

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И. Балаев

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОХОДНОСТЕЙ
И СОСТАВЛЕНИЕ ПОРТФЕЛЕЙ
ИЗ АКЦИЙ РОССИЙСКИХ КОМПАНИЙ**

Препринт WP2/2013/03

Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Москва
2013

УДК 336.763.2
ББК 65.290-93
Б20

Редактор серии WP2
«Количественный анализ в экономике»
В.А. Бессонов

Балаев, А. И. Моделирование доходностей и составление портфелей из акций российских компаний [Текст] : препринт WP2/2013/03 / А. И. Балаев ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2013. – 48 с. – 70 экз. – (Серия WP2 «Количественный анализ в экономике»).

Рассматриваются многомерные модели доходностей акций российских компаний на основе нормального распределения, t -распределения со скаляром степеней свободы и t -распределения с вектором степеней свободы. С помощью построенных моделей составлены финансовые портфели различных типов, и проведено их сравнение с точки зрения риска и выгоды вложений.

УДК 336.763.2
ББК 65.290-93

Классификация JEL: C14, C32
Ключевые слова: составление финансового портфеля, многомерное t -распределение, вектор степеней свободы

Семинар «Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов» ЦЭМИ РАН проведен 22 мая 2013 г.

**Препринты Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики» размещаются по адресу: <http://www.hse.ru/org/hse/wp>**

© Балаев А. И., 2013
© Оформление. Издательский дом
Высшей школы экономики, 2013

1. Введение

Составление оптимального портфеля ценных бумаг является важной практической задачей на фондовом рынке. При оптимизации финансового портфеля возникают такие задачи, как максимизация ожидаемой доходности или минимизация дисперсии доходности с учетом информации, доступной к данному моменту времени и ограничений на торговлю, имеющихся на рынке. В теории для решения таких задач инвестору необходимо знать совместное распределение доходностей имеющихся на рынке активов, учитывающее доступную информацию. Однако на практике инвестор таким знанием не обладает, и ему необходимо оценить это условное распределение, для чего применяются различные эконометрические методы. Достаточно подробный обзор таких методов применительно к составлению финансовых портфелей и учета рисков в процессе принятия инвестиционных решений дан в книге [20]. В настоящей работе продемонстрировано применение эконометрических методов для прогнозирования распределений доходностей при составлении портфелей из акций российских компаний.

Применение эконометрических моделей для построения прогнозов финансовых доходностей и составления портфелей активов на их основе достаточно широко освещено в литературе. Работа [25] относится к ранним работам, посвященным применению байесовских методов прогнозирования распределений доходностей применительно к задаче портфельного выбора. Работа [19] также посвящена использованию байесовских методов в задаче портфельного выбора: в ней строятся прогнозные распределения доходностей акций, входящих в индекс S&P 500 и на их основе оптимизируются финансовые портфели. В работе [10] на основе байесовских методов построены многомерные модели доходностей акций из индекса DAX и проведен эмпирический анализ результативности торговых стратегий, основанных на применении этих моделей. В работе [11] оптимизация портфелей проводится путем максимизации ожидаемой полезности, которая вычисляется с помощью методов Монте-Карло с цепями Маркова на основе прогнозных распределений доходностей, построенных с помощью байесовского подхода.

Работа [26] посвящена составлению финансовых портфелей с помощью так называемых факторных моделей, в которых доходности активов предсказываются на основе динамики фондовых индексов, доходностей специфических портфелей, макроэкономических индикаторов

и других переменных. В работе [6] для многомерных временных рядов обменных курсов основных мировых валют строятся факторные модели со стохастической волатильностью, на основе которых вычисляются краткосрочные прогнозы и проводится оптимизация финансовых портфелей.

При составлении финансовых портфелей с помощью эконометрических моделей значительную роль играет выбор многомерного распределения, лежащего в основе модели. Одним из известных вероятностных распределений, используемых при составлении финансовых портфелей, является многомерное t -распределение. Применение этого распределения может давать хорошие результаты при составлении портфелей. Например, в работе [14] показано, что применение t -распределения в многомерных GARCH моделях дает существенно большую эффективность хеджирования портфелей, чем применение нормального распределения.

