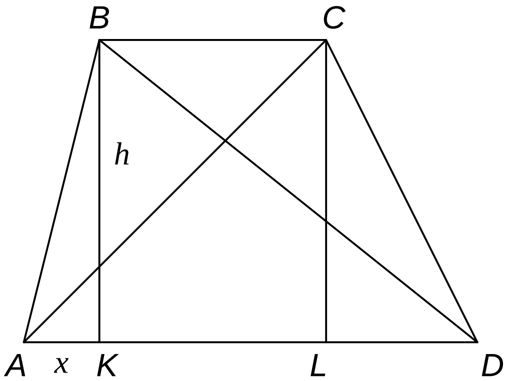
Время выполнения: 120 мин

Задача 1.
Сколько существует натуральных чисел от 1 до 2013, в десятичной записи которых содержится хотя бы одна цифра 3?
Решение.
Обозначим $A_i \left(i=1,2,3\right)$ – множество натуральных чисел от 0 до 999, у которых на *i*-м (считая справа налево) стоит цифра 3. Найдём, чему равно $\left|A_1 \cup A_2 \cup A_3\right|$ – количество чисел от 0 до 999, в записи которых есть хотя бы одна цифра 3. Для этого воспользуемся формулой для мощности объединения трёх множеств:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_3\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \left|A_3\right| - \left|A_1 \cap A_2\right| - \left|A_1 \cap A_3\right| - \left|A_2 \cap A_3\right| + \left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right|$$

Поскольку $\left|A_1\right| = \left|A_2\right| = \left|A_3\right| = 100;$ $\left|A_1 \cap A_2\right| = \left|A_1 \cap A_3\right| = \left|A_2 \cap A_3\right| = 10;$ $\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| = 1,$ то $\left|A_1 \cup A_2 \cup A_3\right| = 271.$ Количество чисел от 1000 до 1999, в записи которых есть хотя бы одна цифра 3, также равно 271. Ещё учтём 2003 и 2013 и получим ответ $271 \cdot 2 + 2 = 544.$
Ответ: 544
Критерии оценки
Вычислено количество без учета слагаемого $\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right|$ – 5 баллов
Учтено слагаемое $\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right|$ – 10 баллов
Сумма – 15 баллов

Задача 2.
У трапеции длины диагоналей равны $2\sqrt{13}$ и $6\sqrt{5}$, а длины оснований – 4 и 12. Найдите площадь трапеции. Можно ли в эту трапецию вписать окружность? Можно ли вокруг этой трапеции описать окружность?
Решение.



Дано: $BC = 4, AD = 12, AC = 2\sqrt{13}, BD = 6\sqrt{5}$. Проведём высоты *BK* и *CL*. Обозначим $BK = CL = h,\ AK = x.$ Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольников *ACL* и *BDK*.

$$\begin{cases} \left(x+4\right)^2 + h^2 = \left(2\sqrt{13}\right)^2 \\ \left(12-x\right)^2 + h^2 = \left(6\sqrt{5}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = 52 - \left(x+4\right)^2 \\ h^2 = 180 - \left(12-x\right)^2 \end{cases}$$

$$52 - \left(x+4\right)^2 = 180 - \left(12-x\right)^2 \Leftrightarrow x = 0.$$

$h^2 = 36, h = 6, CD = \sqrt{h^2 + LD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$ Значит, $AB \perp AD, AB = h = 6.$

1) Найдём площадь трапеции $S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot h = \dfrac{4+12}{2} \cdot 6 = 48.$

2) Поскольку $AB + CD = 6 + 10 = 16;\ BC + AD = 4 + 12 = 16,$ то суммы противоположных сторон четырёхугольника *ABCD* равны, а это условие необходимо и достаточно для того, чтобы в четырёхугольник можно было вписать окружность.

3) Во вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Но $\angle BAD + \angle BCA = \angle BAD + \angle BCL + \angle LCD = 90° + 90° + \angle LCD > 180°$. Поэтому вокруг четырёхугольника *ABCD* нельзя описать окружность.

Ответ: 1) площадь равна 48; 2) вписать можно; 3) описать нельзя.

