексов для оценки правил одновременно по двум критериям;

– сопоставление q-Паретовских правил с правилами Нэнсона, Блэка и относительного большинства показало, что выбор наименее манипулируемого правила сильно зависит от того, какой метод расширения предпочтений используется; в зависимости от предпосылок, числа участника и альтернатив, в большинстве случае наименее манипулируемыми правилами становятся процедуры Нэнсона и Сильнейшее q-Паретовское правило простого большинства;

– построено обобщение различных методов, реализующих правило передачи голосов на практике, в виде формальной процедуры;

– предложен новый метод голосования, основанный на правиле передачи голосов, и построено его аксиоматическое описание;

– показано, что пересчет квоты в правилах передачи голосов не вносит существенных изменений в процедуру выбора;

– при сравнительном анализе аксиоматических систем теории важности критериев и теории аддитивных функций ценности было показано, что отдельные критерии и группы критериев могут быть упорядочены по важности (в смысле точных определений из теории важности критериев), даже если структура предпочтений с функцией ценности не является аддитивной или даже если функции ценности вовсе не существует, хотя отношение нестрогого предпочтения является связным;

– из результатов сравнительного анализа систем аксиом теории важности критериев и теории аддитивных функций ценности вытекает, что для упорядоченности критериев по важности вовсе не обязаны выполняться аксиомы, обеспечивающие существование функций ценности, в том числе аддитивных;

– предположение о существовании параметрического семейства аддитивных функций ценности при конечном множестве шкальных градаций и предположение о существовании количественных величин важности критериев с вычислительной точки зрения эквивалентны;

– построены нечеткие профили публикаций массива интернет-документов 2009-2010 гг. на основе заданных экономических факторов и осуществлена мультифасетная классификация этих факторов;

– построен граф значимых связей между экономическими факторами на основе анализа полученной мультифасетной классификации факторов;

– построена таксономия дисциплин «Математика», «Информатика» и «Прикладная математика» на основе классификации специальностей ВАК РФ;

– исследована задача нахождения минимального представления образа (на примере задачи нахождения минимального полигонального представления плоской дискретной кривой) методом нечеткой кластеризации с помощью отношений похожести и различия;

– введена и исследована усредненная мера информативности, определенная на множестве признаков образа, которые в свою очередь являются случайными величинами;

– исследована задача нахождения наиболее устойчивого представления относительно усредненной стохастической меры информативности в том случае, когда признаки являются независимыми случайными величинами;

– при исследовании манипулирования в задаче дележа для двух участников было показано, что если при B-оптимальном дележе участник A получает ровно половину, то оптимальное манипулирование лишено практического смысла; в этом случае все дележи практически равноценны, и может быть выбран любой из них, в том числе и крайне невыгодный для участника B;

– если же в задаче манипулирования участник A также знает предпочтения участника B, то он, пытаясь оптимально манипулировать, выдает оценки, мало отличающиеся от оценок B – в результате A и B "меняются" своими оценками и, как следствие, долями при дележе, что невыгодно для обоих;

– применение методов оптимального коллективного выбора и ранжирования альтернатив, основанных на коллективных предпочтениях, моделируемых мажоритарным отношением к построению агрегированных рейтингов научных журналов показало, что введенные ранжирования хорошо соотносятся с совокупностью библиометрических показателей и могут служить в качестве интегральных показателей для построения рейтинга журналов; предложенный подход дает более «грубое» разбиение журналов, что больше соответствует интуитивным представлениям об их значимости;

– разработан самообучающийся ранжирующий алгоритм для фильтрации записей в поисковых системах;

– предложен способ моделирования поведения абитуриента при выборе набора вузов для подачи заявлений, а также смоделирован ход приемной кампании при разной имеющейся у вузов и абитуриентов информации и разном соотношении числа мест и числа абитуриентов; данная модель высветила слабые места существующего в России механизма распределения абитуриентов по вузам; в частности, показано, что из-за ограничения количества шагов (два в 2011 г.) механизма зачисления абитуриентов недобирают не только самые слабые вузы, но и вузы уровня «выше среднего».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Kelly, J.** Almost all social choice rules are highly manipulable, but few aren't / J.Kelly // Social Choice and Welfare. – 1993. – Volume 10. – P. 161–175

2. **Gibbard, A.** Manipulation of voting schemes / A.Gibbard // Econometrica. – 1973. – Volume 41. – P. 587–601

3. **Satterthwaite, M.** Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions / Satterthwaite M. // Journal of Economic Theory. – 1975. – Volume 10. – P. 187–217

4. **Barbera, S.** The manipulability of social choice mechanisms that do not leave too much to chance / S.Barbera // Econometrica. – 1977. – Volume 45. – P. 1572–1588.

5. **Kelly, J.** Strategy-proofness and social choice functions without single valuedness / J.Kelly // Econometrica. – 1977. – Volume 45.

6. **Kelly, J.** Minimal Manipulabflity and Local Strategy-Proofness / J.Kelly // Social Choice and Welfare. – 1988. – № 5. – P. 81–85.

7. **Kemeny, J.** Mathematics Without Numbers / J.Kemeny // Daedalus. – 1959. № 88. –P.577–591.

8. **Chamberlin, J.R.** Discovering Manipulated Social Choices: The Coincidence of Cycles and Manipulated Outcomes / J.R.Chamberlin // Public Choice. – 1986. – Vol. 51, No. 3. – P. 295–313.

9. **Aleskerov, F. and Kurbanov, E.** Degree of manipulability of social choice procedures / F.Aleskerov and E.Kurbanov // Current trends in economics: theory and applications : proceedings of the third international meeting of the Society for the Advancement of Economic Theory. – 1999. – P. 13–27

10. **Pritchard, G, Wilson, M.** Exact results on manipulability of positional voting rules / G.Pritchard, M.Wilson // Social Choice and Welfare. – 2007. – №29. – P. 487–513.

11. **Lepelley, D, Valognes, F.** Voting Rules, Manipulability and Social Homogeneity / D.Lepelley, F.Valognes // Public Choice. – 2003. – Vol. 116. No.1/2. – P. 165–184.

12. **Favardin, P, Lepelley, D.** Some further results on the manipulability of social choice rules / P.Favardin, D.Lepelley // Social Choice and Welfare. – 2006. – № 26. – P. 485–509.

13. **Aleskerov, F.** On the degree of manipulability of multi-valued social choice rules / F.Aleskerov, D.Karabekyan, R.M.Sanver, V.Yakuba // Homo Oeconomicus. – 2011. – T. 28. – № 1/2. – P. 205–221.

14. **Aleskerov, F.** An individual manipulability of positional voting rules / F.Aleskerov, D.Karabekyan, R.M.Sanver, V.Yakuba // Journal of the Spanish Economic Association. – 2011. – Online First™. – 14 March.

