Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

"Национальный исследовательский университет - Высшая школа экономики"

факультет Математики

Выпускная квалификационная работа
(Магистерская диссертация)

Инвариантные меры и оптимальная транспортировка на бесконечномерных пространствах

Магистрант:
Заев Данила Андреевич
группа № 2M.11.1

Научный руководитель:
д.ф.-м.н Колесников
Александр Викторович

Москва, 2013

LaTeX

Содержание

1 Вступление

1.1 Обзор предыдущих результатов

Основной объект исследований — это оптимальные транспортные отображения для соответствующих классов мер на пространстве $\mathbb{R}^\infty$.

Обычно оптимальные транспортные отображения определяются как решения задачи Монжа, которая в наиболее общей постановке имеет следующий вид. Пусть есть два польских (метрических, полных, сепарабельных) пространства X и Y, а также полунепрерывная снизу функция $c : X \times Y \to \mathbb{R}$. Для заданной пары вероятностных мер μ на X и ν на Y решением задачи Монжа называется оптимальное отображение, определяемое как минимум функционала:

$$T \to \int c(x, T(x))\ d\mu$$

по всем отображениям $T : X \to Y$ переводящим меру μ в ν.

Эта задача тесно связана с задачей Монжа-Канторовича: найти минимум функционала

$$\inf\Big\{\int c(x,y)d\pi : \pi \in P(\mu,\nu)\Big\}$$

на пространстве $P(\mu,\nu)$ вероятностных мер с фиксированными проекциями: $Pr_x m = \mu, Pr_y m = \nu$. Когда имеется решение m задачи Монжа-Канторовича, иногда возможно построить по нему искомую транспортировку T. Эта возможность основана на свойстве оптимального решения m лежать на графике отображения T:

$$m(\Gamma) = 1, \quad \text{где} \quad \Gamma = \{(x, T(x)),\ x \in X\}.$$

Находить достаточные условия для выполнения такого свойства — это одна из основных задач в теории оптимальной транспортировки.

Стандартный и наиболее изученный случай подобной задачи — это случай $X = Y = \mathbb{R}^n$, $c(x,y) = \|x-y\|^2$, где $\|\cdot\|$ — это стандартная евклидова норма. В таком случае задача Монжа сводится к определению минимума функционала:

$$T \to \int \|x - T(x)\|^2\ d\mu$$

по всем отображениям $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ переводящим меру μ в ν. Известно, что в таком случае T имеет форму $T(x) = \nabla\varphi(x)$, где φ — это выпуклая функция.

Доказывается этот факт через решение задачи Монжа-Канторовича: минимизировать

$$W_2^2(\mu,\nu) = \inf\Bigl\{\int \|x-y\|^2 d\pi : \pi \in P(\mu,\nu)\Bigr\},$$

на пространстве $P(\mu,\nu)$ вероятностных мер с фиксированными проекциями: $Pr_x m = \mu, Pr_y m = \nu$. Такое пространство называют пространством транспортных планов. В данном случае для того, чтобы оптимальное решение π лежало на графике отображения T достаточно, чтобы μ и ν имели плотности и конечные вторые моменты (см., например, [21]). А значит, при таких условиях оптимальная транспортировка восстанавливается из оптимального транспортного плана.

Заметим, что $W_2(\mu,\nu)$ можно рассматривать как расстояние на пространстве вероятностных мер. В дальнейшем эту величину мы будем называть расстоянием Канторовича.

Другой хорошо известный факт, который будет часто использоваться в работе, это следующее соотношение, называемое двойственностью Канторовича. Сформулируем его для примера мер на $\mathbb{R}^n$ с функционалом стоимости, равным квадрату евклидовой нормы.

$$W_2(\mu,\nu) = J(\varphi,\psi),$$

где

$$J(\varphi,\psi) = \inf_{\varphi,\psi}\Bigl\{\int\Bigl(\varphi(x) - \frac{x^2}{2}\Bigr)\, d\mu + \int\Bigl(\psi(y) - \frac{y^2}{2}\Bigr)\, d\nu,\ \ \varphi(x)+\psi(y) \geq \langle x, y\rangle\Bigr\},$$

здесь супремум берётся по всем парам интегрируемых борелевских функций $\varphi(x), \psi(y)$. Заметим, что φ в двойственной задаче совпадает с потенциалом, задающим транспортное отображение: $T = \nabla\varphi$.

Больше информации об оптимальных транспортировках на $\mathbb{R}^n$ можно найти в [1], [6], [21].

Пусть теперь мы хотим поставить задачу Монжа-Канторовича для случая $X = Y = \mathbb{R}^\infty$. Если мы выберем функцию стоимости как $c(x,y) = \|x-y\|^2$, то очевидно, что задача минимизации функционала

$$\inf\Bigl\{\int \|x-y\|^2 d\pi : \pi \in P(\mu,\nu)\Bigr\}$$

будет иметь смысл далеко не для всех пар мер (μ,ν), а только для тех, где этот функционал принимает конечные значения. Поэтому естественным образом встают две задачи: во-первых, дать новое, осмысленное в большинстве случаев определение оптимальной транспортировки на $\mathbb{R}^\infty$. Во-вторых, выделить те классы мер, на которых оптимальная транспортировка в этом новом смысле существует. Ясно, что для решения этого могут существовать различные подходы.

Например, пусть $\mu = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(dx_i)$, $\nu = \prod_{i=1}^{\infty} \nu_i(dx_i)$ — произведение вероятностных мер. Предположим, что μ_i, ν_i имеют плотности. Тогда можно определить оптимальную транспортировку T отображающую μ в ν, которая имеет вид

$$T(x) = (T_1(x_1), \cdots, T_i(x_i), \cdots),$$

где $T_n(x_n)$ - это одномерная оптимальная транспортировка из μ_i в ν_i.

Хорошо развит подход для случая, когда меры μ и ν абсолютно непрерывны относительно счётного произведения стандартных гауссовских мер. Наиболее сильные результаты для такого случая описаны в [20] (другой подход был разработан в [13]). Известно, что для заданной $f \cdot \gamma$ существует оптимальная транспортировка $T(x) = x + \nabla\varphi(x)$ минимизирующая функционал

$$\int \|T(x) - x\|_{l^2}^2 \, d\gamma$$

и отображающая γ в $f \cdot \gamma$, так что $\int f \log f \, d\gamma < \infty$. Аналогично, существует оптимальная транспортировка, отображающая $f \cdot \gamma$ в γ.

Известно также (это следует из так называемого транспортного неравенства Талаграна), что в предположении $\int f \log f \, d\gamma < \infty$ расстояние Канторовича между γ и $f \cdot \gamma$ конечно:

$$W_2^2(\gamma, f \cdot \gamma) = \int \|T(x) - x\|_{l^2}^2 \, d\gamma < \infty.$$

В частности, $\nabla\varphi(x) \in l^2$ для γ - почти всех x.

Пусть $\mu = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(dx_i)$, $\nu = \prod_{i=1}^{\infty} \nu_i(dx_i)$ — произведения вероятностных мер. Предположим, что μ_i, ν_i имеют плотности. Тогда можно определить оптимальную транспортировку T отображающую μ в ν, которая имеет вид

$$T(x) = (T_1(x_1), \cdots, T_i(x_i), \cdots),$$

где $T_n(x_n)$ - это одномерная оптимальная транспортировка из μ_i в ν_i.

Можно отойти от случая гауссовских мер или произведений мер, и сформулировать более общее определение оптимальной транспортировки:

Определение 1.1. Будем говорить, что измеримое отображение T переводящее меру μ в ν оптимально, если мера $\pi = \mu \circ (x, T(x))^{-1}$ на графике

$$\{(x, T(x)) | \quad x \in \mathrm{supp}(\mu)\} \subset \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$$

T может быть получена, как слабый предел мер π_n таких, что 1) носитель π_n содержится в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, 2) π_n решение Канторовича с квадратичной функцией стоимости $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2$.

В данной работе это определение также будет играть одну из ключевых ролей.

Альтернативный подход к проблеме был разработан в статьях: [8] и [10]. В них для пространств $X = Y = 0, 1, .., d^\infty$ и функции стоимости c, удовлетворяющей ряду условий, строится пара мер (μ, ν), для которых существует оптимальная транспортировка.

Больше информации об оптимальных транспортировках, соответствующих уравнениях Монжа-Ампера, вопросах регулярности, и транспортировках над другими бесконечномерными пространствами можно получить в [4], [5], [7], [9], [19], [18].

1.2 Мотивация и формулировка задачи

Рассмотрим постановку задачи Монжа-Канторовича на $X = Y = \mathbb{R}^n$ со стандартной функцией стоимости:

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{X \times Y} |x - y|^2 d\pi$$

$$\pi \in \Pi(\mu, \nu) \iff P_X(\pi) = \mu, P_Y(\pi) = \nu$$

Как уже упоминалось выше, её решение всегда существует, единственно, а в случае выполнения некоторых не очень ограничительных условий, лежит на графике некоторого отображения. Допустим теперь, что меры μ и ν инвариантны относительно перестановок координат. Тогда можно переформулировать задачу следующим образом:

$$\inf_{\pi \in \Pi_{Inv}(\mu,\nu)} \int_{X \times Y} |x_1 - y_1|^2 d\pi,$$

$$\pi \in \Pi_{Inv}(\mu, \nu) \iff P_X(\pi) = \mu, P_Y(\pi) = \nu, \pi \circ g^{-1} = \pi, \forall g \in G$$

где Π_{Inv} - множество инвариантных транспортных планов, а x_1 - проекция x на первую координату. Несложный факт состоит в том, что решения исходной и переформулированной для симметричного случая задачи совпадают (доказательство этого факта будет дано в начале главы 5).

Теперь рассмотрим меры на $X = Y = \mathbb{R}^\infty$, инвариантные относительно некоторой довольно богатой группы преобразований. Если мы идентифицируем $\mathbb{R}^\infty$ с $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, то достаточно, чтобы для любых двух натуральных чисел n,m

находилось преобразование, меняющее местами в каждой последовательности $x \in \mathbb{R}^\infty$ координаты x_n и x_m.