Критерии оценки

Составлены уравнения для нахождения элементов трапеции – 2 балла
Вычислены параметры трапеции – 5 баллов.
Вычислена площадь трапеции – 4 балла
Обосновано, что в эту трапецию можно вписать окружность – 2 балл
Обосновано, что вокруг этой трапеции нельзя вписать окружность – 2 балл
Сумма – 15 баллов

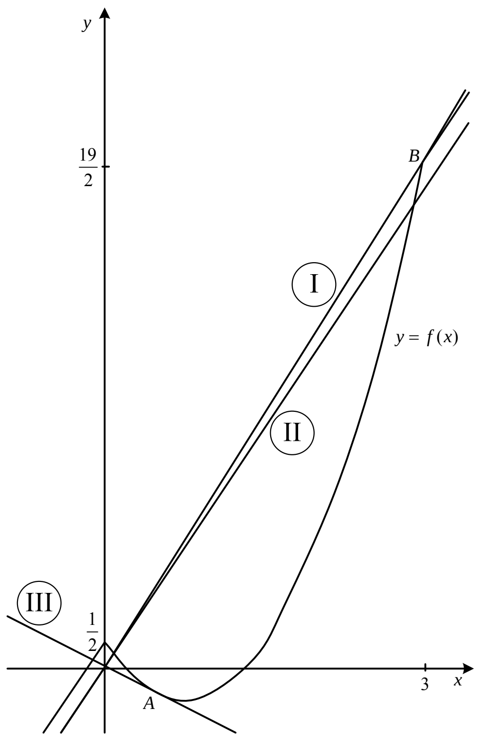
Задача 3.

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$ax-\frac{1}{2}=x^2-\left|x^2-3x\right|$$

имеет ровно два корня.

Решение.



Перепишем уравнение в виде

$$ax=f(x)=x^2-\left|x^2-3x\right|+\frac{1}{2}$$

Левая часть уравнения соответствует семейству прямых $y=ax$, проходящих через начало координат и имеющих угловой коэффициент a.

Построим график $y=f(x)$.

1) Если $x^2-3x\geq 0$, т.е. при $x\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$,

$$f(x)=x^2-x^2+3x+\frac{1}{2}=3x+\frac{1}{2}.$$

2) Если $x^2-3x\leq 0$, т.е. при $x\in[0;3]$,

$$f(x)=x^2+x^2-3x+\frac{1}{2}=2x^2-3x+\frac{1}{2}=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{8}$$

Итак, график функции $y=f(x)$ – части прямой и параболы. Он показан на рисунке.

Нужно определить, при каких значениях a прямая $y=ax$ пересекает график функции $y=f(x)$ ровно в двух точках. Это возможно лишь в одном из трёх случаев.

I. Прямая $y=ax$ проходит через точку $B\left(3;\frac{19}{2}\right)$. Тогда $a=\frac{19/2}{3}=\frac{19}{6}=3\frac{1}{6}$.

II. Прямая $y=ax$ параллельна прямой $y=3x+\frac{1}{2}$. Тогда $a=3$.

III. Прямая $y=ax$ касается параболы $y=2x^2-3x+\frac{1}{2}$, причём точка касания лежит в правой полуплоскости. Это соответствует тому, что уравнение $ax=2x^2-3x+\frac{1}{2}$ имеет одно решение. $2x^2-(a+3)x+\frac{1}{2}=0,\ D=(a+3)^2-4=0.$ Тогда $a=-1$ или $a=-5$.

Если $a=-1$, то абсцисса точки касания $x_A=\frac{a+3}{4}=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}>0$ – подходит.

Если $a=-5$, то абсцисса точки касания $x_A=\frac{a+3}{4}=\frac{-5+3}{4}=-\frac{1}{2}<0$ – не подходит.

Ответ: $a \in \left\{-1;\ 3;\ 3\frac{1}{6}\right\}$

Критерии оценки
Построен график $y = f(x)$ – 10 баллов
Разобран случай I – 5 баллов.
Разобран случай II – 5 баллов
Разобран случай III – 10 баллов
Сумма – 30 баллов

Задача 4.
Система счисления Майя является комбинацией пятеричной и двадцатеричной систем счисления. Первые четыре цифры обозначаются соответствующим количеством точек. Далее каждая очередная пятерка обозначается горизонтальной чертой. В системе счисления Майя нашлось место и для цифры ноль – она обозначается символом, похожим на глаз. На рисунке 1 приведены цифры Майя.