15. **Aleskerov, F.** On The Manipulability of Voting Rules: Case of 4 and 5 Alternatives / F.Aleskerov, D.Karabekyan, R.M.Sanver, V.Yakuba // Mathematical Social Sciences. – 2011. (to be appear).

16. **Guilbaud, G.T.** Les theories de l'interet general et le problemelogique de l'agregation / G.T.Guilbaud // Economie Applique. – 1952. – №5. – P. 501–584.

17. **Gehrlein, W.V.** Weighted scoring rules, the impartial culture condition, and homogeneity / W.V. Gehrlein // Quality & Quantity. – 1986. – 20. – №.1 –P. 85–107.

18. **Gehrlein, W.V., Fishburn, P.C.** Condorcet's paradox and anonymous preference profiles / W.V.Gehrlein, P.C.Fishburn // Public Choice. – 1976. – №26. – P.1–18.

19. **Kuga, K, Nagatani, H.** Voter Antagonism and the Paradox of Voting / K.Kuga, H.Nagatani // Econometrica. – 1974. – Vol. 42. – № 6. – P. 1045–1067.

20. **Gehrlein, W.V., Lepelley, D.** Voting Paradoxes and Group Coherence / W.V.Gehrlein, D.Lepelley; Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, 2011.

21. **Feller, W.** An Introduction to Probability Theory and its Applications / W.Feller; 3rd Edition, Wiley, New York, 1957.

22. **Egecioglu, O.** Uniform Generation of Anonimous and Neutral Preference Profiles for Social Choice Rules / O.Egecioglu // Technical Report 2005. TR2005-25, Department of Computer Science, UCSB.

23. **Egecioglu, O, Giritligil, A.E.** Public Preference Structures with Impartial Anonymous and Neutral Culture Model / O.Egecioglu, A.E.Giritligil // Monte Carlo Methods and Applications. – 2009. – Volume 15. – Issue 3. – P. 241–255.

24. **Алескеров, Ф.Т.** Оценка степени манипулируемости известных схем агрегирования в условиях множественного выбора / Ф.Т.Алескеров, Д.С.Карабекян, Р.Санвер, В.И.Якуба // Журнал Новой Экономической ассоциации. – 2009. – № 1–2. – С. 37–61.

25. **Alcalde-Unzu J, Vorsatz M.** Do we agree? Measuring the cohesiveness of preferences / J.Alcalde-Unzu, M.Vorsatz // Fundacion de Estudios de Economia Aplicada. – 2010.

26. **Aleskerov, F.** Procedures of Multicriterial Choice / F.Aleskerov // Preprints of the IFAC/IFORS Conference on Control Science and Technology for Development. – Beijing, China. – 1985.

27. **Карабекян, Д.С.** О расширенных предпочтениях в задаче голосования / Д.С.Карабекян // Экономический журнал Высшей школы экономики. – 2009. – Т. 13. – № 1. – С. 19–34.

28. **Nitzan, S.** The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation / S.Nitzan // Public Choice. – 1985. – № 47. – P. 349–370.

29. **Aizerman, M., Aleskerov, F.** Theory of choice / M.Aizerman, F.Aleskerov; Elsevier: North-Holland, 1995.

30. **Aleskerov, F.** Categories of Arrovian Voting Schemes / F.Aleskerov // Handbook of Social Choice and Welfare. – Volume 1. – Edited by KJ Arrow, A.K. Sen and K. Suzumura Ch 2. – 2002. – P. 95–129.

31. **Aleskerov, F., Cinar Y.** ‘q-Pareto Scalar’ two-stage extremization model and its reducibility to one stage model / F.Aleskerov, Y.Cinar // Theory and Decision. – 2008. – № 65. – P. 325–338.

32. **Алескеров, Ф.Т., Ортешук, П.** Выборы. Голосование. Партии / Ф.Т.Алескеров, П.Ортешук; М.: Academia, 1995.

33. **Hoag, C.G., Hallett, G.H.** Proportional representation / C.G.Hoag, G.H Hallett.; N.Y.: The Macmillan Company, 1926.

34. **Tideman N., Richardson, D**. Better voting methods through technology. The refinement-manageability trade-off in the single transferable vote / N.Tideman, D.Richardson // Public Choice. – 2000. – №103. – P. 13–34.

35. **Gilmour, J.** STV Rules for Transferring Surpluses of Votes / Gilmour, J; Briefing Note on Recommendation 14 in the Stage 1 Report on the Local Governance (Scotland) Bill prepared by the Local Government and Transport Committee. 15 April 2004.

36. **Bennett, D.S, Lundie, R.** Australian electoral systems / D.S Bennett, R. Lundie // Parliament of Australia Research paper. 21 August 2007. – № 5. – P. 2007–08.

37. **Farrel, D.M., McAllister, I.** The 1983 Change in Surplus Vote Transfer Procedures for the Australian Senate and its Consequences for the Single Transferable Vote / D.M.Farrel, I.McAllister // Australian Journal of Political Science. – 2003. – Vol. 38. – №. 3. November. – P. 479–491.

38. **Gilmour, J.** Detailed Description of the STV Count in Accordance With the Rules in the Scottish Local Government Elections Order 2007 / J.Gilmour // Representation. – 2007. – 43(3). – P. 217–29.

39. Local Electoral Amendment Act 2002 No 85, Public Act. New Zealand.

40. **Tideman, N.** The Single Transferable Vote / N.Tideman // The Journal of Economic Perspectives. – 1995. – Vol. 9. – № 1. – P. 27–38.

41. Statement of votes: referendum on electoral reform, May 17, 2005 [Электронный ресурс] / Elections BC.

(http://www.elections.bc.ca/docs/rpt/SOV-2005 ReferendumOnElectoralReform.pdf).

42. Statement of votes: referendum on electoral reform, May 12, 2009 [Электронный ресурс] / Elections BC.

(http://www.elections.bc.ca/docs/rpt/2009Ref/2009-Ref-SOV.pdf

43. Referendum on the voting system for the UK Parliament [Электронный ресурс] / The Electoral Commission

(http://www.electoralcommission.org.uk/elections/upcoming-elections-and-referendums/uk/referendum).

44. 2011 Referendum on the voting system [Электронный ресурс] / Electoral Commission (http://www.elections.org.nz/elections/2011-general-election-and-referendum/2011-referendum-on-the-voting-system.html).

45. **Орлов, А.Г.** Современные избирательные системы. Вып. 3: Испания, США, Финляндия, Япония / А.Г. Орлов, В.И. Лафитский, И.А. Ракитская, Т.О. Кузнецова; Науч. ред. А.В. Иванченко. М.: РЦОИТ, 2009.

46. **Вольский, В.И., Карпов, А.В.** Применение различных вариантов правила передачи голосов / В.И.Вольский, А.В Карпов. // Полития. – 2011. – № 2. – С. 162–174.

47. **Meek, B.L.** Equality of the treatment of votes and a feedback mechanism for vote counting / B.L.Meek // Voting Matters. – 1994. – Is. 1. – P. 1–7.

