Национальный исследовательский университет — Высшая школа экономики
Факультет математики
Рабочая программа дисциплины
“Algebraic Geometry: a startup course”
для совместной программы НИУ–ВШЭ и НМУ
“Math in Moscow”

1. Организационно-методический раздел

1.1. Цель курса

Изучение основ алгебраической геометрии, а именно

- теорем Гильберта о базисе и нулях, понятия аффинного многообразия и соответствия между многообразиями и кольцами регулярных функций;
- понятия проективного и квазипроективного многообразия, морфизма проективных многообразий, свойства собственности проективных пространств;
- понятия размерности алгебраического многообразия, понятием и основными примерами конечного морфизма, методами нахождения размерности, включая многочлен Гильберта;
- понятий простой и особой точки, раздутия, индекса пересечения;
- многообразий Грассмана и Шуберта, включая выражение степени этих многообразий в плюккеровом вложении через стандартные табло.

1.2. Задачи курса

Обучение основным понятиям классической алгебраической геометрии и базисным примерам. Выработка у студентов геометрической интуиции, специфической для алгебраической геометрии. Подготовка слушателей к более глубокому освоению предмета: демонстрация необходимости и создание мотивировок для изучения коммутативной алгебры и когомологий когерентных пучков. Подготовка к самостоятельному изучению литературы по алгебраической геометрии.

1.3. Методическая новизна курса

Преподавание алгебраической геометрии начинающим — задача, ввиду специфики предмета, очень непростая. Я рассчитываю, что изложение начальных разделов алгебраической геометрии с точными формулировками, но без тщательной проработки оснований и принятием ряда интуитивно ясных, но технически тяжелых результатов без доказательства с целью ознакомить студентов за отведенное время с возможно большим числом содержательных геометрических примеров имеет инновационный характер.

1.4. Место курса в системе формируемых инновационных квалификаций

Алгебраическая геометрия — один из центральных разделов современной математики, знакомство с которым обязательно для каждого магистранта, специализирующегося по абстрактной математике. При этом всем студентам необходимо быстрое введение в предмет: тем из них, кто планирует специализироваться по самой алгебраической геометрии и смежным областям, оно даст набор основных примеров и мотивацию для тщательной и утомительной проработки оснований, а студентам остальных специальностей даст правильное представление о предмете и возможность в дальнейшем грамотно применят результаты алгебраической геометрии к исследованиям по своей специальности.

2. Содержание курса

2.1. Новизна курса

Как уже отмечалось, идея курса алгебраической геометрии с основным упором на конкретные примеры, а не на проработку оснований, является новой. Такие курсы обкатывались в рамках программы “Math in Moscow”; настоящая программа основана на программах этих курсов, переработанных с учетом научных вкусов автора.

2. Тематический план

название темы	количество часов		
	лек	упр	сам
Введение: теоремы Гильберта о базисе и нулях	2	2	8
Аффинные многообразия и кольца регулярных функций	4	4	12
Проективные пространства, проективные и квазипроективные многообразия, морфизмы (квази)проективных многообразий	4	4	12
Результанты и свойство собственности проективных многообразий	2	2	8
Размерность, степень и конечные морфизмы	2	2	8
Ряд Пуанкаре и многочлен Гильберта	2	2	8
Локальные кольца; простые и особые точки	4	4	12
Раздутия; примеры разрешения особенностей	2	2	8
Индексы пересечения и теорема Безу	2	2	8
Плоские кубики и групповая структура на них	2	2	8
Грассманианы и циклы Шуберта	2	2	8
Плюккеровы координаты и плюккеровы уравнения	2	2	8
Степени циклов Шуберта и стандартные табло	2	2	8
итого	32	32	116

III. Содержание программы

Введение: две теоремы Гильберта. Постановка задачи о системах уравнений. Мономиальные идеалы, деформация к мономиальному идеалу. Доказательство теоремы о базисе. Слабая и сильная теоремы о нулях.

Аффинные многообразия. Определение. Морфизмы. Соответствие между аффинными многообразиями и конечно порожденными приведенными алгебрами. Топология Зарисского. Разложение на неприводимые компоненты.

Проективные и квазипроективные многообразия. Проективное пространство и однородные координаты. Определение проективных многообразий. Примеры проективных многообразий. Многообразия Веронезе и Сегре.

Свойство собственности проективных многообразий. Результант Сильвестра. Формулировка и доказательство теоремы о собственности. Вывод теоремы о собственности из теоремы Гильберта о нулях.

Размерность и степень. Определение и основные свойства размерности и степени. Ряд Пуанкаре и многочлен Гильберта. Примеры вычисления степени.

Простые и особые точки. Локальные кольца. Определения простых и особых точек. Раздутие. Примеры разрешения особенностей кривых.

Плоские кубики Построение групповой структуры на гладкой плоской кубике. Теорема Морделла (если останется время).

Грассманианы. Определение грассманианов. Плюккерово вложение. Циклы и клетки Шуберта.

Грассманианы (окончание). Плюккеровы уравнения на грассманиан. Стандартные мономы и доказательство достаточности плюккеровых уравнений. Выражение степени грассманиана через стандартные табло.

2.2. Рекомендуемые учебники

1) J. Harris. Algebraic geometry: A first course. Springer, 1995.

2) E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris, J. Geometry of algebraic curves. Vol. I. Springer, 1985.

2.3. Формы контроля

Курс рассчитан на 2 модуля. Текущий контроль и, одновременно, важнейшая составляющая курса — самостоятельное решение студентами задач. Каждую неделю студент получает домашнее задание, которое он должен решить дома, а затем обсудить свои записанные решения с преподавателем во время практических занятий. Результаты решения домашних заданий оцениваются в баллах (разное число баллов за разные задачи); сумма баллов затем учитывается при выставлении итоговой оценки.

В конце первого модуля студенты сдают зачет, представляющий собой письменную работу из 5–6 задач, продолжительностью 4 астрономических часа.

В конце второго модуля студенты сдают экзамен, также представляющий собой письменную работу продолжительностью 4 астрономических часа, в ходе которой надо письменно решить 5–6 задач по всему курсу.

Итоговая оценка вычисляется по формуле

$$F = \frac{2}{3}\max(S, E) + \frac{1}{3}\min(S, E),$$

где E — оценка за экзамен (в первом модуле — зачет), а S — оценка за работу в семестре, вычисляемая, в свою очередь, по формуле

$$S = 10 * 1.5 * B/B_{\max},$$

где B — сумма баллов, набранных студентом за решение всех задач из домашних заданий (в первом модуле — за первый модуль, во втором модуле — за второй модуль), а $B_{\max}$ — наибольшая возможная сумма баллов за решение домашних заданий.

Таким образом, для получения максимальной оценки 10 баллов достаточно отлично написать экзамен и решить примерно 65% всех задач из домашних заданий.

2.4. Учебно-методические материалы

Образцы домашних заданий и экзаменационных работ приводятся в дополнении к этой программе.