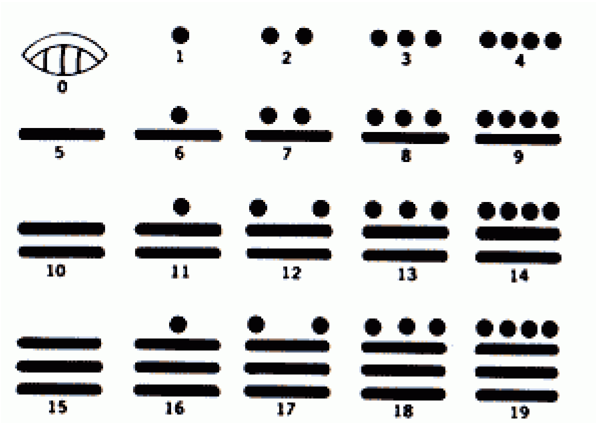
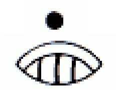


Рис.1 – Цифры Майя

 Так у Майя изображалась число 20. При представлении числа цифры писались не слева направо, как привычно для нас, а сверху вниз (т.е. цифра старшего разряда находилась на «вершине»). Логично предположить, что «вес» разряда получается из «веса» предыдущего разряда домножением на 20, но в этой цепочке есть исключение: вместо $20 \times 20 = 400$ для следующего разряда берется $20 \times 18 = 360$, поэтому и «веса» следующих разрядов не являются степенью 20: 1; 20; 360; 7 200; 144 000; 2 880 000 и т.д. (Существуют разные гипотезы о причинах такого нарушения).
Приведем еще несколько примеров (рис. 2):
$19 \times 360 + 13 \times 20 + 13 = 7113_{10}$
$10 \times 360 + 0 \times 20 + 7 = 3607_{10}$
$2 \times 7200 + 0 \times 360 + 6 \times 20 + 5 = 14525_{10}$

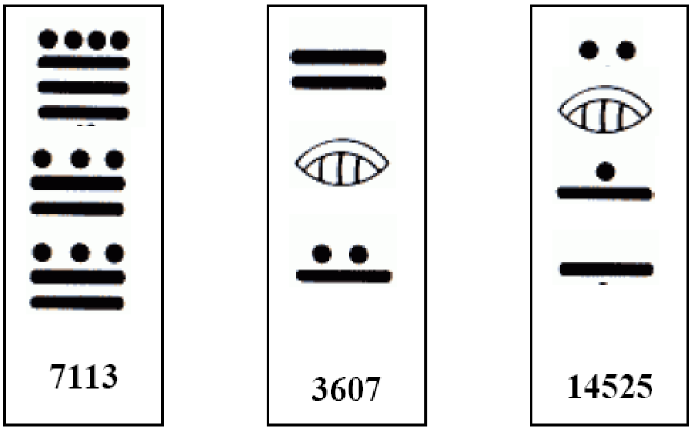


Рис. 2 – Примеры

Задания:

1. Число $432\ 733_{10}$ отобразите в системе Майя.
2. Какое десятичное число записано на рис. 3?

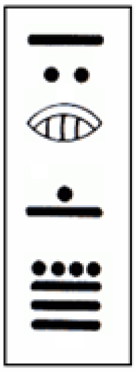


Рис. 3

Решения и критерии оценки

1.

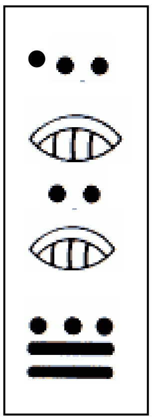
$432\ 733_{10} = 3 * 144\ 000 + 0 * 7\ 200 + 2 * 360 + 0 * 20 + 13 * 1$

Таким образом, число будет составлено из цифр

3 0 2 0 13

В алфавите Майя

Ответ:



Баллы	**Критерии оценивания**
5	Рисунок верен и представлено решение.
4	Возможны два случая:

	1) представлен рисунок с одной ошибкой; 2) в вычислении содержится одна ошибка.
3	Верный ответ, но отсутствует решение.
1-2	По мере продвижения решения имеются арифметические ошибки.

2.
На рис. 3 записаны следующие цифры:
5 2 0 6 19

$5 * 144\,000 + 2 * 7\,200 + 0 * 360 + 6 * 20 + 19 * 1 = 734\,539_{10}$

Ответ: 734 539$_{10}$

Баллы	Критерии оценивания
5	Ответ верен и представлено решение.
4	Имеется арифметическая ошибка в вычислениях.
3	Верный ответ, но отсутствует решение.
1-2	Ошибка декодирования.