48. **Meek, B.L.** The problem of nontransferable votes / B.L.Meek // Voting Matters. – 1994. – Is. 1. – P. 7–11.

49. **Doron, G., Kronick, R.** Single Transferable Vote: An Example of a Perverse Social Choice Function / G.Doron, R.Kronick // American Journal of Political Science. – 1977. – Vol. 21. – № 2. – P. 303–311.

50. **Nurmi, H.** It's not just the lack of monotonicity / H.Nurmi // Representation. – 1996. – Vol. 34. – № 1. – P. 48–52.

51. **Miller, N.R.** The butterfly effect under STV / N.R.Miller // Electoral Studies. – 2007. – № 26. – P. 503–506.

52. **Hill, D.I.** Miller's example of the butterfly effect under STV / D.I.Hill // Electoral Studies. – 2008. – № 27. – P. 684–686.

53. **Woodall, D.R.** Impossibility theorem for electoral systems / D.R.Woodall // Discrete Mathematics. – 1987. – №66, – P. 209–211.

54. **Arrow, K.J.** Social Choice and Individual Values / K.J.Arrow; New Haven, CT: Yale University Press, 1963.

55. **Todd, S.W.** STV in New Zealand / S.W.Todd // Voting matters. – 2003. – Is.16. – P. 8–10.

56. **Алескеров, Ф.Т., Карпов, А.В.** Аксиоматическое описание правила передачи голосов / Ф.Т.Алескеров., А.В.Карпов // Экономический журнал Высшей школы экономики. – 2011. – № 2. – С. 135—154.

57. **Ларичев, О.И.** Теория и методы принятия решений: Учебник. / О.И.Ларичев, Изд. третье, перераб. и доп., Логос, Москва, 2006.

58. **Подиновский, В.В.** Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений: Учебное пособие / В.В.Подиновский, Физматлит, Москва, 2007.

59. **Кини, Р.Л., Райфа Х.** Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Р.Л.Кини, Х.Райфа; Пер. с англ., Радио и связь, Москва, 1981.

60. **Krantz, D.H.** Foundation of measurement / D.H.Krantz, R.D.Luce, P.Suppes, A.Tverski; vol . 1, Academic Press, New York, 1971.

61. **Фишберн, П.С.** Теория полезности для принятия решений / П.С.Фишберн; Пер. с англ., Физматлит, Москва, 1978.

62. **Подиновский, В.В.** Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / В.В.Подиновский; НН Моисеев (ред), *Современное состояние теории исследования операций*, Наука, Москва – 1979. – С. 117–145.

63. **Подиновский, В.В.** Количественная важность критериев / В.В.Подиновский // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 5. – С. 110–123.

64. **Podinovski, V.V.** The quantitative importance of criteria for MCDA / V.V.Podinovski // Journal of multi-criteria decision analysis. – 2002. – Vol 11. – P. 1–15.

65. **Fishburn, P.C.** Decision and value theory / Fishburn, PC; Wiley, New York, 1964.

66. **Подиновский, В.В.** Количественная важность критериев с дискретной шкалой первой порядковой метрики / В.В.Подиновский // Автоматика и телемеханика. – 2004 – № 8. – С. 196–203.

67. **Podinovski, V.V.** On the use of importance information in MCDA problems with criteria measured on the first ordered metric scale / V.V.Podinovski // Journal of multicriteria decision analysis. – 2009. – Vol. 15. – P. 163–174.

68. **Kirkwood, C.W., Sarin, R.K.** Ranking with partial information: a method and an application / C.W.Kirkwood, R.K,Sarin // Operations research. – 1985. Vol. 33. – P. 38–48.

69. **Маршалл, А, Олкин, И.** Неравенства: теория мажоризации и её приложения / А Маршалл, И.Олкин; Пер. с английского, Мир, Москва, 1983.

70. **Подиновский, В.В.** Анализ задач многокритериального выбора методами теории важности критериев при помощи компьютерных систем поддержки принятия решений / В.В.Подиновский // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008 – № 2. – С. 64–68.

71. **Нелюбин, А.П., Подиновский, В.В.** Билинейная оптимизация в анализе многокритериальных задач методами теории важности критериев при неточной информации о предпочтениях / А.П.Нелюбин, В.В.Подиновский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – № 5. – С. 802–813.

72. **Подиновский, В.В.** Качественная важность критериев и аддитивность многокритериальной структуры предпочтений / В.В.Подиновский // Открытое образование. – 2011. – № 2. – Ч. 2. – С. 189–192.

73. **Podinovski, V.V.** Qualitative importance of criteria and additive preference structure / V.V.Podinovski // Informational and Communication Technologies – Theory and Practice: Proceedings of the International Scientific Conference ICTMC Devoted to the 80th Anniversary of I.V. Prangishvili. – 2011. – Nova, USA. – P. 499–500.

74. **Chernyak, E.** Abstracting concepts from text documents by using an ontology / E.Chernyak, O.Chugunova, J.Askarova, S.Nascimento, B.Mirkin // Proc. of Workshop CDUD'11 – Concept Discovery in Unstructured Data, June 2011, Moscow, Russia. CEUR-Workshop series. – V.757. – P.21–30.

75. **Mirkin, B.** How to Visualize a Crisp or Fuzzy Topic Set over a Taxonomy / B.Mirkin, S.Nascimento, T.Fenner, R.Felizardo // Pattern Recognition and Machine Intelligence, Springer, Series: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6744, p.3–12.

76. **Mirkin, B., Kramarenko, A.** Approximate bicluster and tricluster boxes in the analysis of binary data / B.Mirkin, A.Kramarenko; Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing, Series: Lecture Notes in Computer Science, Springer, Vol. 6743, p.249–257.

77. **Mirkin, B., Nascimento, S.** Developing Additive Spectral Approach to Fuzzy Clustering / B.Mirkin, S.Nascimento; Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing, Series: Lecture Notes in Computer Science, Springer, Vol. 6743, p.274–278.

78. **Mirkin, B.G.** Core Concepts in Data Analysis: Summarization, Correlation, Visualizatio / B.G.Mirkin; London, Springer, 388 p, 2011.

79. **Mirkin, B.G.** Choosing the number of clusters / B.G.Mirkin // WIREs Data Mining and Knowledge Discovery. – 2011. – № 3. – P.252–260.

80. **Миркин, Б.Г.** Методы кластер-анализа для поддержки принятия решений: обзор ("Methods of cluster analysis for decision making support: a review") / Б.Г.Миркин // Препринт WP7/2011/03. – М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2011. – 88 с.

81. **Nixon, M.S., Aguado, A.S.** Feature Extraction and Image Processing / M.S.Nixon, A.S.Aguado; Newness, Oxford, 2002.

82. **Pavlidis, T.** Algorithms for Graphics and Image Processing / T.Pavlidis; Computer Science Press, Rockville, Maryland, 1982, 416 pp.

