

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ I

Курс математического анализа является первой частью курса математики, который рассчитан на три семестра и является обязательным для студентов экономического бакалавриата. Задача курса состоит в освоении фундаментальных математических понятий и овладении техникой математического доказательства, закреплении основных навыков математических вычислений и обработки данных. Курс математики в бакалавриате включает в себя основные сведения из математического анализа и линейной алгебры и должен заложить теоретическую основу для современных методов экономического анализа, преподаваемых в других курсах. Кроме того, задачами курса является формирование навыка анализа практических ситуаций с точки зрения изученных понятий и общее развитие аналитического мышления. «Математический анализ I» включает темы классического математического анализа от определения функции до условий сходимости рядов.

Требования к студентам

- Для успешного освоения материала курса требуется владение курсом математики в объёме школьной программы и элементарными навыками работы с компьютером.

Формы контроля

- 40 % оценки за курс - письменный экзамен в конце семестра
- 30 % - оценка за промежуточную контрольную
- 30 % - работа в течение семестра (включает работу на занятиях и выполнение текущих домашних заданий).

Основные учебные пособия

- Зорич, В.А. Математический анализ, ч. 1 и 2., Фазис, 1997.
- Stewart, J. - Calculus - Early Transcendentals 6e 2008.

Замечания

- Специфической особенностью курса, отличающей его от стандартных курсов математики, которые читаются в российских вузах, будет упор на более активное использование современных коммуникационно-вычислительных средств: прежде всего, программ Microsoft Excel (и аналогичных продуктов других фирм) и Mathematica (или Maple). Поскольку основной задачей этого курса является овладение базовыми понятиями и навыками математических вычислений, разбиение занятий на «лекции» и «семинары» будет менее чётким, чем это обычно делается на технических специальностях.

1. Функции. Первое знакомство.

Stewart 10-81.

Понятие функции. Область определения, множество значений функции. Способы задания функции (словесное описание, таблица значений, графический способ, точная формула).

График функции. Четные и нечетные функции. Возрастание, убывание функции.

Stewart 25-37.

Элементарные функции: линейные функции, многочлены, степенные функции, рациональные функции, алгебраические функции, тригонометрические функции.

Stewart 37-45.

Преобразования функций: Вертикальные и горизонтальные сдвиги. Вертикальные и горизонтальные растяжения. Отражения относительно координатных осей. Сложение, умножение, взятие композиции функций.

Stewart 52-72.

Экспонента. Свойства перемножения и взятия композиции экспонент. Экспонента и сложные проценты. Обратные функции. Когда у функции существует обратная? Связь графиков исходной и обратной функции. Логарифм. Свойства сложения логарифмов и умножения логарифма на число. Обратные тригонометрические функции.

Примеры задач:

Построить график функции. Определить, является ли функция четной/нечетной. Найти обратную функцию.

2. Предел. Производная.

Stewart 82-172, Зорич 105-188.

Stewart 82-99.

Вводные слова. Предел функции – понятие о пределе. Предел справа и слева. Бесконечные пределы и вертикальные асимптоты.

Stewart 99-108.

Операции с пределами. Предел суммы, произведения и частного.

Stewart 109-118.

Определение предела, пределов справа и слева, бесконечных пределов. Доказательство теоремы суммирования пределов.

Stewart 119-130.

Определение непрерывности функции в точке и на интервале. Непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций. Теорема о пределе композиции функций; композиция непрерывных функций непрерывна.

Stewart 130-143.

Понятие о пределе функции на бесконечности, горизонтальная асимптота функции. Скорость роста функции. Степенной рост.

Stewart 143-153.

Определения касательной, угол наклона касательной. Задача о нахождении мгновенной скорости. Определение производной функции в точке.

Stewart 154-165.

Производная как функция. Дифференцируемость функции. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в ней.

Примеры задач:

Найти пределы:

Написать уравнение касательной к кривой в точке (2;1)

Найти асимптоты графика функции

Нарисовать эскиз графика производной по графику функции и эскиз графика функции по графику производной

Нарисовать графики функции и её производной

3. Правила дифференцирования

Stewart 172-270, Зорич 189-210

Stewart 173-182.

Дифференцирование многочлена и экспоненты. Определение числа (). Производная суммы дифференцируемых функций.

Stewart 183-189.