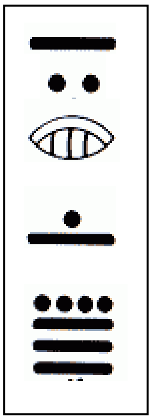


рис. 3

Задача 5.
В Великобритании использовались следующие монеты:

Монета	Стоимость	Вес, граммы
1 крона	5 шиллингов	28,4
1 шиллинг	12 пенсов	5,7
6 пенсов		3
3 пенса		6,75
1 пенс		9,4

Задания:

1. Найдите минимальный вес в граммах представления 1019 пенсов.
2. Напишите программу, которая запрашивает сумму в пенсах и производит выдачу указанной суммы монетами с минимальным весом в граммах. Количество монет разных типов указывается по возрастанию достоинства монет.
   Пример:

Вход	Выход
170	2 0 0 4 2 98.4

3. Напишите программу, которая запрашивает сумму в пенсах и имеющееся количество монет каждого достоинства. Программа выдаёт заданную сумму с минимальным весом в граммах, учитывая исходные ограничения по количеству монет каждого типа. Если выдача суммы невозможна, то программа выдаёт NO. Количество монет разных типов указывается по возрастанию достоинства монет и на входе и на выходе.

Вход	Выход
21 0 0 0 4 5	NO
170 6 5 4 3 4	2 0 2 3 2 98,7

Укажите, какой язык программирования используется и для какого компилятора программа предназначена.

Решения и критерии оценки

1.

Так как с ростом достоинства монет уменьшается вес, то нужно разменивать сумму, начиная с монет наибольшего достоинства:

[1019 / 60] =16 крон

[(1019 - [1019 / 60] * 60) / 12] = [59 / 12] = 4 шиллинга

[(59 - [59 / 12] * 12) / 6] = [11 / 6] = 1 шестипенсовая

[(11 - [11 / 6] * 6) / 3] = [5 / 3] = 1 трехпенсовая

5 - [5 / 3] * 3 = 2 однопенсовых

Посчитаем вес:

16 * 28,4 + 4 * 5,7 + 3 * 1 + 6,75 * 1 + 9,4 * 2 = 505,75 г

Ответ: 505,75 г

Баллы	**Критерии оценивания**
5	Вес подсчитан верно.
4	Верное количество монет каждого типа, но неверен вес.
1-3	По мере продвижения решения имеются ошибки.

2.

Далее приводится решение на языке Паскаль. Решение может быть приведено на любом языке программирования, на алгоритмическом языке или в виде блок-схемы.

```
var
k,sh,p6,p3,p1,s:integer;
weight:real;
begin
readln(s);
k := s div 60;
s := s mod 60;

sh := s div 12;
s := s mod 12;

p6 := s div 6;
s := s mod 6;

p3 := s div 3;
p1 := s mod 3;

weight := k * 28.4 + sh * 5.7 + p6 * 3 + p3 * 6.75 + p1 * 9.4;
```

```
writeln(p1, ' ', p3, ' ', p6, ' ', sh, ' ', k);
writeln (weight);
end.
```

Баллы	Критерии оценивания
10	Алгоритм верен, задача решена.
7-9	Алгоритм верен, но присутствуют синтаксические ошибки, не влияющие на смысл алгоритма.
4-6	Алгоритм в целом верен, но есть существенные синтаксические и семантические ошибки.
1-3	Задача в целом не решена, но написаны алгоритмы для некоторых этапов решения задачи.

3.

Далее приводится решение на языке Паскаль. Решение может быть приведено на любом языке программирования, на алгоритмическом языке или в виде блок-схемы.

```
var
countP1,countP3,countP6,countSh,countK,
k,sh,p6,p3,p1,s:integer;
weight:real;
begin
readln(s);
readln(countP1,countP3,countP6,countSh,countK);

k := s div 60;
if k > countK then k := countK;
s := s - k * 60;

sh := s div 12;
if sh > countSh then sh := countSh;
s := s - sh * 12;

p6 := s div 6;
if p6 > countP6 then p6 := countP6;
s := s - p6 * 6;

p3 := s div 3;
if p3 > countP3 then p3 := countP3;
s := s - p3 * 3;

if s > countP1 then
  writeln('NO')
else
begin
  p1 := s;
  weight := k * 28.4 + sh * 5.7 + p6 * 3 + p3 * 6.75 + p1 * 9.4;
  writeln(p1, ' ', p3, ' ', p6, ' ', sh, ' ', k);
  writeln (weight);
end
```

end.

Баллы	**Критерии оценивания**
15	Алгоритм верен, задача решена.
11-14	Алгоритм верен, но присутствует неэффективность или синтаксические ошибки, не влияющие на смысл алгоритма.
6-10	Алгоритм в целом верен, но есть существенные синтаксические и семантические ошибки.
1-5	Реализованный алгоритм не соответствует задаче, но есть верные идеи