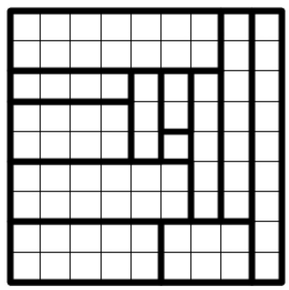
## 9 класс

Для каждой задачи приведено условие, ответ, критерии оценивания и полное решение, а также, в некоторых случаях, достопримечательные решения, придуманные участниками олимпиады. По каждой задаче оценка “0” ставилась в случае отсутствия в чистовике следов работы над задачей и отсылок к черновику, положительная оценка “+” ставилась за полное решение, промежуточные оценки -/. < -/+ < +/3 < +/2 < +/- < +/. ставились за решения с пробелами или ошибками, перечисленными в разделе “критерии”, а отрицательная оценка “-” ставилась за любую работу над задачей, не удовлетворяющую никаким из указанных критериев *(в частности, кроме задачи 1, за ответ без какого-либо обоснования)*. Любые другие знаки оценок, кроме перечисленных выше, означают “-”.

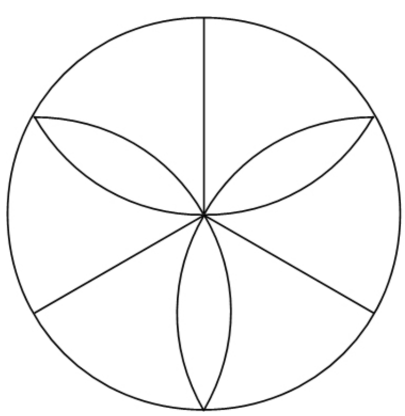
**9.1.** Дан квадрат с длиной стороны 9. Разбейте его на девять неперекрывающихся прямоугольников с целочисленными сторонами, параллельными сторонам квадрата, так, чтобы площади этих девяти прямоугольников были попарно различны.

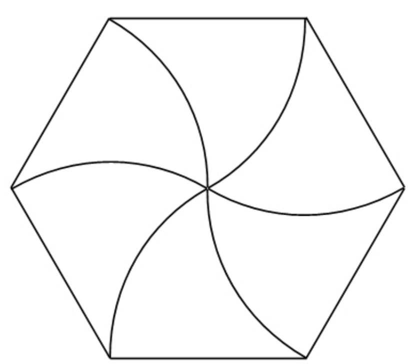
Ответ:



**9.2.** Можно ли разрезать круг на части таким образом, чтобы а) центр круга находился на границе каждой из частей и б) из некоторых частей, полученных в результате разрезания, можно было составить вписанный в этот круг правильный шестиугольник? Если можно, то опишите разрезание и укажите, как составить шестиугольник из полученных частей; если нет, то докажите, что нельзя.

Ответ: Впишем в окружность с центром $O$ и радиусом $r$ правильный шестиугольник $ABCDEF$, разрежем окружность по отрезкам $AO$, $CO$, $EO$ и дугам окружностей с центрами $A$, $C$ и $E$, радиусом $r$ и концами в точках $B$, $D$ и $F$ (на картинке слева). Также разрежем правильный шестиугольник по дугам окружностей с центрами $A, B, C, D, E, F$, радиусом $r$, общим концом $O$ и со вторыми концами в точках $B, C, D, E, F, A$ соответственно (на картинке справа). Тогда криволинейные треугольники на левой картинке равны криволинейным треугольникам на правой.





Критерии

+/- только рисунок правильного ответа, без пояснительного текста однозначно характеризующего нарисованное построение и доказывающего его корректность.

-/. само разрезание удовлетворяет условию задачи, но при складывании шестиугольника части перекрываются. При этом присутствует рисунок, из которого понятно, как нужно складывать.

В частности, за решения, в которых условия а) и б) не были выполнены одновременно, ставилась отрицательная оценка (обозначения - или $*$).

**9.3.** Триномом степени $p$ называется функция вида $f(x) = x^p + ax^q + 1$, где $p, q$ — натуральные числа, $q < p$, и $a$ – произвольное вещественное число (быть может, равное 0). Найдите все разложения многочлена $x^{12} + 1$ в произведение пары триномов.

Ответ: $(x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$, $(x^6 - \sqrt{2}x^3 + 1)(x^6 + \sqrt{2}x^3 + 1)$.

Критерии

оценка +/- ставилась за работу, в которой понятно описан тот или иной конечный набор альтернативных вариантов для триномов-сомножителей (с полным доказательством нереализуемости всех отбрасываемых случаев), и бОльшая часть этих альтернативных вариантов полностью разобрана, однако, один-два варианта были рассмотрены с ошибкой в вычислениях и/или не доведены до конца или не рассмотрены вовсе, что привело автора работы к потере одного из двух решений.

оценка +/2 ставилась за работу, в которой предъявлены оба верных ответа (обычно полученные при помощи формул суммы кубов и разности квадратов), но доказательство того, что других решений нет, отсутствует или же бесперспективно неправильно.

оценка -/+ ставилась за работу, в которой которой предъявлен один из ответов (обычно полученный при помощи формулы суммы кубов или разности квадратов), но доказательство того, что других решений нет, отсутствует или же бесперспективно неправильно.

Решение. Пусть $(x^p + ax^q + 1)(x^r + bx^s + 1) = x^{12} + 1 \ \ (*)$.

Так как степени мономов в обеих частях равны, то $p + r = 12$. Числа $a$ и $b$ не равны нулю одновременно (иначе после раскрытия скобок и приведения подобных в левой части окажется хотя бы три монома).

Разберем сначала случай, когда одно из чисел $a$ и $b$ равно 0 (будем считать, что $a = 0$). Тогда левая часть равенства $(*)$ равна $x^p + 1 + bx^{s+p} + bx^s + x^{12} + x^r$. Так как каждый из мономов $x^p$ и $x^r$ должен сократиться с каким-то из других, то каждое из чисел $p$ и $r$ должно быть равно одному из чисел $s$ и $s+p$. Так как при этом $p < s+p$, то $p = s$ и $r = p + s = 2s$. Так как $p + r = 3s = 12$, получаем $s = 4$, $p = 8$, $r = 12$, $b = -1$, т.е. первый из двух ответов.

Разберем теперь случай, когда числа $a$ и $b$ ненулевые. В этом случае раскрытие скобок в левой части равенства $(*)$ дает девять мономов, степени которых перечислены в следующей таблице:

| | | |
|---|---|---|
| 12 | p+s | p |
| q+r | q+s | q |
| r | s | 0 |

Так как все мономы, кроме $x^{12}$ и 1, должны сократиться друг с другом, то все перечисленные в таблице степени, кроме 12 и 0, должны разбиваться на группы равных чисел (причем каждая группа должна состоять более чем из одного числа). В одной группе не могут содержаться числа, одно из которых расположено левее и выше другого (либо строго левее, либо строго выше), потому что тогда второе число строго больше первого. Поэтому группа не может содержать более трех чисел, а группа из трех чисел может состоять только из чисел $r$, $q+s$, $p$. Поэтому числа в таблице распадаются на три группы: $r=q+s=p$, $s=q$, $q+r=p+s$. Отсюда получаем $q=s=3$ и $p=r=6$. Подставляя $x=1$ и $x=-1$ в равенство $(*)$, получаем $2=(2+a)(2+b)=(2-a)(2-b)$, откуда находим $a=-b=\pm\sqrt{2}$, т.е. второй из двух ответов.

**9.4.** Вдоль берега круглого озера периметром 1 км плывут два лосося — один с постоянной скоростью 500 м/мин по часовой стрелке, другой с постоянной скоростью 750 м/мин против часовой стрелки. По краю берега мечется медведь, всегда бегущий вдоль берега со скоростью 200 м/мин в направлении ближайшего к нему лосося. Сколько полных оборотов вокруг озера сделает медведь за один час?

Ответ: 7.

Критерии

`-/.` для конкретного начального положения медведя и рыб приведены прямые вычисления их перемещений на протяжении двух или более оборотов медведя вокруг озера, а затем явно сделано необоснованное (хотя и интуитивно верное) утверждение о том, что средняя скорость обращения медведя вокруг озера приблизительно равна той, которая получилась в этом численном эксперименте. На этом основании получен ответ с точностью до 10%.

Решение. Заметим, что медведь бежит к ближайшему лососю, если и только если он бежит от точки на берегу, равноудаленной от лососей и не отделенной от медведя лососями. Так как обе равноудаленные от лососей точки движутся против часовой стрелки со скоростью $|750-500|/2=125<200$м/мин, то они никогда не догонят медведя, и медведь никогда не окажется в такой точке (кроме, возможно, начального момента). Так как каждая из этих точек за час пробежит $125\cdot 60$ метров, то сделает ровно $125\cdot 60/1000=15/2=7,5$ оборотов вокруг озера. Поэтому медведь, ни разу не пересекший ни одну из этих точек, сделает строго больше 7, но строго меньше 8 оборотов, то есть 7 полных оборотов.

**9.5.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1, BB_1, CC_1$. На стороне $AB$ выбрана точка $P$ так, что окружность, описанная около треугольника $PA_1B_1$, касается стороны $AB$. Найдите $PC_1$, если $PA=30$ и $PB=10$.

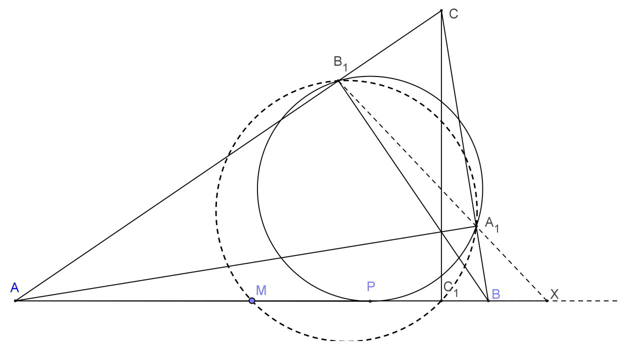
Ответ: 6.

Критерии

`+/2` Решение проведено для случая, когда маленькая окружность касается большой (т.е. когда треугольник прямоугольный), без обоснования, что ответ не зависит от радиуса окружности.

`+/.` Решение координатным методом (или любым другим), для частного случая, когда радиус маленькой окружности принят равным конкретному числу, однако треугольник остаётся остроугольным. (Фактически это решение ничем не отличается от общего случая: нужно лишь вместо числа подставить $r$ и повторить все вычисления).

Решение.




Продолжим $A_1B_1$ до пересечения с прямой $AB$ в точке $X$. Тогда $XP^2 = XA_1 \cdot XB_1 = XA \cdot XB$ (четырехугольник $AB_1A_1B$ - вписанный). Пусть $XB = t$. Получаем уравнение $(t+10)^2 = t(t+40)$, откуда $t = 5$.
Из того же условия вписанности 4-угольника $AB_1A_1B$ получаем

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{AB_1}{BA_1} = \frac{B_1X}{BX} \quad (\triangle AB_1X \sim \triangle A_1BX),$$

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AX}{B_1X} \quad (\triangle AA_1X \sim \triangle B_1BX).$$

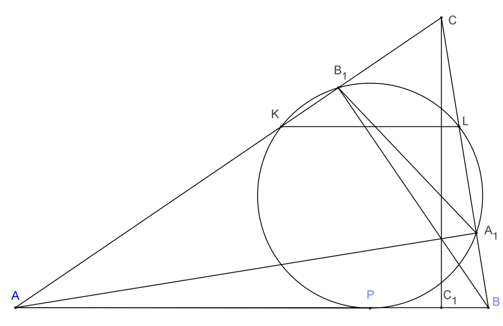
Перемножая, получаем

$$\frac{\mathrm{tg}B}{\mathrm{tg}A} = \frac{AX}{BX} = 9 = \frac{AC_1}{C_1B} \Rightarrow C_1B = 4.$$

Второй способ (предложен участником олимпиады)

Так же, как и в первом способе, продолжим прямую $A_1B_1$ до точки $X$ и найдём $XB = 5$, $XP = 15$, $XA = 45$. Далее, пусть $M$ - середина $AB$. Точки $A_1, B_1, C_1, M$ лежат на одной окружности (окружность 9 точек). Отсюда $XM \cdot XC_1 = XA_1 \cdot XB_1 = XA \cdot XB \Rightarrow XC_1 = \frac{5 \cdot 45}{25} = 9 \Rightarrow PC_1 = 6$.

Третий способ (предложен участником олимпиады)




Пусть $K, L$ - вторые точки пересечения окружности со стронами $AC, BC$. Тогда $\angle CAB = \angle CA_1B_1 = \angle CKL \Rightarrow KL \parallel AB \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AK}{BL}$. Отсюда и из вписанности четырехуголников $CB_1C_1B$, $CA_1C_1A$ получаем

$$\frac{30 + PC_1}{10 - PC_1} = \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_1 \cdot AB}{BC_1 \cdot AB} = \frac{AB_1 \cdot AC}{BA_1 \cdot BC} = \frac{AB_1 \cdot AK}{BA_1 \cdot BL} = \frac{AP^2}{BP^2} = 9 \Rightarrow PC_1 = 6.$$

**9.6.** Двое играют в следующую игру. У них есть плитка шоколада, разделенная бороздками, параллельными сторонам плитки, на дольки. Бороздки разбивают плитку на M вертикальных и N горизонтальных полосок. Первый игрок своим ходом ломает плитку вдоль одной из бороздок на две прямоугольные части и отдает их второму. Второй игрок выбирает одну из частей, съедает ее, а другую ломает по бороздке и отдает получившиеся две части первому. Первый игрок съедает одну из полученных частей, а другую ломает и отдает, и все повторяется. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. При каких M и N первый игрок может играть так, чтобы выиграть вне зависимости от действий второго игрока?

Ответ: Максимальная степень числа 2, на которую делится M, не совпадает с таковой для N.

Критерии

`+` правильное решение.

`+/-` правильный ответ и начало доказательства, включая случай плитки $2n\times(2m+1)$, но не ограничиваясь им.

`+/2` разобраны случаи плитки $2n \times (2m+1)$ и $4n \times (4m+2)$.

`+/3` доказано, что плитка размера $2n \times (2m+1)$ или $n \times 2n$ – подходящая.

`-/+` начато построение разделения всех возможных размеров плиток на выигрышные и проигрышные; либо то же, что `+/3`, с незначительными недочетами; либо разобран случай плитки $n \times (2n+1)$.

`-/.` разобрано конечное, большее 3, число нетривиальных случаев, ведущих к выигрышу; либо разобран случай плитки $1 \times 2n$.

Решение. Назовем плитку *проигрышной*, если максимальная степень числа 2, на которую делится ее ширина, совпадает с максимальной степенью числа 2, на которую делится ее ширина. Заметим, что проигрышную плитку нельзя разломить на две проигрышных: действительно, если плитка состоит из двух проигрышных частей, то их общая сторона имеет длину $2^s(2k+1)$, а оставшиеся стороны равны $2^s(2m+1)$ и $2^s(2n+1)$, поэтому вся плитка имеет размеры $2^s(2k+1)$ и $2^{s+1}(m+n+1)$ и не является проигрышной.

Если игрок получил проигрышную плитку (в начале игры) или две проигрышные плитки (от соперника), то, какую бы из них он ни съел, при разламывании оставшейся проигрышной хотя бы один из кусков, которые он отдаст сопернику, выйдет непроигрышным (см. замечание выше). Если же игрок получил хотя бы одну непроигрышную плитку (в начале игры или от соперника), то есть плитку размера $2^s(2k+1)$ на $2^t(2m+1)$ при $s > t$, то всегда сможет разломить ее на две проигрышных, отделив от нее кусок размера $2^t$ на $2^t(2m+1)$. Назовем это правило деления плитки *выигрышным*.

Таким образом, если исходная плитка не проигрышная, то первый игрок каждый ход сможет поступать согласно выигрышному правилу, так что второй игрок всегда будет получать от него только проигрышные плитки, и поэтому будет вынужден отдавать первому игроку хотя бы одну выигрышную. Менее чем через M+N ходов размер максимальной из отдаваемых плиток упадет до 1 на 1, и пара плиток такого размера достанется второму игроку, потому что обе они проигрышные. В этот момент второй игрок проиграет.

Аналогично, если исходная плитка была проигрышная, то первый игрок каждый ход будет отдавать второму хотя бы одну непроигрышную плитку, а второй каждый ход сможет применять выигрышное правило, в результате чего менее чем через M+N ходов пару плиток размера 1 на 1 получит первый игрок и проиграет.

Второй способ. Заметим, что у каждой плитки есть одно из двух свойств. Либо плитка является выигрышной, либо проигрышной. Выигрышная плитка эта плитка, которую можно разломить так, что независимо от действий оппонента она приведет к победе ломающего плитку. Проигрышная - любой разлом ведет к поражению. Выигрышная плитка может быть разломана на две проигрышных. Соответственно, при любом разломе проигрышной хотя бы одна из плиток окажется выигрышной.

Начнем поиск выигрышных плиток. Пусть плитка имеет вид $1 \times m$. Рассмотри выигрышные позиции. Плитка $1 \times 1$ проигрышная, $1 \times 2$ – выигрышная, $1 \times 3$ – проигрышная, $1 \times 4$ разбивается на $1 \times 1$ и $1 \times 3$ и ломающий выигрывает. Если плитка $1 \times m$ проигрышна, то плитка $1 \times (m+1)$ выигрышна, поскольку разбивается на кусочки $1 \times m$ и $1 \times 1$. Пусть $1 \times m$ – выигрышная плитка. До $m$ выигрышные и проигрышные плитки чередовались, а значит все выигрышные плитки имеют четное число квадратиков, и $m$ – четно, а $m+1$ – нечетно. Но нечетное число нельзя разбить в сумму двух нечетных, поэтому $m+1$ не разбивается на две проигрышных плитки, значит она проигрышная.

Заметим, что для случая $(2l+1) \times 2k$ работает та же стратегия, что и для случая $1 \times 2k$. Отломим кусочек от стороны $2k$. Второй получит плитки $(2l+1) \times 1$ и $(2l+1) \times (2k-1)$. Первая – проигрышная, поэтому он ломает вторую, но после любого разлома хотя бы одна плитка будет иметь четную сторону. Ее выбирает первый и повторяет действия. Таким образом, с одной стороны, он всегда может сделать ход, описанный стратегией, с другой стороны он никогда не получит две плитки $1 \times 1$ поскольку они обе имеют нечетные стороны. Попутно мы доказали, что все плитки вида $(2k+1) \times (2l+1)$ – проигрышные.

Теперь рассмотрим случай, когда обе стороны четны. Пусть плитка размером $n \times m$ выигрышна (проигрышна). Тогда плитка $2n \times 2m$ также является выигрышной (проигрышной).

Докажем это утверждение индукцией по $(m+n)$. База $m+n=2$ и $m+n=3$: плитки $(1,1)$ и $(2,2)$ проигрышные (случай $m+n=2$), а плитки $(1,2)$ и $(2,4)$ выигрышные.

Предположение индукции: пусть для всех $m+n \leq k$ утверждение верно. Докажем для $m+n=k+1$.

Рассмотрим сначала случай выигрышной плитки. Без ограничений можем считать первым ходом, ведущим к победе для плитки $(n \times m)$, отрезание от стороны $n$ кусочка величины $x$.В таком случае плитка делилась на части $x \times m$ и $(n-x) \times m$ и обе плитки проигрышны. В новой плитке отломим от $2n$ кусочек $2x$, плитка разделится на части размером $2x \times 2m$ и $2(n-x) \times 2m$ они пропорциональны $x \times m$ и $(n-x) \times m$ соответственно, а значит по предположени индукции имеют одинаковые исходы. Плитки $x \times m$ и $(n-x) \times m$ проигрышны, значит и плитки $2x \times 2m$ и $2(n-x) \times 2m$ также проигрышны.

Рассмотрим случай проигрышной плитки. Тогда при любом разломе плитки $m \times n$ одна из плиток пары будет выигрышной. Пусть первый разделил новую плитку на части $x \times 2m$ и $(2n-x) \times 2m$. Тогда либо $x$ четно и $x = 2x_0$, либо $x$ нечетно. В первом случае получаются плитки, обе стороны которых четны. По предположению инукции исход у них такой же, как и в случае $x_0 \times m$ и $(n-x_0) \times m$. Плитки $x_0 \times m$ и $(n-x_0) \times m$ получаются отламыванием части $x_0$ от плитки $n \times m$. Плитка $n \times m$ проигрышна, а значит одна из плиток $x_0 \times m$ и $(n-x_0) \times m$ выигрышна. Во втором случае получаются две плитки вида $(2k+1) \times 2m$, обе они выигрышны. Индуктивный переход доказан.

Пусть первый игрок получает плитку размера $2^{k_1}n \times 2^{k_2}m$, где $k_1 \leq k_2$ и числа $m, n$ нечетны. Исход при игре с такой плиткой совпадает с исходом при игре с плиткой $n \times 2^{k_1-k_2}m$. Исход для плитки, у которой одна сторона нечетная, определяется четностью второй стороны. Соответственно, если $k_1 = k_2$, то первый проиграет. В остальных случаях, первый выигрывает.