Производная произведения и частного дифференцируемых функций.

Stewart 189-197.

Производные тригонометрических функций. Первый замечательный предел .

Stewart 197-206.

Производная композиции дифференцируемых функций.

Stewart 207-215.

Дифференцирование неявной функции. Производная обратных тригонометрических функций.

Stewart 215-220.

Производная логарифмических функций. Логарифмическое дифференцирование. Второй замечательный предел .

Stewart 247-253.

Линейные приближения функций и понятие дифференциала.

Примеры задач:

Вычислить производные :

Построить график функции и её производной.

В каких точках кривой касательная горизонтальна?

4. Применение производной.

Stewart 270-354, Зорич 210-258.

Stewart 271-279.

Абсолютный и локальный минимум (максимум) функции, локальные экстремумы функции.

Теорема Ферма. Методы нахождения минимумов и максимумов функции.

Stewart 280-386.

Теорема Ролля. Теорема Лагранжа.

Stewart 287-298.

Связь производной с возрастанием и убыванием функции. Достаточные условия максимума и минимума дифференцируемой функции. Выпуклость графика функции., связь со второй производной. Точки перегиба.

Stewart 298-307.

Правило Лопиталя.

Stewart 307-315.

Полное исследование графика функции: 1. Нахождение области определения и множества значений; 2. Нахождение точек пересечения с координатными осями; 3. Четность, нечетность, периодичность функции; 4. Указание асимптот графика; 5. Указание промежутков возрастания и убывания функции; 6. Указание локальных минимумов и максимумов функции; 7.

Нахождение точек перегиба и областей выпуклости; 8. Построение эскиза графика функции.

Stewart 322-334.

Некоторые задачи, связанные с оптимизацией и анализом функций.

Stewart 334-340.

*Метод Ньютона.

Stewart 340-347.

Понятие первообразной функции и её свойства.

Примеры задач:

Найти абсолютный минимум и максимум функции на заданном отрезке:

Вычислите предел:

Выполните полное исследования графика функции :

5. Интегрирование.

Stewart 354-414, Зорич 324-368

Stewart 355-378.

Площадь под графиком. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции на отрезке. Некоторые простейшие свойства определенного интеграла (интеграл константы, интеграл суммы и разности функций). Неотрицательность интеграла всюду неотрицательной функции.

Stewart 379-390.

Связь определенного интеграла с первообразной. Формула Ньютона-Лейбница.

Stewart 391-390.

Неопределенный интеграл. Вычисление некоторых интегралов. Правило подстановки для неопределенного и определенного интеграла.

Примеры задач:

Вычислить интегралы:

Найти производную функции:

Докажите неравенства:

6. Применение определенного интеграла.

Stewart 414-452, Зорич 369-386.

Stewart 415-442.

Площадь фигуры, заключенной между кривыми. Объем. Нахождение объема с помощью определенного интеграла. Формула объема тела вращения. Работа.

Stewart 442-442.

Среднее значение функции. Теорема о среднем.

Примеры задач:

Найдите площадь фигуры, заключенной между кривыми .

Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси плоской фигуры, заключенной между кривыми и .

Найдите среднее значение функции на промежутке $[0, 10]$.

7. Техника интегрирования.

Stewart 452-524, Зорич 386-402 (только несобственный интеграл).

Stewart 453-459, Зорич 357-359.

Интегрирование по частям (для определенного и неопределенного интеграла).

Stewart 460-473.

Интегрирование различных тригонометрических функций

(). Тригонометрические подстановки.

Stewart 473-483.

Интегрирование рациональных функций.

Stewart 487-488.

Некоторые интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях.

Stewart 495-507.

Численное интегрирование: Формула прямоугольников со средней точкой; формула трапеций; формула Симпсона. Ошибки этих численных методов.

Stewart 508-517.

Несобственный интеграл. Определение сходимости несобственного интеграла. Сходимость .

Теорема сравнения. Интегралы

Зорич 586.

Асимптотика интегралов, зависящих от параметра, метод перевала

Примеры задач:

Вычислить интегралы:

Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:
Покажите, что .

8. Другие приложения определенного интеграла.

Stewart 524-566.

Stewart 525-539. Зорич 371-377.

Длина кривой. Площадь поверхности вращения.

Stewart 539-554.