Будем называть задачей Канторовича на инвариантных мерах оптимизационную задачу вида:

$$\inf_{\pi \in \Pi_{Inv}(\mu,\nu)} \int_{X \times Y} |x_1 - y_1|^2 d\pi,$$

$$\pi \in \Pi_{Inv}(\mu,\nu) \iff P_X(\pi) = \mu, P_Y(\pi) = \nu, \pi \circ g^{-1} = \pi, \forall g \in G$$

В некотором смысле это её естественное обобщение со случая $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^\infty$, которое стало возможным получить, если мы рассматриваем симметричные меры. Но, хотя эта постановка имеет аналогичный смысл, свойства решения задачи могут очень сильно отличаться.

Таким образом, мы сталкиваемся с целым рядом вопросов:

1. Всегда ли существует оптимальный план в указанном выше смысле?
2. Каковы условия того, что этот оптимальный план будет лежать на графике некоторого отображения?
3. Будет ли зависеть ответ на предыдущий вопрос от группы симметрий, инвариантность относительно которой мы используем?
4. Существует ли аналог двойственности Канторовича в классе инвариантных мер?

На все эти вопросы в работе будут даны полные или частичные ответы.

1.3 Структура работы и основные результаты

В **главе 2** работы рассматриваются основные типы симметрий на R^∞, пригодные для наших целей: инвариантность относительно конечных сдвигов координат, инвариантность относительно конечных перестановок координат и инвариантность относительно вращений в конечномерных подпространствах. Излагаются основные результаты, касающиеся всех этих типов симметричных мер.

Для мер, инвариантных относительно всех конечных сдвигов координат полностью применима классическая эргодическая теория. Из неё следует, что любая инвариантная мера представляется в виде смеси взаимно-сингулярных эргодических мер. Для мер, инвариантных относительно всех конечных перестановок координат подобные результаты имеют название теорем Де-Финетти и Какутани. Роль эргодических мер в данном случае играют счётные степени одномерных распределений. И, наконец, для случая сферической симметричности меры представляются как смеси гауссовых. Все эти факты используются в дальнейшем в главах 4-6.

В **главе 3** работы подробно исследуются меры, инвариантные относительно конечных перестановок координат. Сначала выводится явный вид транспортировки для случая, когда она существует. При этом основную роль играет разложение мер по теореме Де-Финетти:

$$\mu = \int m^\infty(B)\Pi_\mu(dm), \quad \nu = \int m^\infty(B)\Pi_\nu(dm),$$

где m принадлежит к пространству $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ борелевских вероятностных мер на $\mathbb{R}$ и Π_μ, Π_ν - вероятностные меры на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Показано, что задача о существовании оптимальной транспортировки, отображающей μ в ν, сводится к решению транспортной задачи для мер Π_μ, Π_ν с квадратом расстояния Канторовича на пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ в качестве функции стоимости.

Вслед за вопросом о виде транспортировки решается вопрос о нахождении достаточных условий её существования. Одно из таких достаточных условий получается применением оценки типа Талаграна на L^2-расстояние между транспортными отображениями через относительную энтропию соответствующих мер. Для любой вероятностной меры $\mu = e^{-V}\ dx$, $\nu = e^{-W}\ dx$ на $\mathbb{R}^d$ и соответствующей оптимальной транспортировки T_μ, T_ν, отображающей μ, ν на стандартную Гауссову меру $\mathbb{R}^d$ соответственно, имеется следующая оценка:

$$\mathrm{Ent}_\nu\Big(\frac{\mu}{\nu}\Big) = \int \log\frac{d\mu}{d\nu}\ d\mu \geq \frac{1}{2}\int \|\nabla T_\mu - T_\nu\|^2\ d\mu. \tag{1}$$

Основные идеи таких оценок были развиты ещё в [13] В этой же главе приводятся примеры классов мер, на которых выполняется полученное достаточное условие. В частности, это конечные смеси счётных степеней мер на $\mathbb{R}^1$.

В **главе 4** мы рассматриваем меры, инвариантные относительно конечных сдвигов. Эргодическая теория позволяет пролить свет на некоторые свойства транспортировок подобных мер. В частности будет доказано, что для двух эргодических мер всегда существует эргодический оптимальный план. Также будет сформулировано достаточное условие существования для некоторого класса стационарных мер, основным примером которых является мера Гиббса на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ со следующим инвариантным относительно сдвигов гамильтонианом:

$$H = \sum_{i=-\infty}^{\infty} V(x_i) + W(x_i, x_{i+1})$$

(существование такой меры доказано в [2]).

И, наконец, в **главе 5** даётся формулировка двойственности Канторовича для задачи Монжа-Канторовича в классе мер, инвариантных относительно действия некоторой компактной группы.

2 Инвариантные меры на R^∞

2.1 Основные группы симметрий

Будем идентифицировать пространство $\mathbb{R}^\infty$ с $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ или с $\mathbb{R}^\mathbb{Z}$. В первом случае зафиксируем в нём стандартный базис: $\{e_1, e_2, ...\}$, во втором: $\{..., e_{-1}, e_0, e_1, ...\}$. Обозначим через x_i проекцию элемента x на прямую, натянутую на e_i. Будем называть это число i-ой координатой элемента x.

Для целей данной работы нужно рассматривать такие группы (полугруппы) G инвариантностей, чтобы выполнялось условие: для любых двух натуральных чисел n, m должен существовать элемент $g \in G$ такой, что $g(e_n) = e_m$. Хотя таких групп существует, очевидно, бесконечное число, развитая теория есть лишь для нескольких из них.

Согласно книге [12] особый интерес представляют следующие четыре типа симметрии:

1. "Stationarity"(стационарность)

2. "Contractability"(инвариантность относительно перестановок, сохраняющих порядок координат)

3. "Exchangeability"(симметричность, инвариантность относительно перестановок)

4. "Rotatability"(сферическая инвариантность)

Рассмотрим подробнее каждую из этих инвариантностей.

Стационарность - это инвариантность относительно действия группы сдвигов, изоморфной $\mathbb{Z}$:

$$\sigma(..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...) = (..., x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, ...)$$

Также можно дать её определение в вероятностных терминах через подпоследовательности. Пусть $(\xi_1, \xi_2, ...)$ - случайный процесс с дискретным временем. Его распределение будем называть стационарным, если для любого $k \in \mathbb{N}$ конечномерные распределения случайных векторов $(x_s, x_{s+1}, ..., x_{s+k})$ совпадают для всех $s \in \mathbb{N}$.

"Contractability"(на русском языке у этого свойства нет устоявшегося названия) легче всего определить на вероятностном языке. Пусть $(\xi_1, \xi_2, ...)$ - случайный процесс с дискретным временем. Его распределение будем называть "contractable если любые его подпоследовательности одинаковой длины имеет одинаковое распределение:

$$(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, ...) \stackrel{d}{=} (\xi_1, \xi_2, ...)$$

для любых $k_1 < k_2 < ...$, где $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению.

Более сильное свойство "exchangeability"(инвариантность относительно перестановок) можно определить сходным с написанным выше соотношением:

$$(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, ...) \stackrel{d}{=} (\xi_1, \xi_2, ...)$$

но теперь $\{k_1, k_2, ...\}$ - произвольные индексы. В терминах групп подобную симметрию удобно определять как инвариантность относительно действия группы $\mathbb{S}^\infty$ конечных перестановок координат.

Наконец, сферическую инвариантность мы будем определять, требуя, чтобы распределение любой конечной подпоследовательности было инвариантно относительно ортогональных преобразований.

Очевидно, что каждая следующая из описанных инвариантностей оказывается сильнее предыдущей. Так, сферически инвариантная мера будет инвариантна во всех четырёх смыслах. Однако существует теорема (см. [12], Th 1.1), утверждающая, что свойства мер "contractability"и "exchangeability"на самом деле эквивалентны.

В дальнейшем ради удобства в терминологии мы условимся называть меры, инвариантные относительно перестановок, симметричными.

2.2 Представление мер в виде смесей

Очевидным фактом в рассматриваемой нами теории является выпуклость пространства инвариантных мер: любая комбинация инвариантных мер вида $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ будет также инвариантной.

Можно легко проверить, что свойство инвариантности сохраняется и при взятии бесконечных выпуклых комбинаций - смесей. Смесь мер будем определять соотношением:

$$\mu = \int_M \mu_m d\Pi(m),$$

где интегрирование ведётся по некоторой мере на пространстве мер. Выпуклая комбинация в таком определении оказывается частным случаем смеси, где интегрирование ведётся по комбинации атомарных мер.

Представим, что в множестве всех инвариантных вероятностных мер $\mathcal{P}$ можно найти некоторое минимальное по включению подмножество "простых"мер, через смеси которых будут выражаться все остальные.

Для стационарных мер подобным подмножеством будет служить множество эргодических мер. Напомним, что мера μ называется эргодической, если для любого измеримого инвариантного множества A $\mu(A)$ равно 0 или 1. Согласно классической эргодической теории (см., например, [22]) это определение равносильно тому, что меры являются экстремальными точками в выпуклом множестве всех инвариантных мер. Отсюда же следует, что две различные эргодические меры обязаны быть взаимно-сингулярными.

Похожие результаты существуют и для симметричных мер. Так как свойство симметричности сильнее свойства стационарности, множество "простых"мер должно быть меньше. Действительно, оказывается, что любую симметричную меру можно представить как смесь счётных степеней мер на прямой. Это утверждение является обобщением классической теоремы Де-Финетти: (см. [3], Теорема 10.10.19).

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{P}$ — пространство борелевских мер на $\mathbb{R}$ снабжённое слабой топологией. Тогда для любой борелевской симметричной μ на $\mathbb{R}^\infty$ существует вероятностная мера Π на $\mathcal{P}$, такая что*

$$\mu(B) = \int m^\infty(B)\Pi(dm),$$

для любой борелевской $B \subset \mathbb{R}^\infty$.