83. **Medioni, G., Yasumoto, Y.** Corner detection and curve representation using cubic B-splines / G.Medioni, Y.Yasumoto // Comput. Vision. Graph. Image Process. – 1987. – №39. – P. 267–278.

84. **Pei, S.-C., Horng, J.-H.** Optimum approximation of digital planar curves using circular arcs / S.-C.Pei, J.-H.Horng // Pattern Recognition. – 1996. – №29 (3). – P.383–388.

85. **Huang, S.-C., Sun, Y.-N.** Polygonal approximation using genetic algorithms / S.-C.Huang, Y.-N.Sun // Pattern Recognition. – 1999. – № 32. – P.1409–1420.

86. **Saint-Marc, P., Chen, J.-S.**, Medioni G. Adaptive smoothing: A general tool for early vision / P.Saint-Marc, J.-S.Chen // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. – 1991. – №13 (6). – P.514–529.

87. **Li, L., Chen, W.** Corner detection and interpretation on planar curves using fuzzy reasoning / L.Li, W.Chen // IEEE Trans. PAMI. – 1999. – № 21 (11). – P.1204–1210.

88. **Sklansky, J.** Minimum-perimeter polygons of digitized silhouettes / J.Sklansky, R.L.Chazin, B.J.Hansen // IEEE Trans. Comput. – 1972. – № 21. – P. 260–268.

89. **Ramer, U.** An iterative procedure for the polygonal approximation of plane closed curves / U.Ramer // Computer Graphics Image Processing. – 1972. №1. – P. 244–256.

90. **Williams, C.M.** An efficient algorithm for the piecewise linear approximation of planar curves / C.M.Williams // Comput. Graph Image Process. – 1978. – №8. – P.286–293.

91. **Sklansky, J., Gonzalez, V.** Fast polygonal approximation of digitized curves / J.Sklansky, V.Gonzalez // Pattern Recognition. – 1980. – №12. – P.327–331.

92. **Pavlidis, T., Horowitz, S.L.** Segmentation of plane curves / T.Pavlidis, S.L.Horowitz // IEEE Trans. Comput. – 1974. – № 23. – P.860–870.

93. **Kurozumi, Y., Davis, W.A.** Polygonal approximation of the minimax method / Y.Kurozumi, W.A.Davis // Comput. Graph Image Process. – 1982. – №19. – P.248–264.

94. **Dunham, J.G.** Optimum uniform piecewise linear approximation of planar curves / J.G.Dunham // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. – 1986. – №8. – P. 67–75.

95. **Ray, B.K., Ray, K.S.** Determination of optimal polygon from digital curve using L1 norm / B.K.Ray, K.S.Ray // Pattern Recognition. – 1993. – № 26. – P.505–509.

96. **Wall K., Danielson P.-E.** A fast sequential method for polygonal approximation of digitized curves / K.Wall, P.-E.Danielson // Comput. Vis. Graph. Image Process. – 1984. – № 28. – P. 220–227.

97. **Wu, J.-S., Leou, J.-J.** New polygonal approximation schemes for object shape representation / J.-S.Wu, J.-J.Leou // Pattern Recognition. – 1993. – №26. – P. 471–484.

98. **Rannou, F., Gregor, J.** Equilateral polygon approximation of closed contours / F.Rannou, J.Gregor // Pattern Recognition. – 1996. – № 29. – P.1105–1115.

99. **Kolesnikov, A., Franti, P.** Polygonal approximation of closed discrete curves / A.Kolesnikov, P.Franti // Pattern Recognition. – 2007. – № 40. – P.1282–1293.

100. **Bronevich, A., Lepskiy, A.** Geometrical fuzzy measures in image processing and pattern recognition / A.Bronevich, A.Lepskiy // Proc. of the 10th IFSA World Congress. – 2003. Istanbul, Turkey. – P.151–154.

101. **Klement, E.P.** Triangular Norms / E.P.Klement, R.Mesiar, E.Pap; Kluwer, Dordrecht, 2000.

102. **Ruspini, E.H.** New experimental results in fuzzy clustering / E.H.Ruspini // Information Sciences. – 1973. – №6. – P. 273–284.

103. **Ruspini, E.H.** A New Approach to Clustering / E.H.Ruspini // Information and Control. – 1969. – №15(1). – P. 22–32.

104. **Dunn, J.C.** A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact, well-separated clusters / J.C.Dunn // J. Cybernetics. – 1974. – № 3. – P. 32–57.

105. **Bezdek, J.C.** Pattern Recognition with Fuzzy Objective finction Algorithms / J.C.Bezdek; Plenum Press, New York, 1981.

106. **Yang, M.-S.** A Survey of Fuzzy Clustering / M.-S.Yang // Mathl. Comput. Modelling. – 1993. – Vol. 18. – № 11. – P. 1–16.

107. **Miyamoto, S.** Algorithms for fuzzy clustering: methods in c-means clustering with applications / S.Miyamoto, H.Ichihashi, K.Honda; Studies in fuzziness and soft computing, Springer-Verlag. 247 pp., 2008.

108. **Kreinovich, V.** Strongly transitive fuzzy relations: an alternative way to describe similarity / V.Kreinovich // Int. J. of Intel. Sys. – 1995. – № 10. – P. 1061–1076.

109. **Dobrakovova, J.** Pseudometrics and fuzzy relations / J.Dobrakovova // Aplimat – J. Appl. Math. – 2009. – № 2(1). – P. 89–95.

110. **Лепский, А.Е.** Нахождение минимального представления контура изображения как решение задачи нечеткой кластеризации / А.Е.Лепский // Известия вузов России. Радиоэлектроника. – 2002. – №1. – С.35–39.

111. **Lepskii, A.E.** On Stability of the Center of Masses of the Vector Representation in One Probabilistic Model of Noiseness of an Image Contour / A.E.Lepskii // Automation and Remote Control. – 2007. – Vol. 68. – № 1. – P. 75–84.

112. **Duda, R.O.** Pattern Classification and Scene Analysis: Part I Pattern Classification / R.O.Duda, P.E.Hart , D.G.Stork; John Wiley & Sons, 1998.

113. **Shiryaev, A.N.** Probability (Graduate Texts in Mathematics) / A.N.Shiryaev; Springer Pub., 1995.

114. **Lepskiy A.** Stable Feature Extraction with the Help of Stochastic Information Measure / A.Lepskiy // Pattern Recognition and Machine Intelligence. Springer, Series: Lecture Notes in Computer Science. – Vol. 6744. – P.54–59.

115. **Lepskiy, A.** Obtaining the Minimal Polygonal Representation of a Curve by Means of a Fuzzy Clustering / A.Lepskiy // International Workshop on Soft Computing Applications and Knowledge Discovery (SCAKD-2011). Moscow, U-HSE. – P.63–71.

116. **Алескеров, Ф.Т.** Бинарные отношения, графы и коллективные решения / Ф.Т.Алескеров, Э.Л.Хабина, Д.А.Шварц; М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006.

117. **Алескеров, Ф.Т., Яновская, Ю.М.** Применение теории справедливых решений к трудовым спорам / Ф.Т.Алескеров, Ю.М.Яновская // Управление персоналом. – 2003. – № 1. – С. 59–61.

118. **Алескеров, Ф.Т.** Слияние фирм: анализ трех ключевых проблем / Ф.Т.Алескеров // Финансовый бизнес. – 2002. – № 6. – С. 3–7.

119. **Brams, S.J., Taylor, A.D.** Fair division. From cake-cutting to despute resolution / S.J.Brams, A.D.Taylor; Cambridge University Press, 1996.

120. **Брамс, С., Тейлор, А.** Делим по справедливости / С.Брамс, А. М.Тейлор; СИНТЕГ, 2003.

121. **Рубчинский, А.А.** Справедливые дележи с делимыми и неделимыми пунктами (на англ. яз.) / А.А.Рубчинский; М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, WP7/2009/05, 2009.

122. **Шварц, Д.А.** Манипулирование в задаче дележа для двух участников / Д.А.Шварц // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 1. – С.130–140.

123. **Алескеров, Ф.Т.** Построение рейтингов журналов по менеджменту с помощью методов теории коллективного выбора / Ф.Т.Алескеров, В.В.Писляков, А.Н.Субочев, А.Г.Чистяков; WP7/2011/04 «Математические методы анализа решений в экономике, бизнесе и политике». М.: ГУ ВШЭ, 44 с., 2011

124. **Kendall, M.** A New Measure of Rank Correlation / M.Kendall // Biometrika. – 1938. – V. 30. – P. 81–89.

125. **Goodman, L.A., Kruskal, W.H.** Measures of Association for Cross Classifications / L.A.Goodman, W.H.Kruskal // Journal of the American Statistical Association. – 1954. – V. 49. – 268. – P. 732–764.

126. **Айзерман, М.А., Алескеров, Ф.Т.** Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы) / М.А.Айзерман, Ф.Т.Алескеров // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 9. – С. 127–151.

127. **Copeland, A.H.** A reasonable social welfare function (mimeo) / A.H.Copeland; University of Michigan, Ann Arbor (Seminar on Application of Mathematics to the Social Sciences), 1951.

128. **Miller, N.** A new solution set for tournaments and majority voting: Further graph-theoretical approaches to the theory of voting / N.Miller // American Journal of Political Science. – 1980. – V. 24. – P. 68–96.

129. **von Neumann J., Morgenstern O.** Theory of Games and Economic Behavior / J. von Neumann, O.Morgenstern; Princeton: Princeton University Press, 1944.

130. **Wuffl, A.** Finagle’s Law and the Finagle’s Point, a New Solution Concept for Two-Candidate Competition in Spatial Voting Games without a Core / A.Wuffl, S.Feld, G.Owen // American Journal of Political Science. – 1989. – V. 33. – № 2. – P. 348–375.

131. **Subochev, A.** Dominant, Weakly Stable, Uncovered Sets: Properties and Extensions / A.Subochev; Working paper WP7/2008/03. Moscow: State University – Higher School of Economics, 2008.

132. **Aleskerov, F., Subochev, A.** Matrix-vector representation of various solution concepts / F.Aleskerov, A.Subochev; Working paper WP7/2009/03. Moscow: SU – Higher School of Economics. 2009.

133. **Gale, D., Shapley, L.S.** College Admissions and the Stability of Marriage / D.Gale, L.S.Shapley // American Mathematical Monthly. – 1962. – Vol. 69. – P.9–14.

134. **Balinski, M., Sonmez, T.** A Tale of Two Mechanisms: Student Placement / M.Balinski, T.Sonmez // Journal of Economic Theory. – 1999. – Vol. 84(1). – P.73–94.

135. **Abdulkadiroglu, A., Sonmez, T.** School Choice: A Mechanism Design Approach / A.Abdulkadiroglu, T.Sonmez // American Economic Review. – 2003. – Vol. 93. – P.729–747.

136. **Кисельгоф, С.Г.** Выбор вузов абитуриентами с квадратичной функцией полезности / Кисельгоф С.Г.; Препринт WP7/2011/01. – М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 44 с., 2011.

ПРИЛОЖЕНИЕ А Таксономии дисциплин «Математика», «Информатика» и «Прикладная математика» на основе классификации специальностей ВАК РФ

ROOT/ ROOT	ROOT					
	A	ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА				
		A.01/02.00.17	Математическая и квантовая химия			
			A.01.01	Строение и превращения молекулярных систем		
			A.01.02	Приближенные методы квантовой и математической химии.		
			A.01.03	Установление закономерностей строения химических соединений		
			A.01.04	Моделирование поведения молекул в различных окружениях		
			A.01.05	Строение и динамика превращений химических соединений		
		A.02/03.01.09	Математическая биология, биоинформатика			
			A.02.01	Моделирование живых систем		
				A.02.01.01	Моделирование отдельной клетки	
				A.02.01.02	Моделирование органа	
				A.02.01.03	Моделирование организмов	
				A.02.01.04	Моделирование популяций	
			A.02.02	Моделирование эволюционных процессов в живой природе		
			A.02.03	Компьютерная геномика, протеомика, иммуно-		

				мика.		
			A.02.04	Компьютерная фармакология и токсикология		
			A.02.05	Распознавание и синтез изображений в биологии и медицине		
			A.02.06	Бионика: имитация процессов в живых системах		
			A.02.07	Моделирование распространенности и структуры заболеваний		
			A.02.08	Медицинская диагностика		
				A.02.08.01	Прогнозирование исходов заболевания	
				A.02.08.02	Оценка эффективности медицинских вмешательств	
			A.02.09	Базы медицинских и биологических данных и знаний		
			A.02.10	Анализ и прогнозирование свойств биологических объектов		
		A.03/05.01.01	Инженерная и компьютерная графика			
			A.03.01	Теория изображений		
			A.03.02	Непрерывное и дискретное геометрическое моделирование		
			A.03.03	Теория геометрических преобразований и ее использование		
			A.03.04	Геометрические методы оптимизации		
			A.03.05	Многомерная геометрия и номография		
			A.03.06	Методы и алгоритмы визуализации		
			A.03.07	Обработка изображений в системах техническо-		

				го зрения		
			А.03.08	Геометрические основы информационных систем.		
		А.04/05.11.16	Информационно-измерительные и управляющие системы			
			А.04.01	Системы контроля и метрологического обеспечения		
			А.04.02	Анализ технического состояния, диагностика и идентификация		
			А.04.03	Метрологическое сопровождение		
			А.04.04	Метрологическая экспертиза и аттестация		
		А.05/10.02.21	Прикладная и математическая лингвистика			
			А.05.01	Модели в языкознании		
			А.05.02	Лингвистическая генетика		
			А.05.03	Лингвистическая и математическая статистика		
			А.05.04	Информационные языки		
			А.05.05	Теория и системы машинного перевода и словари		
			А.05.06	Автоматизированные редакционно-издательские системы		
			А.05.07	Системы обработки (анализа/синтеза) речевой информации		
			А.05.08	Автоматизированные системы компрессии и понимания текста		
			А.05.09	Оптимизация преподавания и обучающие системы		

			А.05.10	Автоматизированное рабочее место (АРМ)		
		А.06/05.25.05	Информационные системы и процессы			
			А.06.01	Анализ и выявление закономерностей в информационных потоках		
			А.06.02	Взаимодействие человек-машина		
			А.06.03	Сбор, хранение, передача и представление информации		
			А.06.04	Проектирование и оптимизация баз данных		
			А.06.05	Проектирование словарей и поиск информации		
			А.06.06	Анализ текстов для представления в базах данных		
			А.06.07	Организационное обеспечение информационных систем		
			А.06.08	Информационные службы и электронные библиотеки		
			А.06.09	Сетевые информационные ресурсы и технологии		
			А.06.10	Обработка информации и принятие решений		
		А.07/08.00.13	Математические и инструментальные методы экономики			
			А.07.01	Математический аппарат анализа экономических систем		
				А.07.01.01	Математическая экономика	
				А.07.01.02	Эконометрика	
				А.07.01.03	Прикладная статистика	

				А.07.01.04	Теория игр	
				А.07.01.05	Оптимизация	
				А.07.01.06	Теория принятия решений	
				А.07.01.07	Компьютерные модели	
			А.07.02	Макромодели		
				А.07.02.01	Условия равновесия и неравновесия	
				А.07.02.02	Конкурентная экономика	
				А.07.02.03	Монополия	
				А.07.02.04	Олигополия	
				А.07.02.05	Сочетание разных форм собственности	
			А.07.03	Микромодели		
				А.07.03.01	Фирмы и предприятия	
				А.07.03.02	Домашние хозяйства	
				А.07.03.03	Рынки	
				А.07.03.04	Спрос и потребление	
				А.07.03.05	Предпринимательский риск	
				А.07.03.06	Инвестиционные решения	
			А.07.04	Модели глобальной экономики		
				А.07.04.01	Межотраслевой анализ	
				А.07.04.02	Межрегиональный и межстрановой анализ	
				А.07.04.03	Интегральные социально-экономические инди-	

					каторы	
			А.07.05	Модели национальной экономики		
			А.07.06	Финансовая математика и актуарные расчеты		
			А.07.07	Прогнозирование социально-экономических процессов		
				А.07.07.01	Моделирование экономической коньюнктуры	
				А.07.07.02	Определение трендов и циклов	
				А.07.07.03	Моделирование демографических процессов	
				А.07.07.04	Моделирование рынка труда и занятости	
				А.07.07.05	Качество жизни населения	
			А.07.08	Управление информационными рисками		
			А.07.09	Инструментальные средства анализа		
				А.07.09.01	Компьютерный эксперимент	
				А.07.09.02	Имитационные модели	
				А.07.09.03	Рационализация организационных структур	
				А.07.09.04	Поддержка принятия решений в государственных программ	
				А.07.09.05	Искусственный интеллект для управленческих решений	

				А.07.09.06	Гипертекстовые технологии и модельные тренажеры	
				А.07.09.07	Экономические методы информационной безопасности	
		А.08/25.00.35	Геоинформатика			
			А.08.01	Моделирование и эксперимент в геоинформатике		
			А.08.02	Системы сбора и передачи геоинформации		
			А.08.03	Геоинформационные системы (ГИС)		
			А.08.04	Математическое обеспечение ГИС		
			А.08.05	Геомоделирование и геоинформационное картографирование		
			А.08.06	Компьютерные геоизображения		
			А.08.07	Геоинформационные инфраструктуры		
			А.08.08	Сбор и анализ геоинформации		
		А.09/05.13.18	Математическое моделирование, методы и комплексы программ			
			А.09.01	Методы моделирования		
			А.09.02	Качественное и приближенное исследование математических моделей		
			А.09.03	Численные методы		
			А.09.04	Проверка адекватности модели		
			А.09.05	Комплексы проблемно-ориентированных программ		
			А.09.06	Вычислительный эксперимент и интерпретация		

				результатов		
			A.09.07	Системы имитационного моделирования		
	I	ИНФОРМАТИКА				
		I.01/05.13.01	Системный анализ, управление и обработка информации			
			I.01.01	Теоретические основы и методы системного анализа		
			I.01.02	Модели описания и решения задач системного анализа		
			I.01.03	Математическое и программное обеспечение управления.		
			I.01.04	Идентификация и синтез систем управления		
			I.01.05	Теория множеств и теория информации в анализе сложных систем		
			I.01.06	Интеллектуальная поддержка принятия решений		
			I.01.07	Прогнозирование качества и надежности сложных систем		
			I.01.08	Обработка информации		
				I.01.08.01	Методы анализа и обработки экспертной информации	
				I.01.08.02	Визуализация, трансформация и анализ информации	
		I.02/05.13.05	Устройства вычислительной техники и систем			

			управления			
			I.02.01	Принципы вычислительной техники и систем управления		
			I.02.02	Исследование функционирования		
			I.02.03	Анализ и синтез вычислительной техники и систем управления		
			I.02.04	Контроль и диагностика функционирования		
		I.03/05.13.06	Автоматизация технологических процессов и производства			
			I.03.01	Автоматизация		
				I.03.01.01	Автоматизация производства заготовок и сборки	
				I.03.01.02	Автоматизация контроля и испытаний	
			I.03.02	Теоретические основы автоматизации и управления		
				I.03.02.01	Технология создания автоматизированных систем управления	
				I.03.02.02	Идентификация производственных процессов и систем управления	
				I.03.02.03	Технология создания автоматизированных систем управления	
				I.03.02.04	Организационно-	

					технологических проектирование и управление	
			I.03.03	Автоматизированные системы управления АСУ.		
				I.03.03.01	Информационное и программное обеспечение АСУ	
				I.03.03.02	Повышение диагностируемости, живучести и надежности АСУ	
				I.03.03.03	Экспертные и диалоговые подсистемы АСУ	
				I.03.03.04	Интеллектуализация решения прикладных задач в АСУ	
				I.03.03.05	Интеграция и совместимость АСУ	
				I.03.03.06	Автоматизированные системы научных исследований	
		I.04/05.13.10	Управление в социальных и экономических системах			
			I.04.01	Принятие решений в социальных и экономических системах		
			I.04.02	Организационные системы и структуры		
			I.04.03	Проблемно-ориентированные управление и принятие решений		
			I.04.04	Интеллектуальная поддержка принятия управленческих решений		

			I.04.05	Прогнозирование качества организационных систем		
		I.05/05.13.11	Информатика вычислительных машин и сетей			
			I.05.01	Проектирование, анализ и верификация алгоритмов и программ		
			I.05.02	Языки программирования; синтаксис и семантика; трансляторы		
			I.05.03	Базы данных и знаний		
			I.05.04	Управление вычислительными процессами		
			I.05.05	Операционные системы		
			I.05.06	Человеко-машинные интерфейсы; символьные вычисления		
			I.05.07	Программные средства		
			I.05.08	Параллельные системы		
				I.05.08.01	Организация распределенных и параллельных систем	
				I.05.08.02	Алгоритмы для управления параллельными процессами	
				I.05.08.03	Средства параллельного программирования	
				I.05.08.04	Распределенные системы	
			I.05.09	Оценка качества программных систем		
				I.05.09.02	Стандартизация программных систем	
				I.05.09.03	Совпровождение про-	

					граммных систем	
		I.06/05.13.12	Системы автоматизации проектирования (по отраслям)			
			I.06.01	Интегрированные автоматизированные комплексы		
			I.06.02	Анализ и синтез проектных решений		
			I.06.03	Автоматизация документирования и документооборота		
			I.06.04	Постановка, формализация, типизация проектных процедур		
			I.06.05	Взаимодействие проектировщик-система		
			I.06.06	Технические средства визуализации		
				I.06.06.01	Компьютерная графика	
				I.06.06.02	Средства геометрического моделирования	
				I.06.06.03	Виртуальная реальность	
		I.07/05.13.15	Вычислительные машины, системы и компьютерные сети			
			I.07.01	Архитектура вычислительных машин и систем		
			I.07.02	Устройства обработки символьных выражений		
			I.07.03	Устройства управления		
			I.07.04	Устройства ввода-вывода		
			I.07.05	Устройства памяти		
			I.07.06	Параллельная, распределенная и конвейерная обработка		
			I.07.07	Многопроцессорные и многомашинные систе-		

				мы		
			I.07.08	Компьютерные сети		
				I.07.08.01	Структура и топология компьютерных сетей	
				I.07.08.02	Сетевые протоколы и передача данных в сетях	
				I.07.08.03	Взаимодействие компьютерных сетей	
				I.07.08.04	Мобильные сети	
				I.07.08.05	Защита компьютерных сетей	
			I.07.09	Контроль и диагностика вычислительных систем		
		I.08/05.13.17	Теоретические основы информатики			
			I.08.01	Исследование информационных процессов и структур		
			I.08.02	Преобразование информации в данные, обработка информации		
				I.08.02.01	Методы и средства кодирования информации в виде данных	
				I.08.02.02	Языки описания данных	
				I.08.02.03	Языки манипулирования данными	
				I.08.02.04	Языки запросов	
				I.08.02.05	Модели данных	
			I.08.03	Модели представления знаний		

				I.08.03.01	Языки представления знаний	
				I.08.03.02	Представление знаний о слабо структурированных системах	
				I.08.03.03	Интегрирование систем представления знаний	
				I.08.03.04	Знание о динамике процесса	
				I.08.03.05	Концептуальные модели предметных областей и онтологии	
			I.08.04	Анализ данных		
				I.08.04.01	Методы анализа данных и обнаружения закономерностей	
				I.08.04.02	Методы анализа текстов на естественном языке	
				I.08.04.03	Языки и модели человеко-машинного общения	
				I.08.04.04	Методы и модели распознавания, понимания и синтеза речи	
				I.08.04.05	Методы машинного обучения	
					I.08.04.05.01	Методы распознавания образов
					I.08.04.05.02	Методы фильтра-

						ции, распознавания и синтеза изображений
					I.08.04.05.03	Методы решающих правил
			I.08.05	Моделирование интеллекта		
				I.08.05.01	Моделирование поведения	
				I.08.05.02	Моделирование рассуждений	
				I.08.05.03	Моделирование образного мышления	
			I.08.06	Разработка интернет-технологий		
				I.08.06.01	Поиск, анализ и фильтрация информации	
				I.08.06.02	Приобретение знаний и создание онтологий	
				I.08.06.03	Интеллектуализация бизнес-процессов	
			I.08.07	Математическая теория языков и грамматик		
			I.08.08	Бионика и имитация биологических процессов		
			I.08.09	Программные системы для новых информационных технологий		
			I.08.10	Телекоммуникационные системы и оценки их эффективности		
		I.09/05.13.18	Модели, методы, программы			
			I.09.01	Математические методы моделирования		

			I.09.02	Качественный и приближенный анализ математических моделей		
			I.09.03	Численные методы и вычислительный эксперимент		
			I.09.04	Комплексы проблемно-ориентированных программ		
			I.09.05	Проверка адекватности математических моделей		
			I.09.06	Модели и методы интерпретации натурного эксперимента		
			I.09.07	Системы имитационного моделирования.		
		I.10/05.13.19	Защита информации			
			I.10.01	Защита формирования информационных ресурсов		
			I.10.02	Системы документооборота и защита их информации		
			I.10.03	Информационная безопасность в открытых сетях (Интернет)		
			I.10.04	Идентификация и аутентификация пользователей		
			I.10.05	Системы разграничения доступа;внутренний аудит и мониторинг		
			I.10.06	Угрозы нарушения информационной безопасности		
				I.10.06.01	Выявление угроз нарушения информационной безопасности	
				I.10.06.02	Идентификация угроз	

					нарушения информационной безопасности	
				I.10.06.03	Классификация угроз нарушения информационной безопасности	
			I.10.07	Анализ рисков нарушения информационной безопасности		
			I.10.08	Противодействие нарушению безопасности и хищению		
			I.10.09	Оценка эффективности систем информационной безопасности		
		I.11/05.13.20	Квантовые методы обработки информации			
			I.11.01	Квантовая теория информации		
				I.11.01.01	Меры квантовой информации	
				I.11.01.02	Энтропия фон Неймана	
				I.11.01.03	Пропускная способность квантовых каналов связи	
			I.11.02	Квантовые вычисления		
			I.11.03	Разработка квантовых битов (кубит)		
			I.11.04	Квантовые системы и их элементы		
			I.11.05	Квантовые методы защиты информации		
			I.11.06	Применение квантовой информатики		
	M	МАТЕМАТИКА				
		M.01/01.01.01	Вещественный, комплексный и функциональный анализ			

			М.01.01	Действительный анализ		
				М.01.01.01	Метрическая теория функций	
				М.01.01.02	Теория функциональных пространств	
				М.01.01.03	Теория приближения функций	
			М.01.02	Комплексный анализ		
				М.01.02.01	Аналитические функции	
					М.01.02.01.01	Граничные свойства аналитических функций
					М.01.02.01.02	Классы и пространства аналитических функций
					М.01.02.01.03	Представления аналитических функций
					М.01.02.01.04	Приближения аналитическими функциями
				М.01.02.02	Геометрическая теория функций	
				М.01.02.03	Конформные отображения и их обобщения	
				М.01.02.04	Краевые задачи для аналитических функций	
				М.01.02.05	Потенциал в комплекс-	

