

Правительство Российской Федерации

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет Прикладной Математики и Кибернетики
Кафедра Механики и математического моделирования

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему Моделирование напряженно-деформированного состояния с учетом
тепловых полей на примере образования трещин на Европе

Студент группы № M93
Захарьев И. Ю.
(Ф.И.О.)

Подпись: _____

Научный руководитель
к.т.н доцент Логашина И.В.
(должность, звание, Ф.И.О.)

Подпись: _____

Консультант
д.т.н профессор Чумаченко Е.Н.
(должность, звание, Ф.И.О.)

Подпись: _____

Москва, 2013 г.

Аннотация

Работа посвящена математическому моделированию процессов образования особенностей рельефа (так называемых «дефектов» поверхности) спутника Юпитера Европы. Интерес к подобного рода задачам связан с разработкой перспективного проекта по изучению спутника с помощью доставленного на него автоматического аппарата.

Построена трехмерная модель стационарного теплового процесса, приводящего к образованию на ровной гладкой поверхности куполообразных выпуклостей, аналогичных тем, что присутствуют на снимках поверхности Европы. В рамках модели были проведены расчеты напряженно-деформированного состояния с использованием системы MSC.Patran/Nastran, позволяющие и оценить адекватность модели реальному процессу образования дефектов поверхности Европы сделана качественная оценка полученных результатов.

Подтверждена гипотеза о том, что причиной образования дефектов на поверхности Европы могут служить внутрипланетные источники тепловой энергии.

Оглавление

	стр
Введение	5
Глава 1. <i>Спутник Юпитера Европа</i>	7
1. 1. <i>Основные сведения о спутнике Юпитера Европе</i>	7
1. 2. <i>Основные типы рельефа Европы</i>	9
Глава 2. <i>Теоретическое исследование</i>	13
2.1. <i>Физическая постановка задачи</i>	13
2.1.1. <i>Выбор модели поверхности</i>	13
2.1.2. <i>Задание температур</i>	14
2.1.3. <i>Физико-механические и теплофизические свойства льда</i>	14
2.2. <i>Математическая постановка задачи</i>	17
2.2.1. <i>Уравнение теплопроводности</i>	17
2.2.2. <i>Граничные условия</i>	19
2.2.3. <i>Начальные условия</i>	20
2.3. <i>Метод конечных элементов</i>	21
2.3.1. <i>Общая характеристика метода</i>	21
2.3.2. <i>Аппроксимация функции внутри элемента</i>	22
2.3.3. <i>Пространственные температурные поля</i>	25
2.3.4. <i>Постановка краевой задачи</i>	30
2.3.5. <i>Соотношения МКЭ для термоупругих задач</i>	31
2.3.6. <i>Критерий разрушений</i>	35
Глава 3. <i>Расчеты напряженно- деформированных состояний в системе MSC.Patran/Nastran</i>	36
3.1. <i>Используемые системы компьютерного моделирования</i>	36
3.1.1. <i>Система SolidWorks</i>	37
3.1.2. <i>Система MSC.Patran/Nastran</i>	37
3.2. <i>Этапы создания геометрической модели твердого тела</i>	39

3.3. <i>Этапы работы в системе MSC.Patran/Nastran</i>	42
Глава 4. <i>Проведенные расчеты и полученные результаты</i>	55
Заключение	66
Список использованной литературы	67

ВВЕДЕНИЕ

Исследования Европы проводятся начиная с 70-х годов прошлого века на основании данных с пролетавших вблизи нее космических аппаратов. Первые фотографии Европы из космоса были сделаны космическими станциями «Пионер-10» и «Пионер-11» в 1973 и 1974 годах. В 1979 года Европу с пролётной траектории изучали автоматические зонды «Вояджер-1» и «Вояджер-2». Также на изучение Европы было отведено около полутора лет в ходе миссии аппарата "Галилео" в 1997-1999 годах.

В настоящее время исследования Европы носят фундаментальный характер как часть исследований Солнечной системы, затрагивающих вопросы происхождения планет, их строения, а также существования форм внеземной жизни.

Имеющиеся в распоряжении ученых снимки и данные телеметрии, размещаемые Национальным управлением США по аэронавтике и исследованию космического пространства (NASA) в сети Интернет, позволили выдвинуть различные гипотезы о строении планеты и процессах, приводящих к образованию тех или иных особенностей рельефа поверхности, называемых дефектами поверхности.

Механизмы образования дефектов являются предметом активных исследований, основанных на том, что дефекты возникают в результате неоднократных расколов поверхности. В качестве причины расколов указываются растяжения и сжатия, возникающие вследствие гравитационного взаимодействия Европы с Юпитером и другими его спутниками, а также явление криовулканизма – перемещение массы внутрипланетного вещества из толщи планеты на ее поверхность.

Выявление механизмов образования дефектов поверхности существенно при выборе площадки для посадки космического аппарата на поверхность Европы в ходе запланированных на недалекое будущее миссий.

В настоящей дипломной работе рассматривается образование одного из видов дефектов – так называемых «куполов». Была построена трехмерная модель, проведены ее расчеты в системе проектирования MSC.Patran/Nastran и получен результат, качественно подтверждающий связь процесса образования «куполов» с наличием «линз»¹ в толще поверхностной коры Европы.

¹ «Линза» - это выпуклая область, внутри которой состояние вещества отличается от состояния вещества, окружающего «линзу»

Глава 1 . СПУТНИК ЮПИТЕРА ЕВРОПА

1.1. Основные сведения о спутнике Юпитера Европе

Европа – одна из самых крупных планет-спутников в Солнечной системе – входит в число четырех так называемых галилеевых спутников, то есть обнаруженных в 1610 году Галилео Галилеем при наблюдениях Юпитера. Диаметр Европы чуть более 3100 км, это самый маленький галилеев спутник, ее размер немного меньше, чем у Луны. Вместе с тем, это один из пятнадцати крупнейших объектов, обнаруженных в Солнечной системе.

Как и у всех галилеевых спутников, орбита Европы имеет почти круговую форму с радиусом в 670 900 км. Время ее полного оборота вокруг Юпитера составляет примерно 85 часов, немногим более трёх с половиной земных суток. Европа всегда повёрнута к Юпитеру одной и той же стороной. Температура поверхности Европы принимается в среднем равной около 110 К в районе экватора и 50 К в районе полюсов. Атмосфера Европы состоит в основном из молекулярного кислорода, атмосферное давление на поверхности в 10^{12} раз ниже земного и составляет примерно 0,1 мкПа.

Первоначально исследования Юпитера и его спутников проводились с использованием наземных оптических и радиотелескопов, особенно активно ими начали заниматься начиная с середины XX века.

Предположение о том, что галилеевы спутники могут иметь ледяную поверхность, было впервые высказано в 1951 году. В 1971 году была выдвинута гипотеза о том, что на Европе под ледяной поверхностью может существовать океан из жидкой воды.

В настоящее время разработано несколько проектов изучения Европы с выводом спутника на ее орбиту, а также использования посадочного аппарата непосредственно на поверхности Европы.

Ожидается, что реализация подобных проектов позволит подтвердить или опровергнуть различные имеющиеся в отношении Европы гипотезы, в частности - о строении планеты и процессах, приводящих к образованию тех или иных дефектов ее поверхности.

Поверхность Европы в целом считается гладкой, выявленные перепады высот не превышают 100 метров. Наблюдаемые на снимках дефекты поверхности разнообразны: равнинные области, немногочисленные кратеры, густая сеть хаотично расположенных пересекающихся линий, различного рода пятна, одиночные, сдвоенные и строенные хребты, протяжённые полосы из параллельных борозд, выпуклые и вогнутые образования.

Гипотетическими, но тем не менее общепринятыми, являются следующие особенности геологического строения Европы: в центре находится металлическое ядро, далее идет слой горных пород, за которым следует слой жидкой «водяной субстанции» толщиной порядка 100 км. Спектральные измерения позволили говорить о том, что периферия этого слоя (т.е. поверхность Европы) представляет из себя ледяную корку, ее толщина оценивается в 10-30 километров. Температура на поверхности планеты может достигать минус 170 °С, лед переходит в жидкое состояние при -5 °С.

Также признается, что лед на Европе не является чисто водяным, он содержит примеси, поступающие из подледного океана, состав которого, по последним данным, схож с водой океанов Земли. Химический состав поверхности Европы в целом не определен до сих пор.

1.2. Основные типы ландшафтов Европы

Изучая снимки Европы, планетологи «разделили» ее поверхность на участки характерных геологических типов (ландшафтов): равнины (plains), хаос (chaos), полоса (band), горные хребты (ridge) и кратеры (crater materials), различающихся также временем образования. Была также составлена (рис. 1) глобальная геологическая карта Европы [1].



Рис. 1. Глобальная геологическая карта Европы

Примеры фрагментов поверхностей типичных ландшафтов приведены на рисунке 2.

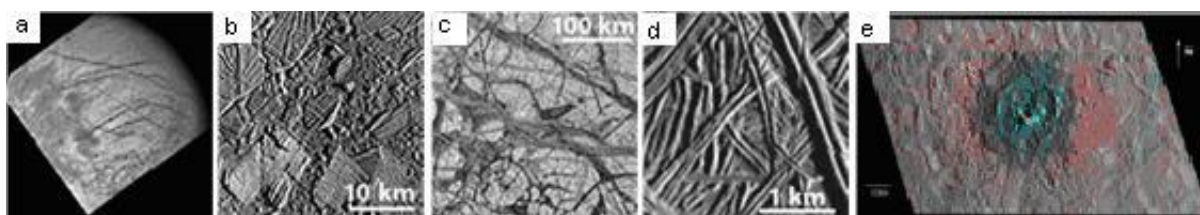


Рис. 2. Примеры типичных ландшафтов на Европе

Равнины (рис. 2a) являются самым распространенным типом поверхности. Они подразделяются на гладкие, горные и недифференцированные. На снимках гладкие равнины выглядят как темные области, имеющие различные формы. Горные равнины образованы горными хребтами. Недифференцированными равнины называют потому,

что на снимках невозможно выявить какие-либо их особенности. Предполагается, что гладкие равнины - самые молодые формирования Европы.

Области "хаоса" (рис. 2b) представляют собой нагромождение пересеченных трещинами «блоков», рассматриваемых как результат разрушения предыдущих поверхностных образований.

Полосы - это зоны, выделяющиеся на снимках своей яркостью (рис. 2c). Вероятно, они сформировались в результате заполнения разломов поверхности подповерхностным веществом.

Хребты – образования, покрывающие горные равнины (рис. 2d), заметно выступают над поверхностью планеты. Они могли быть сформированы в результате деформаций, при которых подповерхностное вещество также вышло наружу.

Кратеры (рис. 2e) на Европе немногочисленны, они образованы в результате падения метеоритов, на снимках кратеров различают четкие края и выброс планетарного вещества.

Большинство исследователей полагает, что Европа имеет молодые по геологическим понятиям ландшафтные типы. Их формирование может быть результатом тектонических процессов (сжатий, растяжений, разломов), бомбардировки планеты метеоритами, воздействия высоких температур, подповерхностной конвекции или криовулканизма.

Кроме пяти основных типов участков поверхности, на снимках выявлены нерегулярные образования («дефекты»). Они также классифицированы. Описание классификации можно найти в [2],[3]. Примеры дефектов приведены на рис. 3.

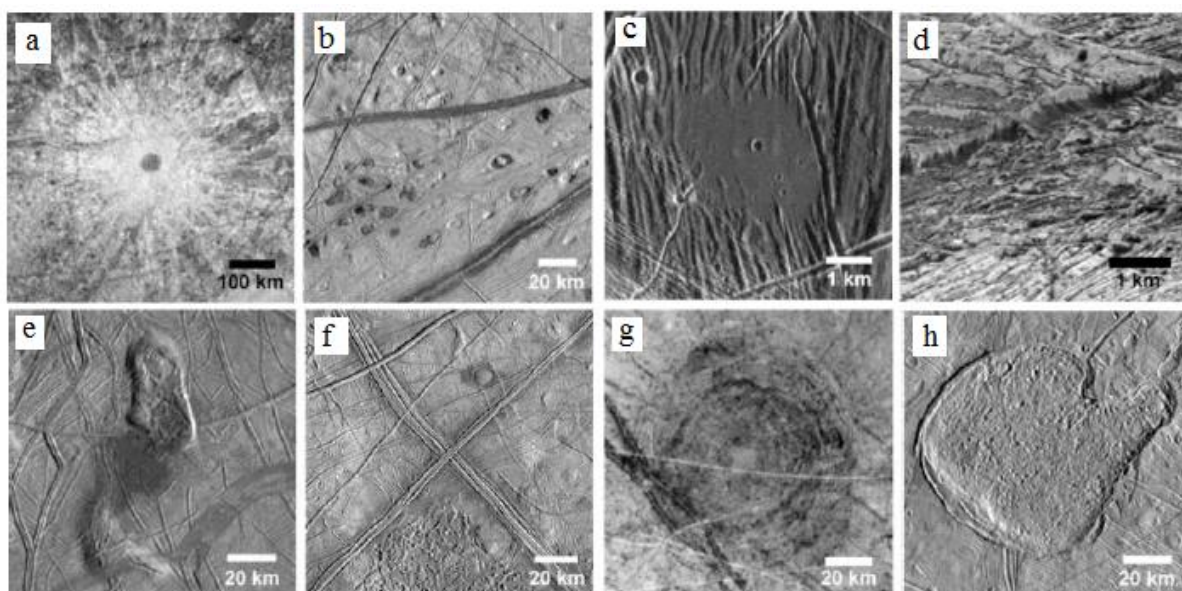


Рис. 3. Примеры «дефектов» поверхности Европы

Рассматриваемые в работе «купола» (domes) – это участки поверхности выпуклой формы. Их можно видеть на фрагментах «b» и «f» рисунка 3.

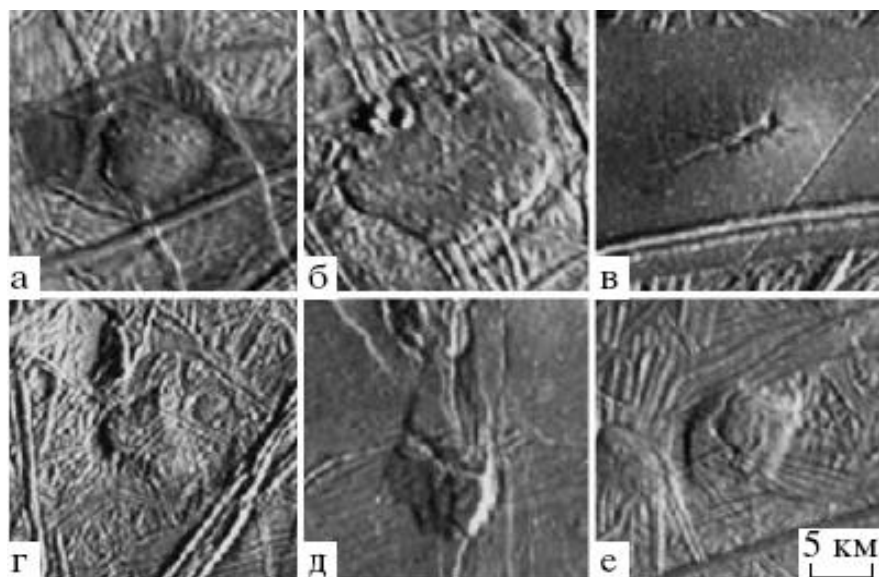


Рис. 4. Примеры «куполов» на Европе

На рис. 4 продемонстрированы «купола» различной формы, в частности, фрагмент «а» - это увеличенный фрагмент «f» рисунка 3.

В работе [4] показано, что образование «куполов» и наблюдаемых на них трещин может происходить не только исключительно за счет гравитационно-приливных сил, но и температурных напряжений, обусловленных высоким градиентом температур в окрестности «купола».

Целью дальнейшего моделирования является определение полей напряжения и деформаций фрагмента ледяной поверхности Европы, вызванных стабилизировавшимся полем температур (расчет термо-напряженно-деформированного состояния).

Глава 2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

2.1. Физическая постановка задачи

В основе работы лежит предположение о том, что куполообразный дефект может образовываться при наличии «линзы» в толще ледяной поверхностной коры. «Линза» формируется потоками теплой (за счет энергии ядра, тектонических или вулканических процессов) воды, поднимающимися к поверхности сквозь подледный океан и вызывающими локальное таяние ледяного слоя. Возможно, этот тепловой источник аналогичен земному "чёрному курильщику" - подводному вулканическому гидротермальному источнику, открытому в районе Галапагосского рифта.

2.1.1. Выбор модели поверхности

В качестве модели фрагмента поверхности, на которой образуется «купол», будем рассматривать объемное тело - фрагмент поверхности, имеющий форму параллелепипеда - с однородными и изотропными свойствами, зависящими, в общем случае, от температуры. На одной («внутренней») стороне этого фрагмента в центре имеется вогнутый сферический участок, соответствующий наличию «линзы» (рис. 5).

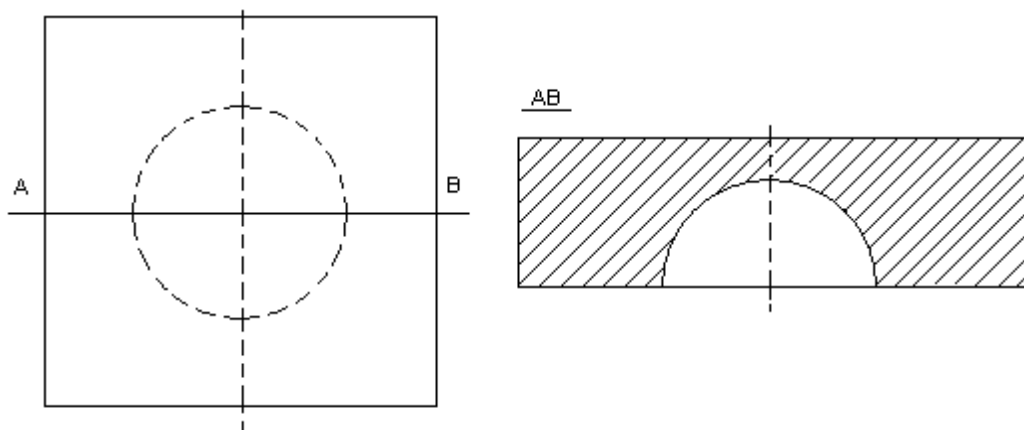


Рис. 5. Геометрическая модель

Квадратная форма фрагмента поверхности и сферическая форма «линзы» выбраны из соображений максимального упрощения модели, поскольку целью исследования является только качественное соответствие модели гипотетическому процессу.

2.1.2. Задание температур

Поверхности, ограничивающие участок ледяной коры, имеют разные температуры. Температура «внешней» поверхности T_1 равна температуре окружающей среды, температура горизонтального участка «внутренней» поверхности T_2 равна температуре плавления льда на Европе, температура сферического участка T_3 такая, что $T_3 > T_2$ (рис. 6).

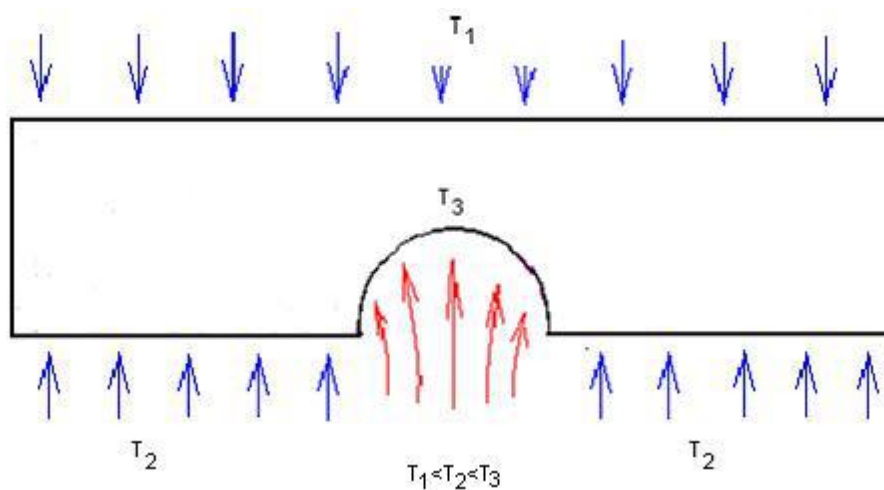


Рис. 6. Распределение температур

Поскольку температуры верхней («внешней») и нижней («внутренней») граней различны, то по всему объему фрагмента ледяной коры устанавливается линейное распределение температуры.

2.1.3. Физико-механические и теплофизические свойства льда

Поскольку характеристики льда на Европе являются гипотетическими, то в качестве аналога планетарного льда был выбран типичный для земных условий так называемый лёд I (лёд I_h),

образованный оптически одноосными кристаллами, принадлежащими к кристаллической модификации, именуемой гексагональной сингонией [5].

Кристаллы льда характеризуются резко выраженной анизотропностью механических свойств в зависимости от направления действия нагрузки относительно плоскости, перпендикулярной к оптической оси кристалла.

При образовании ледяного покрова кристаллы льда могут «соединяться» друг с другом различными способами. Структура и свойства ледяного покрова зависят от способа его образования. Например, ледяной покров рек образуется при так называемом замерзании с перемешиванием, в результате чего оси кристаллов льда располагаются хаотически, и ледяной покров рек в целом может рассматриваться как изотропный.

Исследования льда в земных условиях показывают, что одной из его отличительных особенностей по сравнению с другими кристаллическими материалами является пластичность: под воздействием нагрузки лед может изменять свою форму без изменения объема.

В общем случае в зависимости от различных факторов лед может деформироваться упруго, пластически или хрупко разрушаться. Обычно в момент приложения нагрузки возникают упругие деформации льда, непосредственно за которыми следуют пластические деформации.

Способность льда сопротивляться нагрузке изменяется в зависимости от температуры: по мере приближения температуры льда к точке его плавления сильнее проявляются его пластические свойства и уменьшается прочность.

Поскольку характеристики льда, покрывающего поверхность Европы, являются гипотетическими, для решения рассматриваемой задачи будем считать, что этот лед однороден, изотропен и относится ко льду I_n .

Согласно [6], плотность, теплопроводность и удельная теплоемкость рассчитываются следующим образом.

Плотность:

$$\rho = 933.31 + 0.037978T = 3.6274 \cdot 10^{-4}T^2$$

Теплопроводность:

$$\lambda = 619.2/T + 58646/T^3 + 3.237 \cdot 10^{-3}T - 1.382 \cdot 10^{-5}.$$

Удельная теплоемкость:

$$c = \frac{c_1 + c_2x^2 + c_3x^6}{1 + c_4x^2 + c_5x^4 + c_6x^8}$$

где $x = T/T_t$, $T_t = 273.16$ К, $c_1 = 1.843 \cdot 10^5$,

$c_2 = 1.6357 \cdot 10^8$, $c_3 = 3.5519 \cdot 10^9$, $c_4 = 1.667 \cdot 10^2$, $c_5 = 6.465 \cdot 10^4$,

$c_6 = 1.6935 \cdot 10^6$

Однако будем считать, что в первом приближении значения используемых констант, определяющих температурные и механические характеристики льда, не зависят существенно от температуры. В расчетах использовались значения плотности, теплопроводности, удельной теплоемкости, коэффициента объемного расширения, модуля Юнга, коэффициента Пуассона, приведенные в таблицах 1 и 2, взятые для температуры -100°C (173 К) [6, 7].

Таблица 1. Механические характеристики льда

ν , коэффициент Пуассона	0.35
E , модуль Юнга	8340 МПа
β , коэффициент объемного расширения	$1.25 \cdot 10^{-4}$
σ_0 , предел прочности	1.381 кДж/кг*К

Таблица 2. Температурные характеристики льда

ρ , плотность	929 кг/м ³
λ , теплопроводность	3.73 Вт/(м*К)
c , удельная теплоемкость	1.381 кДж/кг*К

2.2. Математическая постановка задачи

2.2.1. Уравнение теплопроводности

Распространение тепла в заданной области пространства описывается уравнением теплопроводности.

Процесс распространения тепла в пространстве характеризуется температурой $T(x, y, z, t)$, являющейся функцией x, y, z и t (x, y, z – координаты точки пространства, t – время)[8].

Если температура непостоянна, то возникают тепловые потоки, направленные от мест с более высокой температурой к местам с более низкой температурой.

Для вывода уравнения теплопроводности в пространстве рассматривается некоторый объем V , ограниченный поверхностью S . Уравнение баланса тепла для объема V за время $\Delta t = t_2 - t_1$ имеет вид

$$\iiint_V c\rho[T(P, t_2) - T(P, t_1)]dV_p = - \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S W_n d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\iiint_V F(P, t)dV_p \right)$$

где P – точка интегрирования, dV_p – элемент объема, $c\rho$ – теплоемкость единицы объема, W_n – нормальная составляющая плотности теплового потока, $F(P, t)$ – функция внешнего источника тепла. Это уравнение выражает закон сохранения тепла в объеме V за время Δt в результате действия внешних тепловых источников.

Для перехода от интегрального уравнения баланса к дифференциальному уравнению, предполагают, что функция $T(x, y, z, t) = T(M, t)$ дважды дифференцируема по x, y и z и один раз по t , и что эти производные непрерывны в рассматриваемой области (объеме V). Используя формулу Остроградского – Гаусса

$$\iint_S W_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{W} dV$$

и полагая, что $F(P, t)$ является непрерывной функцией своих аргументов, уравнение баланса преобразовывают к виду

$$\iiint_V c\rho [T(P, t_2) - T(P, t_1)] dV_p = - \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{W} dV_p dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F dV_p dt$$

Применяя далее теорему о среднем и теорему о конечных приращениях для функций многих переменных, получают

$$c\rho \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\substack{t=t_3 \\ P=P_1}} \Delta t \cdot V = - \operatorname{div} W \Big|_{\substack{t=t_4 \\ P=P_2}} \Delta t \cdot V + F \Big|_{\substack{t=t_5 \\ P=P_3}} \Delta t \cdot V,$$

где t_3, t_4, t_5 – промежуточные точки из интервала Δt , а P_1, P_2, P_3 – точки в объеме V . Фиксируя некоторую точку $M(x, y, z)$ внутри V и стягивая V в эту точку, устремляют Δt к нулю. После сокращения на Δt и на V и указанного предельного перехода получают уравнение:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t}(x, y, z, t) = -\operatorname{div} W(x, y, z, t) + F(x, y, z, t). \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности получается в результате замены $W = -k \operatorname{grad} T$:

$$c\rho T_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + F,$$

или

$$c\rho T_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + F.$$

Если среда однородна, то это уравнение обычно записывают в виде

$$T_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{F}{c\rho},$$

где $a^2 = k/c\rho$ – коэффициент температуропроводности,

или в виде

$$u_t = a^2 \Delta T + f,$$

где $\left(f = \frac{F}{c\rho} \right)$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Уравнение теплопроводности является уравнением параболического типа.

2.2.2. Граничные условия

Для определения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо определить начальные и граничные условия.

Граничные условия задаются следующим образом: граница разбивается на несколько участков: «верхнюю» поверхность фрагмента (L_1) поверхности планеты, «нижнюю» поверхность (L_2) за исключением участка «линзы» и поверхность «линзы» (L_3) (рис. 7).

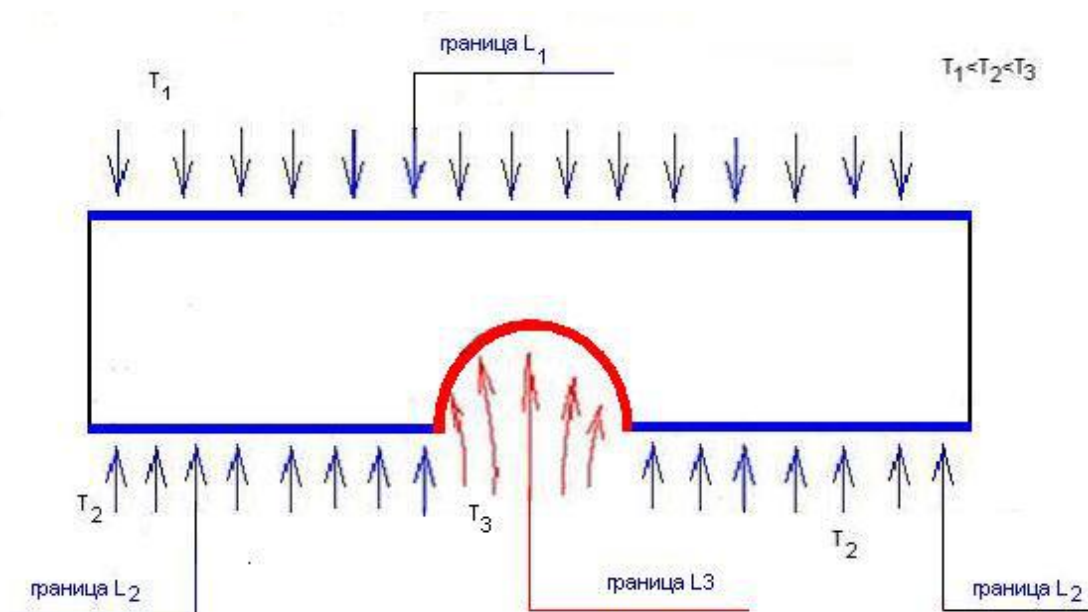


Рис. 7. Граничные условия

Выбраны конкретные значения температур: на верхней грани $T_1 = -100 \text{ C}$, на нижней $T_2 = -6 \text{ C}$, на поверхности «линзы» $T_3 = 0 \text{ C}$ (рис. 8).

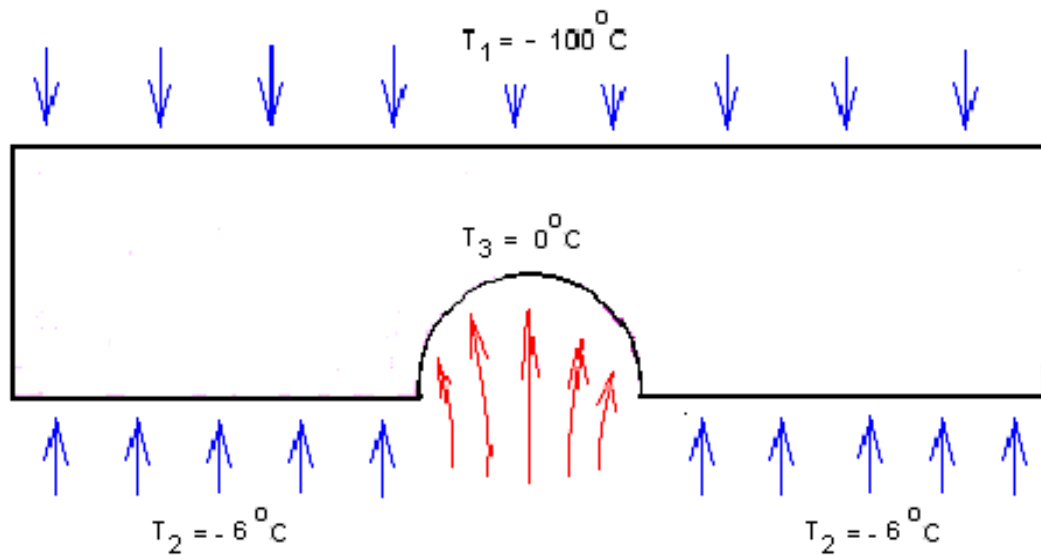


Рис. 8. Значения граничных условий

2.2.3. Начальные условия

Поскольку в работе рассматривается стабилизировавшийся процесс, то в уравнении (1) левая часть и слагаемое $F(x, y, z, t)$ равны нулю.

Дифференциальное уравнение теплопроводности примет вид [8]:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0,$$

где $\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$,

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0,$$

где k – коэффициент теплопроводности, скалярный для изотропной среды (рассматриваемый в работе случай

2.3. Метод конечных элементов

2.3.1. Общая характеристика метода

Метод конечных элементов (МКЭ), применявшийся начиная с 50-х годов прошлого века для решения задач сопротивления материалов, превратился в настоящее время в наиболее мощный и универсальный метод решения инженерных задач, описываемых системой дифференциальных уравнений в частных производных с заданными граничными условиями.

Основополагающим принципом МКЭ является разбиение исследуемой области на конечные элементы – элементарные области конечных размеров (рис. 9). В одномерном случае это отрезок прямой, в двумерном – треугольник, четырёхугольник или, в общем, любая фигура, с помощью которой можно покрыть исследуемую область. Аналогично, для трёхмерной области типичными конечными элементами являются тетраэдр и параллелепипед. Разбиение может быть неравномерным: исходя из априорных соображений «сетка» элементов может быть сделана гуще и наоборот.

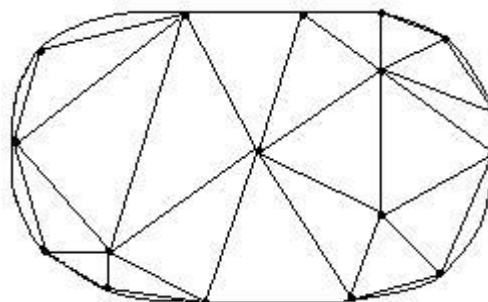


Рис. 9. Пример применения метода конечных элементов

В методе конечных элементов задача отыскания функции заменяется на задачу отыскания конечного числа ее приближенных значений в отдельных точках, называемых узлами элемента. Для каждого элемента неизвестная функция аппроксимируется полиномом, коэффициенты

которого определяются значениями функции в узлах элемента, что обеспечивает возможность аппроксимации функции на всей области.

Основной недостаток метода – резкий рост потребностей в вычислительных ресурсах при увеличении размерности задачи – в настоящее время не является существенным.

МКЭ можно интерпретировать как одну из возможных конкретизаций классических вариационных методов решения краевых задач. Особенностью метода является способ аппроксимации искомой функции. На каждом элементе функция аппроксимируется полиномом, так чтобы на границе элементов аппроксимирующая функция была непрерывна. Коэффициенты полинома выражаются через значения искомой функции в узловых точках.

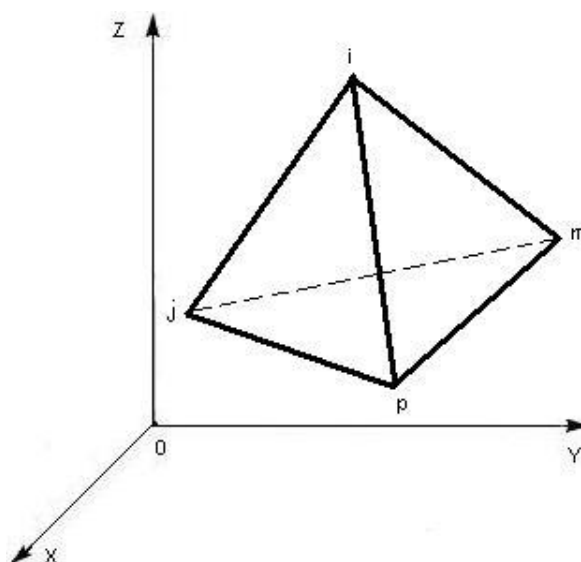


Рис. 10. Тетраэдральный элемент

2.3.2. Аппроксимация функции внутри элемента

Для решения рассматриваемой трехмерной задачи использовались тетраэдральные элементы (рис. 10), функция внутри каждого элемента аппроксимировалась полиномом первой степени:

$$\Phi^{(e)}(x, y, z) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x + \alpha_3^{(e)}y + \alpha_4^{(e)}z \quad (2)$$

Коэффициенты полинома $\alpha_1^{(e)}$, $\alpha_2^{(e)}$, $\alpha_3^{(e)}$, $\alpha_4^{(e)}$ выражаются через узловые значения функций Φ_i , Φ_j , Φ_m , Φ_p используя соотношения:

$$\Phi^{(e)} = \Phi_i \text{ при } x = X_i, y = Y_i, z = Z_i$$

$$\Phi^{(e)} = \Phi_j \text{ при } x = X_j, y = Y_j, z = Z_j$$

$$\Phi^{(e)} = \Phi_m \text{ при } x = X_m, y = Y_m, z = Z_m$$

$$\Phi^{(e)} = \Phi_p \text{ при } x = X_p, y = Y_p, z = Z_p$$

Подстановка этих соотношений в формулу (2) приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x_i + \alpha_3^{(e)}y_i + \alpha_4^{(e)}z_i = \Phi_i \\ \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x_j + \alpha_3^{(e)}y_j + \alpha_4^{(e)}z_j = \Phi_j \\ \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x_m + \alpha_3^{(e)}y_m + \alpha_4^{(e)}z_m = \Phi_m \\ \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x_p + \alpha_3^{(e)}y_p + \alpha_4^{(e)}z_p = \Phi_p \end{cases}$$

Далее необходимо выразить $\alpha_1^{(e)}$, $\alpha_2^{(e)}$, $\alpha_3^{(e)}$, $\alpha_4^{(e)}$ через Φ_i , Φ_j , Φ_m , Φ_p и подставить в (2). В результате подстановки имеем:

$$\begin{aligned} \Phi^{(e)} = \frac{1}{6V} \{ & (a_i + b_ix + c_iy + d_iz)\Phi_i + (a_j + b_jx + c_jy + d_jz)\Phi_j + \\ & + (a_m + b_mx + c_my + d_mz)\Phi_m + (a_p + b_px + c_py + d_pz)\Phi_p \}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad (3a)$$

а коэффициентами a_i , b_i , c_i , d_i обозначены определители

$$\begin{aligned} a_i &= \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} & b_i &= -\det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \\ c_i &= -\det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix} & d_i &= -\det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3б)$$

Остальные коэффициенты получаются циклической перестановкой индексов p, i, j, m .

Запишем (3) в матричном виде:

$$\begin{aligned}\Phi^{(e)} &= N_i^{(e)}\Phi_i + N_j^{(e)}\Phi_j + N_m^{(e)}\Phi_m + N_p^{(e)}\Phi_p \\ &= \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & N_j^{(e)} & N_m^{(e)} & N_p^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_m \\ \Phi_p \end{Bmatrix} = [N^{(e)}]\{\Phi\}.\end{aligned}\quad (4)$$

Это соотношение содержит четыре функции формы:

$$\begin{aligned}N_i^{(e)} &= \frac{1}{6V^{(e)}} [a_i^{(e)} + b_i^{(e)}x + c_i^{(e)}y + d_i^{(e)}z], \\ N_j^{(e)} &= \frac{1}{6V^{(e)}} [a_j^{(e)} + b_j^{(e)}x + c_j^{(e)}y + d_j^{(e)}z], \\ N_m^{(e)} &= \frac{1}{6V^{(e)}} [a_m^{(e)} + b_m^{(e)}x + c_m^{(e)}y + d_m^{(e)}z], \\ N_p^{(e)} &= \frac{1}{6V^{(e)}} [a_p^{(e)} + b_p^{(e)}x + c_p^{(e)}y + d_p^{(e)}z].\end{aligned}\quad (5)$$

При выбранном способе аппроксимации скалярная функция формы $\Phi^{(e)}$ определяется внутри элемента функциями формы, линейными по x , y и z .

Компоненты градиента этой величины имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial x} &= \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x}\Phi_i + \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x}\Phi_j + \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial x}\Phi_m + \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial x}\Phi_p = \\ &= \frac{1}{6V^{(e)}} [b_i^{(e)}\Phi_i + b_j^{(e)}\Phi_j + b_m^{(e)}\Phi_m + b_p^{(e)}\Phi_p], \\ \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial y} &= \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y}\Phi_i + \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y}\Phi_j + \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial y}\Phi_m + \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial y}\Phi_p = \\ &= \frac{1}{6V^{(e)}} [c_i^{(e)}\Phi_i + c_j^{(e)}\Phi_j + c_m^{(e)}\Phi_m + c_p^{(e)}\Phi_p], \\ \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial z} &= \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z}\Phi_i + \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial z}\Phi_j + \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial z}\Phi_m + \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial z}\Phi_p = \\ &= \frac{1}{6V^{(e)}} [d_i^{(e)}\Phi_i + d_j^{(e)}\Phi_j + d_m^{(e)}\Phi_m + d_p^{(e)}\Phi_p],\end{aligned}\quad (6)$$

Эти компоненты постоянны внутри каждого элемента и терпят разрыв на границе со смежными элементами. Поэтому для величин, основанных на производных аппроксимируемой функции, таких как деформации, напряжения, тепловой поток необходимо использовать усреднение для смежных элементов. Области быстрого изменения аппроксимируемой функции требуется разбивать на малые по величине элементы [9].

2.3.3. Пространственные температурные поля

Для численного решения задачи методом конечных элементов необходимо записать его через функции формы, для чего опишем пространственные температурные поля [10].

В работе рассматривается стационарная задача, для которой уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = 0.$$

Ограничимся заданием постоянной температуры на всей поверхности произвольной области $S = S_3$:

$$T|_{S_3} = T_{гр},$$

где $T_{гр}$ значение постоянной температуры на границе.

С вариационной точки зрения решение уравнения теплопроводности с граничными условиями эквивалентно отысканию минимума функционала

$$J = \int_V \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] dV.$$

Докажем это утверждение.

Вычислим вариацию функционала:

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_V \lambda \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial x} + 2 \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \delta T}{\partial y} + 2 \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right] dV = \\ &= \int_V \lambda \left[\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \delta T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right] dV.\end{aligned}$$

Преобразуем последнее выражение, интегрируя по частям:

$$\begin{aligned}&\int_V \lambda \left[\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \delta T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right] dV = \\ &= \int_V \lambda \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \delta T \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \delta T \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \delta T \right) \right] dV - \\ &\quad - \int_V \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \delta T dV.\end{aligned}$$

Первое слагаемое в последнем выражении приведем к интегралу по поверхности S объема V , воспользовавшись формулой Остроградского-Гаусса:

$$\begin{aligned}&\int_V \lambda \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \delta T \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \delta T \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \delta T \right) \right] dV = \\ &= \int_S \lambda \operatorname{grad}(T) \cdot \vec{n} \delta T dL = \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \delta T dL,\end{aligned}$$

где \vec{n} – внешняя нормаль.

Собирая вместе объемные и поверхностные интегралы учтем, что $S = S_3$.

Получим следующее выражение для вариации функционала

$$\delta J = \int_{S_3} \lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \delta T dL - \int_V \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \delta T dV$$

Из условия $\delta J = 0$ получим условия экстремума функционала. Это стационарное уравнение теплопроводности и граничные условия, что и требовалось доказать.

Теперь аппроксимируем функцию распределения температуры T в области V в соответствии с методом конечных элементов. То есть разобьем область V на тетраэдральные элементы и внутри каждого элемента аппроксимируем температуру линейным полиномом.

Теперь минимизируем функционал J на множестве узловых значений функции T .

Для удобства введем две матрицы

$$\{g\}^T = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \right],$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Тогда функционал J можно записать в виде

$$J = \int_V \frac{1}{2} (\{g\}^T [D] \{g\}) dV.$$

Разобьем интегралы на интегралы по отдельным элементам

$$J = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} (\{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\}) dV,$$

где E – общее число элементов. Последнее соотношение можно записать так:

$$J = J^{(1)} + J^{(2)} + \dots + J^{(E)} = \sum_{e=1}^E J^{(e)},$$

где $J^{(e)}$ - вклад отдельного элемента в функционал.

Минимизация функционала требует выполнения соотношения

$$\frac{\partial J}{\partial \{T\}} = \frac{\partial}{\partial \{T\}} \sum_{e=1}^E J^{(e)} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial J^{(e)}}{\partial \{T\}} = 0$$

Принимая во внимание функции формы (5), запишем выражение для $\{g^{(e)}\}$:

$$\{g^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \\ T_p \end{Bmatrix}$$

Дифференцируя функции формы (5), получим

$$\{g^{(e)}\} = [B^{(e)}]\{T\},$$

где

$$[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m & b_p \\ c_i & c_j & c_m & c_p \\ d_i & d_j & d_m & d_p \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты матрицы определяются из (3б).

Теперь можно записать:

$$J^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{T\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} dV.$$

Продифференцируем по $\{T\}$

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{T\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} dV = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} dV$$

Вклад отдельного элемента $\frac{\partial J^{(e)}}{\partial \{T\}}$ в общую сумму в $\frac{\partial J}{\partial \{T\}}$ равен

$$\frac{\partial J^{(e)}}{\partial \{T\}} = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} dV.$$

Таким образом, процесс минимизации сведен к следующей системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$[K]\{T\} = 0,$$

где $[K] = \sum_{e=1}^E [K^{(e)}]$

Матрица $[K]$ – матрица теплопроводности. Она формируется суммированием отдельных элементов:

$$[K^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV.$$

Вычислим матрицу теплопроводности элемента:

$$\begin{aligned} & \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV = \\ & = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{12V^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & c_i & d_i \\ b_j & c_j & d_j \\ b_m & c_m & d_m \\ b_p & c_p & d_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m & b_p \\ c_i & c_j & c_m & c_p \\ d_i & d_j & d_m & d_p \end{bmatrix} dV. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение постоянно и может быть вынесено за знак интеграла

$$\begin{aligned} & \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV = \\ & = [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \int_{V^{(e)}} dV = V^{(e)} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}]. \end{aligned}$$

Перемножив матрицы, приходим к следующему выражению

$$\begin{aligned} & \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV = \\ & = \frac{\lambda}{12V^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m & b_i b_p \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m & b_j b_p \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m & b_m b_p \\ b_p b_i & b_p b_j & b_p b_m & b_p b_p \end{bmatrix} + \\ & + \frac{\lambda}{12V^{(e)}} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m & c_i c_p \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_m & c_j c_p \\ c_m c_i & c_m c_j & c_m c_m & c_m c_p \\ c_p c_i & c_p c_j & c_p c_m & c_p c_p \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\lambda}{12V^{(e)}} \begin{bmatrix} d_i d_i & d_i d_j & d_i d_m & d_i d_p \\ d_j d_i & d_j d_j & d_j d_m & d_j d_p \\ d_m d_i & d_m d_j & d_m d_m & d_m d_p \\ d_p d_i & d_p d_j & d_p d_m & d_p d_p \end{bmatrix}.$$

2.3.4. Постановка краевой задачи

Рассмотрим тело, занимающее объем V с границей S , в декартовой системе координат XYZ . Граница тела разбита на три части, так что $S = S_\sigma \cup S_u \cup S_{u\sigma}$.

На части границы S_σ действуют поверхностные силы $\vec{P}_n = P_{n_i} \vec{k}_i$:

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) n_j |_{S_\sigma} = P_{n_i}(x_1, x_2, x_3)$$

На части границы S_u заданы перемещения $\vec{u}^* = u_i^* \vec{k}_i$:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) n_j |_{S_u} = u_i^*(x_1, x_2, x_3)$$

На части границы $S_{u\sigma}$ заданы оба вектора, \vec{P}_n и \vec{u}^* :

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) n_j |_{S_{u\sigma}} = P_{n_i}(x_1, x_2, x_3)$$

$$u_i(x_1, x_2, x_3) n_j |_{S_{u\sigma}} = u_i^*(x_1, x_2, x_3)$$

Искомыми величинами являются три функции перемещения $u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2(x_1, x_2, x_3)$, $u_3(x_1, x_2, x_3)$.

Соотношения Коши, связывающие компоненты тензора деформаций и перемещения частиц, имеют вид [10]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \quad (7)$$

Формоизменение в состоянии упругих и малых пластических деформаций, при расчете массивных объектов, происходят при малых относительных перемещениях точек сплошной среды, а значит, мы имеем дело с малыми деформациями, когда $\partial u_i / \partial x_j \ll 1$. Тогда из (7) получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Механические свойства сплошной среды опишем законом Гука для изотропных тел, дополнительный член $\delta_{ij}\alpha\Delta T$ описывает изменение элементарного объема тела с изменением его температуры ΔT :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - 3\nu\delta_{ij}\sigma] + \delta_{ij}\alpha\Delta T,$$

где среднее напряжение $\sigma = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}$, α – коэффициент линейного расширения тела ($1/^\circ\text{C}$). Обратные соотношения:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{3\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij}\varepsilon - \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij}\alpha\Delta T \right). \quad (8)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}$ – средняя деформация.

2.3.5. Соотношения МКЭ для термоупругих задач

Соотношения МКЭ для термоупругих задач описаны в [10]. Будем использовать простейшие тетраэдральные элементы. Перемещение каждого узла имеют три компоненты:

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}.$$

Перемещения элемента определяется двенадцатью компонентами перемещений его узлов, которые можно записать в виде вектора:

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \delta_p \end{Bmatrix}.$$

Для аппроксимации каждого перемещения в отдельности используем функции формы (5). Тогда, по формуле (4), перемещения в любой точке внутри элемента задаются вектор-столбцом:

$$\{f^{(e)}\} = [N]\{\delta^{(e)}\} = [N_i, N_j, N_m, N_p] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \delta_p \end{Bmatrix},$$

В области упругих деформаций вектор узловых перемещений элемента определяет соответствующее напряженно-деформированное состояние данного элемента. В соответствии с принципом аддитивности, упругих и температурных деформаций, на это напряженно-деформированное состояние накладывается напряженно-деформированное состояние, вызванное изменением температуры. При этом считается, что температурное поле тела не зависит от напряженно-деформированного состояния и рассчитывается по уравнениям теплопроводности.

$$\{\varepsilon^{(e)}\} = [B^{(e)}]\{\delta^{(e)}\}, \quad (9)$$

$$\{\delta^{(e)}\} = [D^{(e)}] \left(\{\varepsilon^{(e)}\} - \{\varepsilon_T^{(e)}\} \right),$$

где $\{\varepsilon^{(e)}\}$ - вектор компонент деформации элемента; $[B^{(e)}]$ – матрица связи перемещений и деформаций, определяемая из соотношений Коши (7); $\{\varepsilon_T^{(e)}\}$ – вектор компонент температурной деформации элемента; $\{\delta^{(e)}\}$ – вектор компонент напряжений элемента; $[D^{(e)}]$ – матрица упругих констант, получаемая из закона Гука (8).

При аппроксимации перемещений линейным полиномом их градиенты (6) постоянны внутри элемента и рвутся на границе со смежными элементами. Из-за этого деформации и напряжения также терпят разрывы на границах со смежными элементами. Осцилляции напряжений между элементами могут достигать недопустимо большой величины, вплоть до смены знака. Поэтому на практике напряжения усредняют для смежных элементов.

Как известно, из всех перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, экстремальное значение потенциальной энергии сообщают те перемещения, которые

удовлетворяют уравнениям равновесия. Воспользуемся этим для вывода уравнений равновесия.

Энергия деформации произвольного элемента $V^{(e)}$ задается формулой

$$A^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \left(\{\varepsilon^{(e)}\}^T \{\sigma^{(e)}\} - \{\varepsilon_T^{(e)}\}^T \{\sigma^{(e)}\} \right) dV. \quad (10)$$

С помощью формул (9), предыдущую формулу можно записать в виде:

$$A^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \left(\{\delta^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\delta^{(e)}\} - \right. \\ \left. - 2\{\delta^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_T^{(e)}\} + \{\varepsilon_T^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_T^{(e)}\} \right) dV.$$

Работу, совершаемую внешними силами, можно разделить на три части: работа A_c , совершаемая сосредоточенными силами, работа A_s поверхностных сил, работа массовых сил A_g .

Будем считать, что сосредоточенные силы $\{F_c\}$ приложены к узлам. Тогда работа сосредоточенной силы равна произведению величины этой силы на длину пути, на котором эта сила действует:

$$A_c^{(e)} = \{\delta^{(e)}\}^T \{F_c^{(e)}\}.$$

Работа распределенных сил $\{F_g\}$ определяется формулой:

$$A_g^{(e)} = \{\delta^{(e)}\} \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{F_g^{(e)}\} dV.$$

Работа поверхностных сил $\{F_s\}$ на границе (поверхности) элемента $S^{(e)}$:

$$A_s^{(e)} = \{\delta^{(e)}\} \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{F_s^{(e)}\} dV.$$

Запишем выражение для потенциальной энергии всей системы, учитывая, что работа внешних сил противоположна по знаку их потенциальной энергии

$$\begin{aligned}
\Pi = & \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{\delta^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\delta^{(e)}\} dV - \right. \\
& - \int_{V^{(e)}} \{\delta^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_T^{(e)}\} dV + \int_{V^{(e)}} \{\varepsilon_T^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_T^{(e)}\} dV - \\
& - \{\delta^{(e)}\}^T \{F_C^{(e)}\} - \{\delta^{(e)}\} \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{F_g^{(e)}\} dV - \\
& \left. - \{\delta^{(e)}\} \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{F_S^{(e)}\} dV \right\}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Теперь продифференцируем (11) по $\{\delta^{(e)}\}$ и, приравняв результат нулю, получим систему разрешающих уравнений.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \Pi}{\delta \{\delta^{(e)}\}} = & \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \{\delta^{(e)}\} - \right. \\
& - \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_T^{(e)}\} dV - \{F_C^{(e)}\} - \\
& \left. - \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{F_g^{(e)}\} dV - \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{F_S^{(e)}\} dV \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Окончательно получим основные уравнения МКЭ:

$$[K]\{\delta\} = \{F\}$$

$$[K] = \sum_{e=1}^E [K^{(e)}]$$

$$[F] = - \sum_{e=1}^E [F^{(e)}]$$

Матрица жесткости $[K]$ и вектор нагрузки $\{F\}$ формируются суммированием вкладов отдельных элементов:

$$[K^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}]$$

$$[F^{(e)}] = - \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_T^{(e)}\} dV - \{F_c^{(e)}\} - \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{F_g^{(e)}\} dV$$

$$- \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{F_S^{(e)}\} dV.$$

2.3.6. Критерий разрушений

В задачах, при расчетах деформаций используют критерии разрушения, в соответствии с которыми прогнозируется повреждение тел, подвергнутых воздействию нагрузки. Поскольку единого критерия, применимого ко всем материалам, находящимся в разнообразных условиях, не существует, то для выбора критерия необходимо использовать максимум информации о свойствах материала. Также эффективным может оказаться расчет по нескольким критериям и последующее сравнение результатов.

В данной работе был выбран критерий максимального разрушения по фон Мизесу, который основывается на теории Мизес-Хенки. Согласно теории, пластичный материал начинает повреждаться в местах, где интенсивность напряжений по фон Мизесу становится большим или равным предельной интенсивности напряжений.

В главных напряжениях σ_1 , σ_2 и σ_3 интенсивность напряжений по фон Мизесу выражается следующим образом

$$\sigma_{von_Mises} = \{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]/2\}^{\frac{1}{2}}$$

Глава 3. РАСЧЕТЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ В СИСТЕМЕ MSC.PATRAN/NASTRAN

3.1. Используемые системы компьютерного моделирования

Компьютерное моделирование проводилось с использованием программных продуктов SolidWorks и MSC.Patran/Nastran (рис 11). Программа SolidWorks использовалась для построения геометрической модели фрагмента поверхности планеты. MSC.Patran применялась для создания сетки конечных элементов, задания свойств материала, задания граничных условий и просмотра результатов. А MSC.Nastran для обчета модели.

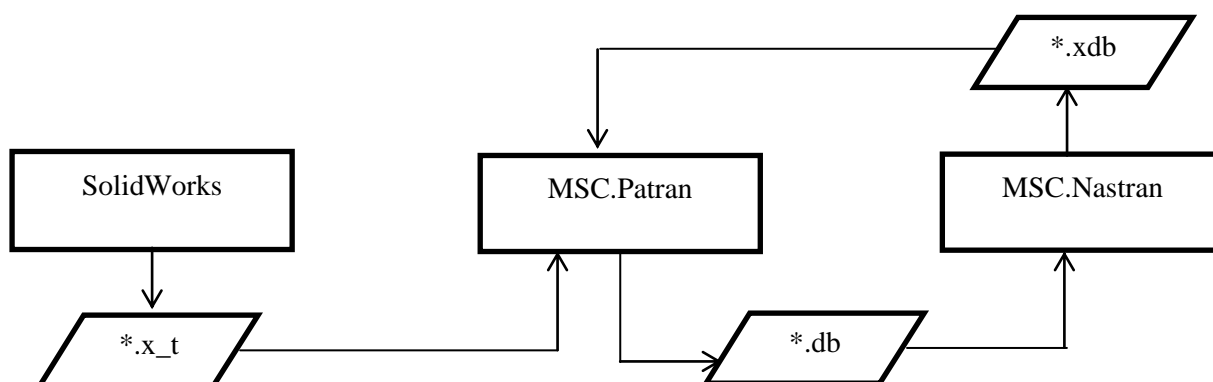


Рис .11. Блок-схема работы системы SolidWorks -MSC.Patran - MSC.Nastran

Данные программные продукты относятся к числу современных систем автоматизации проектирования и инженерных расчетов, так называемых CAD/CAE-систем (CAD – Computer Aided Design, CAM – Computer Aided Engineering). Эти системы позволяют решать многомерные задачи в пространственных областях сложной формы.

3.1.1. Система SolidWorks

SolidWorks - система автоматизированного проектирования, инженерного анализа и подготовки производства изделий любой сложности и назначения. При выполнении работы использовались развитые функциональные возможности этой системы по построению 3D геометрических моделей твердых тел (прямоугольный параллелепипед со сферической выемкой на одной из граней). Результат построения использовался далее в системе MSC.Patran [11].

3.1.2. Система MSC.Patran/Nastran

Эта система является одним из безусловных лидеров в области компьютерного инжиниринга и моделирования задач механики деформируемого твердого тела и конструкций ответственного назначения; она обеспечивает интеграцию автоматизированных систем проектирования, моделирования, анализа и оценки результатов расчетов. Основу системы составляет использование метода конечных элементов, поскольку этот метод практически не накладывает ограничений на геометрию детали, свойства материала и граничные условия.

MSC.Patran – программный продукт с открытой архитектурой, обеспечивающий интеграцию автоматизированных систем проектирования, моделирования, анализа и оценки результатов расчетов. В качестве основных функций графического модуля можно выделить:

- возможности создания, импорта и модификации геометрических моделей;
- «управляемую» генерацию 1-, 2- и 3-мерных сеток конечных элементов;
- приложение нагрузок, граничных условий, свойств материалов и элементов непосредственно к геометрическим примитивам;

- определение графическим способом и визуальное отображение переменных нагрузок и температурно-зависимых свойств материалов;
- возможности анализа результатов расчетов, включая использование цветовой индикации и построения графиков;

MSC.Nastran – это конечно-элементная программная система, которая обеспечивает полный набор расчетов, включая расчет напряженно-деформированного состояния, решение задач теплопередачи, исследование установившихся и неустойчивых процессов, нелинейных статических и динамических переходных процессов и т.п. , расчет критических частот и вибраций роторных машин, анализ частотных характеристик и т.д. В системе возможно моделирование практически всех типов материалов, включая композитные [12],[13].

3.2. Этапы создания геометрической модели

Ниже представлены этапы создания геометрической модели твердого тела (прямоугольный параллелепипед со сферической выемкой на одной из граней) в системе SolidWorks.

- Построение эскиза боковой грани, параллелепипеда (250000x50000 мм).

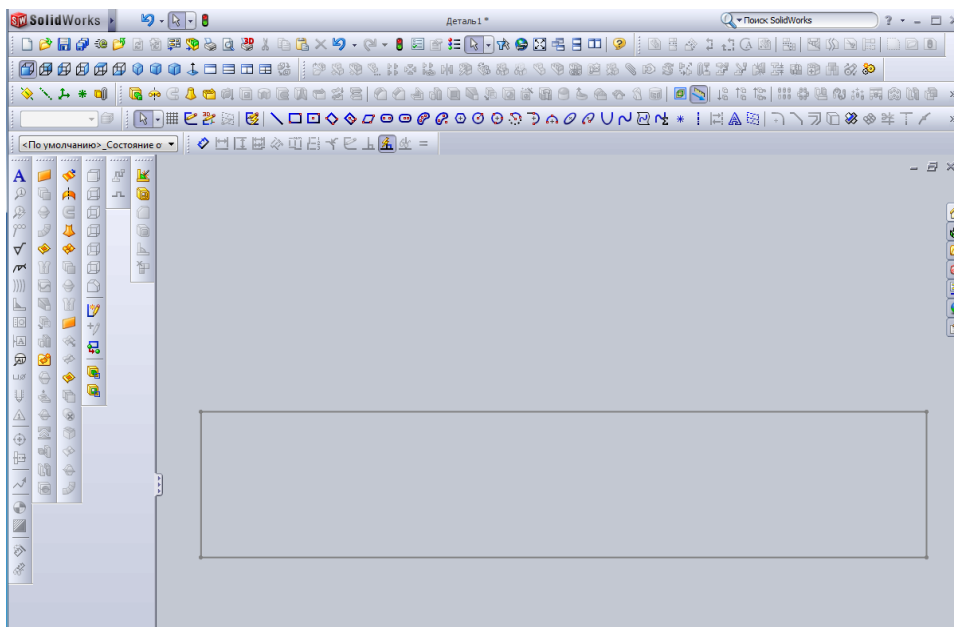


Рис. 12. Создание эскиза боковой грани

- Построение эскиза параллелепипеда с помощью операции «вытянутая бобышка/основание», длина вытягивания 125000 мм.

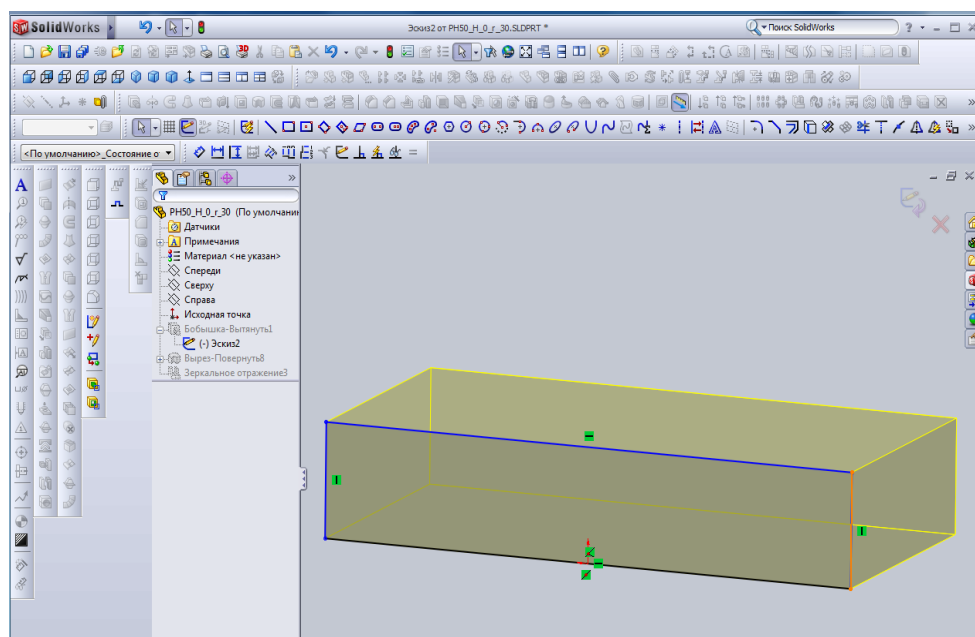


Рис. 13. Вытягивание эскиза

- Построение заготовки сферической выемки радиуса 30000 мм, расстояние от внешней поверхности до выемки равно 30000 мм.

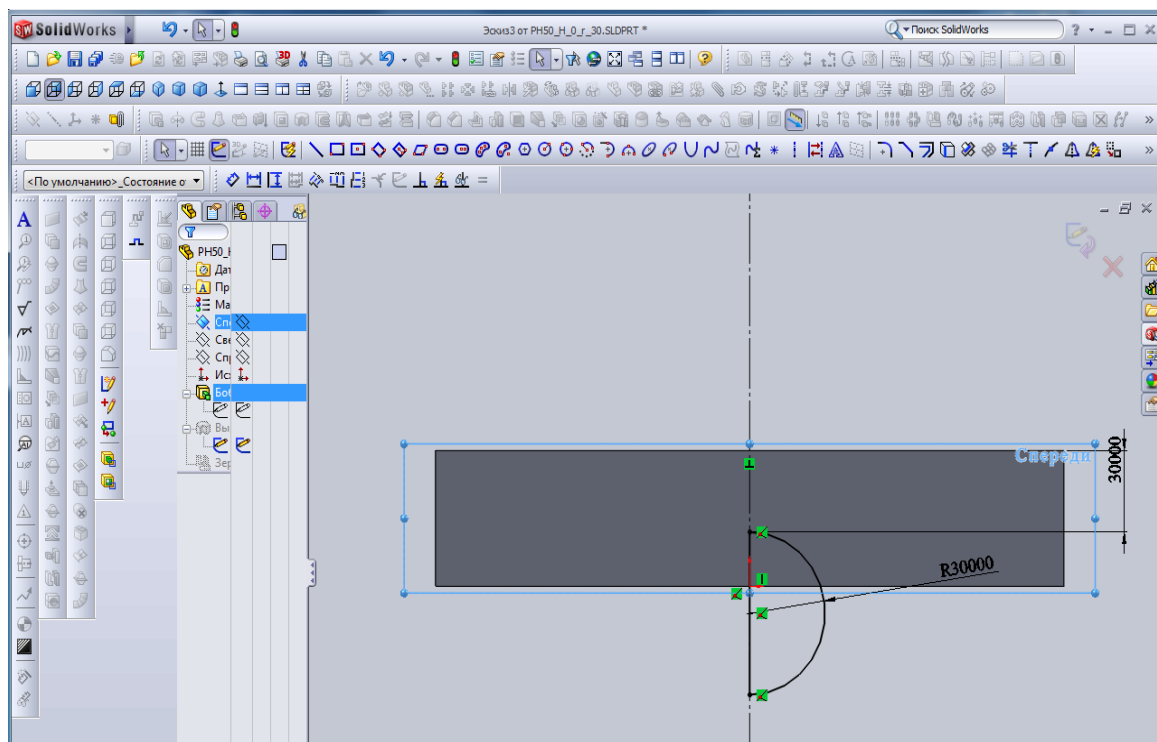


Рис. 14. Создание заготовки выреза

- Построение выемки с помощью операции «вырез-поворот» примененной к заготовке.

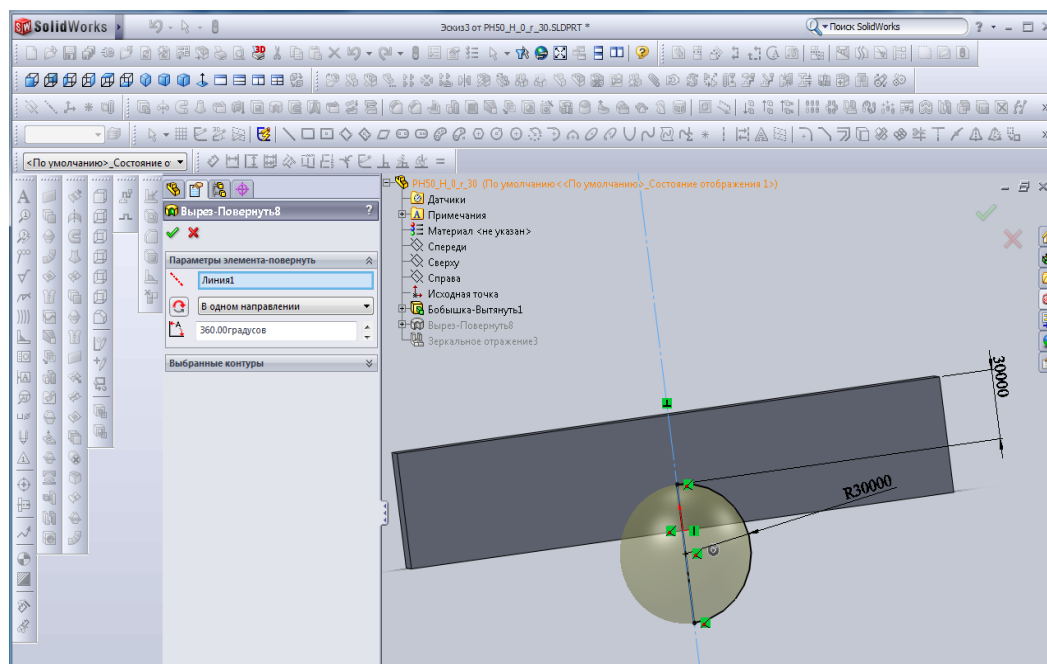


Рис. 15. Поворот эскиза выреза

В результате построена половина требуемой симметричной детали.

- Построение зеркального отображения.

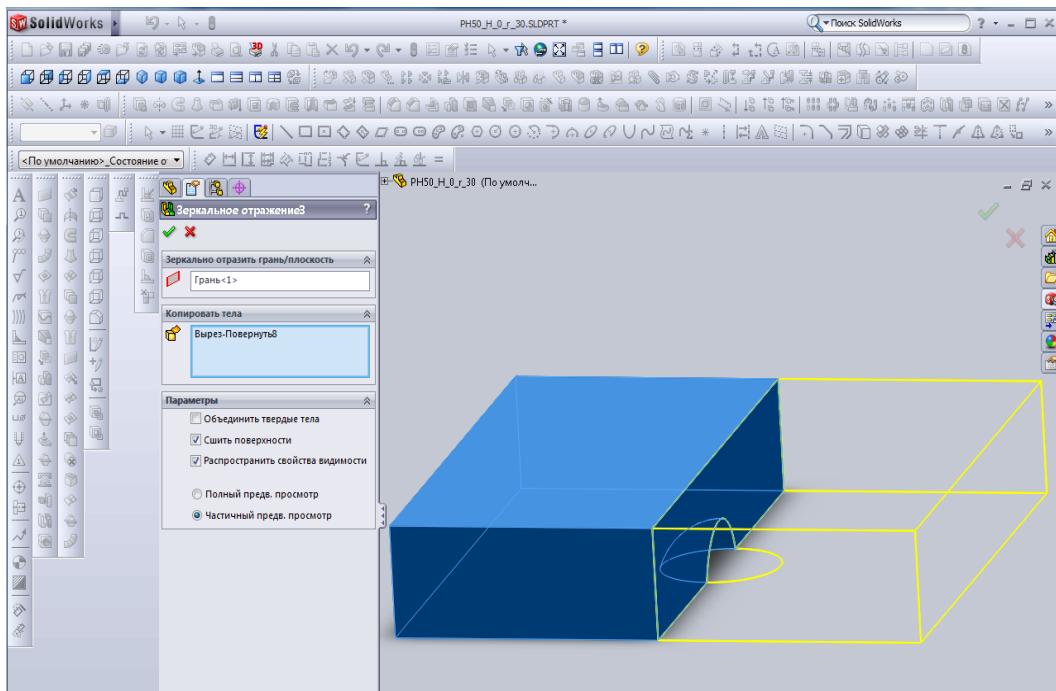


Рис. 16. Отображение заготовки

Так как далее эта геометрическая модель будет использоваться при работе в системе MSC.Patran/Nastran получившаяся модель сохраняется с расширением *.X_T.

3.3. Этапы работы в системе MSC.Patran/Nastran

Работа в системе MSC.Patran/Nastran заключается в последовательном решении температурной (thermal) и конструкционной (structural) задач.

На первом этапе происходит подготовка расчета температурной задачи: создается пустая база данных (общая для температурной и для конструкционной задач), затем из SolidWorks импортируется геометрическая модель, для которой задаются температурные свойства, после чего задаются температурные граничные условия и сформированная база данных обрабатывается с помощью программы MSC.Nastran.

На втором этапе с использованием MSC.Patran, готовится конструкционная задача: на основании числовых характеристик температурного поля, полученных на предыдущем этапе, формируются температурные граничные условия, задаются конструкционные свойства материала и конструкционные граничные условия. Измененная база данных отправляется на расчет в программе MSC.Nastran.

Результаты моделирования визуализируются в программе MSC.Patran.

Этапы работы в системе MSC.Patran/Nastran в экранной форме

- Создается новую базу данных.

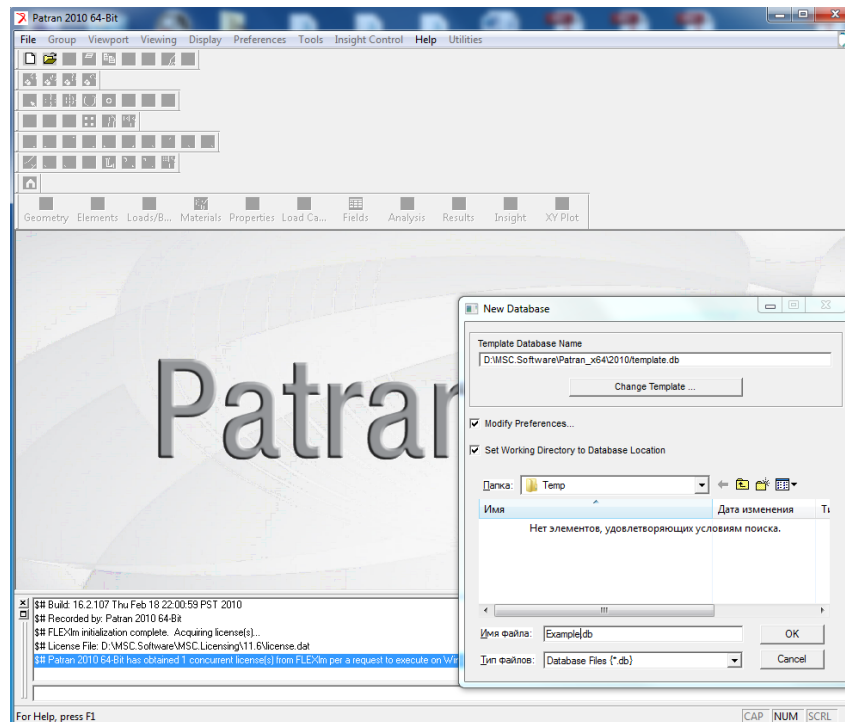


Рис. 17. Окно создания новой базы данных

- Решается какова будет погрешность и указывается что сначала будет решаться температурная задача.

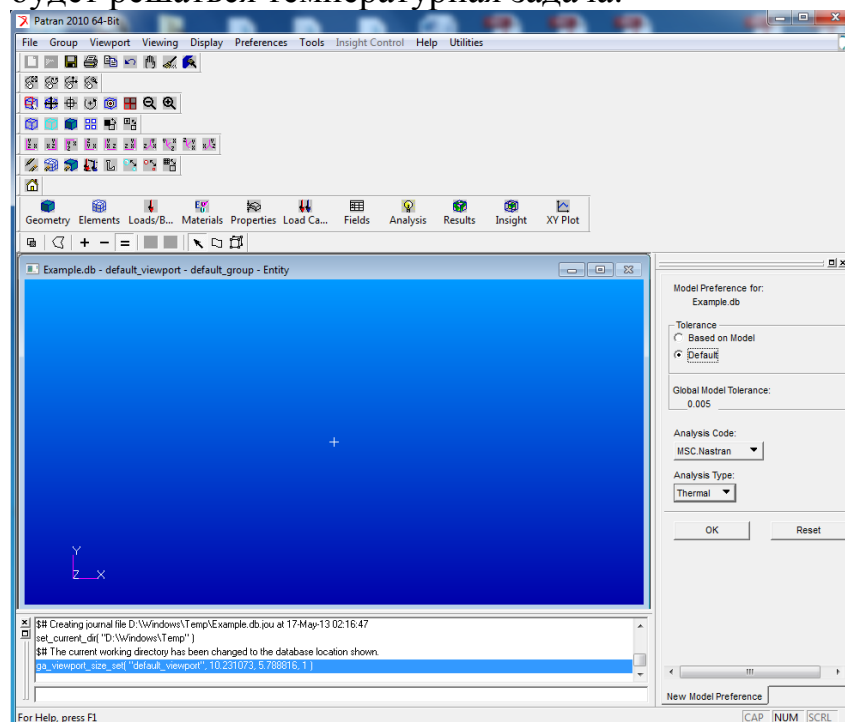


Рис. 18. Окно режима создания геометрии

- Создается геометрическая модель (импортируется в Patran из SolidWorks файл с расширением *.X_T).

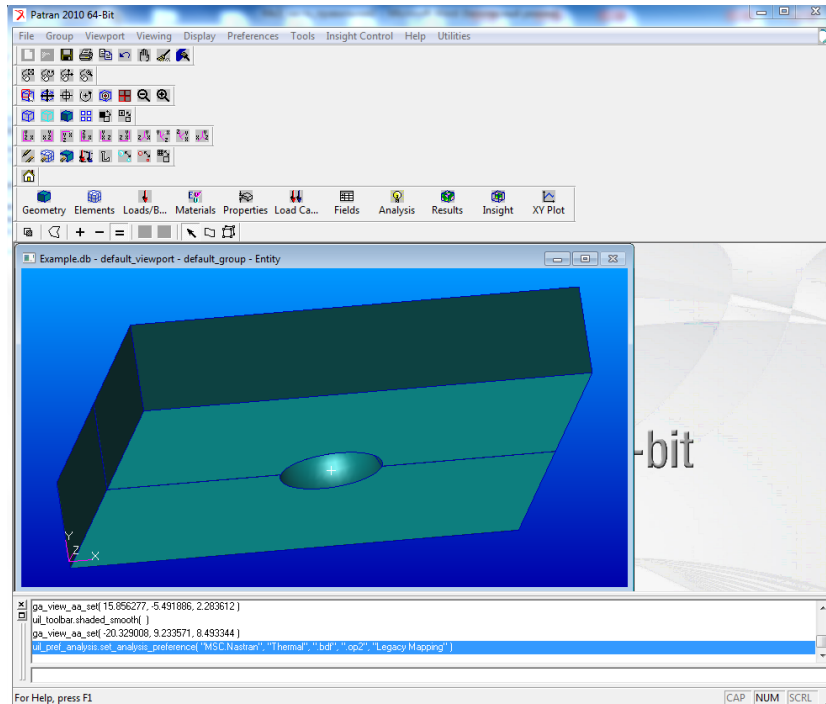


Рис. 19. Окно режима создания геометрии с готовой плитой

- Создается сетка конечных элементов: выбирается вид конечного элемента и задается максимальная длина ребра элемента.
Учитывается наличие двух сшитых по общей грани объекта.

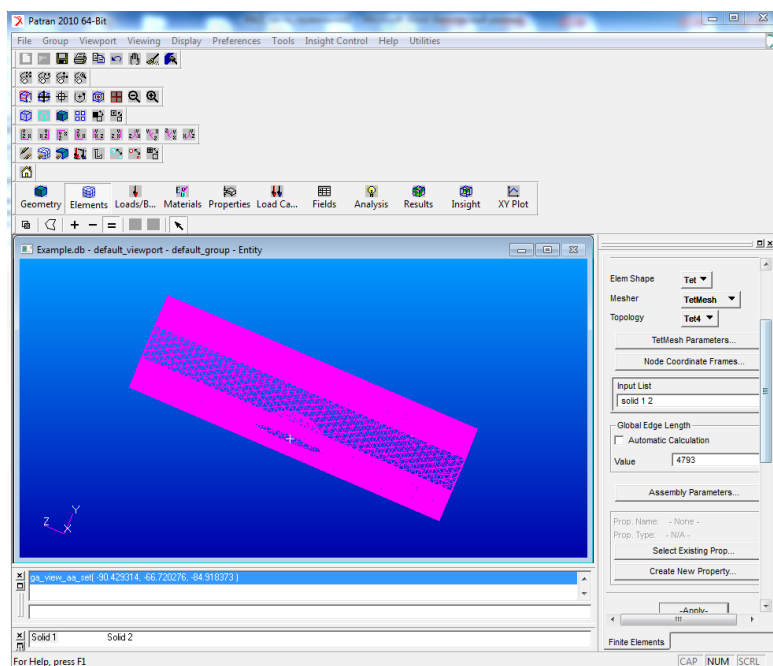


Рис. 20. Сетка конечных элементов

- Задаются температурные свойства материала:
теплопроводность, удельная теплоемкость и плотность.

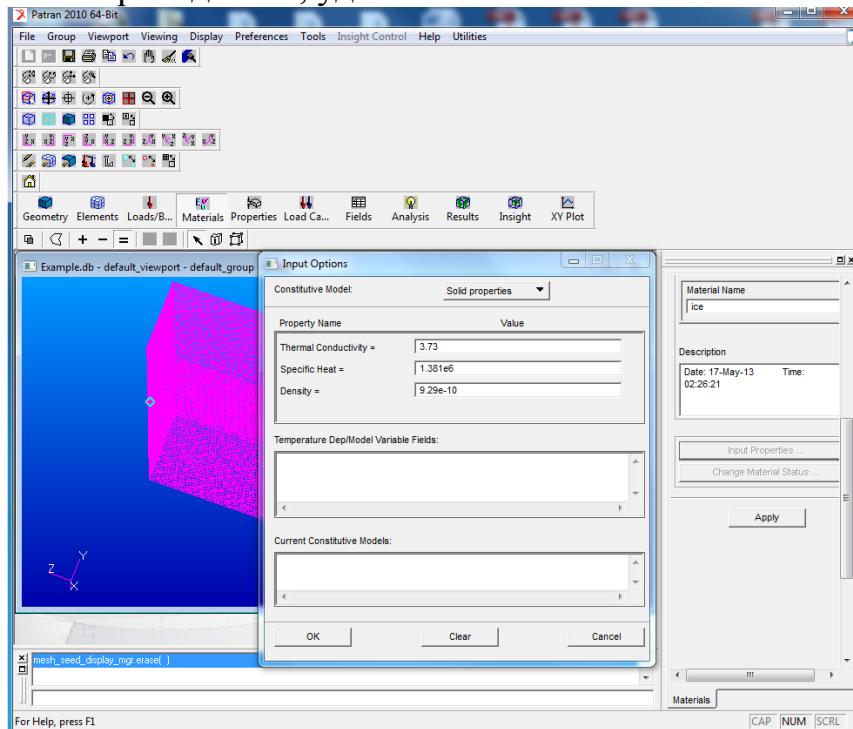


Рис. 21. Окно задания температурных свойств материала

-Каждому геометрическому объекту задается материал.

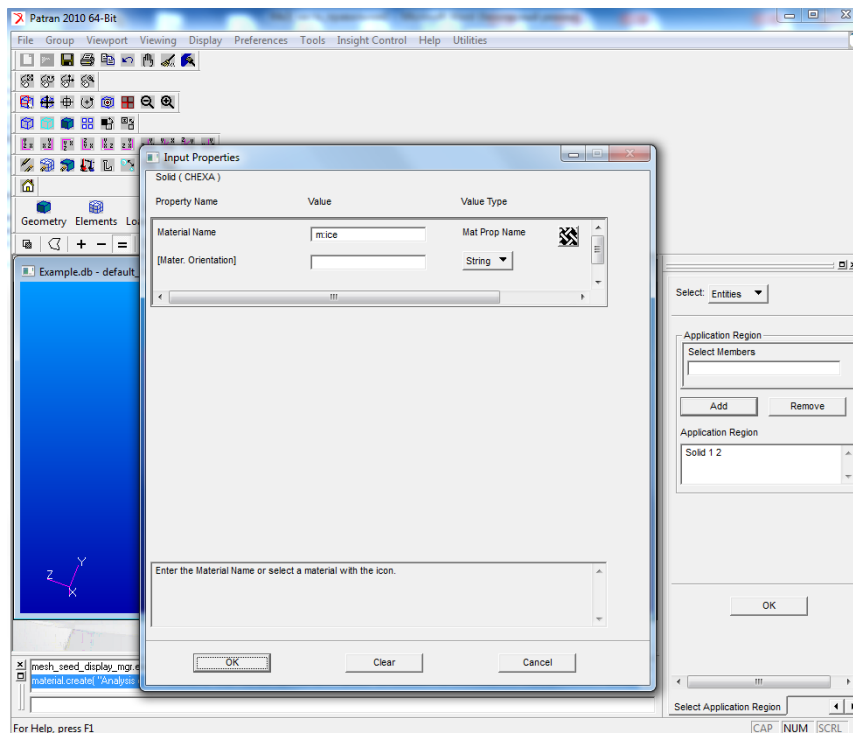


Рис. 22. Окно задания материала объекту

-Задаются граничные условия:

- Температура на внешней поверхности равна -100°C .

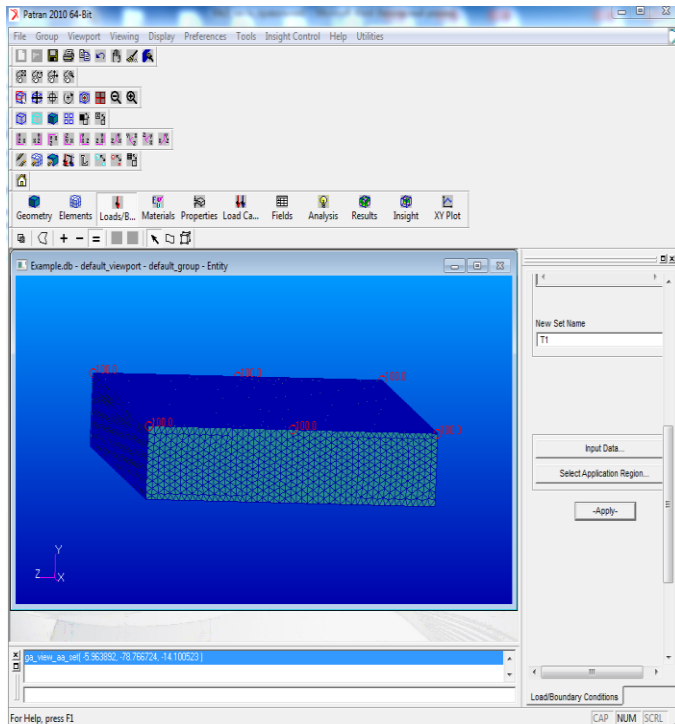


Рис. 23. Задание температуры на верхней грани

- Температура на внутренней плоской поверхности равна -6°C .

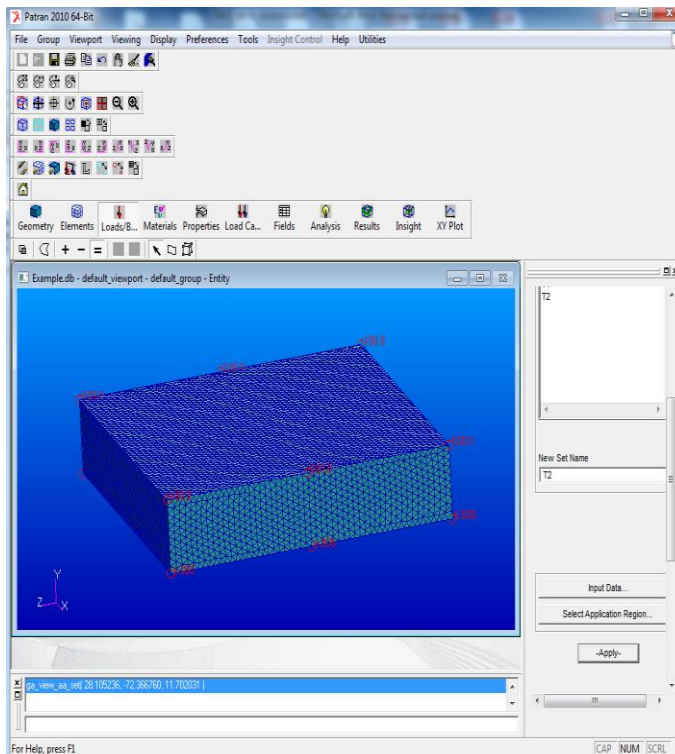


Рис. 24. Задание температуры на нижней грани

- Температура на внутренней вогнутой поверхности равна 0°C.

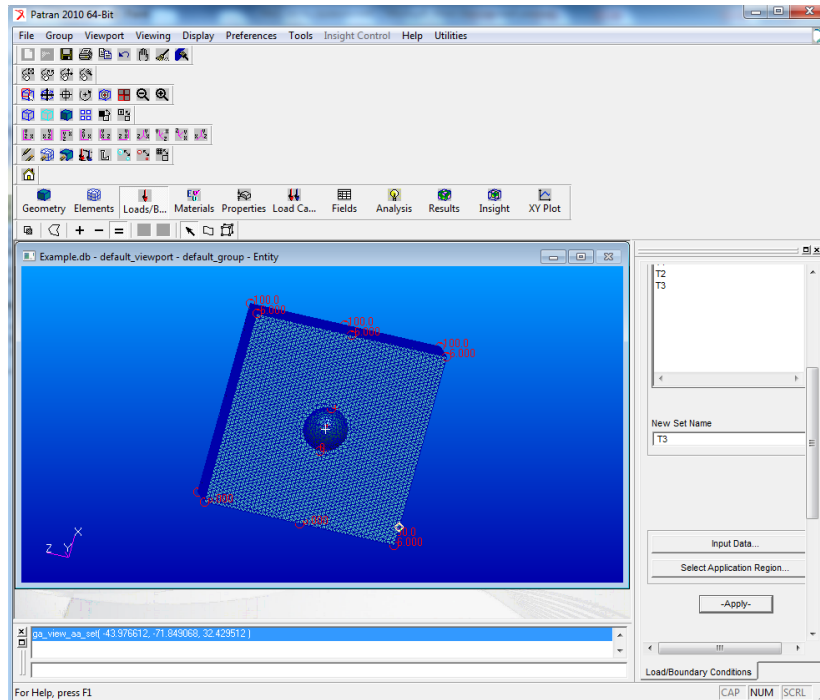


Рис. 25. Задание температуры на внутренней вогнутой поверхности

- Файл подготавливается к расчету, указываются единицы измерения температур, температура окружающей среды.

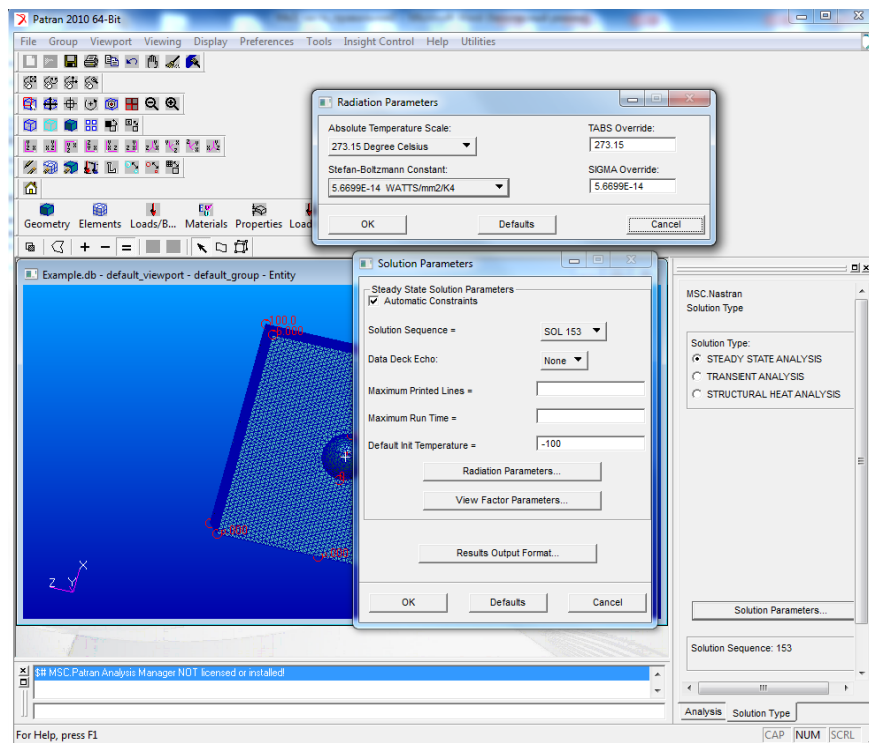


Рис. 26. Подготовка к расчету

- Выполняется расчет температурной задачи в программе Nastran, решение сохраняется в файле с расширением .xdb, далее это решение прикрепляется к существующей базе данных

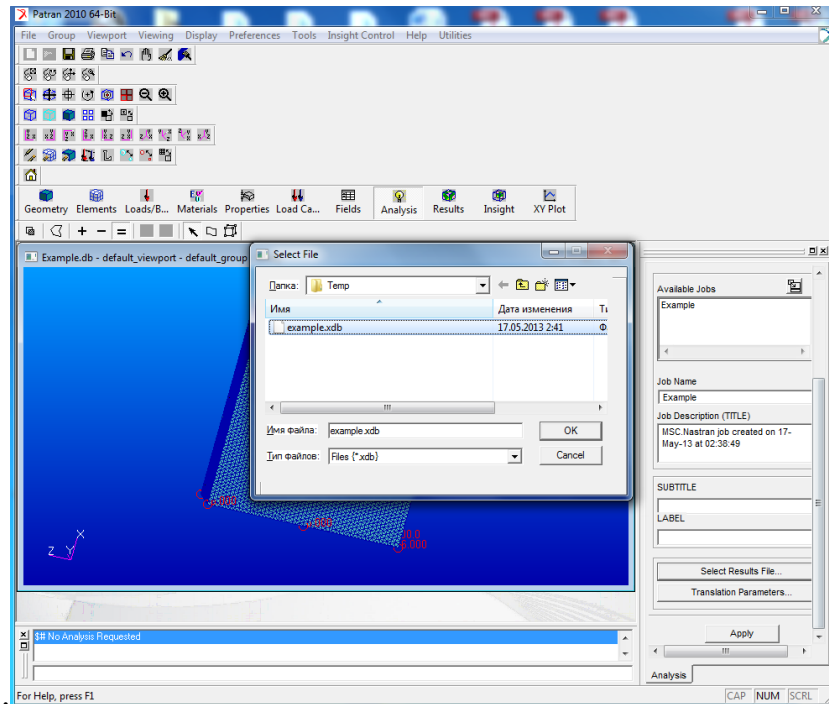


Рис.27. Выбор файла результатов

- Получается распределение температуры в изучаемом фрагменте.

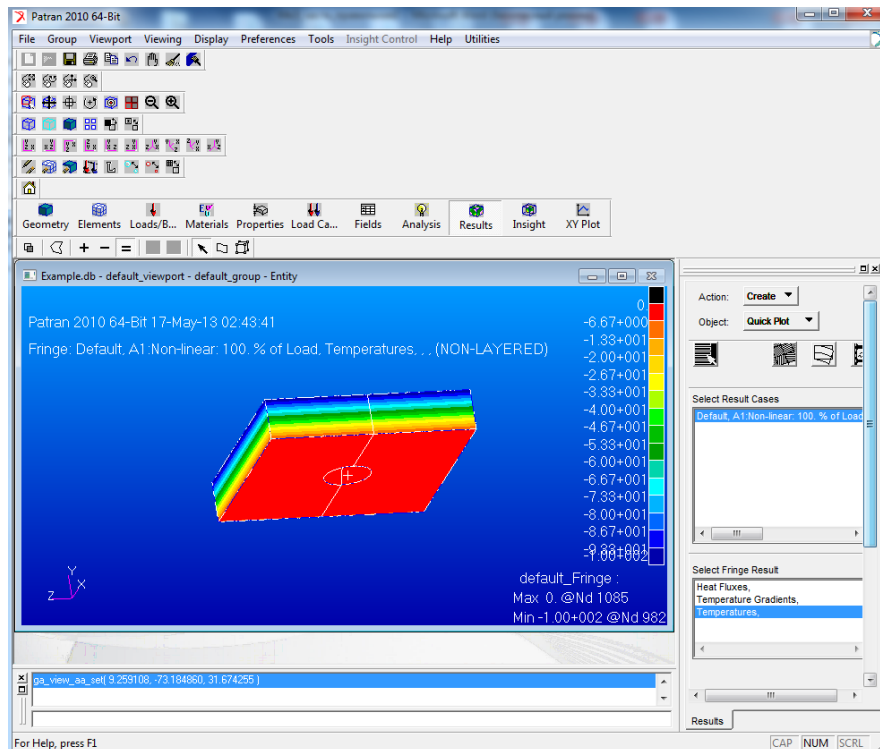


Рис. 28. Распределение температур

- Создается поле распределения этих температур для дальнейшего использования в конструкционной задаче.

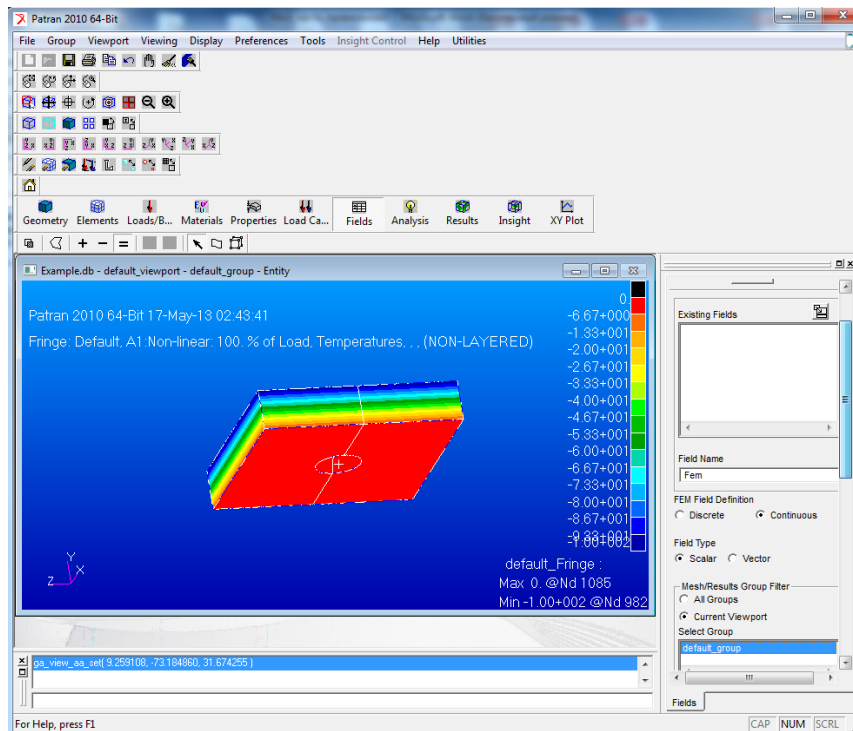


Рис. 29. Окно создания поля температур

- Создается дополнительный случай распределения нагрузок и тип задачи меняется на конструкционный.

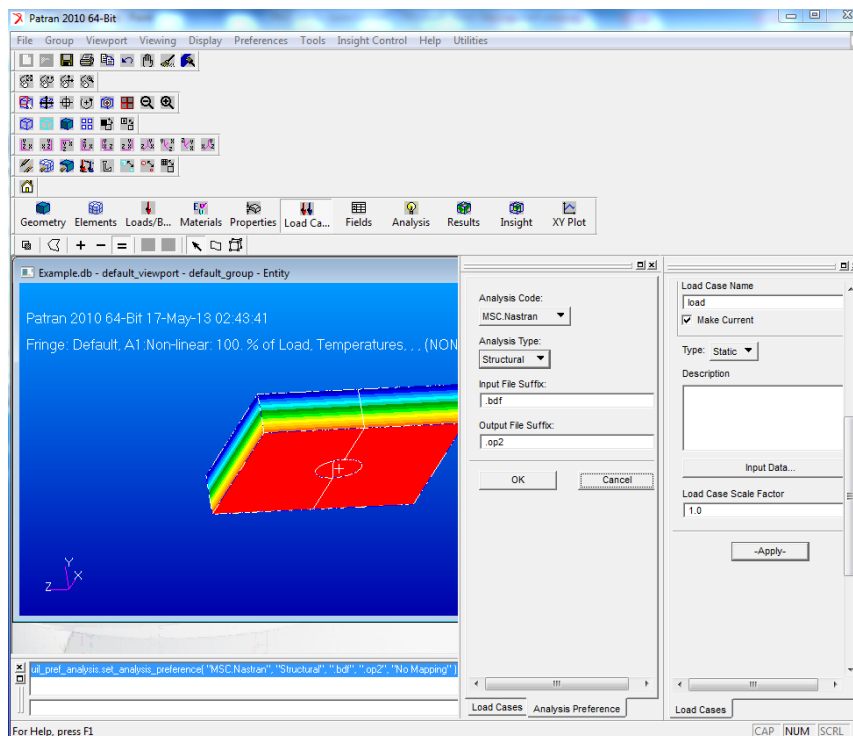


Рис. 30. Выбор типа задачи и случая распределения нагрузок

- Задаются свойства материала необходимые для решения конструкционной задачи: Модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения, плотность, также указывается температура материала.

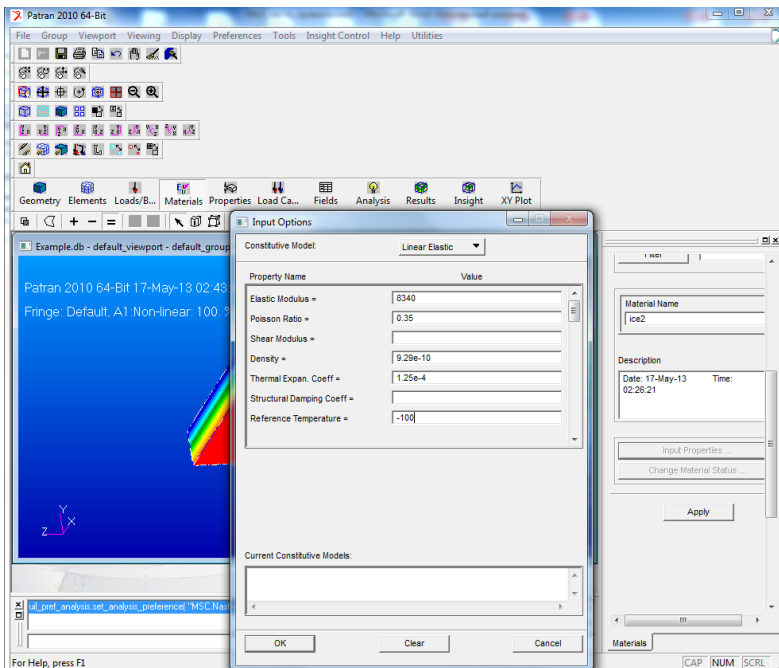


Рис. 31. Задание конструкционных свойств материала

- Материал с заданными свойствами применяется к уже существующим объектам.

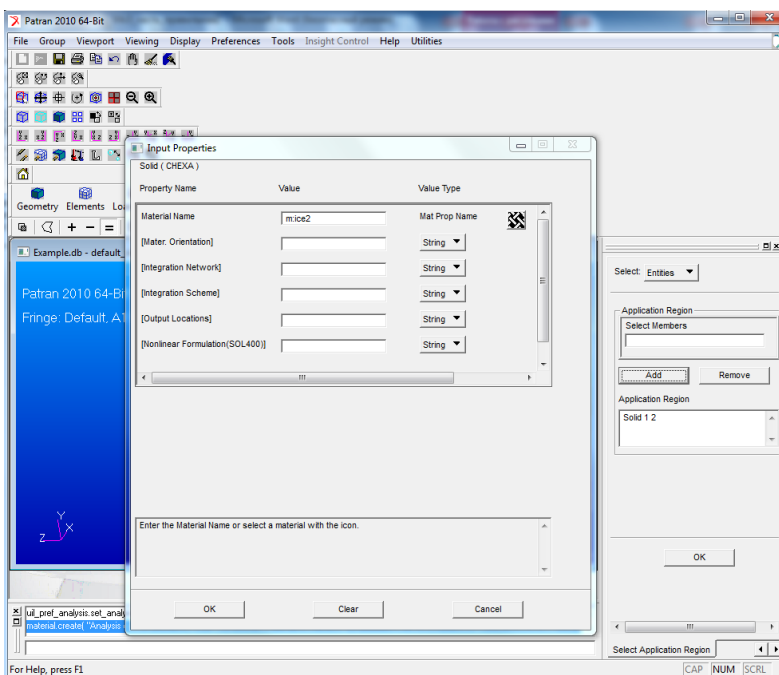


Рис. 32. Применение конструкционных свойств

- Задаются граничные условия для конструкционной задачи:
 - Заделка и температурное распределение в объектах. где заделка состоит из запрета на перемещение по X граней ортогональных оси X.

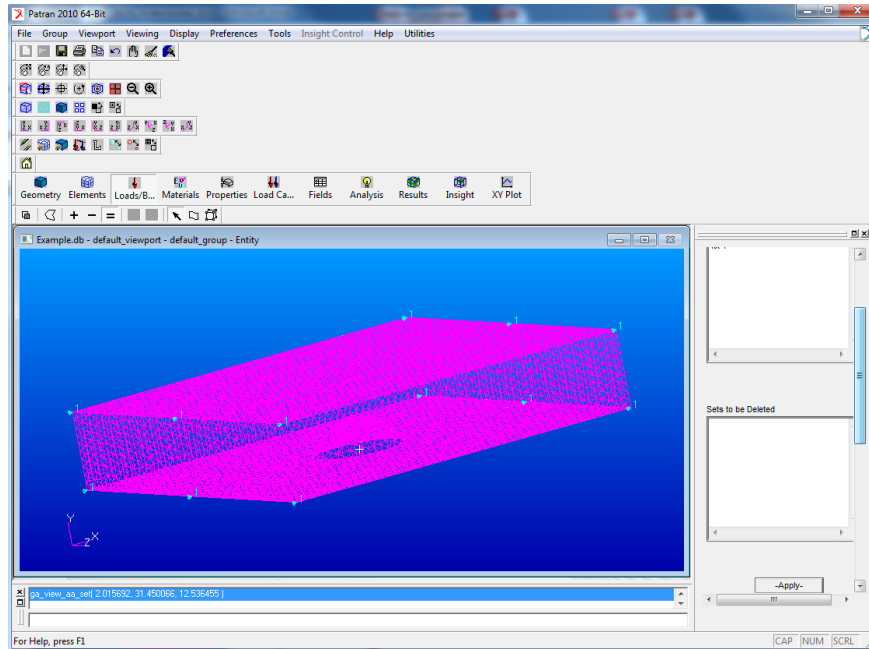


Рис. 33. Граничные условия для двух граней ортогональных оси X

- Запрета на перемещение по Z граней ортогональных оси Z.

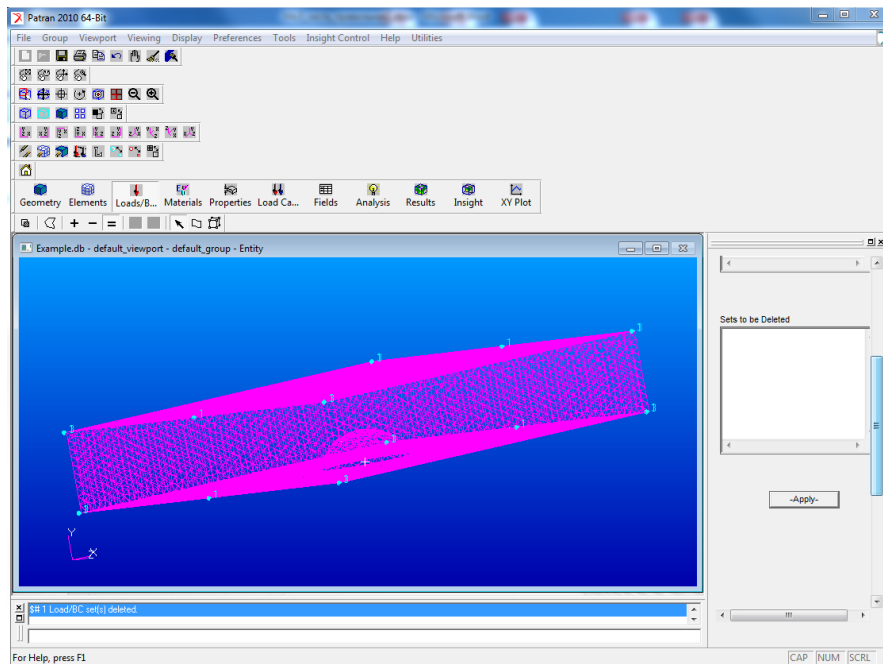


Рис. 34. Граничные условия для четырех боковых граней

- Запрета на перемещение по всем осям одной точки (была выбрана одна из вершин на внутренней поверхности фрагмента спутника).

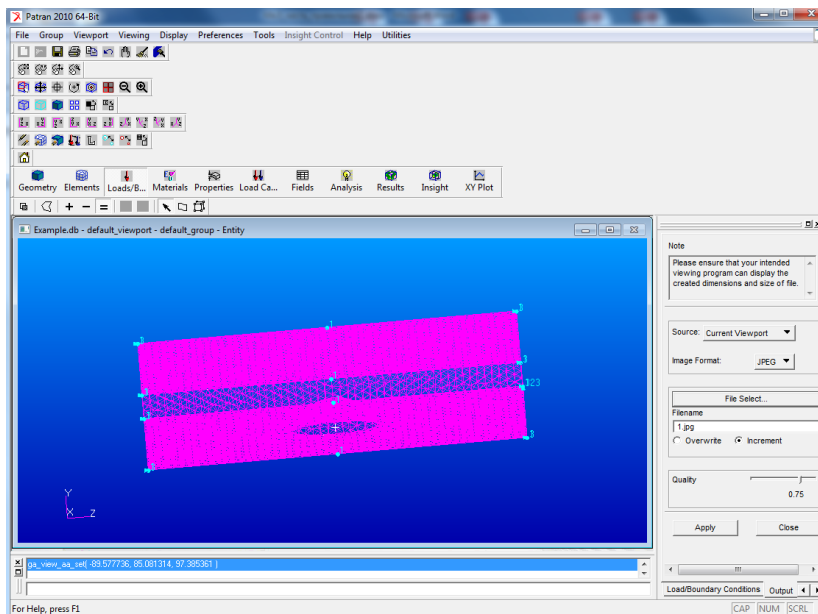


Рис. 35. Граничные условия для четырех боковых граней и жесткая заделка в одной точке

- Задается сохраненное поле распределения температур.

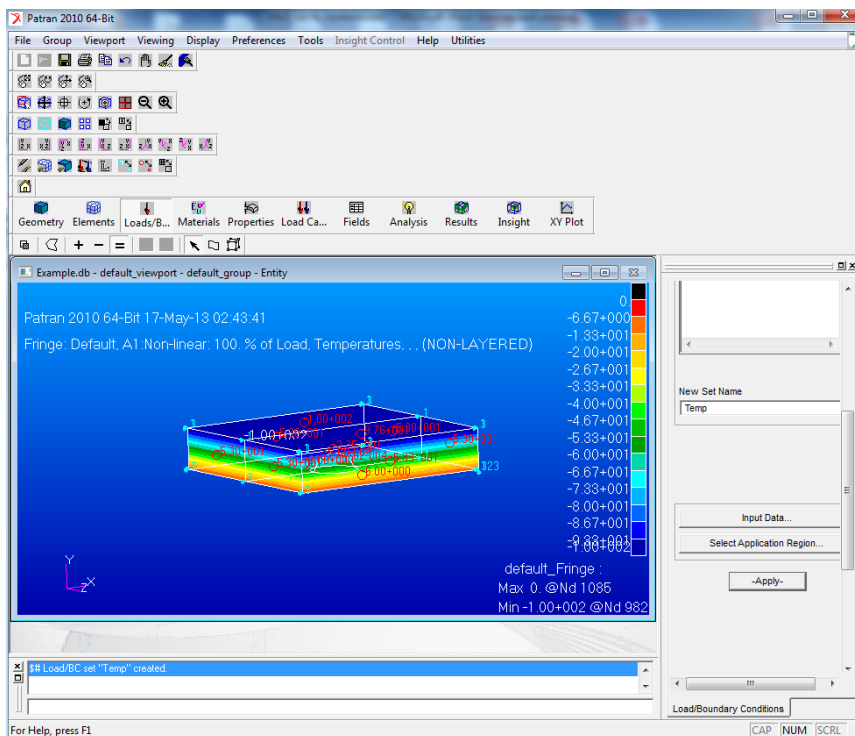


Рис. 36. Граничные условия для четырех боковых граней, жесткая заделка в одной точке и поле температур

-Файл готовится к повторному расчету с указанием нового распределения нагрузок.

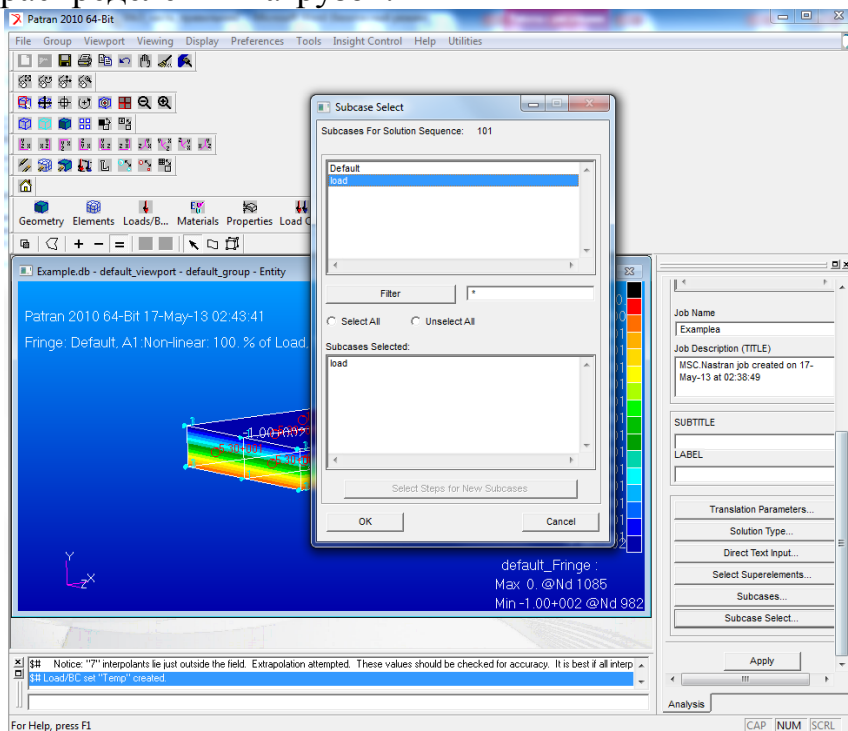


Рис. 37. Выбор случая распределения нагрузок

- Выполнив повторный расчет в программе Nastran, получаем второй файл решения с расширением .xdb. Файл с результатами прикрепляется к базе данных.

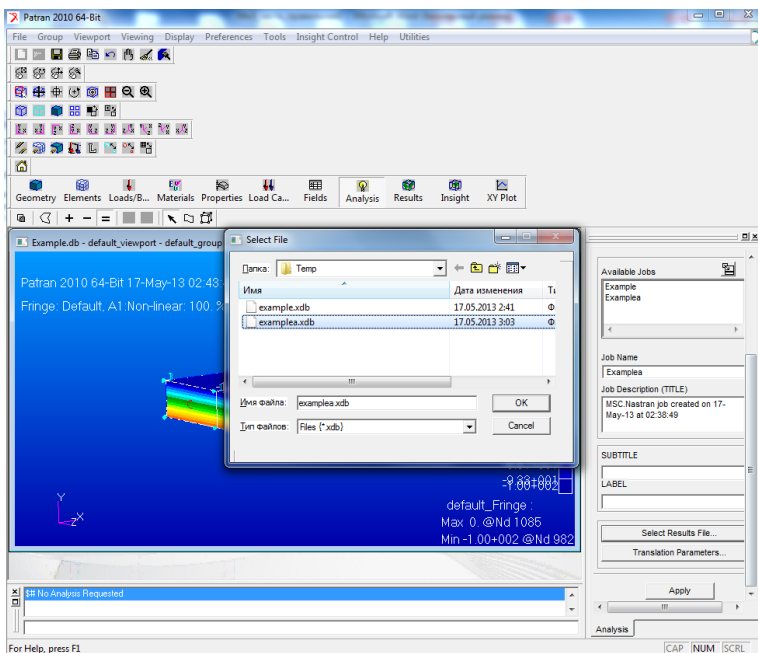


Рис. 38. Выбор второго файла с результатами

- Результаты могут отображаться в следующих видах:

- Распределение смещения вещества по оси Y

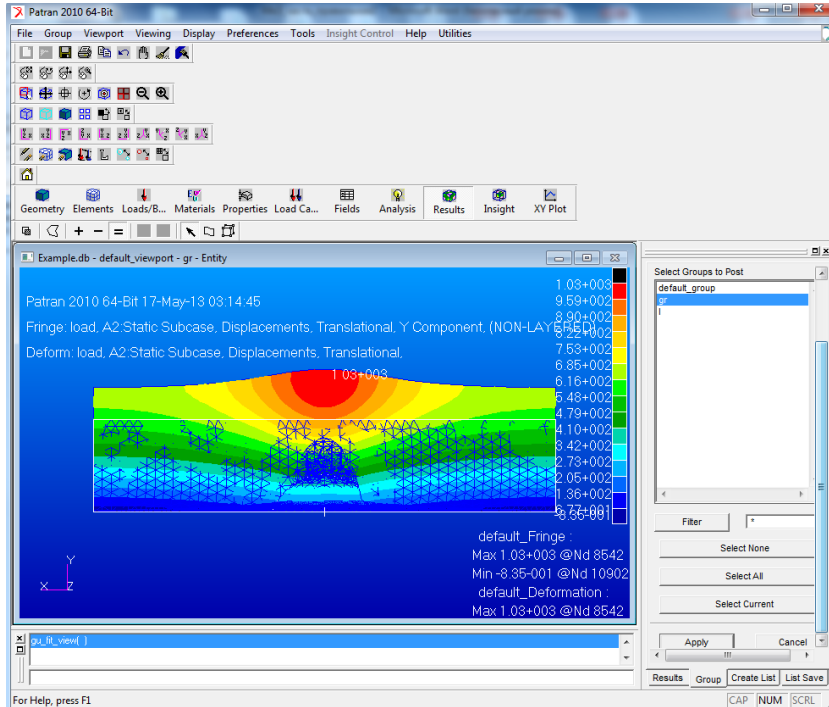


Рис.39. Перемещение по оси Y

- Распределение интенсивностей напряжений в изучаемом фрагменте ледяной поверхности по критерию фон Мизеса.

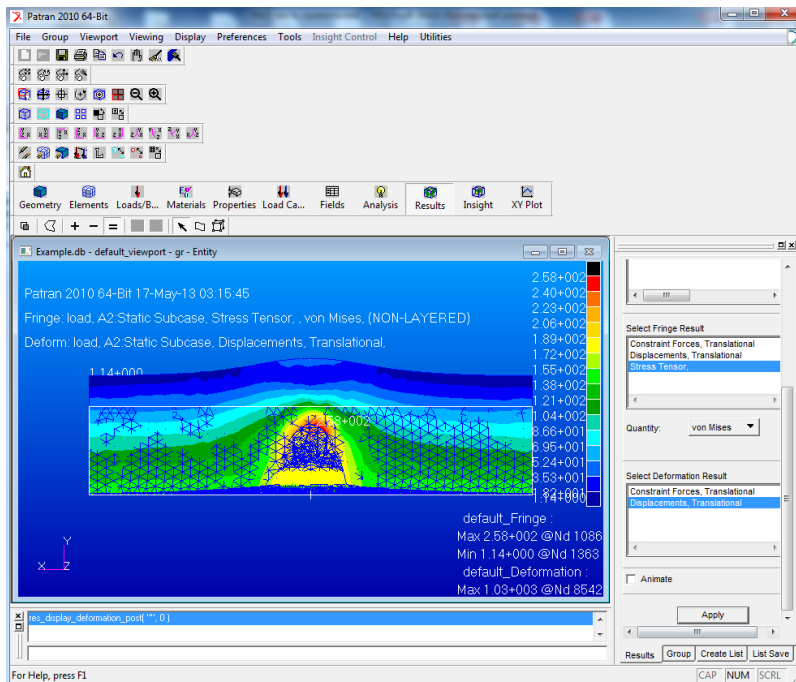


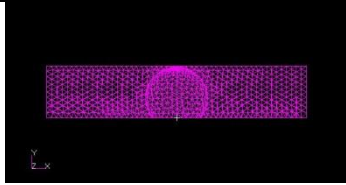
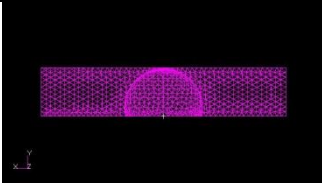
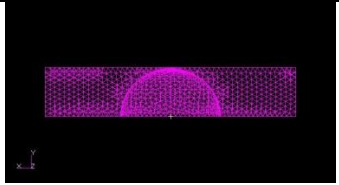
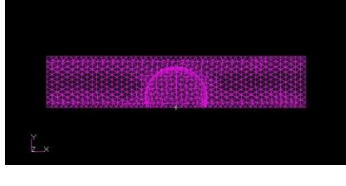
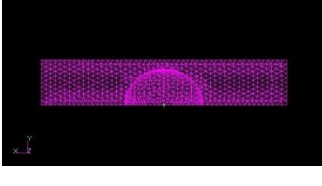
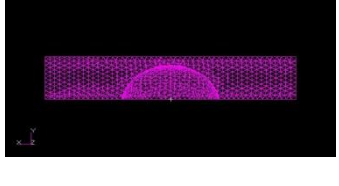

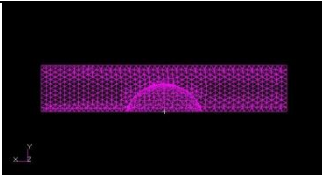
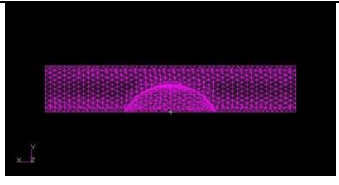
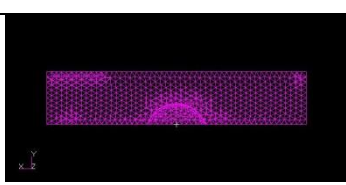
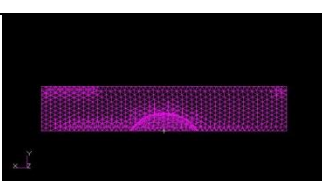
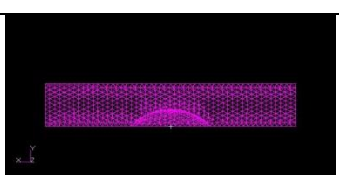
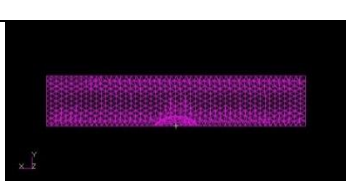

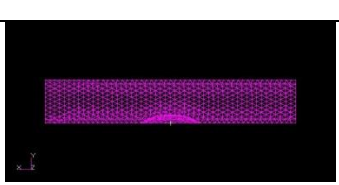
Рис.40. Распределение интенсивностей напряжений

Глава 4. ПРОВЕДЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В ходе выполнения работы были проведены серии расчетов напряженно-деформированного состояния фрагмента ледяной поверхности для двух видов заделки. В одном случае для каждой боковой грани был введен запрет на перемещение по всем осям (жесткая заделка). В другом – для каждой из боковых граней было запрещено перемещение по оси, ортогональной этой грани, а одной из точек запрещено перемещение по всем осям. Это было сделано для того, чтобы определить влияние граничных условий на результаты расчетов НДС.

Расчеты проводились для разных радиусов R и разных расстояний от «линзы» до внешней поверхности фрагмента ледяной коры H (табл. 3).

Таблица 3. Расположение «линз» в фрагменте ледяной коры

Н, м	R=30 м	R=40 м	R=50 м
0			
10			
20			
30			
40			

Ниже представлены результаты расчетов для двух видов заделки при $R=30$ м, $R=40$ м, $R=50$ м (табл. 7-9):

Таблица 4. Перемещения при фиксированном $R=30$ м

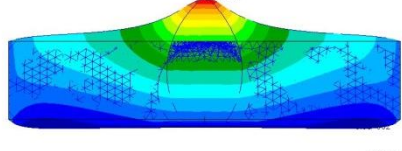
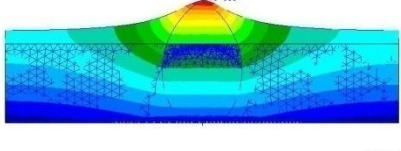
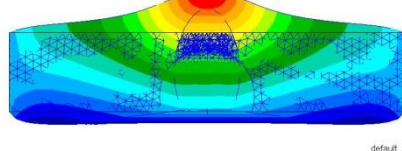
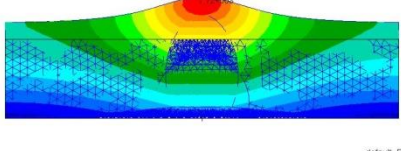
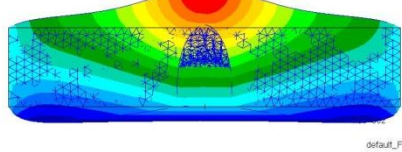
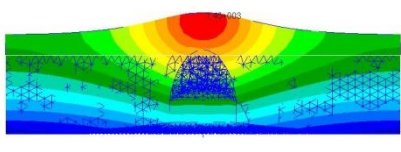
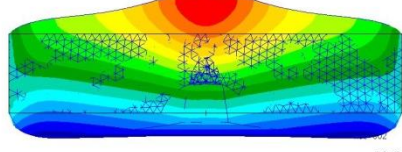
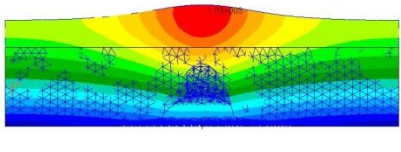
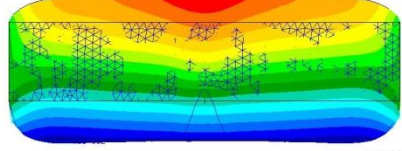
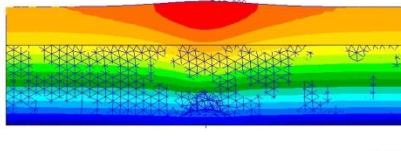
H, м	Жесткая заделка	Нежесткая заделка
0	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 10:01:10 Fringe: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max 1.81e+03 @Nd 17622 Min -3.99e+02 @Nd 6269 default_Deformation: Max 1.81e+03 @Nd 17622</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:13:50 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max 2.15e+03 @Nd 10959 Min -3.23e+02 @Nd 14474 default_Deformation: Max 2.15e+03 @Nd 2662</p>
10	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:16:25 Fringe: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max 1.35e+03 @Nd 10323 Min -3.95e+02 @Nd 6269 default_Deformation: Max 1.35e+03 @Nd 10323</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:17:37 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max 1.72e+03 @Nd 17096 Min -8.14e+01 @Nd 645 default_Deformation: Max 1.72e+03 @Nd 17096</p>
20	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:19:55 Fringe: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max 1.05e+03 @Nd 9009 Min -4.01e+02 @Nd 10283 default_Deformation: Max 1.05e+03 @Nd 9009</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:30:58 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max 1.40e+03 @Nd 6995 Min -3.47e+00 @Nd 6978 default_Deformation: Max 1.40e+03 @Nd 6995</p>
30	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:46:41 Fringe: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max 6.85e+02 @Nd 9066 Min -4.08e+02 @Nd 9375 default_Deformation: Max 6.85e+02 @Nd 9066</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:40:21 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max 1.03e+03 @Nd 1637 Min -3.35e+01 @Nd 2293 default_Deformation: Max 1.03e+03 @Nd 1637</p>
40	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:48:11 Fringe: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max 3.87e+02 @Nd 2201 Min -4.08e+02 @Nd 10955 default_Deformation: Max 4.11e+02 @Nd 10955</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:41:47 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max 7.19e+02 @Nd 19700 Min -4.40e+00 @Nd 13399 default_Deformation: Max 7.19e+02 @Nd 19700</p>

Таблица 5. Перемещения при фиксированном R=40 м

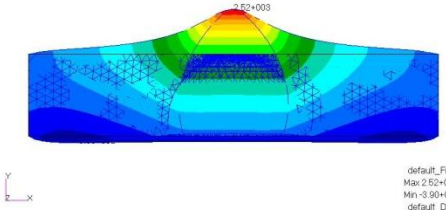
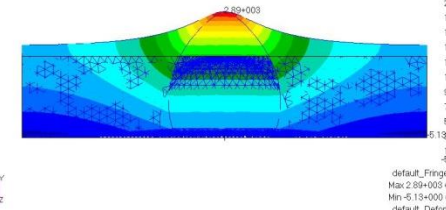
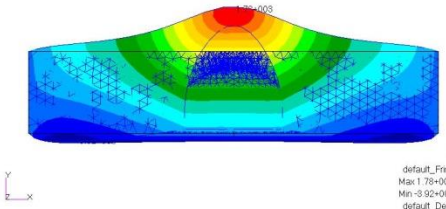
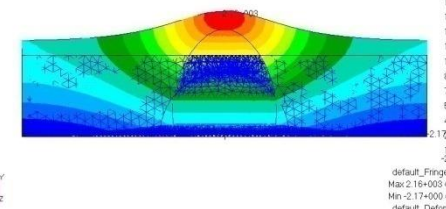
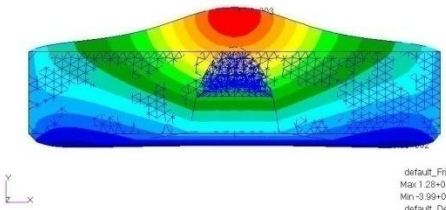
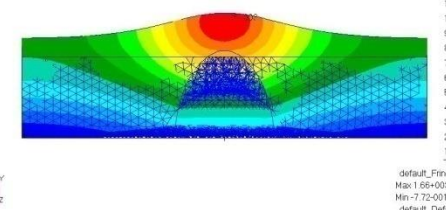
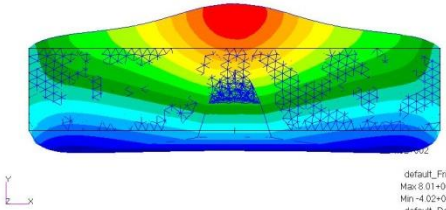
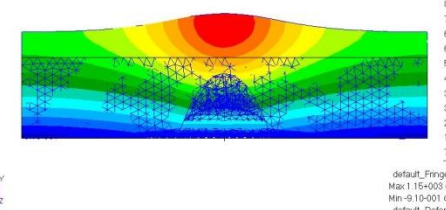
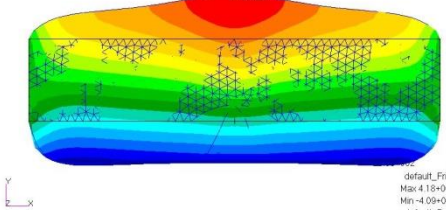
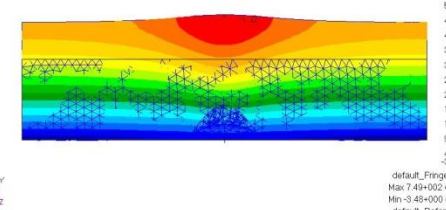
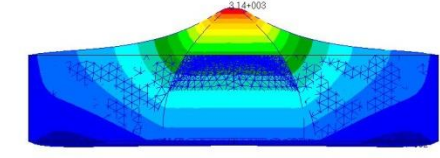
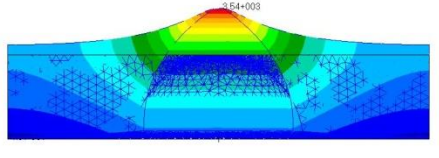
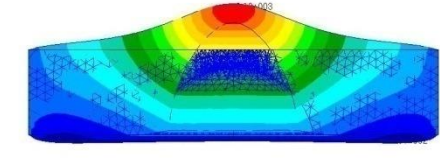
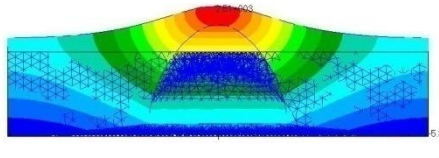
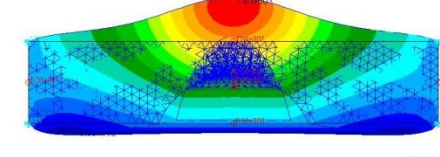
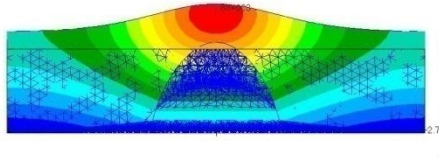
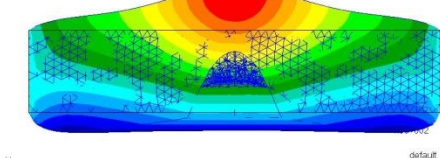
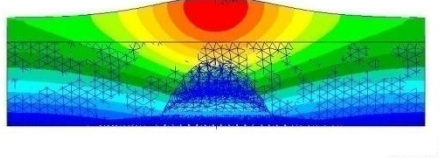
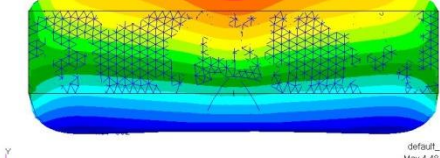
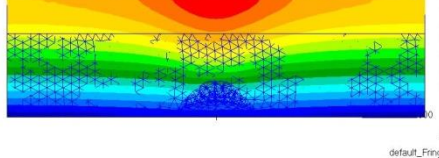
H, м	Жесткая заделка	Нежесткая заделка
0	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:04:41 Fringe: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component (NON-LAYERED) Deform: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max: 2.52+003 @Nd 908 Min: -3.95+002 @Nd 1246 default_Deformation: Max: 2.52+003 @Nd 908</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:50:38 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max: 2.89+003 @Nd 11028 Min: -5.13+000 @Nd 12667 default_Deformation: Max: 2.89+003 @Nd 11028</p>
10	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:09:09 Fringe: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component (NON-LAYERED) Deform: LOAD, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max: 1.78+003 @Nd 7824 Min: -5.47+002 @Nd 11413 default_Deformation: Max: 1.78+003 @Nd 7824</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:52:27 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max: 2.16+003 @Nd 786 Min: -2.17+000 @Nd 16913 default_Deformation: Max: 2.16+003 @Nd 786</p>
20	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:09:07 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max: 1.28+003 @Nd 1166 Min: -3.95+002 @Nd 11144 default_Deformation: Max: 1.28+003 @Nd 1166</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:53:31 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max: 1.66+003 @Nd 821 Min: -1.72+000 @Nd 1120 default_Deformation: Max: 1.66+003 @Nd 821</p>
30	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:09:03 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max: 8.01+002 @Nd 5379 Min: -3.95+002 @Nd 14693 default_Deformation: Max: 8.01+002 @Nd 5379</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:54:59 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max: 1.15+003 @Nd 39119 Min: -9.13+001 @Nd 32583 default_Deformation: Max: 1.15+003 @Nd 39119</p>
40	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:10:33 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max: 4.18+002 @Nd 4688 Min: -3.64+002 @Nd 11691 default_Deformation: Max: 4.18+002 @Nd 4688</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:55:57 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max: 7.49+002 @Nd 8220 Min: -3.85+001 @Nd 15093 default_Deformation: Max: 7.49+002 @Nd 8220</p>

Таблица 6. Перемещения при фиксированном R=50 м

H, м	Жесткая заделка	Нежесткая заделка
0	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:11:59 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max:3.14+003 @Nd 5156 Min:-3.84+002 @Nd 12086 default_Deformation: Max:3.14+003 @Nd 5156</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 01:58:53 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max:3.54+003 @Nd 342 Min:-4.31+001 @Nd 9594 default_Deformation: Max:3.54+003 @Nd 342</p>
10	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:13:28 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max:2.10+003 @Nd 9185 Min:-3.87+002 @Nd 15559 default_Deformation: Max:2.10+003 @Nd 9185</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:00:09 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max:2.51+003 @Nd 10856 Min:-5.30+000 @Nd 17217 default_Deformation: Max:2.51+003 @Nd 10856</p>
20	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:15:15 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max:1.49+003 @Nd 7824 Min:-3.96+002 @Nd 16467 default_Deformation: Max:1.49+003 @Nd 7824</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:01:05 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max:1.88+003 @Nd 17050 Min:-2.74+000 @Nd 1181 default_Deformation: Max:1.88+003 @Nd 17050</p>
30	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:16:30 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max:8.98+002 @Nd 7874 Min:-4.07+002 @Nd 7159 default_Deformation: Max:8.98+002 @Nd 7874</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:02:16 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max:1.26+003 @Nd 12157 Min:-1.18+000 @Nd 11932 default_Deformation: Max:1.26+003 @Nd 12157</p>
40	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:17:50 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max:4.48+002 @Nd 1041 Min:-4.07+002 @Nd 4148 default_Deformation: Max:4.48+002 @Nd 1041</p>	<p>Patran 2010 64-Bit 07-Jun-13 02:03:19 Fringe: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational, Y Component, (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational.</p>  <p>default_Fringe: Max:7.82+002 @Nd 6143 Min:-3.59+000 @Nd 16599 default_Deformation: Max:7.82+002 @Nd 6143</p>

Результаты расчетов для жесткой заделки представлены в виде графика на рисунке 41.

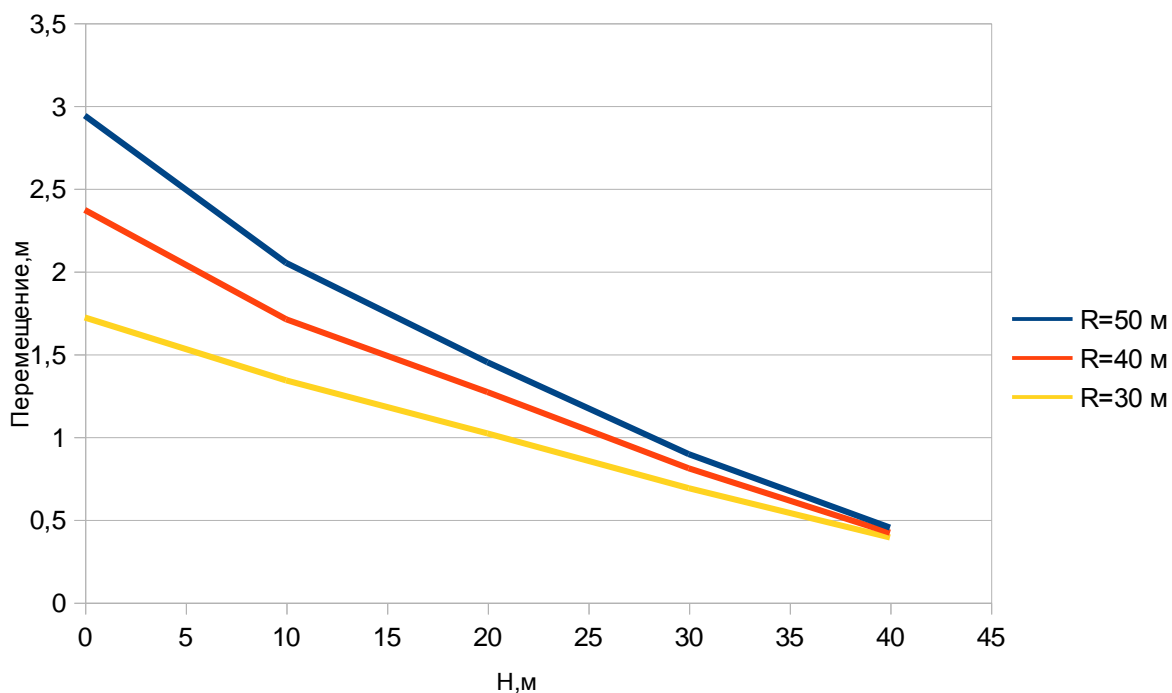


Рис.41. Зависимость перемещений от радиуса и расстояния от «линзы» до поверхности для случая жесткой заделки

Результаты расчетов демонстрируют зависимость, аппроксимируемую кусочно-линейной функцией, высоты поднятия «купола» от величины радиуса и "глубины" расположения «линзы» от поверхности.

С уменьшением H при постоянном радиусе высота «купола» растет.

При увеличении радиуса «линзы» высота «купола» растет.

Начиная с некоторого H , радиус «линзы» перестает влиять на высоту поднятия «купола»: поднятие практически отсутствует.

Результаты расчетов для второго вида заделки представлены в виде графика на рисунке 42.

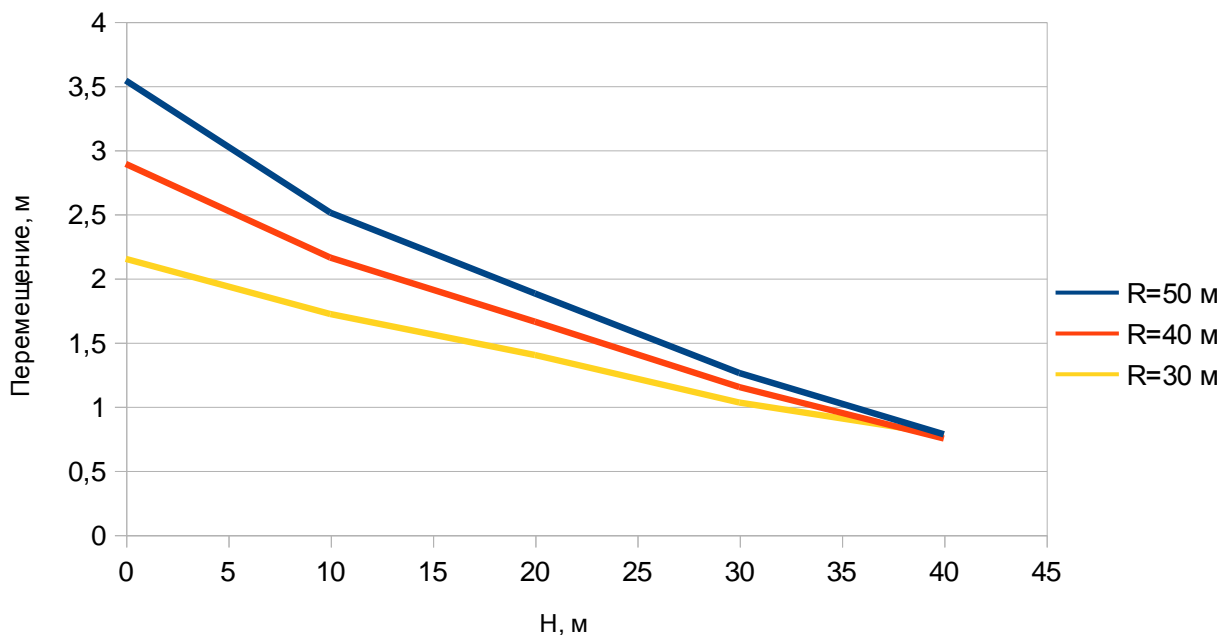


Рис.42. Зависимость перемещений от радиуса и расстояния от «линзы» до поверхности для случая не жесткой заделки.

Можно заметить, что качественно результаты аналогичны предыдущему случаю: в условиях выбранной модели вид заделки не оказывает существенного влияния на высоту поднятия «купола».

Проведенные расчеты показывают, что высота подъема «купола» прямо пропорциональна радиусу «линзы» и расстоянию от «линзы» до внешней поверхности фрагмента ледяной коры.

По полученным данным видно, что начиная с некоторого расстояния, радиус «линзы» перестает влиять на высоту образования.

Графики для обоих случаев заделки качественно не отличаются. В то же время высота подъема образования в случае не жесткой заделки выше в среднем на 0,5 м.

Ниже приведены экранные формы, демонстрирующие результаты расчетов интенсивности напряжений по фон Мизесу. (табл. 7-9).

Таблица 7. Интенсивности напряжений при фиксированном R=30 м

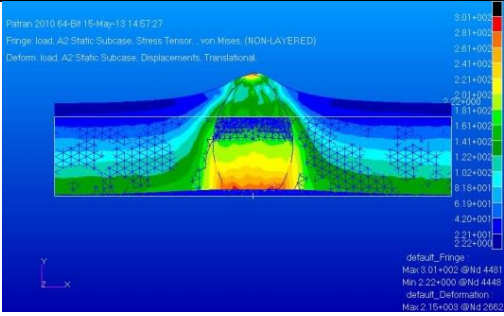
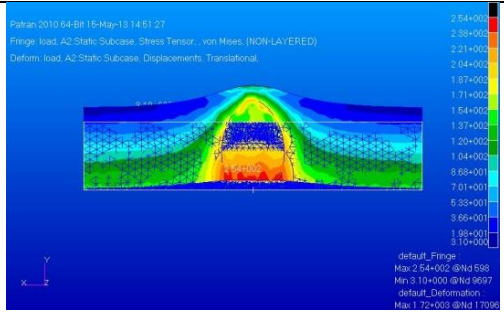
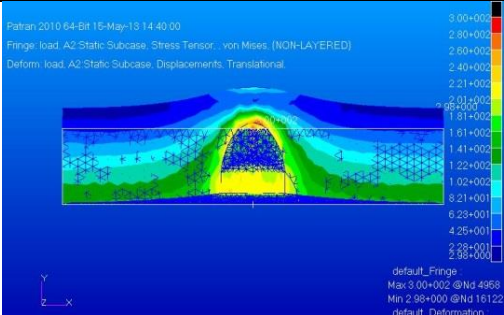
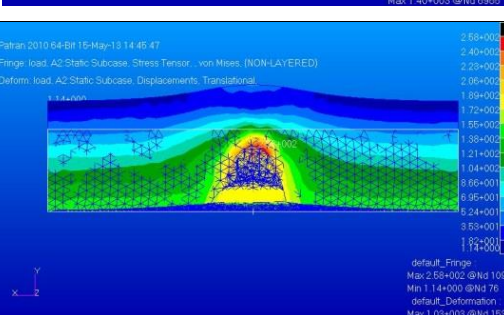
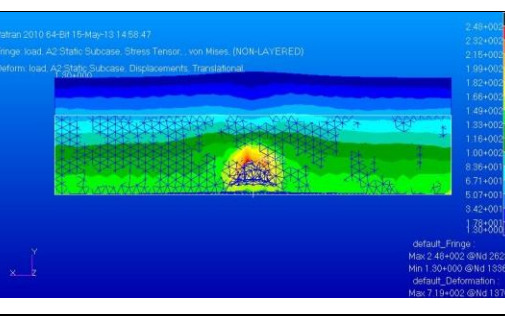
H, м	Интенсивности напряжений по фон Мизесу
0	 <p>Patran 2010 64-Bit 15-May-13 14:57:27 Fringe: load_A2 Static Subcase, Stress Tensor, von Mises, (NON-LAYERED) Deform: load_A2 Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>3.01e+002 2.81e+002 2.61e+002 2.41e+002 2.21e+002 2.01e+002 1.81e+002 1.61e+002 1.41e+002 1.22e+002 1.02e+002 8.18e+001 6.19e+001 4.20e+001 2.21e+001 2.22e+000</p> <p>default_Fringe Max 3.01e+002 @Nd 4481 Min 2.22e+000 @Nd 4448 default_Deformation Max 2.15e+003 @Nd 2085</p>
10	 <p>Patran 2010 64-Bit 15-May-13 14:45:27 Fringe: load_A2 Static Subcase, Stress Tensor, von Mises, (NON-LAYERED) Deform: load_A2 Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>2.54e+002 2.38e+002 2.21e+002 2.04e+002 1.87e+002 1.71e+002 1.54e+002 1.37e+002 1.20e+002 1.04e+002 8.65e+001 7.01e+001 5.33e+001 3.66e+001 1.98e+001 3.10e+000</p> <p>default_Fringe Max 2.54e+002 @Nd 598 Min 3.10e+000 @Nd 9697 default_Deformation Max 1.72e+003 @Nd 1705</p>
20	 <p>Patran 2010 64-Bit 15-May-13 14:40:00 Fringe: load_A2 Static Subcase, Stress Tensor, von Mises, (NON-LAYERED) Deform: load_A2 Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>3.00e+002 2.80e+002 2.60e+002 2.40e+002 2.21e+002 2.01e+002 1.81e+002 1.61e+002 1.41e+002 1.22e+002 1.02e+002 8.21e+001 6.23e+001 4.25e+001 2.28e+001 2.98e+000</p> <p>default_Fringe Max 3.00e+002 @Nd 4958 Min 2.98e+000 @Nd 16122 default_Deformation Max 1.40e+003 @Nd 6955</p>
30	 <p>Patran 2010 64-Bit 15-May-13 14:45:47 Fringe: load_A2 Static Subcase, Stress Tensor, von Mises, (NON-LAYERED) Deform: load_A2 Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>2.59e+002 2.40e+002 2.20e+002 2.00e+002 1.89e+002 1.72e+002 1.55e+002 1.38e+002 1.21e+002 1.04e+002 8.65e+001 6.95e+001 5.23e+001 3.53e+001 1.82e+001 1.92e+000</p> <p>default_Fringe Max 2.59e+002 @Nd 109 Min 1.14e+000 @Nd 76 default_Deformation Max 1.05e+003 @Nd 1537</p>
40	 <p>Patran 2010 64-Bit 15-May-13 14:58:47 Fringe: load_A2 Static Subcase, Stress Tensor, von Mises, (NON-LAYERED) Deform: load_A2 Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>2.49e+002 2.32e+002 2.15e+002 1.99e+002 1.82e+002 1.65e+002 1.49e+002 1.33e+002 1.16e+002 1.00e+002 8.36e+001 6.71e+001 5.07e+001 3.42e+001 1.78e+001 1.36e+000</p> <p>default_Fringe Max 2.49e+002 @Nd 2635 Min 1.30e+000 @Nd 18369 default_Deformation Max 7.19e+002 @Nd 13700</p>

Таблица 8. Интенсивности напряжений при фиксированном R=40 м

H, м	Интенсивности напряжений по фон Мизесу
0	<p>Patran 2010 04-BR 15-Mar-13 16:07:04 Fringe load_A2 Static Subcase, Stress Tensor, von Mises (NON-LAYERED) Deform load_A2 Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>2.96e+02 2.77e+02 2.57e+02 2.38e+02 2.18e+02 1.99e+02 1.79e+02 1.58e+02 1.41e+02 1.21e+02 1.02e+02 8.22e+01 6.27e+01 4.33e+01 2.38e+01 4.34e+00</p> <p>default_Fringe Max 2.96e+02 @Nd 10940 Min 4.34e+00 @Nd 12858 default_Deformation Max 2.89e+03 @Nd 11020</p>
10	<p>Patran 2010 04-BR 15-Mar-13 16:09:55 Fringe load_A3 Static Subcase, Stress Tensor, von Mises (NON-LAYERED) Deform load_A3 Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>2.70e+02 2.52e+02 2.34e+02 2.17e+02 1.99e+02 1.82e+02 1.64e+02 1.46e+02 1.29e+02 1.11e+02 9.35e+01 7.59e+01 5.83e+01 4.07e+01 2.30e+01 5.84e+00</p> <p>default_Fringe Max 2.70e+02 @Nd 81 Min 5.83e+01 @Nd 3008 default_Deformation Max 2.15e+03 @Nd 793</p>
20	<p>Patran 2010 04-BR 15-Mar-13 16:50:17 Fringe load_A2 Static Subcase, Stress Tensor, von Mises (NON-LAYERED) Deform load_A2 Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>2.01e+02 2.72e+02 2.83e+02 2.94e+02 2.15e+02 1.96e+02 1.77e+02 1.67e+02 1.38e+02 1.19e+02 1.00e+02 8.09e+01 6.18e+01 4.27e+01 2.35e+01 4.47e+00</p> <p>default_Fringe Max 2.91e+02 @Nd 1002 Min 4.47e+00 @Nd 5196 default_Deformation Max 1.65e+03 @Nd 851</p>
30	<p>Patran 2010 04-BR 15-Mar-13 16:09:06 Fringe load_A2 Static Subcase, Stress Tensor, von Mises (NON-LAYERED) Deform load_A2 Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>2.75e+02 2.65e+02 2.57e+02 2.19e+02 2.01e+02 1.83e+02 1.65e+02 1.47e+02 1.29e+02 1.10e+02 9.24e+01 7.43e+01 5.62e+01 3.81e+01 2.00e+01 1.95e+00</p> <p>default_Fringe Max 2.75e+02 @Nd 34104 Min 1.95e+00 @Nd 89931 default_Deformation Max 1.15e+03 @Nd 89110</p>
40	<p>Patran 2010 04-BR 16-Mar-13 15:44:11 Fringe load_A2 Static Subcase, Stress Tensor, von Mises (NON-LAYERED) Deform load_A2 Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>2.42e+02 2.35e+02 2.10e+02 1.94e+02 1.78e+02 1.62e+02 1.45e+02 1.29e+02 1.13e+02 9.75e+01 8.12e+01 6.52e+01 4.91e+01 3.30e+01 1.70e+01 9.31e+00</p> <p>default_Fringe Max 2.42e+02 @Nd 12778 Min 9.31e+00 @Nd 15049 default_Deformation Max 7.49e+02 @Nd 8220</p>

Таблица 9. Интенсивности напряжений при фиксированном R=50 м

H, м	Интенсивности напряжений по фон Мизесу
0	<p>Patran 2010 64-Bit 16-May-13 13:56:28 Finge: load, A2:Static Subcase, Stress Tensor, von Mises (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>2.99+002</p> <p>default_Fringe Max 2.99+002 @Nd 7270 Min 6.90+000 @Nd 2602 default_Deformation Max 2.54+003 @Nd 642</p>
10	<p>Patran 2010 64-Bit 16-May-13 14:01:44 Finge: load, A2:Static Subcase, Stress Tensor, von Mises (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>2.65+002</p> <p>default_Fringe Max 2.65+002 @Nd 667 Min 7.39+000 @Nd 4961 default_Deformation Max 2.51+003 @Nd 10959</p>
20	<p>Patran 2010 64-Bit 16-May-13 14:53:20 Finge: load, A2:Static Subcase, Stress Tensor, von Mises (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>3.10+002</p> <p>default_Fringe Max 3.10+002 @Nd 8216 Min 5.92+000 @Nd 1588 default_Deformation Max 1.69+003 @Nd 17059</p>
30	<p>Patran 2010 64-Bit 16-May-13 14:55:35 Finge: load, A2:Static Subcase, Stress Tensor, von Mises (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>2.80+002</p> <p>default_Fringe Max 2.80+002 @Nd 11177 Min 3.62+000 @Nd 10976 default_Deformation Max 1.26+003 @Nd 12157</p>
40	<p>Patran 2010 64-Bit 16-May-13 14:57:07 Finge: load, A2:Static Subcase, Stress Tensor, von Mises (NON-LAYERED) Deform: load, A2:Static Subcase, Displacements, Translational</p> <p>2.46+002</p> <p>default_Fringe Max 2.46+002 @Nd 9368 Min 3.14+001 @Nd 7606 default_Deformation Max 7.82+002 @Nd 6143</p>

Продемонстрирована возможность связи образования выпуклостей на поверхности Европы с наличием «линз» в толще поверхностной коры.

Визуальная оценка объема «материала» поверхности, поднявшегося на максимальную высоту при фиксированном радиусе и переменном расстоянии от «линзы» до поверхности, показывает: чем ближе к внешней поверхности расположена «линза», тем меньший объем «материала» поднимается. В случае неглубокого "залегания" «линзы» наблюдаемый сверху куполообразный дефект в разрезе имеет форму «пика».

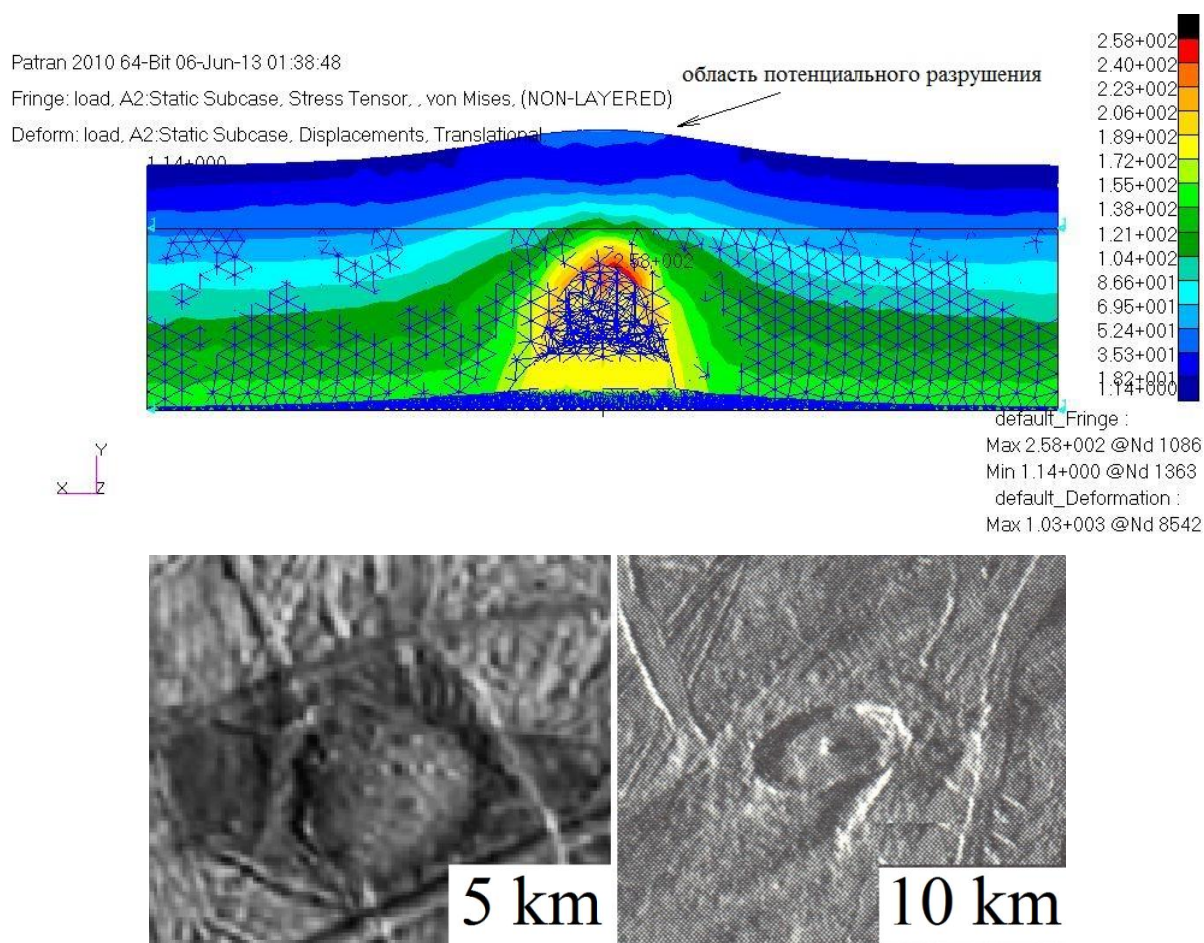


Рис.43. Участки поверхности, с наибольшей вероятностью соответствующие расчетной модели

Также из полученных расчетов отчетливо видны области, где интенсивность напряжений по фон Мизесу больше или равна предельной интенсивности напряжений. Содержательно это означает, что данные области наиболее критичны с точки зрения появления разрушений под

воздействием дополнительных факторов: неоднородности материала поверхности планеты, гравитационного взаимодействия и т.п.

На рисунке 43. показаны снимки областей поверхности Европы, наиболее соответствующие построенной модели. Говорить о полном соответствии весьма затруднительно, поскольку снимки не позволяют проанализировать внутреннее состояние "материала" не разрушенных «куполов». С другой стороны, при наличии явных признаков разрушения «купола» нельзя с полной уверенностью говорить о причине происхождения данного поверхностного образования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выявление механизмов образования дефектов поверхности, в частности – «куполов», существенно при выборе площадки для посадки космического аппарата на поверхность Европы.

На основании построенной трехмерной модели фрагмента поверхности Европы были проведены расчеты напряженно-деформированного состояния, вызванного воздействием внутрипланетного источника тепла и образованием в толще ледяной коры «линзы», имеющей постоянную температуру на своей поверхности.

Результат моделирования подтверждает предположение о том, что деятельность внутрипланетных тепловых источников может служить причиной появления «куполов» на поверхности Европы.

Использование системы MSC.Patran/Nastran существенно упростило процесс трехмерного моделирования и анализ полученных результатов благодаря развитым возможностям визуализации.

Продолжение исследований может быть направлено на уточнение модели образования дефектов с учетом неоднородности ледяного покрова, растягивающих либо сжимающих напряжений, контактного взаимодействия ледяной коры с подледным океаном, изменения формы «линзы» динамики и мощности теплового процесса.

Результаты выполненной работы представлялись на научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов МИЭМ НИУ ВШЭ (Москва, МИЭМ НИУ ВШЭ, 19 февраля-1 марта 2013 г), X конференции молодых ученых "Фундаментальные и прикладные космические исследования" (Москва, ИКИ РАН, 3-5 апреля 2013 г), XXI Международной студенческой школе-семинаре "Новые информационные технологии" (Судак, 21-26 мая 2013 г).

Список литературы

1. Ronald Greeley и др. Geologic mapping of Europa. Journal of Geophysical Research, vol. 105, p. 22559-22578. 2000.
2. Europa study report 2012. Europa study team, 1 may 2012, JPL D-71990, B-10.
3. www.nasa.gov.
4. Е.Н. Чумаченко, Р.Р. Назиров. О некоторых проблемных вопросах, связанных с образованием хаотически расположенных особенностей рельефа на поверхности Европы. Космические исследования, т.46, № 6, 2008, с.529-535.
5. Н.Н. Бычковский Ю.А. Гурьянов. Ледовые строительные площадки, дороги и переправы. – Сарат. гос. техн. ун-т, 2005. 260 с
6. Stefan Ulamec, Jens Biele, Oliver Funke, Marc Engelhardt Access to glacial and subglacial environments in the Solar System by melting probe technology. Rev Environ Sci Biotechnol DOI 10/1007/s11157-006-9108-x.
7. В.В. Богородский, В.П. Гаврило. Лед. Современные методы гляциологии. Л: Гидрометеиздат, 1980 г. - 384 с.
8. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: МГУ, Наука, 2004 г. - 798 с
9. О. Зенкевич. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975 г. - 541 с..
10. Е.Н. Чумаченко, Д.В. Печенкин. Моделирование и расчет термоупругопластических деформаций при анализе локально изотропных конструкций. – М.: МИЭМ, 2000 г. - 182 с.
11. www.solidworks.com.
12. www.mssoftware.com
13. Д.Г. Шимкович. Расчет конструкций в MSC/Nastran for Windows/ М.: ДМК Пресс, 2003 г. - 447с.
14. С.П. Рычков. MSC.visualNastran для Windows. М.: НТ Пресс, 2004 г. - 552с.