Заметим, что оригинальная теорема Де-Финетти (1936) содержала аналогичное утверждение для пространства $0, 1^\infty$. В нём аналогом мер m были меры Бернулли, и интегрирование шло по отрезку [0;1], значения в котором принимает единственный параметр распределения.

Утверждение о взаимной сингулярности мер из $M = \{m^\infty : m \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$ следует из так называемой Теоремы Какутани о дихотомии: любые два счётных произведения мер на $(\mathbb{R})$ или взаимно-сингулярны, или эквивалентны.

Для сферически-инвариантных мер имеет место теорема Фридмана, сужающая множество M до мер, являющихся степенями центрированной гауссовской меры на $(\mathbb{R})$:

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{P}$ — пространство борелевских мер на $\mathbb{R}$ снабжённое слабой топологией. Тогда для любой нетривиальной борелевской сферически-симметричной меры μ на $\mathbb{R}^\infty$ существует вероятностная мера Π на $(0, +\infty)$, такая что*

$$\mu(B) = \int_{(0,+\infty)} \gamma^\infty(B)\Pi(d\sigma^2),$$

для любой борелевской $B \subset \mathbb{R}^\infty$. Здесь γ — центрированная гауссовская мера на $\mathbb{R}$.

В следующей главе мы используем упомянутые выше теоремы для того, чтобы найти явный вид оптимальной транспортировки.

3 Транспортировка симметричных мер

В этой главе мы будем рассматривать транспортировки между мерами, инвариантными относительно всех перестановок конечного числа координат.

До того, как мы перейдём к основному случаю пространства $\mathbb{R}^\infty$, обратим внимание на некоторые особенности, проявляющиеся уже в конечномерной ситуации.

Пусть S_d — группа всех перестановок $\{1, \cdots, d\}$. Эта группа действует на $\mathbb{R}^d$ следующим образом:

$$L_\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(d)}), \quad \sigma \in S_d.$$

Пусть $\Gamma \subset S_d$ — любая подгруппа со следующим свойством: для любой пары i, j существует $\sigma \in \Gamma$ такое что $\sigma(i) = j$.

Предположим, что и исходная, и финальная мера в транспортировке инвариантны относительно Γ. В этом случае потенциал Канторовича φ также Γ-инвариантен: $\varphi = \varphi \circ L_\sigma$ для любой $\sigma \in \Gamma$. Следовательно, оптимальная транспортировка $T = \nabla\varphi$ имеет следующее свойство:

$$T = L^*_\sigma(T \circ L_\sigma) \quad \sim \quad L_\sigma \circ T = T \circ L_\sigma.$$

Действие Γ может быть определено на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ следующим образом: $L_\sigma(x, y) = (L_\sigma x, L_\sigma y)$. Оптимальный транспортный план $\pi(dx, dy)$ также Γ-инвариантен.

Теперь пусть $\sigma(i) = j$. Получаем

$$\begin{aligned} \int x_i T_i \, d\mu &= \int \langle e_i, x\rangle\langle e_i, T(x)\rangle \, d\mu = \int \langle L_\sigma e_i, L_\sigma x\rangle \langle e_i, L^*_\sigma(T(L_\sigma x)\rangle \, d\mu \\ &= \int \langle e_j, L_\sigma x\rangle\langle e_j, (T(L_\sigma x)\rangle \, d\mu = \int \langle e_j, x\rangle\langle e_j, T(x)\rangle \, d\mu = \int x_j T_j \, d\mu. \end{aligned}$$

Следовательно

$$W_2^2(\mu, \nu) = \int \|x - T(x)\|^2 \, d\mu = \sum_{i=1}^d \int (x_i - T_i(x))^2 \, d\mu = d \int (x_i - T_i(x))^2 \, d\mu, \ \ \forall i.$$

Задача Монжа-Канторовича с квадратичной стоимостью для Γ-инвариантных маргинальных распределений эквивалентно транспортной задаче с функцией стоимости $|x_1 - y_1|^2$ в классе Γ-инвариантных вероятностных мер.

Обозначим через S_∞ группу перестановок $\mathbb{N}$ которая переставляет конечное число координат. Определим её естественное действие на $\mathbb{R}^\infty$:

$$\sigma(x) = (x_{\sigma(i)}), \quad x = (x_i) \in \mathbb{R}^\infty, \quad \sigma \in S_\infty.$$

В этой главе мы будем рассматривать меры μ и ν инвариантные относительно всех $\sigma \in S_\infty$:

$$\mu = \mu \circ \sigma^{-1}, \quad \nu = \nu \circ \sigma^{-1}.$$

Пример 3.1. Пусть m — борелевская вероятностная мера на $\mathbb{R}$. Её счётная степень m^∞ удовлетворяет данному условию инвариантности.

Определим задачу Монжа-Канторовича для нашего случая:

Определение 3.2. Пусть μ и ν инвариантны относительно перестановок конечного числа координат. Рассмотрим множество $\mathcal{P}_{S_\infty}$ вероятностных мер на $X \times Y, X = Y = \mathbb{R}^\infty$ которые инвариантны относительно отображения $(x, y) \to (L_\sigma(x), L_\sigma(y))$, $\sigma \in S_\infty$. Скажем, что мера $\pi \in \mathcal{P}_{S_\infty}$ — это решение задачи Монжа-Канторовича с квадратичной функцией стоимости, если на ней достигается минимум функционала:

$$\mathcal{P}_{S_\infty} \ni m \to \int (x_1 - y_1)^2 \, dm. \tag{2}$$

Если π лежит на графике некоторого отображения T, мы будем называть T оптимальной транспортировкой.

Ясно, что решение задачи Монжа-Канторовича (2) существует и обладает свойством $\int x_1^2 \, d\mu < \infty, \int y_1^2 \, d\nu < \infty$.

3.1 Явный вид транспортировки

Соответствующая решению задачи Монжа-Канторовича оптимальная транспортировка T (если существует) должна коммутировать с любым L_σ:

$$T \circ L_\sigma = L_\sigma \circ T \tag{3}$$

(по крайней мере с точностью до множества μ-меры ноль).

Постараемся описать структуру отображения, удовлетворяющего (3). Предположим сначала, что μ — это произведение мер. Рассмотрим функцию $T_1(x) = \langle T(x), e_1 \rangle$ и зафиксируем x_1. Тогда из (3) функция $F : (x_2, x_3, \cdots) \to T_1(x)$ инвариантна относительно S_∞. Следовательно F — это константа по $0-1$ закону Хьюита-Сэведжа. Значит T_1 зависит только от x_1 и отображение T диагонально: $(T_1(x_1), T_2(x_2), \cdots)$.

Пример 3.3. Пусть μ_1, μ_2 счётные степени двух различных мер на прямой. По теореме Какутани о дихотомии они взаимно сингулярны. Тогда не существует никакой транспортировки T из $\mu = \mu_1$ в $\nu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$, удовлетворяющей (3). Действительно, любая T, удовлетворяющая (3), должна быть диагональной, следовательно мера $\mu \circ T^{-1}$ должна быть произведением мер.

Этот пример демонстрирует, что оптимальная транспортировка не всегда существует.

Перейдём теперь общему случаю. Рассмотрим пару симметричных мер μ, ν и их представления в виде смесей мер:

$$\mu = \int m^\infty \, d\Pi_\mu, \quad \nu = \int m^\infty \, d\Pi_\nu.$$

По сильному закону больших чисел, для любой борелевской функции f для m^∞-почти всех x выполняется:

$$\int f \, dm = \lim_n \frac{1}{n}\bigl(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\bigr).$$

Выберем последовательность ограниченных непрерывных функций $\{f_i\}$ на $\mathbb{R}$ которые плотны в $C([a,b])$ для любых a, b, и положим:

$$\mathcal{S}_m = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Bigl\{x : \lim_n \frac{1}{n}\bigl(f_i(x_1) + \cdots + f_i(x_n)\bigr) = \int f_i \, dm\Bigr\}.$$

Ясно, что $m^\infty(\mathcal{S}_m) = 1$, но $p^\infty(\mathcal{S}_m) = 0$ для $p \neq m$.

Для любой пары мер m_1^∞, m_2^∞ положим:

$$d^2(m_1^\infty, m_2^\infty) := W_2^2(m_1, m_2)$$

(квадрат расстояния Канторовича между m_1 и m_2).

Пусть T — это транспортное отображение, которое 1) отправляет меру μ в ν, 2) коммутирует с S_∞, 3) задаёт минимум для функционала $\int |T_1(x) - x_1|^2 \, d\mu$ среди всех отображений, удовлетворяющих 1) и 2). Из предположений выше следует, что T должна быть диагональной на любом множестве вида $\mathcal{S}_m$ (с точностью до m^∞-меры ноль и для Π_μ-почти всех m). Это значит, что для Π_μ-почти всех m $T|_{\mathcal{S}_m} = T_{m,F(m)}$ m^∞-п.в., где $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ - это борелевское отображение, а $T_{m,F(m)}$ — это диагональная оптимальная транспортировка m^∞ в $F^\infty(m)$. Вычислив стоимость транспортировки

$$\int |T_1 - x_1|^2 \, d\mu = \int W_2^2(m, F(m)) d\Pi_\mu = \int d^2(m^\infty, F^\infty(m)) d\Pi_\mu$$

мы получаем, что F должна быть оптимальной транспортировкой из Π_μ в Π_ν для функции стоимости $(m,p) = W_2^2(m,p)$.

Учитывая всё сказанное, можно сформулировать следующее утверждение:

Предложение 3.4. *Пусть отображение T удовлетворяет следующим условиям*

1) $\nu = \mu \circ T^{-1}$,

2) $L_\sigma \circ T = T \circ L_\sigma \quad \mu -$ *п.н.*,

3) $\int |T_1(x) - x_1|^2 \, d\mu$ *минимально среди всех отображений, увовлетворяющих 1) и 2).*

Тогда с точностью до множества μ-нулевой меры $T|_{\mathcal{S}_m} = T_{m,F(m)}$, где F — это оптимальная транспортировка из Π_μ в Π_ν для функции стоимости $(m,p) \to W_2^2(m,p)$, а $T_{m,F(m)}$ — оптимальная транспортировка из m^∞ в $F^\infty(m)$.

Однако, конечно, стоит помнить, что оптимальной транспортировки T может и не существовать.

3.2 Достаточные условия существования

В этом разделе мы найдём достаточное условие существования оптимальной транспортировки в классе симметричных мер. Оптимальная транспортировка будет пониматься здесь в смысле определения (1.1)

Обозначим проекции $\mu \circ P_n^{-1}$ μ на первые n координат через μ_n. Для пары чисел $m < n$ мы обозначим через $P_{m,n}$ проекцию на подпространство, порождённое множеством $\{e_{m+1}, \cdots, e_n\}$ и через $\mu_{m,n} = \mu \circ P_{m,n}^{-1}$ соответствующий образ μ

До конца раздела будет всюду предполагаться, что для любой пары чисел $n > m$ проекция μ_n абсолютно непрерывна относительно $\mu_n \times \mu_{m,n}$, следовательно существует представление:

$$\mu_n = \rho_{m,n} \cdot \mu_m \times \mu_{m,n} \tag{4}$$

Аналогичное предположение выполнено и для ν:

$$\nu_n = d_{m,n} \cdot \nu_m \times \nu_{m,n}. \tag{5}$$

Теорема 3.5. *Предположим, что*

1) меры μ и ν инвариантны относительно конечных перестановок координат;

2) все проекции μ_n, ν_n имеют плотность относительно меры Лебега и представление (4), (5);

3) существует последовательность $C_m > 0, \varepsilon > 0$ такая, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$ имеется

$$\int \log \rho_{m,n} d\mu < C_m, \quad \int d_{m,n}^{-(1+\varepsilon)} d\nu < C_m$$

и

$$\lim_{m \to \infty} \frac{C_m}{m} = 0;$$

4) мера ν K-равномерно логарифмически-вогнута для некоторого $K > 0$.

Тогда существует оптимальное транспортное отображение T переводящее меру μ в ν.

Замечание 3.6. Предположение 3) означает, в частности, что расстояние Кульбака-Лейбнера между μ_n и $\mu_n \times \mu_{m \times n}$ имеет порядок $o(m)$ равномерно по n.

Доказательство. Пусть T_m будет оптимальным транспортным отображением, переводящим μ_m в ν_m, а $T_{m,n}$ оптимальным отображением из $\mu_{m,n}$ в $\nu_{m,n}$. Ясно, что

$$\tilde{T}_{m,n}(x) = T_m(P_m x) + T_{m,n}(P_{m,n} x)$$

переводит $\mu_m \times \mu_{m,n}$ в $\nu_m \times \nu_{m,n}$. Используя представление $\nu_n = d_{m,n} \cdot \nu_m \times \nu_{m,n}$, мы получаем, что $\tilde{T}_{m,n}$ отображает

$$d_{m,n}(\tilde{T}_{m,n}) \cdot \mu_m \times \mu_{m,n}$$

в ν_n.

Из оценки 1 можно получить следующую:

$$\mathrm{Ent}_{\varrho_{m,n}(\tilde{T}_{m,n})\mu_m \times \mu_{m,n}}\Big(\frac{\mu_n}{\varrho_{m,n}(\tilde{T}_{m,n})\mu_m \times \mu_{m,n}}\Big) \geq \frac{K}{2}\int \big\|\tilde{T}_{m,n} - T_n\big\|^2 \, d\mu_n.$$

Из этого вытекает

$$\int \log\Big(\frac{\rho_{m,n}}{d_{m,n}(\tilde{T}_{m,n})}\Big)\, d\mu_n \geq \frac{K}{2}\int \big\|T_m - P_m \circ T_n\big\|^2 \, d\mu_n = \frac{K}{2}\int \big\|T_m - P_m \circ T_n\big\|^2 \, d\mu.$$

Оценим отдельно левую часть

$$\int \log\Big(\frac{\rho_{m,n}}{d_{m,n}(\tilde{T}_{m,n})}\Big)\, d\mu_n = \int \log \rho_{m,n} \, d\mu - \int \log d_{m,n}(\tilde{T}_{m,n}) \, d\mu_n.$$

Желаемая оценка для первого слагаемого следует напрямую из определения: $\int \log \rho_{m,n} \, d\mu \leq C$. Применим неравенство

$$xy \leq \frac{1}{\varepsilon}\Big(e^{\varepsilon x} + y \log y - y\Big)$$

которое выполняется для любого x и любого $y > 0$, $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
-\int \log d_{m,n}(\tilde{T}_{m,n}) \, d\mu_n &= -\int \log d_{m,n}(\tilde{T}_{m,n}) \rho_{m,n} \, d\mu_m \times \mu_{m,n} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int \frac{1}{d^{\varepsilon}_{m,n}(\tilde{T}_{m,n})} \, d\mu_m \times \mu_{m,n} + \int (\rho_{m,n} \log \rho_{m,n} - \rho_{m,n}) \, d\mu_m \times \mu_{m,n}\Big) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int \frac{1}{d^{\varepsilon}_{m,n}} \, d\nu_m \times \nu_{m,n} + \int (\log \rho_{m,n} - 1) \, d\mu_n\Big) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int \frac{1}{d^{1+\varepsilon}_{m,n}} \, d\nu_n + \int (\log \rho_{m,n} - 1) \, d\mu\Big). \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int \frac{1}{d^{1+\varepsilon}_{m,n}} \, d\nu + \int (\log \rho_{m,n} - 1) \, d\mu\Big).
\end{aligned}$$

Применяя предположения, получаем

$$\frac{K}{2}\int \big\|T_m - P_m \circ T_n\big\|^2 \, d\mu_n = \frac{K}{2}\int \big\|T_m - P_m \circ T_n\big\|^2 \, d\mu < c_m$$

для некоторой последовательности $c_m = o(m)$.

Так как μ и ν инвариантны относительно конечных перестановок координат, подобные оценки остаются верными для всех проекций мер μ_n, ν_n. Из этого следует, в частности, что

$$\int \left\|T_m - P_m \circ T_n\right\|^2 \, d\mu = m \int \langle T_m - T_n, e_i \rangle^2 \, d\mu$$

для любого $1 \leq i \leq m$ и $n > m$. Следовательно $\int \langle T_m - T_n, e_i \rangle^2 \, d\mu \leq \frac{2c_m}{mK}$. Переходя к $L^2(\mu)$-слабо сходящейся подпоследовательности $\langle T_{n_k}, e_i \rangle \to T_i$ мы получаем в пределе

$$\int (\langle T_m, e_i \rangle - T_i)^2 \, d\mu \leq \frac{2c_m}{mK}.$$

Очевидно, что это даёт $\lim_m \langle T_m, e_i \rangle = T_i$ in $L^2(\mu)$. Отсюда следует, что $T = \sum_{i=1}^{\infty} T_i \cdot e_i$ и есть искомая транспортировка. $\square$

3.3 Примеры существования

Все предположения Теоремы 3.5 легко проверяемы, за исключением 3). Приведём некоторые примеры, когда оно выполняется:

Пример 3.7. Пусть μ на R^∞ — выпуклая комбинация конечного числа мер (конечная смесь). Тогда она имеет вид выпуклая комбинация конечного числа мер (конечная смесь). Тогда она представима в виде $\mu = \sum \lambda_i \mu_i$, $\sum \lambda_i = 1$, а каждая из её проекций соответственно в виде:

$$\mu \circ P_n^{-1} = \sum \lambda_i (\mu_i \circ P_n^{-1})$$

Предположим, что проекции имеют плотность относительно меры Лебега. Введём обозначения:

$$p_i = \frac{\mu_i \circ P_m^{-1}}{dx}$$

$$q_i = \frac{\mu_i \circ P_{m,n}^{-1}}{dx}$$

Тогда $\rho_{m,n} = \frac{\mu_n}{\mu_m \times \mu_{m,n}}$ может быть выражено как

$$\rho_{m,n} = \frac{\sum \lambda_i p_i q_i}{(\sum \lambda_i p_i)(\sum \lambda_j q_j)}$$

Утверждается, что $\int \log \rho_{m,n} d\mu < C$ для некоторой константы C независящей от n, m, и, при дополнительном предположении об инвариантности относительно группы S_∞, μ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.1. Заметим, что:

$$\rho_{m,n} = \frac{\sum \lambda_i p_i q_i}{(\sum \lambda_i p_i)(\sum \lambda_j q_j)} = \frac{\sum \lambda_i p_i q_i}{\sum \lambda_i^2 p_i q_i + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j p_i q_j} \leq \frac{\sum \lambda_i p_i q_i}{\sum \lambda_i^2 p_i q_i}$$

Используя следующую тривиальную оценку,

$$\frac{\sum \lambda_i p_i q_i}{\sum \lambda_i^2 p_i q_i} \leq \frac{1}{\inf_i (\lambda_i)}$$

в итоге мы получаем:

$$\int \log \rho_{m,n} d\mu = \int \log \frac{\sum \lambda_i p_i q_i}{(\sum \lambda_i p_i)(\sum \lambda_j q_j)} d\mu \leq$$
$$\leq \int \log \frac{1}{\inf_i (\lambda_i)} d\mu = -\log \inf_i (\lambda_i) < C$$

Заметим, что приведённое рассуждение имеет смысл лишь для конечных смесей мер. В случае произвольной смеси (даже со счётным числом составляющих) $\log \inf_i (\lambda_i)$ не ограничен, и наша оценка становится бесполезной.

4 Транспортировка стационарных мер

Пусть

$$\sigma : x = (x_i) \to (x_{i-1}).$$

это сдвиг Бернулли в пространстве $\mathbb{R}^\infty$. Напомним, что

Определение 4.1. Вероятностная мера μ называется стационарной, если она инваринтна относительно σ: $\mu \circ \sigma^{-1} = \mu$.

4.1 Случай эргодических мер

Напомним, что мера μ называется эргодической, если для любого измеримого инвариантного множества A $\mu(A)$ равно 0 или 1. Как уже упомяналось выше, эргодические меры являются экстремальными точками в выпуклом множестве всех стационарных мер. Отсюда же следует, что две различные эргодические меры обязаны быть взаимно-сингулярными.

Из определения легко видно, что не существует взаимно-однозначного транспортного отображения T, переводящего эргодическую меру μ в неэргодическую меру ν, так, что $T(A)$ инвариантно относительно сдвигов для всех множеств A с подобной же инвариантностью.

Естественный вопрос — что можно сказать об оптимальной транспортировке между двумя эргодическими мерами. К сожалению, полного ответа на этот вопрос у нас нет, но мы докажем два утверждения, частично проливающих свет на эту проблему.

X, Y — польские пространства, $G = \mathbb{Z}$. Пусть $1 \in \mathbb{Z}$ действует на X, Y, $X \times Y$ измеримыми биекциями g_X, g_X, $g_{X\times Y}$ соответственно, $g_{X\times Y}(x, y) = (g_X(x), g_Y(y))$. В дальнейшем каждое из этих трёх действий будет обозначаться просто как g. Также $P : X \times Y \to X$ обозначает проекцию на пространство X.

Предложение 4.2. *Пусть $\pi \circ P^{-1} = \mu$, мера μ инвариантна относительно действия g и эргодична, π инвариантна и лежит на графике некоторого отображения $T : X \to Y$, тогда π эргодична.*

Доказательство. Пусть π не эргодична. Тогда она может быть представлена как невырожденная выпуклая комбинация двух инвариантных мер:

$$\pi = \lambda\pi_1 + (1-\lambda)\pi_2$$

где $\pi_1 \neq \pi_2$, $\lambda \subset (0,1)$ и π_1, π_2 инвариантны. Значит можно представить μ как: $\mu = \lambda\pi_1 \circ P^{-1} + (1-\lambda)\pi_2 \circ P^{-1}$. Остаётся проверить, что $\mu_1 = \pi_1 \circ P^{-1}$ и $\mu_2 = \pi_2 \circ P^{-1}$ инвариантны и различны. Заметим, что π_1, π_2 абсолютно непрерывны относительно π и также лежат на графике отображения T.

Во-первых проверим инвариантность. Для любого измеримого подмножества $A \subset X$:

$$\begin{aligned}\mu_1(g^{-1}A) = \pi_1(P^{-1}(g^{-1}A)) = \pi_1(\{(x,y) : g(x) \in A\}) = \\ = \pi_1(\{(x,y) : (g(x), g(y)) \in P^{-1}(A)\}) = \\ = \pi_1(g^{-1}(P^{-1}(A))) = \pi_1(P^{-1}(A)) = \mu_1(A)\end{aligned}$$

Аналогичным рассуждением доказывается инвариантность μ_2.

Следующим шагом проверим, что μ_1 и μ_2 не совпадают. Пусть B — произвольное измеримое подмножество $X \times Y$, $A = \{x : (x, Tx) \in B\} \subset X$ измеримо как проекция измеримого множества. Предположим, что $\mu_1 = \mu_2$, тогда они должны совпадать на каждом измеримом множестве $A \in X$, следовательно:

$$\begin{aligned}\pi_1(B) = \pi_1(B \cap \{(x,Tx)\}) = \pi_1(\{(x,Tx) : x \in A\}) = \mu_1(A) = \\ = \mu_2(A) = \pi_2(\{(x,Tx) : x \in A\}) = \pi_2(B \cap \{(x,Tx)\}) = \pi_2(B)\end{aligned}$$

Этот факт противоречит выбору π_1, π_2, следовательно $\mu_1 \neq \mu_2$.

Мы получили, что μ может быть представлена как выпуклая комбинация двух различных инвариантных мер, а значит, она не эргодична. Это противоречие доказывает утверждние. $\square$

Предложение 4.3. *Пусть μ, ν инвариантны относительно действия g и эргодичны, $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ — некоторая инвариантная полунепрерывная сни-*

зу функция стоимости. Тогда существует эргодический оптимальный план относительно с в классе инвариантных транспортных планов.

Доказательство. Существование некоторого оптимального транспортного плана в классе инвариантных следует из компактности такого класса. Инвариантный план может быть представлен как смесь эргодических мер на $X \times Y$:

$$\pi = \int_\alpha \pi_\alpha d\lambda(\alpha)$$

Во-первых, докажем, что почти все π_α — транспортные планы.

$$\pi \circ P_X^{-1} = \int_\alpha \pi_\alpha \circ P_X^{-1} d\lambda(\alpha)$$

Заметим, что $\pi \circ P_X^{-1} = \mu$. Обозначив $\pi_\alpha \circ P_X^{-1}$ через μ_α, мы получим:

$$\mu = \int_\alpha \mu_\alpha d\lambda(\alpha)$$

Все μ_α инвариантны: для любого измеримого $A \subset X$

$$\mu_\alpha(g^{-1}A) = \pi_\alpha(P^{-1}(g^{-1}A)) = \pi_\alpha(\{(x,y) : g(x) \in A\}) =$$
$$= \pi_\alpha(\{(x,y) : (g(x), g(y)) \in P^{-1}(A)\}) =$$
$$= \pi_\alpha(g^{-1}(P^{-1}(A))) = \pi_\alpha(P^{-1}(A)) = \mu_\alpha(A)$$

Используем тот факт, что эргодическая мера — это экстремальная точка множества всех инвариантных мер. μ экстремальна, поэтому $\lambda(\{\alpha : \mu_\alpha = \mu\}) = 1$. Точно таким же рассуждением это утверждение можно получить для ν и проекций на Y. Отсюда получаем, что для почти всех α π_α — транспортные планы.

Обозначим через $Cost(\pi)$ значение функционала Монжа-Канторовича на π: $Cost(\pi) = \int_{X \times Y} c(x,y) d\pi$. Если π оптимальна, то не существует таких α, что $Cost(\pi_\alpha) < Cost(\pi)$. Следовательно $\lambda(\{\alpha : Cost(\pi_\alpha) < Cost(\pi)\}) = 0$. Также верно, что $\lambda(\{\alpha : Cost(\pi_\alpha) > Cost(\pi)\}) = 0$. Действительно, представление меры π как смеси: $\lambda(\{\alpha : Cost(\pi_\alpha) > Cost(\pi)\}) > 0$ влечёт $\lambda(\{\alpha : Cost(\pi_\alpha) < Cost(\pi)\}) > 0$, но последнее недопустимо.

Получаем, что $\lambda(\{\alpha : Cost(\pi_\alpha) = Cost(\pi)\}) = 1$, и, следовательно, для почти всех α π_α является оптимальным транспортным планом в классе инвариантных. □

Имеет место также следующее утверждение:

Предложение 4.4. *Пусть μ - эргодическая мера на X относительно биективного действия g, π — инвариантная мера на $X \times Y$, такая, что её проекция на X равна μ. Тогда множество B точек $x \in X$, таких, что носитель условной меры π_x состоит из одной точки, имеет меру 1 или 0 (по мере μ).*

Доказательство. От противного. Пусть мера B отлична от единицы и нуля. Докажем, что B инвариантно, и получим противоречие с эргодичностью μ. Действительно, если $x \in B$, то $g^{-1}(x) \in B$, иначе действие g не было бы биекцией. □

4.2 Задача Монжа для стационарных мер

В этом разделе мы докажем достаточное условие для существования оптимальной транспортировки для некоторого класса стационарных мер. Более точно, мы будем рассматривать следующую модель. В этой главе мы будет идентифицировать пространство $\mathbb{R}^\infty$ с $\mathbb{R}^\mathbb{Z}$.

Положим:

$$E_n = \mathrm{span}\{e_i, -n \le i \le n\}$$

и

$$E_{m,n} = \mathrm{span}\{e_i, e_j, -n \le i < -m, m < j \le n\}.$$

Соответствующие ортогональные проекции будем обозначать через $P_n, P_{m,n}$ соответственно.

Пусть $\sigma_n : E_n \to E_n$ — циклический сдвиг

$$\sigma_n : (x_{-n}, x_{-(n-1)}, \cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots, x_n) \to (x_n, x_{-n}, x_{-(n-1)}, \cdots, x_{-1}, x_0, \cdots, x_{n-1}).$$

В пределе при $n \to \infty$ мы получаем стандартный сдвиг Бернулли

$$\sigma : x = (x_i) \to (x_{i-1}).$$

Всюду в этой главе мы будем предполагать следующее:

1) Мера μ — это слабый предел

$$\mu = \lim_n \mu_n,$$

где каждая μ_n — это σ_n-инвариантная мера на E_n со всюду положительной плотностью относительно меры Лебега и конечными вторыми моментами;

2) Для любых $m < n$ существует вероятностная мера $\mu_{m,n}$ на $E_{m,n}$ такая, что относительная энтропия (расстояние Кульбака-Лейбнера) между $\mu_m \times \mu_{m,n}$ и μ_n равномерно ограничена по m, n:

$$\int \log\Bigl(\frac{d\mu_n}{d(\mu_m \times \mu_{m,n})}\Bigr) d\mu_n < C$$

с C независимой от m, n;

3) Для любой степени l циклического сдвига σ_m мера μ имеет плотность относительно $\mu \circ (\sigma_m^l)^{-1}$. Более того,

$$e^{u_{m,l}} = \frac{d\mu}{d\mu \circ (\sigma_m^l)^{-1}}$$

удовлетворяет $\sup_{m,l} \|e^{u_{m,l}}\|_{L^{2+\delta}(\mu)} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$;

4) Все μ_n абсолютно непрерывны относительно $\mu \circ P_n^{-1}$: $\mu_n = \rho_n \cdot \mu \circ P_n^{-1}$ и, в добавок,

$$\sup_n \int \rho_n^{2+\delta}\, d\mu < \infty$$

для некоторого $\delta > 0$.

Замечание 4.5. Заметим, что 1) + 4) влекут сходимость $\{\mu_n\}$ в сильном смысле. Более точно $\lim_n \int \varphi\, d\mu_n = \int \varphi\, d\mu$ для любого цилиндрического $\varphi \in L^2(\mu)$. Действительно, возьмём непрерывную ограниченную цилиндрическую функцию $\tilde{\varphi}$ такую, что $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{L^2(\mu)} < \varepsilon$. Имеем $\lim_n \int \varphi\, d\mu_n = \lim_n \int (\varphi - \tilde{\varphi})\, d\mu_n + \int \tilde{\varphi}\, d\mu$. Утверждение будет следовать из оценки:

$$\Bigl(\int |\varphi - \tilde{\varphi}|\, d\mu_n\Bigr)^2 \le \int (\varphi - \tilde{\varphi})^2\, d\mu \cdot \int \rho_n^2\, d\mu \le (\sup_n \int \rho_n^2\, d\mu)\varepsilon^2$$

Замечание 4.6. Идея доказательства теоремы 4.7 уже использовалась при доказательстве Теоремы 3.5. С помощью неравенства Талаграна и инвариантности мер доказывается L^2-сходимость конечномерных приближений. Однако доказательство 4.7 получается более длинным из-за технической сложности: проекции стационарных мер не инвариантны относительно циклических сдвигов.

Теорема 4.7. *Пусть μ — вероятностная мера, удовлетворяющая условиям 1)-4). Тогда существует оптимальное транспортное отображение, переводящее меру μ в стандартную гауссовскую меру на $\mathbb{R}^\infty$.*

Доказательство. Будем рассматривать n-мерную оптимальную транспортировку T_n отображающую μ_n в стандартную n-мерную Гауссовскую меру γ_n. Из σ_n-инвариантности μ_n и γ_n следует, что отображение T_n циклически инвариантно:

$$\langle T_n \circ \sigma_n, e_i \rangle = \langle T_n, e_{i-1} \rangle$$

(используем соглашение, что $e_{n+1} = e_{-n}, e_{-n-1} = e_n$).

Зафиксируем пару чисел m, n, таких что $n > m$. Пусть $T_{m,n}$ — это оптимальная транспортировка из $\mu_{m,n}$ в стандартную гауссовскую меру на $E_{m,n}$.

Продолжим T_m на $\mathbb{R}^n$ следующим способом:

$$T_m(x) = T_m(P_m x) + T_{m,n}(P_{m,n} x).$$

Ясно, что T_m отображает $\mu_m \times \mu_{m,n}$ в стандартную гауссовскую меру на E_n. Применяя 1 к паре отображений T_m, T_n, получаем

$$\frac{1}{2} \int \|T_n - T_m\|^2 d\mu_n \leq \int \log\Big(\frac{d\mu_n}{d(\mu_m \times \mu_{m,n})}\Big) d\mu_n. \tag{6}$$

Так

$$\sum_{i=-m}^{m} \int \langle T_n - T_m, e_i \rangle^2 \; d\mu_n \leq C \tag{7}$$

для всех m, n, $m < n$.

Заметим, что для каждого i можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность из последовательности мер (зарядов) $\{\langle T_n, e_i\rangle \cdot \mu_n\}$. Действительно, для каждого компактного множества K

$$\Bigl(\int_{K^c} |\langle T_n, e_i\rangle| d\mu_n\Bigr)^2 \le \int |\langle T_n, e_i\rangle|^2 d\mu_n \cdot \mu_n(K^c) = \int x_i^2 \ d\gamma \cdot \mu_n(K^c).$$

Из того, что $\{\mu_n\}$ обладают свойством концентрации, тем же свойством обладают $|\langle T_n, e_i\rangle| \cdot \mu_n$. Заметим также, что для любых непрерывных f

$$\lim_n \Bigl(\int f |\langle T_n, e_i\rangle| d\mu_n\Bigr)^2 \le \int x_i^2 \ d\gamma \cdot \int f^2 d\mu.$$

Из этого следует, что любая предельная точка $\{\langle T_n, e_i\rangle \cdot \mu_n\}$ абсолютно непрерывна относительно μ. Применяя диагональный метод и переходя к подпоследовательности получаем, что сходимость имеет место одновременно для всех i. Следовательно существует подпоследовательность $\{n_k\}$ и измеримое отображение T со значениями в $\mathbb{R}^\infty$, такое что

$$\langle T_{n_k}, e_i\rangle \cdot \mu_{n_k} \to \langle T, e_i\rangle \cdot \mu$$

слабо в смысле мер для каждого i. Легко проверить, что стандартное свойство L^2-слабой сходимости имеется также в случае:

$$\int \langle T, e_i\rangle^2 d\mu \le \underline{\lim}_k \int \langle T_{n_k}, e_i\rangle^2 d\mu_n = \int x_i^2 \ d\gamma = 1 \tag{8}$$

Наконец, мы переходим к пределу (7) (здесь мы применяем (8) и замечание 4.5) и получаем

$$\sum_{i=-m}^{m} \int \langle T - T_m, e_i\rangle^2 \ d\mu \le C. \tag{9}$$

Заметим, что T коммутирует со сдвигом σ: $\langle T \circ \sigma, e_i\rangle = \langle T, e_{i-1}\rangle$. Действительно, для любой ограниченной цилиндрической φ имеется

$$\int \varphi \langle T_n, e_{i-1}\rangle d\mu_n = \int \varphi \langle T_n(\sigma_n), e_i\rangle d\mu_n = \int \varphi(\sigma_n^{-1}) \langle T_n, e_i\rangle d\mu_n = \int \varphi(\sigma^{-1}) \langle T_n, e_i\rangle d\mu_n.$$

Здесь мы используем, что $\varphi(\sigma_n^{-1}) = \varphi(\sigma^{-1})$ для достаточно больших значений n и цилиндрическую инвариантность T_n. Переходя к пределу в n_k-подпоследовательности получаем

$$\int \varphi\langle T, e_{i-1}\rangle d\mu = \int \varphi(\sigma^{-1})\langle T, e_i\rangle d\mu = \int \varphi\langle T\circ\sigma, e_i\rangle d\mu.$$

Следовательно $T \circ \sigma = \sigma \circ T$.

Используя все инвариантности, мы получаем, что

$$\begin{aligned}\int \langle T - T_m, e_i\rangle^2 \, d\mu &= \int \langle T\circ\sigma^l - T_m\circ\sigma^l_m, e_{i+l}\rangle^2 d\mu \\ &= \int \langle T\circ\sigma^l\circ(\sigma^l_m)^{-1} - T_m, e_{i+l}\rangle^2 e^{-u_{m,l}} d\mu.\end{aligned}$$

(для $i, i+l \in [-m, m]$). Используя условие 3) мы получаем с помощью неравенства Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned}C\int \langle T - T_m, e_i\rangle^2 \, d\mu &\geq \int e^{u_{m,l}} \, d\mu \int \langle T\circ\sigma^l\circ(\sigma^l_m)^{-1} - T_m, e_{i+l}\rangle^2 e^{-u_{m,l}} d\mu \\ &\geq \Bigl(\int |\langle T\circ\sigma^l\circ(\sigma^l_m)^{-1} - T_m, e_{i+l}\rangle| d\mu\Bigr)^2.\end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что $\lim_m \sigma^l\circ(\sigma^l_m)^{-1}(x) = x$ для любого x. Покажем, что

$$\langle T\circ\sigma^l\circ(\sigma^l_m)^{-1}, e_i\rangle \to \langle T, e_i\rangle$$

in $L^1(\mu)$. Рассмотрим непрерывное ограниченное отображение $\tilde{T}_i$, такое, что $\int |\tilde{T}_i - \langle T, e_i\rangle|^2 \, d\mu \leq \varepsilon^2$. Тогда

$$\begin{aligned}\int |\langle T\circ\sigma^l\circ(\sigma^l_m)^{-1} - T, e_i\rangle| \, d\mu &\leq \int |\tilde{T}_i\circ\sigma^l\circ(\sigma^l_m)^{-1} - \tilde{T}_i| \, d\mu \\ &+ \int |\langle T\circ\sigma^l\circ(\sigma^l_m)^{-1}, e_i\rangle - \tilde{T}_i\circ\sigma^l\circ(\sigma^l_m)^{-1}| \, d\mu + \int |\langle T, e_i\rangle - \tilde{T}_i| \, d\mu.\end{aligned}$$

Нужно показать, что первый из интегралов в правой части сходится к нулю при $m \to \infty$, а другие достаточно малы (порядка ε). Мы докажем только первое из утверждений, второе можно получить аналогичным образом.

Во-первых, $\lim_m \tilde{T}_i \circ \sigma^l \circ (\sigma^l_m)^{-1} = \tilde{T}_i$ поточечно. Достаточно показать, что $\sup_m \int |\tilde{T}_i \circ \sigma^l \circ (\sigma^l_m)^{-1}|^{1+\varepsilon}\, d\mu < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Отсюда легко получается необходимая оценка:

$$\int |\tilde{T}_i \circ \sigma^l \circ (\sigma^l_m)^{-1}|^{1+\varepsilon} d\mu = \int |\tilde{T}_i \circ \sigma^l|^{1+\varepsilon} e^{u_{m,l}} d\mu \le \|\tilde{T}_i\|_{L^2(\mu)} \|e^{u_{m,l}}\|_{L^{2/(1-\varepsilon)}(\mu)} \le C,$$

где C не зависит от m, а $2/(1-\varepsilon) = 2+\delta$.

Применяя сходимость $\langle T \circ \sigma^l \circ (\sigma^l_m)^{-1}, e_k\rangle \to \langle T, e_k\rangle$ in $L^1(\mu)$ мы получаем из (10) и (9) что для некоторого C, независящего от m, l

$$C \cdot \underline{\lim}_m \int \langle T - T_m, e_i\rangle^2 \, d\mu \ge \underline{\lim}_m \Bigl(\int |\langle T - T_m, e_{i+l}\rangle| d\mu\Bigr)^2.$$

В частности, фиксируя некоторый i_0 и положив $l = i_0 - i$, получаем

$$\infty > C \cdot \underline{\lim}_m \sum_{i=-m}^{m} \int \langle T - T_m, e_i\rangle^2 \, d\mu \ge \underline{\lim}_m m \cdot \Bigl(\int |\langle T - T_m, e_{i_0}\rangle| d\mu\Bigr)^2.$$

Следовательно, можно извлечь подпоследовательность m_k, такую, что $\langle T_{m_k}, e_i\rangle \to \langle T, e_i\rangle$ in $L^1(\mu)$ для любого i (В дальнейшем мы будем обозначать эту подпоследовательность просто как $\{T_n\}$). Более того, из (7) следует, что имеется сходимость в $L^{2-\varepsilon}(\mu)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Остаётся показать, что T переводит μ в γ. Зафиксируем гладкую Липшицеву функцию f, которая зависит от конечного числа координат $(x_{-k}, \cdots, x_k)$. Используя формулу замены переменных для каждого $n \ge k$, получаем

$$\int f(T_n)\, d\mu_n = \int f \, d\gamma.$$

С другой стороны, используя аппроксимацию $P_k T$ отображая $\tilde{T}_\varepsilon : \mathbb{R}^\infty \to P_k(\mathbb{R}^\infty)$ так, что $\|P_k(T) - \tilde{T}_\varepsilon\|_{L^{(2+\delta)^*}(\mu)} \le \varepsilon$ и любое $\langle \tilde{T}_\varepsilon, e_j\rangle$ гладко и ограничено для любого $-k \le j \le k$. Имеем

$$\begin{aligned} \Bigl|\int f(T_n)\, d\mu_n - \int f(\tilde{T}_\varepsilon)\, d\mu_n\Bigr| &\le \|f\|_{Lip} \int \|P_k(T_n) - \tilde{T}_\varepsilon\| \, d\mu_n \\ &\le C\|f\|_{Lip}\Bigl(\|P_k(T_n - T)\|_{L^{(2+\delta)^*}(\mu)} + \|P_k(T) - \tilde{T}_\varepsilon\|_{L^{(2+\delta)^*}(\mu)}\Bigr), \end{aligned}$$

где $C = \sup_n \|\rho_n\|_{L^{(2+\delta)^*}(\mu)}$, $\rho_n = \frac{d\mu_n}{d\mu\circ P_n^{-1}}$. Применяя $L^{(2+\delta)^*}(\mu)$-сходимость $\langle T_n, e_i\rangle \to \langle T, e_i\rangle$, гладкость $f(\tilde{T}_\varepsilon)$, и слабую сходимость $\mu_n \to \mu$, мы переходим к $\limsup$ в неравенстве. Имеем

$$\overline{\lim}_n \Big| \int f(T_n)\ d\mu_n - \int f(\tilde{T}_\varepsilon)\ d\mu \Big| \leq \varepsilon C \|f\|_{Lip}.$$

Выбирая соответствующую подпоследовательность $\tilde{T}_\varepsilon \to T$ получаем $\int f(T)\ d\mu = \lim_n \int f(T_n)\ d\mu_n = \int f\ d\gamma$. Доказательство завершено. $\square$

5 Двойственность Канторовича для мер с компактной группой симметрий

В этой главе рассматриваются меры, инвариантные относительно действий компактных групп. Полученные результаты не используются при изучении бесконечномерных транспортировок, но представляют самостоятельный интерес.

Пусть X, Y — компактные польские пространства, G — компактная группа с непрерывными действиями L^X и L^Y соответственно на пространствах X и Y. Действие L на пространстве $X \times Y$ задаётся тождеством:

$$L_g(X \times Y) = L_g^X(X) \times L_g^Y(Y).$$

Пусть μ и ν — борелевские вероятностные меры, инвариантные относительно действий L^X и L^Y соответственно: $\mu, \nu \in Inv_L \iff \mu \circ (L_g^X)^{-1} = \mu, \nu \circ (L_g^Y)^{-1} = \nu$. Зафиксируем неотрицательную и полунепрерывную снизу функцию стоимости $c : X \times Y \to \mathbb{R}$. Обозначим через Π множество всех неотрицательных борелевских вероятностных мер на $X \times Y$ со свойством $\pi \in \Pi \iff \pi = \mu \circ (Pr_X)^{-1}$ и $\pi \circ (Pr_Y)^{-1} = \nu$.

Пространство L_G-инвариантных непрерывных функций V_L — это векторное подпространство пространства C_b, значит существует фактор-пространство $W_L = C_b/V_L$, состоящее из функций со свойством: $\int_{g \in G} (\hat{u} \circ L_g^{-1}) d\chi(g) = 0$, где $d\chi(g)$ — это нормированная мера Хаара на G. Несложно проверить, что $C_b = V_L \oplus W_L$, и мы можем однозначно разложить каждую функцию u из $C_b(X \times Y)$ в сумму L_G-инвариантной функции $\bar{u}$ из V_L и функции $\hat{u}$ из W_L:

$$u = \bar{u} + \hat{u}$$

Ясно, что $\bar{u} = \int_{g \in G} (u \circ L_g^{-1}) d\chi(g) = Pr_{V_L}(u)$, и что это непрерывная проекция u на V_L.

Следующая теорема обобщает хорошо известное понятие двойственности Канторовича на случай ограничения G-инвариантными мерами.

Теорема 5.1. *В описанных выше обозначениях выполняется равенство:*

$$\inf_{\pi \in \Pi \cap Inv_L} \int_{X \times Y} c(x,y) d\pi = \sup_{\bar{\phi} + \bar{\psi} \le \bar{c}} \left(\int_X \bar{\phi}(x) d\mu + \int_Y \bar{\psi}(y) d\nu \right).$$

Доказательство. Доказательство основывается на теореме двойственности Фенхеля-Рокфеллара.

Теорема 5.2. (Fenchel-Rockafellar duality) *Пусть X — польское пространство, Θ и Ω — выпуклые функционалы из $C_b(X)$ в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Предположим, что Θ непрерывна в некоторой точке. Пусть Θ^* и Ω^* — преобразования Лежандра-Фенхеля от Θ и Ω, лежащие в пространстве мер Радона $M := (C_b)^*$ на X и определяемые следующим образом:*

$$\Theta^*(\pi) = \sup_{u \in C_b} \left(\int_X u d\pi - \Theta(u) \right), \quad \Omega^*(\pi) = \sup_{u \in C_b} \left(\int_X u d\pi - \Omega(u) \right).$$

Тогда выполняется следующее двойственное соотношение:

$$\inf_{u \in C_b} (\Theta(u) + \Omega(u)) = \sup_{\pi \in M} (-\Theta^*(-\pi^*) - \Omega^*(\pi^*)) \tag{11}$$

Положим:

$$\Theta(u) = \begin{cases} 0, & \text{if } u(x,y) \geq -c(x,y) \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\Omega(u) = \begin{cases} \int_X \phi(x) d\mu + \int_Y \psi(y) d\nu, & \text{if } u(x,y) = \phi(x) + \psi(y) + \hat{\omega}(x,y) \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

где $\hat{\omega}(x,y)$ — это функция из $W_L(X \times Y)$. Можно проверить, что оба функционала выпуклы, и Θ непрерывен в точке $u = 0$. Найдём их преобразования Лежандра-Фенхеля:

$$\Theta^*(-\pi) = \sup_{u \in C_b(X \times Y)} \left(- \int_{X \times Y} u(x,y) d\pi;\ u(x,y) \geq -c(x,y) \right).$$

Если π не является неотрицательной мерой, то существует такая функция $v \in C_b(X \times Y)$, что $\int v d\pi > 0$. Тогда выберем $u = \lambda v$, $\lambda \to \infty$ и увидим, что супремум рассматриваемого функционала равен $+\infty$. В противном случае, когда π неотрицательна, ясно, что супремум будет равен $\int c d\pi$. Получаем:

$$\Theta^*(-\pi) = \begin{cases} \int_{X \times Y} c(x,y) d\pi, & \text{if } \pi \in M^+(X \times Y) \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\Omega^*(\pi) = \sup_{u \in C_b(X\times Y)} \Big(\int_{X\times Y} u(x,y) d\pi - \int_X \phi(x) d\mu - \int_Y \psi(y) d\nu,$$

$$u(x,y) = \phi(x) + \psi(y) + \hat{\omega}(x,y) \Big) =$$

$$= \sup_{\psi,\phi,\hat{\omega}} \left(\int_{X\times Y} (\psi + \phi) d\pi + \int_{X\times Y} \hat{\omega}(x,y) d\pi - \int_X \phi(x) d\mu - \int_Y \psi(y) d\nu \right).$$

Если $\pi \notin \Pi$, то существует $\phi_1, \psi_1 \in C_b(X \times Y)$, $\hat{\omega}_1 \in W_L(X \times Y)$ такой, что $\int_{X\times Y} (\psi_1 + \phi_1) d\pi - \int_X \phi_1(x) d\mu - \int_Y \psi_1(y) d\nu > 0$ и $\int_{X\times Y} \hat{\omega}_1 d\pi \geq 0$. Тогда выбор $\phi = \lambda\phi_1$, $\psi = \lambda\psi_1$ $\lambda \to \infty$ показывает, что супремум Ω^* равен $+\infty$. Аналогично, если $\pi \in \Pi$, но $\pi \notin Inv_L$, то существует $\hat{\omega}_1 \in W_L(X \times Y)$, такая, что $\int_{X\times Y} \hat{\omega}_1 d\pi > 0$, а остальные члены зануляются. И снова выбором $\hat{\omega} = \lambda\hat{\omega}_1$, $\lambda \to \infty$ можно показать, что супремум равен $+\infty$. Очевидно, что в последнем не рассмотренном случае: $\pi \in \Pi \cap Inv_L$ супремум Ω^* равен 0. В результате:

$$\Omega^*(\pi) = \begin{cases} 0, & \text{if } \pi \in \Pi \cap Inv_L \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вычислим правую часть (11):

$$\sup_{\pi \in M} (-\Theta^*(-\pi^*) - \Omega^*(\pi^*)) = \sup_{\pi \in \Pi \cap Inv_L} \int_{X\times Y} -c(x,y) d\pi =$$

$$= - \inf_{\pi \in \Pi \cap Inv_L} \int_{X\times Y} c(x,y) d\pi.$$

В левой части утверждения о двойственности получаем:

$$\inf_{u \in C_b} (\Theta(u) + \Omega(u)) =$$

$$= \inf_{\phi,\psi,\hat{\omega}} \left(\int_X \phi(x) d\mu + \int_Y \psi(y) d\nu;\ \phi(x) + \psi(y) + \hat{\omega}(x,y) \geq -c(x,y) \right) =$$

$$= - \sup_{\phi,\psi,\hat{\omega}} \left(\int_X \phi(x) d\mu + \int_Y \psi(y) d\nu;\ \phi(x) + \psi(y) + \hat{\omega}(x,y) \leq c(x,y) \right).$$

Используем тот факт, что μ и ν - это инвариантные меры относительно действий L^X и L^Y группы G. Это влечёт $\int_X \phi(x) d\mu + \int_Y \psi(y) d\nu = \int_X \bar{\phi}(x) d\mu +$

$\int_Y \bar\psi(y)d\nu$. Так, мы имеем:

$$-\sup_{\phi,\psi,\hat\omega}\left(\int_X \phi(x)d\mu+\int_Y \psi(y)d\nu;\ \bar\phi(x)+\bar\psi(y)+\hat\phi+\hat\psi+\hat\omega\le\bar c+\hat c\right)=$$
$$=-\sup_{\bar\phi,\bar\psi,\hat\phi,\hat\psi,\hat\omega}\left(\int_X \bar\phi(x)d\mu+\int_Y \bar\psi(y)d\nu;\ \bar\phi(x)+\bar\psi(y)\le\bar c+(\hat c-\hat\omega-\hat\phi-\hat\psi)\right)$$

Заметим, что максимизируемый функционал не зависит от W_L-части ϕ и ψ, поэтому мы можем выбирать $\hat\phi$ и $\hat\psi$ произвольно. Следовательно $\tilde c := \hat c-\hat\omega-\hat\phi-\hat\psi$ - это просто произвольные функции из W_L. Неравенство $\bar\phi(x)+\bar\psi(y)\le\bar c+\tilde c$ выполняется поточечно, поэтому мы можем подействовать на него элементом $g\in G$:

$$(\bar\phi\circ L_g)(x)+(\bar\psi\circ L_g)(y)\le(\bar c\circ L_g+\tilde c\circ L_g)(x,y)\iff$$
$$\bar\phi(x)+\bar\psi(y)\le\left(\bar c+\tilde c\circ L_g\right)(x,y)$$

для любых $x,y\in X\times Y$. Так:

$$\bar\phi(x)\,+\,\bar\psi(y)\ \le\ (\bar c+\tilde c)(x,y)\quad\iff\quad\bar\phi(x)\,+\,\bar\psi(y)\ \le\ \left(\bar c+\inf_{g\in G}\left(\tilde c\circ L_g\right)\right)(x,y)$$

Из определения W_L немедленно следует, что $\inf_{g\in G}(\tilde c\circ L_g)\le 0$. Значит супремум достигается на $\tilde c\equiv 0$ ($\hat\omega=\hat c$, $\phi=\bar\phi$, $\psi=\bar\psi$). В итоге мы получаем:

$$-\sup_{\bar\phi,\bar\psi\in V_L,\tilde c\in W_L}\left(\int_X \bar\phi(x)d\mu+\int_Y \bar\psi(y)d\nu;\ \bar\phi(x)+\bar\psi(y)\le\bar c+\tilde c\right)=$$
$$-\sup_{\bar\phi+\bar\psi\le\bar c}\left(\int_X \bar\phi(x)d\mu+\int_Y \bar\psi(y)d\nu\right)$$

Собирая всё вместе, из равенства (11) мы получаем требуемое утверждение.

□

Существует близкий результат, изложенный в работе [11]. Его авторы сформулировали теорему двойственности Канторовича в классе мер, инвариантных относительно непрерывных действий группы $\mathbb{Z}$. Наиболее общий из их результатов заключается в следующем. Пусть X, Y — два компактных пространства. Обозначим через $T : X\times Y\to X\times Y$ действие единицы группы $\mathbb{Z}$, через $T_1 : X \times Y \to X$, $T_2 : X \times Y \to Y$ — действия, индуцированные формулой $T(x, y) = (T_1(x, y), T_2(x, y))$. Пусть $c : X \times Y \to [0, \infty]$, $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\psi : Y \to \mathbb{R}$ — некоторые непрерывные функции. Тогда

$$\begin{aligned} \inf\{\int c d\pi : \pi \in \Pi(T)\} = \\ sup\{\alpha : \alpha + \varphi(x) - \varphi(T_1(x, y)) + \psi(y) - \psi(T_2(x, y)) \leq c(x, y), \\ \forall (x, y) \in X \times Y\} \end{aligned}$$

6 Открытые вопросы

Как следует из изложенного выше, теория оптимальной транспортировки на бесконечномерных пространствах всё ещё очень далека от состояния завершённости. Мы попытались сформулировать правильную постановку задачи Монжа-Канторовича для случая инвариантных (симметричных или стационарных) мер.

Для симметричных мер оказалось возможным найти явный вид оптимальной транспортировки в случае, если она есть, и сформулировать не слишком ограничительное достаточное условие её существования. Однако ряд вопросов, в том числе: является ли это достаточное условие необходимым, остались пока открытыми.

В классе стационарных мер также существует хорошее достаточное условие существования оптимальной транспортировки, но вместо описания её вида есть только ряд нескольких утверждений общего характера. Можно ли использовать сферическую симметричность для формулировки лучшего достаточного условия - также пока не ясно.

В работе была доказана теорема двойственности Канторовича для мер, инвариантных относительно компактной группы симметрий. Этот факт имеет самостоятельный интерес, но мало применим к основной проблеме. Возможно, в будущем его удастся обобщить на более широкий класс групп.

И, наконец, огромное поле для исследований открывается, если вместо мер на пространстве $\mathbb{R}$ рассматривать меры на пространствах функций. Для них также существуют теоремы о декомпозиции при наличии разного рода инвариантностей, но при этом остаётся вопрос о правильной формулировке задачи Монжа-Канторовича.

Список литературы

[1] Ambrosio L., Gigli N., Savaré G., Gradient flows in metric spaces and in the Wasserstein spaces of probability measures, Birkhäuser, 2008.

[2] Albeverio S., Kondratiev Yu.G., Röckner M., Tsikalenko T.V., A priori estimates for symmetrizing measures and their applications to Gibbs states, Journ. of Func. Anal., 171, 2000, 366–400.

[3] Bogachev V.I., Measure theory. V. 1,2. Springer, Berlin – New York, 2007.

[4] Bogachev V.I., Kolesnikov A.V., On the Monge–Ampère equation in infinite dimensions, Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Related Topics, 8(4), 2005, 547–572.

[5] Bogachev V.I., Kolesnikov A.V., Sobolev regularity for the Monge-Ampere equation in the Wiener space. arXiv: 1110.1822. (to appear in Kyoto Jour. Math.).

[6] Bogachev V.I., Kolesnikov A.V., The Monge-Kantorovich problem: achievements, connections, and perspectives, Russian Mathematical Surveys, 67(5), 2012, 785–890.

[7] Cavallletti F., The Monge problem in Wiener Space. Calcul. of Var.and PDE's , 45(1-2), 2012, 101–124

[8] G. Contreras, A. O. Lopes, E. R. Oliveira, Ergodic Transport Theory, periodic maximizing probabilities and the twist condition, http://arxiv.org/pdf/1103.0816.pdf, 2011

[9] Decreusefond L., Wasserstein distance on configuration space, Potential Anal., 28(3), 2008, 283–300.

[10] Artur O. Lopes, Elismar R. Oliveira, Philippe Thieullen, The Dual Potential, the involution kernel and Transport in Ergodic Optimization, http://arxiv.org/pdf/1111.0281.pdf, 2013

[11] Artur O. Lopes, Jairo K. Mengue, Duality Theorems in Ergodic Transport, http://arxiv.org/pdf/1201.5301v1.pdf, 2012

[12] Olav Kallenberg, Probabilistic Symmetries and Invariance Principles, Springer, 2005

[13] Kolesnikov A.V., Convexity inequalities and optimal transport of infinite-dimensional measures, J. Math. Pures Appl. (9), 83(11), 2004, 1373–1404.

[14] Kolesnikov A.V., On Sobolev regularity of mass transport and transportation inequalities, Theory of Probability and its Applications, to appear. Translated from Teor. Veroyatnost. i Primenen., 57(2), 2012, 296–321.

[15] Kolesnikov A.V., Mass transportation and contractions, MIPT Proc. 2(4), 2010, 90–99.

[16] Kolesnikov A.V., Röckner M., On transport equation in infinite dimensions (work in progress).

[17] Alexander V. Kolesnikov, Danila A. Zaev, Optimal transportation of processes with infinite Kantorovich distance. Independence and symmetry (work in progress).

[18] Fang S., Nolot V., Sobolev estimates for optimal transport maps on Gaussian spaces, arxiv: 1207.4907.

[19] Fang S., Shao J. Optimal transport maps for Monge-Kantorovich problem on loop groups. Journ. of Func. Anal., 248(1), 2007, 225–257.

[20] Feyel D., Üstünel A.S., Monge-Kantorovich measure transportation and Monge-Ampère equation on Wiener space. Prob. Theory and Related Fields, 128, 2004, 347–385.

[21] Villani C., Topics in Optimal Transportation, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2003.

[22] Peter Walters, An Introduction to Ergodic Theory (Graduate Texts in Mathematics), Springer, 2000