					ном анализе	
				M.01.02.06	субгармонические функции	
			M.01.03	Функциональный анализ		
				M.01.03.01	Отображения бесконечномерных пространств	
					M.01.03.01.01	Функционалы и операторы
				M.01.03.02	Векторные пространства	
				M.01.03.03	Нормированные пространства	
				M.01.03.04	Интегрирование и меры в функциональных пространствах	
				M.01.03.05	Интегральные представления и преобразования	
				M.01.03.06	Теория операторов и дифференциальных операторов	
				M.01.03.07	Теория возмущений операторов	
				M.01.03.08	Теория рассеяния	
				M.01.03.09	Теория банаховых алгебр	
				M.01.03.10	Теория представлений групп и алгебр	
				M.01.03.11	Теория обобщенных функций	
				M.01.03.12	Теория динамических	

					систем	
				М.01.03.13	Вариационное исчисление	
		М.02/01.01.02	Дифференциальные уравнения и динамические системы			
			М.02.01	Общая теория дифференциальных уравнений и систем		
			М.02.02	Начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений		
			М.02.03	Качественная теория дифференциальных уравнений и систем		
			М.02.04	Динамические дифференциальные системы на многообразиях		
			М.02.05	Нелинейные дифференциальные уравнения и системы		
			М.02.06	Аналитическая теория дифференциальных уравнений		
			М.02.07	Псевдодифференциальные операторы.		
			М.02.08	Дифференциально-операторные уравнения.		
			М.02.09	Дифференциально-функциональные уравнения.		
			М.02.10	Асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем.		
			М.02.11	Дифференциальные включения и вариационные неравенства.		
			М.02.12	Дифференциальные уравнения в задачах управления.		
		М.03/01.01.03	Математические проблемы			

			физики			
			М.03.01	Математические проблемы механики частиц и систем		
			М.03.02	Математические проблемы механики сплошной среды		
			М.03.03	Математические проблемы механики жидкости и газа		
			М.03.04	Математические проблемы оптики и электродинамики		
			М.03.05	Математические проблемы квантовой теории		
			М.03.06	Математические проблемы термодинамики и статистической физики		
			М.03.07	Математические проблемы теории относительност и астрофизики		
			М.03.08	Математические проблемы геофизики		
		М.04/01.01.04	Геометрия и топология			
			М.04.01	Геометрия		
				М.04.01.01	Геометрия многообразий и геометрических структур.	
				М.04.01.02	Дискретная и комбинаторная геометрия.	
				М.04.01.03	Дифференциальная геометрия и ее приложения.	
				М.04.01.04	Интегральная геометрия.	
				М.04.01.05	Симплектическая, контактная и пуассонова геометрия.	

				М.04.01.06	Геометрия особенностей.	
				М.04.01.07	Геометрия групп и однородных пространств.	
				М.04.01.08	Пространства отображений и модулей геометрических структур.	
			М.04.02	Топология		
				М.04.02.01	Общая топология.	
				М.04.02.02	Алгебраическая топология.	
				М.04.02.03	Топология гладких многообразий.	
				М.04.02.04	Маломерная топология, включая теорию узлов и зацеплений.	
				М.04.02.05	Топология особенностей.	
				М.04.02.06	Топология групп и однородных пространств	
		М.05/01.01.05	Теория вероятностей и математическая статистика			
			М.05.01	Теория вероятностей		
				М.05.01.01	Аксиоматические модели случайных явлений.	
				М.05.01.02	Распределения вероятностей и предельные теоремы.	
				М.05.01.03	Комбинаторные и геометрические вероятност-	

					ные задачи.	
				М.05.01.04	Случайные процессы и поля.	
				М.05.01.05	Оптимизационные и алгоритмические вероятностные задачи.	
				М.05.01.06	Статистика случайных процессов и полей.	
				М.05.01.07	Некоммутативная теория вероятностей.	
			М.05.02	Математическая статистика		
				М.05.02.01	Методы статистического анализа и вывода.	
				М.05.02.02	Оценивание параметров. Проверка статистических гипотез.	
				М.05.02.03	Методы статистического моделирования.	
		М.06/01.01.06	Математическая логика, алгебра и теория чисел			
			М.06.01	Группы и алгебры Ли.		
				М.06.01.01	Группы.	
				М.06.01.02	Полугруппы	
				М.06.01.03	Кольца, поля, модули	
				М.06.01.04	Алгебраическая геометрия.	
				М.06.01.06	Теория представлений.	
				М.06.01.07	Категории и функторы.	

			М.06.02	Теория чисел.		
				М.06.02.01	Алгебраическая теория чисел.	
				М.06.02.02	Аналитическая теория чисел.	
				М.06.02.03	Геометрия чисел.	
			М.06.03	Математическая логика.		
				М.06.03.01	Теория моделей: свойства семантических моделей.	
				М.06.03.02	Теория доказательств.	
				М.06.03.03	Неклассические логики.	
				М.06.03.04	Теория алгоритмов и вычислимых функций	
				М.06.03.05	Алгоритмическая теория информации и теория сложности.	
				М.06.03.06	Аксиоматическая теория множеств и нестандартный анализ.	
		М.07/01.01.07	Вычислительная математика			
			М.07.01	Алгоритмы численного решения задач.		
			М.07.02	Теория численных методов.		
				М.07.02.01	Обоснование алгоритмов.	
				М.07.02.02	Свойства алгоритмов.	
				М.07.02.03	Эффективность алгорит-	

					мов	
			М.07.03	Программные комплексы, связанные с численными методами.		
			М.07.04	Реализация численных методов в решении прикладных задач.		
		М.08/01.01.09	Дискретная математика и математическая кибернетика			
			М.08.01	Дискретная математика.		
				М.08.01.01	Теория функциональных систем и проблематика полноты	
				М.08.01.02	Теория автоматов	
				М.08.01.03	Теория графов и комбинаторный анализ	
				М.08.01.04	Теория кодирования (алгебраические и комбинаторные вопросы)	
			М.08.02	Теория управляющих систем.		
				М.08.02.01	Синтез и сложность управляющих систем	
				М.08.02.02	Эквивалентные преобразования управляющих систем.	
				М.08.02.03	Контроль функционирования управляющих систем.	
			М.08.03	Математическое программирование.		

				М.08.03.01	Методы минимизации	
			М.08.04	Математическая теория исследования операций и теория игр.		
				М.08.04.01	Теория игр	
				М.08.04.02	Теория исследования операций	
			М.08.05	Математическая теория распознавания и классификации.		
			М.08.06	Математическая теория оптимального управления.		