Национальный Исследовательский Университет – Высшая Школа Экономики

Факультет математики

“Количество вершин многогранников Гельфанда-Цетлина”.

Кузнецов Данил Сергеевич

Группа 4.11.2

Научный руководитель Кириченко Валентина Алексеевна

Москва 2013

Аннотация

Эта работа сфокусирована на получении формул для вычисления значений количества вершин многогранников Гельфанда-Цетлина. Данная работа исследует многогранники, имеющие 3 и 4 компоненты связности. При первичном рассмотрении предметной области была разработана вспомогательная программа, вычисляющая количество вершин любого многогранника Гельфанда-Цетлина с конкретным разбиением. Были рассмотрены конкретные последовательности многогранников, значения количеств вершин которых были обработаны с помощью Онлайн Энциклопедии Целочисленных Последовательностей. Полученные формулы были доказаны по индукции.

Содержание

1 Определения

Возьмем n целых чисел λ_i, таких что $\lambda_i \leqslant \lambda_{i+1}$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$. Многогранник Гельфанда-Цетлина P_λ - это выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$, где $d = n(n-1)/2$, определенный соотношениями

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & \ldots & & \lambda_n \\
& x_{1,1} & & x_{1,2} & & \ldots & & x_{1,n-1} & \\
& & x_{2,1} & & \ldots & & x_{2,n-2} & & \\
& & & \ddots & \ldots & & & & \\
& & & x_{n-2,1} & & x_{n-2,2} & & & \\
& & & & x_{n-1,1} & & & &
\end{array}
$$

где $(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n-1}; x_{2,1}, \ldots, x_{2,n-2}; \ldots; x_{n-2,1}, x_{n-2,2}; x_{n-1,1})$ - координаты в $\mathbb{R}^d$ и запись

$$
\begin{array}{ccc}
a & & b \\
& c &
\end{array}
$$

означает $a \leqslant c \leqslant b$.

Каждому разбиению p сопоставим многогранник Гельфанда-Цетлина $GZ(p)$. Так, разбиению $0^k 1^l 2^m$ (которое подразумевает под собой k нулей, l единиц и m двоек) будет соответствовать многогранник $GZ(0^k 1^l 2^m)$. Будем использовать обозначение $V(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ для количества вершин многогранника Гельфанда-Цетлина $GZ(0_1^\alpha 1_1^\alpha \ldots n_n^\alpha)$.

Мы хотим иметь возможность посчитать количество вершин многогранников Гельфанда-Цетлина для произвольного фиксированного разбиения p. Я написал программу, с помощью которой можно это сделать.

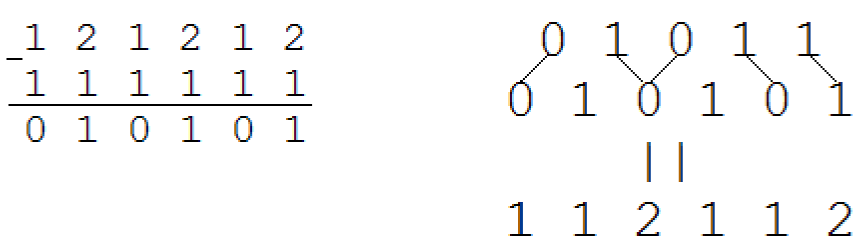
2 Вспомогательная программа

Для любого разбиения p существует рекуррентное соотношение, выражающее количество вершин соответствующего многогранника через многогранники с разбиением, содержащим на одно число меньше. Выведем это соотношение для произвольного разбиения и посмотрим, как с помощью него работает программа. Пусть $p = 0^{a_0} 1^{a_1} \ldots k^{a_k}$. Исследуем, как будет устроена вторая строка в треугольнике разбиения p. В ней находится по крайней мере $(a_0 - 1)$ нулей, $(a_1 - 1)$ единиц, $(a_l - 1)$ чисел l где $l \leqslant k$, так как они строго определяются первой строкой разбиения:

```
0 0 ... 0 1 1 ... 1 2 2 ... (k-1) k k ... k
 0 ... 0 ? 1 ... 1 ? 2 ... (k-1) ? k ... k
```

Также мы видим, что количество чисел, которые строго не заданы, равно k, то есть на единицу меньше, чем число компонент связности. Назовем каждое такое число "переключателем". Переключатель должен быть равен либо северо-западному соседу в треугольнике разбиения, либо северо-восточному соседу, поэтому у каждого переключателя есть ровно два состояния. Имея k переключателей, получаем, что количество различных вариантов второй строки равно 2^k. Таким образом, количество вершин для многогранника с разбиением p равно сумме 2^k количеств вершин многогранников с разбиениями, определяемыми различными положениями переключателей.

На програмном уровне это реализовано следующим образом. Если переключатель принимает значение северо-западного соседа, ему сопоставляется 0, если северо-восточного - 1. Для каждого положения k переключателей получаем некую двоичную запись, состоящую из k цифр. Имея разбиение p, легко получить разбиение для фиксированного положения переключателей. Сначала для $p = 0^{a_0} 1^{a_1} \dots k^{a_k}$ мы берем $p' = 0^{a_0 - 1} 1^{a_1 - 1} \dots k^{a_k - 1}$, а затем прибавляем единицу к тем степеням a_l, для которых переключатели принимают соответствующее значение. Рисунок может помочь разобраться в схеме($p = 0^1 1^2 2^1 3^2 4^1 5^2$, положения переключателей 01011, полученное разбиение $p_1 = 0^1 1^1 2^2 3^1 4^1 5^2$):



Функция обходит все разбиения, возвращая сумму количеств вершин многогранников Гельфанда-Цетлина, соответствующих разбиениям, полученным для каждого положения переключателей. Для подсчета числа вершин многогранника для разбиения на единицу меньшей размерности функция запускается рекурсивно. Она выполняется до тех пор, пока разбиения не станут тривиальными, для которых число вершин легко считается. Переход к меньшему числу компонент связности происходит, когда любое из чисел разбиения станет нулевой степени.

Несложно заметить, что при довольно больших числах компонент связности в процессе рекурсии будут много раз вычислены одни и те же значения. Для оптимизации работы программы и избавления от ненужных вычислений разработана система кэширования получаемых значений, таким образом, если в ходе работы программы понадобится уже найденное число вершин для какого-то разбиения, вместо повторной калькуляции значение будет взято из памяти.

3 Нахождение некоторых формул для случая одной переменной и их доказательство

3.1 Свойство $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Заметим, что из построения произвольного многогранника Гельфанда-Цетлина следует, что число его вершин $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ симметрично относительно медианы чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то есть $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = V(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$. Поэтому для всех выведенных дальше формул существуют формулы для разбиений, симметрично отраженных относительно медианы.

3.2 V(l,k)

Для начала докажем по индукции формулу для двух компонент связности, она нам понадобится в дальнейшем:

$$V(k, l) = C_{l+k}^{k}.$$

Индукцию будем вести по $l + k$, то есть по размерности разбиения. Заметим, что справедлива рекуррентная формула

$$V(k, l) = V(k-1, l) + V(k, l-1).$$

База индукции - рассмотрим простейшие случаи

$$V(1,1) = C_2^1 = 2,\ V(0,2) = V(2,0) = C_2^2 = 1,$$

для размерности 2 утверждение верно. Пусть оно верно для размерности $p = l + k$:

$$V(l,k) = C_{k+l}^l.$$

Тогда для размерности $p + 1$, используя рекуррентную формулу, имеем:

$$V(l+1,k) = V(l,k) + V(l+1,k-1) = C_{k+l}^l + C_{k+l}^{l+1} = C_{k+l+1}^{l+1},$$

что и требовалось доказать.

3.3 V(1,1,n)

Попробуем найти формулу для последовательности $V(1,1,n)$. Вычислим первые ее элементы при помощи программы. Вот они:

$$7, 16, 30, 50, 77, 112, 156, 210, 275, 352.$$

Используя онлайн-энциклопедию целочисленных последовательностей http://oeis.org, узнаем формулу для первых членов нашей последовательности (заметим, для $n = 0$ она также дает верный результат):

$$V(1,1,n) = \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+6).$$

Докажем ее по индукции для всех n. База индукции у нас уже есть. Пусть для n-ного члена формула верна. Докажем ее для (n+1)-ого члена. Известна рекуррентная формула для количества вершин многогранника Гельфанда-Цетлина с тремя компонентами связности:

$$V(k,l,m) = V(k-1,l,m) + V(k,l-1,m) + V(k,l,m-1) + V(k-1,l+1,m-1).$$

Таким образом, имеем:

$$V(1,1,n+1) = V(1,n+1) + V(1,n+1) + V(1,1,n) + V(2,n).$$

Используя формулу для $V(k,l)$ и предположение индукции, получаем:

$$V(1,1,n+1) = 2C_{n+2}^1 + \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+6) + C_{n+2}^2 =$$
$$2(n+2) + \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+4) + \tfrac{1}{2}(n+2)(n+1) =$$
$$= (n+2)[\tfrac{1}{6}(n+1)(n+6) + 2 + \tfrac{1}{2}(n+1)] = \tfrac{1}{6}(n+2)(n^2+7n+6+12+3n+3) =$$
$$\tfrac{1}{6}(n+2)(n^2+10n+21) = \tfrac{1}{6}(n+2)(n+3)(n+7),$$

что и требовалось доказать.

3.4 V(1,2,n)

Рассмотрим формулу для $V(1,2,n)$. Первые члены этой последовательности $14, 40, 90, 175, 308, 504, 780, 1155, 1650, 2288$. Для них верна формула

$$V(1,2,n) = \tfrac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)(n+6).$$

Докажем ее для всех n. Пусть для некого n она верна. Тогда для $n+1$ имеем:

$$\begin{gathered} V(1,2,n+1) = V(2,n+1) + V(1,1,n+1) + V(1,2,n) + V(3,n) = \\ = C_{n+3}^2 + \tfrac{1}{6}(n+2)(n+3)(n+6) + \tfrac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)(n+6) + C_{n+3}^3 = \\ = \tfrac{1}{2}(n+2)(n+3) + \tfrac{1}{6}(n+2)(n+3)(n+6) + \tfrac{1}{12}(n+2)(n+3)(n+4)(n+ \\ 7) + \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) = \\ = \tfrac{1}{12}(n+2)(n+3)[(n+1)(n+6) + 6 + 2(n+7) + 2(n+1)] = \\ \tfrac{1}{12}(n+2)(n+3)(n^2+7n+6+6+2n+14+2n+2) = \\ \tfrac{1}{12}(n+2)(n+3)(n^2+11n+28) = \tfrac{1}{12}(n+2)(n+3)(n+4)(n+7), \end{gathered}$$

что и требовалось доказать.

3.5 V(2,1,n)

Теперь так же выведем и докажем формулу для $V(2,1,n)$. Первые члены этой последовательности $16, 52, 132, 287, 560, 1008, 1704, 2739, 4224, 6292$. Онлайн-энциклопедия подсказывает формулу:

$$V(2,1,n) = \tfrac{1}{60}(n+1)(n+2)(n+3)(n^2+9n+30)$$

Пусть формула верна для члена последовательности с номером n. Для $(n+1)$-ого члена имеем:

$$\begin{gathered} V(2,1,n+1) = V(1,1,n+1) + V(2,n+1) + V(2,1,n) + V(1,2,n) = \\ = \tfrac{1}{6}(n+2)(n+3)(n+7) + \tfrac{1}{2}(n+2)(n+3) + \tfrac{1}{60}(n+1)(n+2)(n+3)(n^2+ \\ 9n+30) + \tfrac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)(n+6) = \\ = \tfrac{1}{60}(n+2)(n+3)[10(n+7)+30+(n+1)(n^2+9n+30)+5(n+1)(n+6)] = \\ = \tfrac{1}{60}(n+2)(n+3)(n^3+15n^2+84n+160) = \\ \tfrac{1}{60}(n+2)(n+3)(n+4)(n^2+11n+40) = \\ = \tfrac{1}{60}(n+2)(n+3)(n+4)((n+1)^2+9(n+1)+30). \end{gathered}$$

Доказано.

3.6 V(2,2,n)

Первые элементы последовательности $V(2,2,n)$ таковы: $40, 155, 455, 1120, 2436, 4830, 8910, 15510, 25740, 41041$. Им соответствует формула:

$$V(2,2,n) = \frac{1}{144}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n^2+11n+36).$$

Пусть она верна для элемента n. Тогда для $n+1$:

$$V(2,2,n+1) = V(1,2,n+1) + V(2,2,n) + V(2,1,n+1) + V(1,3,n) = \frac{1}{12}(n+2)(n+3)(n+4)(n+7) + \frac{1}{144}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n^2+11n+36) + \frac{1}{60}(n+2)(n+3)(n+4)(n^2+11n+40) + \frac{1}{120}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(3n+20) = \frac{1}{720}(n+2)(n+3)(n+4)[60(n+7) + 5(n+1)(n^2+11n+36) + 12(n^2+11n+40) + 6(n+1)(3n+20) = \frac{1}{720}(n+2)(n+3)(n+4)(5n^3+90n^2+565n+1200) = \frac{1}{144}(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n^2+13n+48) = \frac{1}{144}(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)((n+1)^2+11(n+1)+36).$$

Доказано.

3.7 V(3,1,n)

Первые элементы последовательности $V(3,1,n)$ таковы: $30, 132, 439, 1216, 2952, 6480, 13134, 24948, 44902, 77220$. Им соответствует формула:

$$V(3,1,n) = \frac{1}{5040}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(5n^3+69n^2+346n+840).$$

Пусть она верна для элемента n. Тогда для $n+1$:

$$V(3,1,n+1) = V(3,1,n) + V(3,n+1) + V(2,1,n+1) + V(2,2,n) = \frac{1}{5040}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(5n^3+69n^2+346n+840) + \frac{1}{6}(n+2)(n+3)(n+4) + \frac{1}{60}(n+2)(n+3)(n+4)(n^2+11n+40) + \frac{1}{144}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n^2+11n+36) = \frac{1}{5040}(n+2)(n+3)(n+4)[(n+1)(5n^3+69n^2+346n+840) + 840 + 84(n^2+11n+40) + 35(n+1)(n^2+11n+36))] = \frac{1}{5040}(n+2)(n+3)(n+4)(5n^4+109n^3+919n^2+3755n+6300) = \frac{1}{5040}(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(5n^3+84n^2+499n+1260) = \frac{1}{5040}(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(5(n+1)^3+69(n+1)^2+346(n+1)+840).$$

Доказано.

3.8 V(1,1,1,n)

Особенно интересен случай для четырех компонент связности. Явная формула перехода для него выглядит следующим образом:

$$V(k,l,m,n) = V(k,l,m,n-1) + V(k,l,m-1,n) + V(k,l-1,m,n) + V(k-1,l,m,n) + V(k-1,l+1,m-1,n) + V(k-1,l+1,m,n-1) + V(k-1,l,m+1,n-1) + V(k,l-1,m+1,n-1).$$

Попробуем найти и доказать формулу для $V(1,1,1,n)$. С помощью программы посчитаем $V(1,1,1,n)$ для $n \in \{1,2,...,10\}$.

Имеем следующую последовательность: 40, 138, 370, 847, 1736, 3276, 5796, 9735, 15664, 24310. С помощью энциклопедии узнаем, что для них верна формула:

$$V(1,1,1,n) = 1/360n^6 + 3/40n^5 + 59/72n^4 + 107/24n^3 + 548/45n^2 + 232/15n + 7.$$

Разложенная на множители, формула принимает вид:

$$V(1,1,1,n) = \frac{1}{360}(n+1)(n+2)(n+3)(n+7)(n^2+14n+60).$$

Докажем эту формулу по индукции. База уже проверена, предположим, что утверждение индукции верно для n. Для $n+1$ получаем:

$$V(1,1,1,n+1) = \\ = V(1,1,1,n) + V(1,1,n+1) + V(1,1,n+1) + V(1,1,n+1) + V(2,n+1) + V(2,1,n) + V(1,2,n) + V(1,2,n) = \\ = \frac{1}{360}(n+1)(n+2)(n+3)(n+7)(n^2+14n+60) + 3\cdot\frac{1}{6}(n+2)(n+3)(n+7) + \frac{1}{2}(n+2)(n+3) + \frac{1}{60}(n+1)(n+2)(n+3)(n^2+9n+30) + 2\cdot\frac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)(n+6) = \\ = \frac{1}{360}(n+2)(n+3)[(n+1)(n+7)(n^2+14n+60) + 180(n+7) + 180 + 6(n+1)(n^2+9n+30) + 60(n+1)(n+6)] = \\ = \frac{1}{360}(n+2)(n+3)(n^4+28n^3+299n^2+1412n+2400) = \\ = \frac{1}{360}(n+2)(n+3)(n+4)(n+8)((n+1)^2+14(n+1)+60).$$

Доказано.

4 Исследование нескольких случаев для двух переменных

4.1 V(1,m,n)

Докажем следующую формулу для $V(1,m,n)$, угаданную с помощью рассмотрения частных случаев для маленьких m и подбора:

$$V(1,m,n) = \frac{(m+n+1)!(mn+(m+1)(m+2))}{(m+2)!n!}.$$

Воспользуемся принципом полной индукции, вести индукцию будем по размерности разбиения, то есть по $m+n$ (формально по $m+n+1$, но на ход доказательства это не влияет). Базу индукции для $m+n=3$ несложно проверить - для $V(1,2,n)$, $V(1,1,n)$ и $V(2,1,n)$ у нас уже есть доказанные формулы.

Пусть формула верна для всех $m+n \leqslant d$. Посмотрим, что же будет для произвольных m' и n', таких что $m'+n'=d+1$. Если $m=1$, то формула верна, т.к. $V(1,1,d) = \frac{1}{6}(d+1)(d+2)(d+6) = \frac{(d+2)!(d+6)}{3!d!}$. Пусть $m>1$. Тогда можно взять такие m,n, что $m'=m+1$, $n'=n$, для которых верно $m+n=d$, а значит формула для $V(1,m,n)$ и $V(1,m+1,n-1)$ работает по предположению индукции. Имеем:

$$V(1,m',n') = V(1,m+1,n) =$$
$$V(m+1,n)+V(1,m,n)+V(1,m+1,n-1)+V(m+2,n-1) =$$
$$= \frac{(m+n+1)!}{(m+1)!n!} + \frac{(m+n+1)!(mn+(m+1)(m+2))}{(m+2)!n!} + \frac{(m+n+1)!((m+1)(n-1)+(m+2)(m+3))}{(m+3)(n-1)!} +$$
$$\frac{(m+n+1)!}{(m+2)!(n-1)!} = \frac{(m+n+1)!}{(m+3)!n!}[(m+2)(m+3)+(m+3)(mn+(m+1)(m+2))+$$
$$n((m+1)(n-1)+(m+2)(m+3))+n(m+3)] =$$
$$\frac{(m+n+1)!}{(m+3)!n!}[m^3+2m^2n+7m^2+mn^2+8mn+16m+n^2+8n+12] =$$
$$\frac{(m+n+1)!}{(m+3)!n!}(m+n+2)(m^2+mn+5m+n+6) = \frac{(m+n+2)!}{(m+3)!n!}((m+1)n+(m+2)(m+3)),$$

что и доказывает нашу формулу.

4.2 V(2,m,n)

Попробуем вывести формулу для $V(2,m,n)$. Идея состоит в том, чтобы каким-то образом угадать формулу, а затем доказать ее по индукции, используя уже известное рекуррентное соотношение.

Рассмотрим формулы $V(2, m, n)$ для небольших $m = 1, 2, \ldots, 7$. Каждая такая формула выводится следующим образом. С помощью программы находятся "достаточное"количество первых членов последовательности. Онлайн энциклопедия дает многочлен от n для них. Так как его степень растет пропорционально m(увеличивается на 1 при росте m на 1), то посмотрев на многочлен для $V(2, 1, n)$, который уже был выведен, можно узнать степень нужного многочлена. Поэтому "достаточное"количество первых членов определяется как степень нужного многочлена $+$ 3. Возникает законный вопрос - почему мы прибавляем именно 3, а не другое число? Ответ таков. Через любые p точек проходит многочлен степени p. Когда через $p + 3$ точки проведен многочлен степени p, *верится*, что мы поймали верную формулу. Ведь для начала ее нужно угадать. Пока такой способ дает правильные формулы, то есть те, которые можно доказать по индукции, будем им пользоваться.

Первые формулы для V(2,1,n) и V(2,2,n) были получены именно так. Для больших m найдем многочлены, но не будем их доказывать, *приняв на веру*. Если последовательность формул поможет вывести общую формулу для V(2,m,n), которую удастся доказать, то подставив в нее маленькие m, мы докажем и все найденные формулы частных случаев.

Итак, выпишем все формулы V(2,m,n) для $m = 1, 2, \ldots, 7$:

$V(2, 1, n) = 1/60(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n^2 + 9n + 30)$

$V(2, 2, n) = 1/144(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)(n^2 + 11n + 36)$

$V(2, 3, n) = 1/1680(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)(n + 5)(3n^2 + 39n + 140)$

$V(2, 4, n) = 1/2880(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n^2+15n+60)$

$V(2, 5, n) = 1/90720(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(5n^2+ 85n + 378)$

$V(2, 6, n) = 1/403200(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+ 8)(3n^2 + 57n + 280)$

$V(2, 7, n) = 1/7983360(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)(n + 5)(n + 6)(n + 7)(n + 8)(n + 9)(7n^2 + 147n + 792)$

Для средней части, состоящей из произведения $(n + 1), (n + 2), \ldots,$ формула угадывается сразу: $\frac{(n+m+2)!}{n!}$.

Необходимо понять закономерность в последовательности коэффициентов, умноженных на последнюю скобку. Основная проблема заключается в том, что мы не сможем отдельно написать формулу для последовательности коэффициентов и для квадратного трехчлена в последней скобке из-за того, что при разных m они могли сократиться на некоторые разные числа. Напишем разложение знаменателей коэффициентов на множители (мы предполагаем, что в формуле $V(2, m, n)$ в знаменателе стоит *примерно* $(const_1 \cdot m + const_2)!$, по аналогии с формулой $V(1, m, n)$):

$m = 1 => 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$m = 2 => 144 = 2^4 \cdot 3^2$

$m = 3 => 1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$m = 4 => 2880 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$

$m = 5 => 90720 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$

$m = 6 => 403200 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

$m = 7 => 7983360 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

Как можно заметить, при $m = 3$ в знаменателе появляется 7 и при $m = 7$ появляется 11. Такие простые сомножители могут получиться только из предполагаемого факториала $(const_1 \cdot m + const_2)!$. При $const_1 = 1$ и при $const_2) = 4$ имеем $(m + 4)!$, что дает именно те сомножители. Будем думать, что в формуле $V(2, m, n)$ в знаменателе стоит $(m + 4)!$. Отталкиваясь от коэффициента формулы $V(2, 1, m)$ посмотрим, какие должны были получаться коэффициенты в дальнейших формулах без сокращения с последней скобкой. Частое от ожидаемого коэффициента и исходного даст число, на которое скобка была сокращена.

m	Исходный коэффициент	Домножение	Ожидаемый коэф.	Сокращенное число
1	60	-	60	1
2	144	6	360	2.5
3	1680	7	2520	1.5
4	2880	8	20160	7
5	90720	9	181440	2
6	403200	10	1814400	4.5
7	7983360	11	19958400	2.5

Теперь мы можем выяснить, какой вид имела последняя скобка до сокращения. Чтобы получались целые числа будем считать, что в каждом случае сокращенное число было в 2 раза больше (это повлияет только на итоговый коэффициент при общей формуле):

m	Исходная скобка	Сокр. число	Домноженное на 2	Скобка до сокращения
1	$n^2+9n+30$	1	2	$2n^2+9n+30$
2	$n^2+11n+36$	2.5	5	$5n^2+55n+180$
3	$3n^2+39n+140$	1.5	3	$9n^2+117n+420$
4	$n^2+15n+60$	7	14	$14n^2+210n+840$
5	$5n^2+85n+378$	2	4	$20n^2+340n+1512$
6	$3n^2+57n+280$	4.5	9	$27n^2+513n+2520$
7	$7n^2+147n+792$	2.5	5	$35n^2+735n+3960$

Теперь нам остается всего лишь угадать многочлен от m для каждого из коэффициентов последней скобки.

При n^2 имеем последовательность $2, 5, 9, 14, 20, 27, 35$. Многочлен $\frac{1}{2}m(m+3)$ дает именно эти значения в соответствующих m.

При n: $9, 55, 117, 210, 340, 513, 735$ - многочлен $m^3+\frac{13}{2}m^2+\frac{21}{2}m$.

Свободный член: $30, 280, 420, 840, 1512, 2520, 3960$ - многочлен $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$.

Таким образом, формула последней скобки имеет вид

$$\frac{m(m+3)}{2}n^2+(m^3+\frac{13}{2}m^2+\frac{21}{2}m)n+(\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2}).$$

Суммируя все вышесказанное, напишем предполагаемую формулу, вынеся коэффициент $\frac{1}{2}$ из последней скобки в знаменатель:

$$V(2,m,n)=\frac{(n+m+2)!}{2\cdot n!(m+4)!}(m(m+3)n^2+(2m^3+13m^2+21m)n+(m+1)(m+2)(m+3)(m+4))$$

Докажем ее по индукции по $m+n$.

База индукции верна - мы знаем формулу для $V(2,1,n)$. Она же получится, если подставить $m=1$ в $V(2,m,n)$.

Докажем шаг индукции. Если формула верна для всех членов до $m+n-1$, то для $m+n$ имеем:

$$V(2,m,n)=V(1,m,n)+V(2,m-1,n)+V(2,m,n-1)+V(1,m+1,n-1).$$

Постараемся привести правую часть:

$$\frac{(m+n+1)!(mn+(m+1)(m+2))}{(m+2)!n!}+$$

$$+\frac{(n+m+1)!}{2\cdot n!(m+3)!}\Big((m-1)(m+2)n^2+(2(m-1)^3+13(m-1)^2+21(m-1))n+$$
$$m(m+1)(m+2)(m+3)\Big)+$$

$$+\frac{(n+m+1)!}{2\cdot(n-1)!(m+4)!}\Big(m(m+3)(n-1)^2+(2m^3+13m^2+21m)(n-1)+(m+$$
$$1)(m+2)(m+3)(m+4)\Big)+$$

$$+\frac{(m+n+1)!(m+1)(n-1)+(m+2)(m+3)}{(m+3)!(n-1)!}$$

Вынесем $\frac{(n+m+1)!}{2\cdot n!(m+4)!}$. Напишем развернутую форму каждого слагаемого. Первое станет равным

$$2m^4+2m^3n+20m^3+14m^2n+70m^2+24mn+100m+48$$

Второе

$$m^5+2m^4n+10m^4+m^3n^2+15m^3n+35m^3+5m^2n^2+29m^2n+50m^2+$$
$$2mn^2-6mn+24m-8n^2-40n$$

Третье

$$m^4n+2m^3n^2+8m^3n+m^2n^3+11m^2n^2+23m^2n+3mn^3+15mn^2+32mn+24n$$

Четвертое

$$2m^3n+2m^2n^2+16m^2n+10mn^2+42mn+8n^2+40n$$

Их сумма

$$m^5+12m^4+55m^3+120m^2+124m+48+3m^4n+27m^3n+82m^2n+$$
$$92mn+24n+3m^3n^2+18m^2n^2+27mn^2+m^2n^3+mn^3$$

Выносим из этой суммы $(n+m+2)$, получаем

$$(n+m+2)(m^4+2m^3n+10m^3+m^2n^2+13m^2n+35m^2+3mn^2+21mn+50m+24)$$

Что можно привести к форме

$$(n+m+2)(m(m+3)n^2+(2m^3+13m^2+21m)n+(m+1)(m+2)(m+3)(m+4))$$

В итоге, вспоминая про вынесенный коэффициент, получаем приведенную правую часть:

$$\frac{(n+m+2)!}{2\cdot n!(m+4)!}(m(m+3)n^2+(2m^3+13m^2+21m)n+(m+1)(m+2)(m+3)(m+4))$$

Она в точности совпадает с левой частью. Тем самым, мы только что доказали индуктивный переход, а значит, и саму формулу.

4.3 V(1,1,m,n)

Попробуем найти формулу для $V(1,1,m,n)$ тем же принципом, что и в прошлом пункте. Угадаем без доказательства формулы для частных случаев m (для m = 1 формула есть и доказана).

$V(1,1,1,n) = \frac{1}{360}(n+1)(n+2)(n+3)(n+7)(n^2+14n+60)$

$V(1,1,2,n) = \frac{1}{720}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+8)(n^2+15n+60)$

$V(1,1,3,n) = \frac{1}{5040}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+9)(2n^2+33n+140)$

$V(1,1,4,n) = \frac{1}{60480}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+10)(5n^2+91n+420)$

$V(1,1,5,n) = \frac{1}{362880}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+11)(5n^2+100n+504)$

$V(1,1,6,n) = \frac{1}{3628800}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+8)(n+12)(7n^2+153n+840)$

$V(1,1,7,n) = \frac{1}{119750400}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)(n+13)(28n^2+665n+3960)$

Для средней части произведений мы можем вывести формулу $\frac{(m+n+4)(m+n+2)!}{n!}$. Посмотрим на последовательность знаменателей коэффициентов, разложив их на множители:

$m = 1 => 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$m = 2 => 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

$m = 3 => 5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$m = 4 => 60480 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

$m = 5 => 362880 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$

$m = 6 => 3628800 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

$m = 7 => 119750400 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$

Замечаем, что при $m = 3$ в знаменателе появляется 7 и при $m = 7$ появляется 11, делаем вывод, что в знаменателе стоит $(m+4)!$. Найдем зафиксировав коэффициент при $m = 1$, найдем ожидаемые коэффициенты для других m и из этого получим число, на которое была сокращена последняя скобка.

m	Исходный коэффициент	Домножение	Ожидаемый коэф.	Сокращенное число
1	360	-	360	1
2	720	6	2160	3
3	5040	7	15120	3
4	60480	8	120960	2
5	362880	9	1088640	3
6	3628800	10	10886400	3
7	119750400	11	119750400	1

Теперь найдем последовательность последних скобок до сокращения.

m	Исходная скобка	Сокр. число	Скобка до сокращения
1	$n^2+14n+60$	1	$n^2+14n+60$
2	$n^2+15n+60$	3	$3n^2+45n+180$
3	$2n^2+33n+140$	3	$6n^2+99n+420$
4	$5n^2+91n+420$	2	$10n^2+182n+840$
5	$5n^2+100n+504$	3	$15n^2+300n+1512$
6	$7n^2+153n+840$	3	$21n^2+459n+2520$
7	$28n^2+665n+3960$	1	$28n^2+665n+3960$

Рассмотрим последовательность коэффициентов при степенях n в скобке.

При n^2 имеем последовательность $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28$. Многочлен $\frac{1}{2}m(m+1)$ дает именно эти значения в соответствующих m.

При n: $14, 45, 99, 182, 300, 459, 665$ - многочлен $\frac{1}{2}m(m+3)(2m+5)$.

Свободный член: $60, 180, 420, 840, 1512, 2520, 3960$ - многочлен $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$.

Таким образом, формула

$$V(1,1,m,n) = \frac{(m+n+2)!(m+n+6)}{6(m+4)!n!}\Big(m(m+1)n^2 + m(m+3)(2m+5)n + (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)\Big)$$

Легко убедиться, что для первых натуральных m она работает.

В доказательстве этой формулы мы только отметим ключевые моменты, опуская громоздкие выкладки. Доказательство ведется по индукции по $m+n$.

База индукции. Формула для V(1,1,1,n) есть, поэтому подставив в нее $n = 1$, получим то, что и требовалось доказать.

Индуктивный переход. Если формула работает для всех членов до $m + n - 1$, тогда для $m + n$ имеем рекуррентное соотношение

$$V(1,1,m,n) = 2V(1,m,n) + V(1,1,m-1,n) + V(1,1,m,n-1) +$$
$$V(2,m-1,n) + V(2,m,n-1) + V(1,m+1,n-1) + V(1,m+1,n-1).$$

Для $V(1,1,m-1,n)$ и $V(1,1,m,n-1)$ берем формулу из предположения индукции. Для всех остальных V формулы уже выведены. Подставив формулы в выражение и действуя так же, как в предыдущем пункте, можно убедиться, что правая часть действительно приводится к левой, что и доказывает выведенную формулу. Оставим вычисления любопытному читателю.

5 Заключение

В данной работе были продемонстрированы механизмы получения формул вершин многогранников Гельфанда-Цетлина в случаях с одной и двумя переменными. Данные подходы могут позволить вывести формулу для количества вершин многогранников, в разбиении которых не только 3 или 4 компоненты, но и для 5 и более компонент. По вопросам получения вспомогательной программы для дальнейших исследований можно обращаться к автору работы по e-mail: lfybk@bk.ru.

Список литературы

[1] *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) http://oeis.org
[2] Кириченко В.А., Смирнов Е.Ю., Тиморин В.А. *Исчисление Шуберта и Многогранники Гельфанда-Цетлина*. Успехи математических наук. 2012. Т. 67. № 4. С. 89-128
[3] Pavel Gusev, Valentina Kiritchenko, Vladlen Timorin, *Counting vertices in the Gelfand-Zetlin polytopes*, 11 pages, arXiv:1205.6336 [math.CO], J. Comb. Theory, Ser. A, in press.
[4] Кузнецов Д.С. *Вспомогательная программа для нахождения числа вершин любого многогранника Гельфанда-Цетлина*.