Прикладные задачи из физики, биологии, экономики. Момент и центр масс. Теорема Паппа об объеме тела вращения.

Stewart 555-561.

Вероятность. Нормальное распределение.

Примеры задач:

Найдите длину кривой , а так же площадь поверхности, полученной вращением этой кривой вокруг оси .
Выведите формулу объема шара с помощью теоремы Паппа.

9. Дифференциальные уравнения.

Stewart 566-620

Примеры зависимостей между функциями и их производными, позволяющие найти функцию.
Уравнения , , .

Stewart 567-580.

Дифференциальное уравнение. Некоторые модели с дифференциальными уравнениями (рост населения, *Stewart 591-600*, колебание грузика на пружине). Поле направлений и метод Эйлера приближенного решения дифференциального уравнения.

Stewart 580-590.

Уравнение с разделяющимися переменными. Ортогональные траектории к семейству кривых.
Stewart 602-608.

Линейные дифференциальные уравнения. Интегрирующий множитель в линейных уравнениях.

Stewart 608-614.

Модель «хищник-жертва». Фазовое пространство.

Примеры задач:

Нарисуйте поле направлений для дифференциального уравнения и постройте эскизы графиков решений, удовлетворяющих начальным условиям u .

Проверьте свои результаты, явно решив дифференциальное уравнение.

Используйте метод Эйлера с шагом в 0.2, чтобы найти приближенное значение , где это решение задачи .

Проделайте то же самое с шагом в 0.1. Проверьте свои результаты, явно решив дифференциальное уравнение.

Решите дифференциальное уравнение:

10. Функции, заданные параметрически. Полярные координаты.

Stewart 620-674.

Stewart 621-639.

Параметрически заданные кривые. Циклоида. Семейства параметрических кривых. Касательные к параметрически заданным кривым. Формула длины кривой, заданной параметрически. Площадь поверхности вращения параметрически заданной кривой.
Stewart 639-654.

Полярные координаты. Касательные к кривым, заданным в полярных координатах. Длина и площадь в полярных координатах.

Stewart 654-662.

Конические сечения. Фокус, вершина и директриса параболы. Фокусы, вершины, главные оси эллипса. Фокусы, вершины и асимптоты гиперболы.

Stewart 662-662.

Эксцентриситет. Уравнения конических сечений в полярных координатах.

Примеры задач:

Постройте эскизы кривых, заданных параметрически:

Исключите параметр из уравнения кривой.

Покажите, что параметрические уравнения $x = at + b$ и $y = ct + d$, где a, b, c, d задают прямую, соединяющую точки $(0, b)$ и (a, d) .

Найдите угол наклона касательной к кривой в точке, соответствующей указанному параметру:

Постройте эскизы графиков, заданных в полярных координатах:

Найдите длину кривой:

11. Бесконечные последовательности и ряды.

Stewart 674-764, Зорич 76-104, 215-228

Stewart 675-687.

Последовательность. Числа Фибоначчи. Предел последовательности (конечный и бесконечный). Операции с пределами. Предел суммы, произведения и частного последовательностей. «Принцип двух милиционеров». Монотонные последовательности (возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие). Ограниченные последовательности.

Stewart 687-697.

Ряд. Частичные суммы ряда. Сходимость ряда. Сумма геометрической прогрессии со знаменателем меньше единицы. Гармонический ряд. Сумма и разность сходящихся рядов сходится.

Stewart 604-704.

Интегральный признак сходимости (расходимости) ряда. Сходимость ряда.

Оценка суммы ряда.

Stewart 705-709.

Теорема сравнения.

Stewart 710-720.

Ряды со знакопеременными членами. Абсолютная и условная сходимость рядов. Абсолютно сходящийся ряд сходится. Признак Даламбера сходимости ряда. Признак Коши сходимости ряда.

Stewart 723-734.

Степенные ряды. Радиус сходимости. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Stewart 734-748.

Ряд Тейлора. Многочлены Тейлора. Оценка остаточного члена в разложении в ряд Тейлора.

Ряды Тейлора для функций. Операции со степенными рядами: сложение, умножение и деление.

Примеры задач:

Найдите сумму ряда:

Определите, сходится ли ряд:

Найдите радиус сходимости ряда:

Найдите разложение в ряд Тейлора функции: