**Правительство Российской Федерации**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

**Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

**Факультет Мировой экономики и мировой политики**

**Программа дисциплины**

**Линейная алгебра**

**для направления 080100.62 Экономика подготовки бакалавра**

**специализация «Мировая экономика»**

Автор программы: к. пед. н., доцент Салимова Альфия Фаизовна

Одобрена на заседании кафедры высшей математики на факультете экономики 25 февраля 2013г.

Зав. кафедрой Алескеров Ф.Т.

Рекомендована секцией УМС «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20 г.

Председатель

Утверждена Ученым Советом факультета экономики «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20 г.

Ученый секретарь

**Москва, 2013**

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями
университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*

# Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 080100.62 «Экономика» подготовки бакалавра, специализация «Мировая экономика», изучающих дисциплину «Линейная алгебра».

Программа разработана в соответствии с:

* образовательным стандартом государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Государственный университет – Высшая школа экономики», в отношении которого установлена категория «Национальный исследовательский университет»;
* образовательной программой 080100.62, направление «Экономика» подготовки бакалавра;
* рабочим учебным планом университета по направлению 080100.62 Экономика, специализации «Мировая экономика», утвержденным в 201\_г.

# Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Линейная алгебра» являются:

* ознакомление студентов с основами линейной алгебры;
* формирование навыков работы с абстрактными понятиями линейной алгебры;
* знакомство с прикладными задачами дисциплины;
* обеспечение запросов других математических дисциплин;
* подготовка к изучению современных курсов по экономической теории.

# Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент должен:

* знать формулировки основных понятий и теорем линейной алгебры, необходимые для дальнейшего изучения дисциплин, предусмотренных базовым и рабочим учебными планами;
* уметь интерпретировать основные понятия линейной алгебры на простых модельных примерах, применять методы дисциплины при решении задач, возникающих в других дисциплинах;
* владеть навыками применения современного инструментария дисциплины при решении задач, возникающих в других дисциплинах.

Изучение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| **Компетенция** | **Код по ФГОС / НИУ** | **Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)** | **Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции** |
| --- | --- | --- | --- |
| Инструментальная | ИК-1 | Способность самостоятельно работать на компьютере с использованием современного общего и профессионального прикладного ПО | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Социально-личностная и общекультурная | СЛК-12 | Способность понимать сущность и значение информации в развитии современного информационного общества | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Социально-личностная и общекультурная | СЛК-13 | Владение основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией, способность работать с информацией в глобальных компьютерных сетях | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональная | ПК-1 | Способность собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчетаэкономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельностьхозяйствующих субъектов | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональная | ПК-2 | Способность на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональная | ПК-3 | Способность выполнять необходимые для составления экономических разделов плановрасчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональная | ПК-4 | Способность осуществлять сбор, анализ и обработку статистических данных, информации, научно-аналитических материалов, необходимых для решения поставленных экономических задач | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональная | ПК-5 | Способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональная | ПК-6 | Способность на основе описания экономических процессов и явлений строить теоретическиеи эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональная | ПК-10 | Способность использовать для решения аналитических и исследовательских задач современные технические средства и информационные технологии | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональная | ПК-12 | Способность использовать для решения коммуникативных задач современные техническиесредства и информационные технологии | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональная | ПК-14 | Способность преподавать экономические дисциплины в образовательных учрежденияхразличного уровня | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональная | ПК-15 | Способность принять участие в совершенствовании и разработке учебно-методического обеспечения экономических дисциплин | Стандартные (лекционно-семинарские) |

# Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к циклу математических и естественнонаучных дисциплин. Курс предназначен для студентов по направлению 080100.62 Экономика, специализация «Мировая экономика» подготовки бакалавра, читается в первом и втором модулях первого курса. От слушателей не требуется никаких предварительных знаний сверх программы средней школы. Программа соответствует требованиям ФГОС. В данном курсе рассматриваются избранные разделы линейной алгебры, образующие элемент базового образования студентов по данной специальности. Сведения, полученные при изучении данного курса, будут использоваться в изучении теории вероятностей, математической статистики, методов оптимальных решений, теории игр, математической экономики, эконометрики. Они могут быть использованы для разработки и применения численных методов решения задач из многих областей знания, для построения математических моделей таких задач. Программа предусматривает чтение лекций (24 часа) и проведение семинарских занятий (24 часа). Программой предусмотрена самостоятельная работа студента в объеме 60 часов, включающая в себя изучение теоретического материала, подготовку к семинарским занятиям, подготовку к двум промежуточным контрольным работам и к заключительному зачету по данной дисциплине. В результате изучения курса студенты должны: знать точные формулировки основных понятий, уметь интерпретировать их на простых модельных примерах; в том числе свободно использовать координатный, векторный, матричный или операторный способ записи математических соотношений; знать общие теоремы о структуре множества решений систем линейных уравнений, уметь применять специальные способы построения таких решений; знать основные свойства числовых характеристик матриц: определитель матрицы, ее ранг, размерность пространства строк и столбцов; иметь представление о линейных преобразованиях, структуре множества их собственных векторов, их ядре и образе; обладать навыками работы и быть готовыми понимать разделы учебной и научной литературы, связанные с применением линейных пространств, линейных операторов, линейных, билинейных и квадратичных форм.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

* математика в объеме средней школы.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

* знаниями основных понятий и теорем математики в объеме средней школы;
* навыками решения типовых задач математики в объеме средней школы.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

* теория вероятностей и математическая статистика;
* математический анализ;
* эконометрика;
* методы оптимальных решений;
* теория игр;
* математическая экономика.

# Тематический план учебной дисциплины

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№*** | ***Название раздела*** | ***Всего часов***  | ***Аудиторные часы*** | ***Самостоя­тельная работа*** |
| ***Лекции*** | ***Семинары*** | ***Практич.******занятия*** |
|  | Векторы, матрицы, определители | 38 | 8 | 8 |  | 22 |
|  | Системы линейных уравнений | 16 | 4 | 4 |  | 8 |
|  | Линейные прстранства и линейные отображения | 36 | 8 | 8 |  | 20 |
|  **4.** | Линейные, билинейные и квадратичные формы | 18 | 4 | 4 |  |  10 |
|  | Итого | 108 | 24 | 24 | 0 | 60 |

# Формы контроля знаний студентов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Тип контроля*** | ***Форма контроля*** | ***1 год*** | ***Параметры***  |
| ***1*** | ***2*** |
| Текущий(*неделя*) | **Контрольная работа** | 6 | 4 | Письменная работа 80 минут |
| Итоговый | **Зачет** |  | 2-й модуль | Письменная зачетная работа 120 минут |

## Критерии оценки знаний, навыков

Контроль знаний осуществляется в формах текущего и итогового контроля. Текущий контроль включает контрольную работу №1 и контрольную работу №2. Контрольная работа №1 проводится в конце первого модуля, ее продолжительность 80 минут. Контрольная работа №2 проводится в середине второго модуля, ее продолжительность также 80 минут. Итоговый контроль осуществляется в форме письменной зачетной работы продолжительностью 120 минут.

Для прохождения контроля студент должен продемонстрировать знания основных определений и формулировок теорем; умение решать типовые задачи, предлагаемые в типовых вариантах контрольных работ, разобранных на семинарских занятиях. Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

## Порядок формирования оценок по дисциплине

Преподаватель оценивает работу студентов на семинарских занятиях по следующим позициям: правильность решения задач на семинарах, правильность выполнения аудиторных самостоятельных работ, активность работы студента на семинарских занятиях. Оценки за работу на семинарских занятиях и самостоятельную работу студента (а именно, решение нестандартных задач и выполнение текущих домашних заданий) преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале за работу студента на семинарских занятиях определяется перед итоговым контролем - *Оаудиторная*.

Преподаватель оценивает самостоятельную работу студентов по следующим позициям: правильность, своевременность и полнота выполнения домашних заданий. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале за самостоятельную работу студента определяется перед итоговым контролем – *Осам. работа*.

Накопленная оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

*Онакопленная\_i* = *0,8·Отекущая\_i* + *0,1·Оаудиторная\_i + 0,1·Осам. работа\_i* ,

где *Отекущая\_i* рассматривается как оценка за формы текущего контроля, предусмотренные в РУП:

*Отекущая\_i* = *Ок.р.\_i*.

Способ округления накопленной оценки текущего контроля производится по правилам арифметики округления.

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

*Онакопленная 1* = *0,8·Отек1 + 0,1· Оаудиторная 1 + 0,1·Осам. работа 1* ,

*Онакопленная 2 = 0,8·Отек2 + 0,1· Оаудиторная 2 + 0,1·Осам. работа 2* ,

*Онакопленная итоговая=* (*Онакопленная 1* *+* *Онакопленная 2):2*.

Здесь *Онакопленная 1 –* накопленная оценка за 1 модуль, *Онакопленная 2 –* накопленная оценка за 2 модуль перед итоговым зачетом.

Способ округления накопленной итоговой оценки производится по правилам арифметики округления.

Результирующая оценка за итоговый контроль в форме зачета выставляется по следующей формуле, где *Озачет* – оценка за работу непосредственно на зачете:

*Орезульт = 0,6·Озачет + 0,4·Онакопленная итоговая*.

Способ округления накопленной оценки итогового контроля производится по правилам арифметики округления.

При неудовлетворительной итоговой оценке она равна результирующей.

Перевод в 5-балльную шкалу осуществляется по правилу:

|  |  |
| --- | --- |
| Оценка по 10-балльной шкале | Оценка по 5-балльной шкале |
| 1 | незачет |
| 2 |
| 3 |
| 4 | зачет |
| 5 |
| 6 |
| 7 |
| 8 |
| 9 |
| 10 |

На пересдаче студенту не предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

В диплом выставляется результирующая оценка по учебной дисциплине.

# Содержание дисциплины

***Тема I.*** **Векторы, матрицы, определители**

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Геометрическая интерпретация решений этих систем. Экономическая интерпретация: модель равновесия.

Матрицы. Виды матриц. Понятие вектора как упорядоченного набора чисел. Линейные операции над векторами и матрицами. Свойства арифметических операций над матрицами. Умножение матриц. Транспонирование матриц. Связь с транспонированием. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Ранг матрицы как максимальное количество линейно независимых строк. Применение матриц к решению экономических задач.

Определители квадратных матриц второго и третьего порядков. Миноры, алгебраические дополнения. Определитель n−го порядка, его свойства и способы вычисления. Определитель транспонированной матрицы. Определитель произведения двух матриц.

Обратная матрица. Свойства обратной матрицы и способы ее нахождения.

Геометрические векторы на плоскости и в трехмерном пространстве. Коллинеарность и компланарность векторов. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их выражение в координатной форме. Геометрические приложения.

***Тема II.*** **Системы линейных уравнений**

Правило Крамера для систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными, трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений. Элементарные преобразования матриц. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных уравнений. Структура множества решений неоднородной системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений в матричной форме. Решение матричных уравнений. Задача балансового анализа (модель Леонтьева).

***Тема III.*** **Линейные пространства и линейные отображения**

Понятие линейного пространства. Вектор как элемент линейного пространства. Аксиомы линейного пространства. Простейшие следствия аксиом линейного пространства. Базис линейного конечномерного пространства. Координаты вектора в базисе. Размерность линейного пространства. Матрица перехода от старого базиса к новому. Понятие линейного подпространства линейного пространства.

Понятие линейного отображения (оператора) линейных пространств. Матрица линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Их размерность. Преобразование матрицы линейного оператора при изменении базиса.

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду с помощью перехода к базису из собственных векторов. Модель международной торговли.

Понятие евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Матрица Грама. Ортогональный и ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

***Тема IV.* Линейные, билинейные и квадратичные формы**

Линейный функционал. Билинейная форма. Квадратичная форма. Матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Закон инерции для квадратичных форм.

Кривые второго порядка. Их классификация.

# Образовательные технологии

# Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

## Тематика заданий текущего контроля

 **Контрольная работа №1** предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонентов курса:

**Векторы. Матрицы**

Системы двух уравнений с двумя неизвестными. Геометрическая интерпретация. Матрицы. Строки, столбцы. Векторы. Сложение матриц. Умножение матрицы на число. Умножение строки на столбец. Умножение матриц. Транспонирование матриц. Свойства арифметических операций над матрицами. Связь с транспонированием. Линейная зависимость и независимость векторов. Ранг матрицы.

**Определители**

Определение определителя. Способы вычисления определителей квадратных матриц второго и третьего порядка. Свойства определителей. Миноры, алгебраические дополнения. Вычисление определителей разложением по строке (столбцу). Определение обратной матрицы. Способы нахождения обратной матрицы.

**Геометрические векторы**

Векторы на плоскости и в пространстве. Коллинеарность и компланарность векторов. Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений векторов в некоординатной и координатной формах. Геометрические приложения.

**Системы линейных уравнений**

Правило Крамера для решения систем двух уравнений с двумя неизвестными, трех уравнеий с тремя неизвестными.

Различные формы записи системы линейных уравнений. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений. Элементарные преобразования строк (столбцов) матриц. Приведение матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Ранг матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные. Условие совместности системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений. Структура множества решений системы линейных неоднородных уравнений.

Системы линейных уравнений в матричной форме, их решение.

**Линейные пространства**

Аксиомы линейного пространства. Следствия из аксиом. Базис конечномерного линейного пространства. Координаты вектора в базисе. Размерность линейного пространства. Изменение координат вектора при изменении базиса. Линейное подпространство линейного пространства. Линейная оболочка векторов и способы ее задания.

 **Контрольная работа №2** предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонентов курса:

**Линейные отображения (линейные операторы)**

Определение линейного оператора. Способы доказательства линейности оператора. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при преобразовании базиса. Обратный оператор и его матрица. Ядро и образ линейного оператора. Их размерность. Исследование линейного оператора по его матрице. Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

Определение евклидова пространства. Скалярное произведение векторов. Матрица Грама и ее использование в геометрических задачах. Построение ортогонального и ортонормированного базисов. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

**Квадратичные формы**

Матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду: метод Лагранжа, метод ортогональных преобразований. Исследование квадратичной формы на знакоопределенность. Кривые второго порядка и их классификация.

## Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Свойства арифметических операций над матрицами. Связь с транспонированием.

Определение определителя. Миноры, алгебраические дополнения.

Свойства определителей.

Вычисление определителей разложением по строке (столбцу).

Определитель произведения двух матриц.

Свойства алгебраических дополнений к элементам квадратной матрицы.

Обратная матрица невырожденной квадратной матрицы.

Вычисление обратной матрицы.

Матричная запись решения линейной системы с невырожденной матрицей.

Правило Крамера.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Главные элементы расширенной матрицы.

Главные и свободные неизвестные. Ранг матрицы.

Теорема Кронекера-Капелли о существовании решения системы линейных уравнений.

Аксиомы линейного пространства. Линейная зависимость (независимость) конечных

наборов векторов.

Конечномерное линейное пространство.

Базис и координаты векторов. Свойства координат векторов.

Изменение координат вектора при изменении базиса.

Определение линейного оператора.

Процедура построения матрицы линейного оператора в заданных базисах.

Преобразование матрицы линейного оператора при изменении базисов.

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

Характеристический многочлен линейного оператора.

Скалярное произведение векторов евклидова пространства.

Неравенство Коши-Буняковского. Длина вектора и угол между векторами.

Процесс ортогонализации конечного набора векторов.

Матрица Грама. Ее преобразование при изменении базиса.

Положительность определителя матрицы Грама заданного базиса.

Квадратичная форма.

Преобразование матрицы квадратичной формы при изменении базиса.

Приведение матрицы квадратичной формы к диагональному виду.

Исследование квадратичной формы на знакоопределенность.

Кривые второго порядка.

## Примеры заданий промежуточного /итогового контроля

 **Контрольная работа № 1 (типовой вариант)**

1. Даны матрицы $A=\left(\begin{matrix}3&1\end{matrix} \begin{matrix}-1&0\end{matrix}\right)$, В=$\left(\begin{matrix}1&2&4\end{matrix}\right)$, С=$\left(\begin{matrix}0&2&3\\-2&1&2\end{matrix}\right)$, D=$\left(\begin{matrix}1&2\\4&-2\end{matrix} \begin{matrix}-1&1\\0&2\end{matrix}\right).$ Определите матрицу $2B^{T}A+C^{T}D.$
2. Решите неравенство $\left|\begin{matrix}2&x+1&-1\\1&2&3\\5&x+7&x+3\end{matrix}\right|>0.$
3. Исследуйте взаимное расположение двух прямых на плоскости при всех значениях параметра *m*: $3x+my=6$ и $mx+27y=2m.$
4. Решите систему уравнений, используя правило Крамера:

$$\left\{\begin{array}{c}x+3y+z=-5,\\3x-4y+3z=11,\\2x+4y-z=-9.\end{array}\right.$$

1. Найдите матрицу, обратную к $A=\left(\begin{matrix}4&3&0\\1&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right).$ Сделайте проверку!
2. Решите уравнение относительно матрицы *Х*:

$XA-B=2A$, где $A=\left(\begin{matrix}1&3\\3&10\end{matrix}\right), B=\left(\begin{matrix}4&0\\1&-1\end{matrix}\right).$

1. Найдите все значения *x*, при каждом из которых векторы ***a***, ***b***, ***с*** линейно зависимы: $a=\left(\begin{matrix}x-1\\1\\4\end{matrix}\right);$ $b=\left(\begin{matrix}x^{2}-3\\3\\2\end{matrix}\right);$ $c=\left(\begin{matrix}x+1\\2\\1\end{matrix}\right).$
2. Представьте вектор $d=\left(\begin{matrix}2&0&4\end{matrix}\right) ^{T}$в виде линейной комбинации векторов $a=\left(\begin{matrix}1&2&3\end{matrix}\right) ^{T};$ $b=\left(\begin{matrix}3&-3&-2\end{matrix}\right) ^{T};$ $c=\left(\begin{matrix}-1&2&-1\end{matrix}\right) ^{T}.$
3. Дана система линейных неоднородных уравнений $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+2x\_{2}-3x\_{3}-4x\_{4}=1,\\3x\_{1}+7x\_{2}-2x\_{3}-x\_{4}=4,\\2x\_{1}+5x\_{2}+x\_{3}+3x\_{4}=3.\end{array}\right.$

а) найдите фундаментальную систему решений, укажите размерность пространства решений и запишите общее решение соответствующей системы линейных однородных уравнений;

б) убедитесь в совместности данной неоднородной системы, используя теорему Кронекера-Капелли;

б) найдите общее решение данной системы линейных неоднородных уравнений и проанализируйте его структуру, представьте общее решение в виде суммы частного решения неоднорордной системы и общего решения соответствующей однородной системы.

1. Найдите размерность и базис линейной оболочки векторов

$a\_{1}=\left(1; 3; 2\right);$ $a\_{2}=\left(1; 4; 3\right);$ $a\_{3}=\left(4; 1; -3\right); a\_{4}=\left(0; 3; 3\right); a\_{5}=\left(0; 0; -2\right)$ в пространстве *R*3. Выразите небазисные векторы через базисные.

1. Известны координаты вектора $x=\left(7;2\right)$ в старом базисе $e\_{1},$ $e\_{2}.$Найдите координаты этого вектора в новом базисе $f\_{1},$ $f\_{2}$, если $ f\_{1}=4e\_{1}+5e\_{2}; f\_{2}=e\_{1}-e\_{2}. $
2. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $a=2i+j-3k$, $b=4j+k.$

**Контрольная работа № 2 (типовой вариант)**

1. Докажите линейность оператора $A:R^{3}\rightarrow R^{3}$, если $Ax=\left(4x\_{1}-2x\_{2};3x\_{3}; x\_{1}+2x\_{2}+3x\_{3}\right)$. Составьте его матрицу в данном базисе. Имеет ли оператор $Ax$ обратный? Если да, то укажите его матрицу и запишите координаты $A^{-1}x$.
2. Составьте матрицу линейного оператора проецирования геометрических векторов из $R^{3}$ на плоскость $x+y=0$ в базисе $i, j, k$ и найдите базисы образа и ядра этого оператора.
3. Линейный оператор $A:R^{5}\rightarrow R^{3}$ в некотором базисе задан матрицей

$A=\left(\begin{matrix}0&1&-2\\3&-2&7\\1&3&-5\end{matrix} \begin{matrix}0\\9\\3\end{matrix} \begin{matrix}2\\5\\9\end{matrix}\right)$.

Найдите образ, ядро, ранг и дефект оператора.

1. Найдите матрицу линейного отображения, переводящего векторы $a\_{1}=(-2; 1; -1)$, $a\_{2}=(1; -1; 3)$, $a\_{3}=(1; 2; -1)$ в векторы $b\_{1}=(3; 4)$, $b\_{2}=(-2; 1)$, $b\_{3}=\left(1; 5\right).$
2. Найдите матрицу перехода от базиса $e\_{1}; e\_{2}; e\_{3}$к базису $f\_{1}; f\_{2}; f\_{3}$в пространстве $R^{3}$ и определите координаты вектора $x=f\_{1}+f\_{2}-4f\_{3}$в базисе $e\_{1}; e\_{2}; e\_{3}$, если $e\_{1}=\left(1; 1; 2\right);$ $e\_{2}=\left(3; 2; 1\right);$ $e\_{3}=\left(0; 0; 1\right), f\_{1}=\left(-1; 2; 0\right);$ $f\_{2}=\left(2; 1; 2\right);$ $f\_{3}=\left(0; 2; 1\right).$
3. В некотором базисе $e\_{1}; e\_{2}; e\_{3}$задана матрица линейного оператора $A\_{e}=\left(\begin{matrix}1&0&-2\\3&-1&2\\-3&1&4\end{matrix}\right)$. Найдите матрицу этого оператора $A\_{f}$ в базисе

$f\_{1}=e\_{1}; f\_{2}=e\_{1}+2e\_{2}$; $f\_{3}=e\_{1}+2e\_{2}+3e\_{3}$.

1. Найдите базис из собственных векторов линейного оператора $A:R^{3}\rightarrow R^{3}$, заданного в некотором базисе матрицей *А*, запишите матрицу этого оператора в найденном базисе, если $A=\left(\begin{matrix}7&2&-2\\4&5&-2\\0&0&3\end{matrix}\right).$
2. В евклидовом пространстве $R^{4}$ задано подпространство *Н* как линейная оболочка векторов $a\_{1}=(1; 2; 1; -3)$, $a\_{2}=\left(-1;2; 3;4\right).$ Найдите базис орногонального дополнения $H^{⊥}$. Для вектора $x=(2; 1; 1; 0)$ найдите его ортогональную проекцию на подпространство *Н* и ортогональную составляющую относительно *Н*.
3. В евклидовом пространстве $R^{3}$ даны векторы $a\_{1}=(1; -1; 2)$, $a\_{2}=(1; 1; 1)$,$ a\_{3}=(1; 0; 1)$. Найдите матрицу Грама этой системы векторов и с ее помощью докажите, что векторы $a\_{1}, a\_{2}, a\_{3}$образуют базис в$R^{3}$. Вычислите скалярное произведение векторов $x=2a\_{1}- a\_{2}+4a\_{3}$, $y=a\_{1}-a\_{2}+ 2a\_{3}$двумя способами: через их координаты в стандартном базисе и в базисе $a\_{1}, a\_{2}, a\_{3}$с помощью матрицы Грама.
4. Матрица Грама в базисе $e\_{1}, e\_{2}, e\_{3}$ имеет вид $\left(\begin{matrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{matrix}\right)$. Найдите длины векторов $x=e\_{1}+ e\_{2}-2e\_{3}$, $y=2e\_{1}+ e\_{3}$ и угол между ними. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $e\_{1}, e\_{2}$и объем пирамиды с треугольным основанием, построенной на векторах $e\_{1}, e\_{2}, e\_{3}$.
5. Изобразите линию $4x^{2}+8x-6y=2.$

**Зачетная контрольная работа по линейной алгебре (типовой вариант)**

1. Решите уравнение относительно матрицы *Х*:

$A^{T}∙X∙B=C^{T}$, где $A=\left(\begin{matrix}3&5\\-1&-2\end{matrix}\right), B=\left(\begin{matrix}5&6\\7&8\end{matrix}\right), C=\left(\begin{matrix}14&9\\16&10\end{matrix}\right).$

1. Исследуйте систему линейных неоднородных уравнений на совместность, найдите общее решение данной системы и представьте его в виде суммы частного решения неоднорордной системы и общего решения соответствующей однородной системы:

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+2x\_{2}-2x\_{3}-3x\_{4}=4,\\3x\_{1}+8x\_{2}-4x\_{4}=14,\\x\_{1}+3x\_{2}+x\_{3}-x\_{4}=5.\end{array}\right.$$

1. Составьте матрицу линейного оператора проецирования геометрических векторов из $R^{3}$ на плоскость $z=0$ в базисе $i, j, k$ и найдите базисы образа и ядра этого оператора.
2. Плоскость проходит через точки $A(2; 1; 1)$ и $B(3; 5; -2)$ параллельно оси $Ox$. Найдите вектор нормали к этой плоскости, составляющий острый угол с осью $Oy$.
3. Найдите орт линии пересечения координатной плоскости $Oyz$ с плоскостью, проходящей через точки $A(1; 1; 0)$, $B(1; 0; 3)$,$ C(4; 4; 3)$.
4. Найдите координаты вектора $x=6e\_{1}-e\_{2}+3e\_{3}$ в базисе $f\_{1}=e\_{1}+ e\_{2}+2e\_{3};$ $f\_{2}=2e\_{1}-e\_{2};$ $f\_{3}=-e\_{1}+ e\_{2}+e\_{3}.$
5. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\left(\begin{matrix}3&-2\\-1&2\end{matrix}\right)$. Если возможно, укажите базис, в котором матрица оператора является диагональной. Составьте эту матрицу.
6. В евклидовом пространстве $R^{4}$ задано подпространство *Н* как линейная оболочка векторов $a\_{1}=(1; 1; 1; 1)$, $a\_{2}=\left(1;2; 2;-1\right).$ Для вектора $x=(4;- 1; -3; 4)$ найдите его ортогональную проекцию на подпространство *Н* и ортогональную составляющую относительно *Н*.
7. Постройте ортонормированный базис из собственных векторов оператора, заданного в ортонормированном базисе своей матрицей $\left(-\begin{matrix}2&-1&0\\1&2&0\\1&-1&1\end{matrix}\right).$ Запишите матрицу этого оператора в найденном базисе.
8. В евклидовом пространстве $R^{3}$ даны векторы $a\_{1}=(1; 2; 1)$, $a\_{2}=(0; 2; 0)$,$ a\_{3}=(3; 1; 1)$. Найдите матрицу Грама этой системы векторов и с ее помощью докажите, что векторы $a\_{1}, a\_{2}, a\_{3}$образуют базис в$R^{3}$. Вычислите скалярное произведение векторов $x=a\_{1}+ a\_{2}-2a\_{3}$, $y=2a\_{1}+a\_{2}+ 2a\_{3}$двумя способами: через их координаты в стандартном базисе и в базисе $a\_{1}, a\_{2}, a\_{3}$с помощью матрицы Грама.
9. Приведите квадратичную форму $f(x\_{1}; x\_{2}; x\_{3})$ к каноническому виду любым удобным способом, если $f\left(x\_{1}; x\_{2}; x\_{3}\right)=4x\_{1}^{2}+8x\_{1}x\_{2}+4x\_{1}x\_{3}+3x\_{2}^{2}-4x\_{3}^{2}.$
10. Используя критерий Сильвестра, исследуйте квадратичную форму $f\left(x\_{1}; x\_{2}; x\_{3}\right)=2x\_{1}^{2}+mx\_{2}^{2}+2x\_{3}^{2}+2x\_{1}x\_{2}+4x\_{2}x\_{3}+6x\_{1}x\_{3}$ на знакоопределенность в зависимости от параметра *m*.

# Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

## Базовый учебник

[1] **Беклемишев Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2008.-312с. *А также любое издание, начиная с 2000*.

[2] **Бурмистрова Е.Б,** **Лобанов С.Г.** Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии.− М.: Изд-во ГУ-ВШЭ, 1998.-216с.

## Основная литература

[1] **Беклемишев Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2008.-312с. *А также любое издание, начиная с 2000*.

[2] **Бурмистрова Е.Б,** **Лобанов С.Г.** Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии.− М.: Изд-во ГУ-ВШЭ, 1998.-216с.

## Основной задачник

[1] **Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.** Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.− М.: Физматлит, 2001.-394с.

## Дополнительная литература

[1] **Кулешов С.А., Салимова А.Ф., Ставцев С.Л.** Аналитическая геометрия.− М.: Издв-во «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», 2009.-379с.