Как правило, в эконометрической литературе в качестве многомерного t -распределения рассматривается распределение, параметр степеней свободы которого является скаляром, как и в одномерном случае. Вопросам симулирования и оценки параметров классического многомерного t -распределения со скаляром степеней свободы посвящена работа [13], где также дан обзор некоторых практических приложений этого распределения, среди которых его использование для составления финансовых портфелей. Скалярный параметр степеней свободы определяет некую общую для всех активов меру «толщины хвостов» распределения доходностей, а специфика формы распределений для различных активов определяется только дисперсиями доходностей. Однако на практике одномерные распределения доходностей различаются не только вторыми моментами, и параметров дисперсий недостаточно для учета различий в формах распределений. По этой причине многомерное t -распределение со скалярным параметром степеней свободы является недостаточно гибким для практического применения. В [2] многомерное t -распределение со скалярным параметром степеней свободы обобщается на случай вектора степеней свободы (см. также [3], [4], [5]). Вектор степеней свободы позволяет учитывать больше различий в распределениях доходностей активов, поскольку предоставляет возможность моделировать для каждой доходности свой индивидуальный эксцесс. В настоящей работе t -распределение с вектором степеней свободы применяется в задаче составления портфелей из акций российских компаний: проводится сравнение эконометрической модели на основе данного распределения с мо-

делями на основе нормального распределения и t-распределения со скалярном степеней свободы.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 описаны использованные данные о доходностях российских акций и проведен предварительный эмпирический анализ. В разделе 3 приведено описание и оценки параметров многомерных моделей доходностей, учитывающих основные особенности данных. Наконец, в разделе 4 приведены характеристики портфелей, составленных с помощью построенных многомерных моделей доходностей, а также проведено их сравнение с точки зрения риска и выгоды вложений.

2. Данные и предварительный анализ

Эмпирический анализ проводится на основе данных о дневных ценах закрытия для акций крупнейших российских компаний, котирующихся на бирже ММВБ, входящих в индекс этой биржи и имеющих достаточный уровень ликвидности¹.

Для анализа можно было бы также использовать данные о котировках в системе РТС. Однако в РТС торговлю осуществляют главным образом инвесторы, которые совершают относительно редкие крупные сделки, в то время как на ММВБ идет более интенсивная торговля и совершается значительное количество сделок небольшого объема. По этой причине акции, торгующиеся на ММВБ, более ликвидны, чем акции, торгующиеся в РТС, и, соответственно, выбор в пользу ММВБ позволяет обеспечить более высокое качество данных для моделирования. Кроме того, для включения в индекс ММВБ компания должна удовлетворять более жестким требованиям по финансовым показателям, чем для включения в индекс РТС. Поэтому ориентировка на индекс ММВБ позволяет также обеспечить более качественный отбор акций для составления оптимальных портфелей.

Часть входящих в индекс ММВБ акций крупных компаний имеет относительно низкую ликвидность. Это в первую очередь акции, динамика цен которых слабо зависит от финансовых показателей эмитентов и в значительной степени определяется корпоративными событиями. Акции таких компаний, даже в случае их лидирующего положения в той или

¹ Используется функция `px_last` в базе данных Bloomberg.

иной отрасли, не рассматриваются в данной работе. В частности, из анализа исключены акции компаний строительного сектора и практически всех телекоммуникационных компаний. Среди остальных акций крупных компаний, входящих в индекс ММВБ, выбирались наиболее ликвидные, то есть предпочтение отдавалось акциям, имеющим низкий спред между ценой покупки (bid) и ценой продажи (ask) за счет постоянного наличия большого количества покупателей и продавцов.

В результате были отобраны акции 14 компаний, являющихся лидерами или ключевыми игроками в 10 основных отраслях российской экономики. Для четырех отраслей с наибольшей ликвидностью акций (нефтяной, газовой, металлургической и банковской) рассматривались акции двух лидирующих компаний, для остальных отраслей – акции одной компании. В табл. 2.1 представлена информация об акциях компаний, отобранных для анализа.

Исходные временные ряды цен закрытия охватывают период с 18 июля 2008 г. по 19 февраля 2013 г. На основе данных о ценах для рассматриваемых акций были рассчитаны логарифмические доходности вида $r_t = 100 \ln(S_t / S_{t-1})$, где S_t – цена последней сделки в основной торговой сессии ММВБ в день t .

Таблица 2.1. Акции, использованные при составлении оптимальных портфелей*

Компания	Тикер	Отрасль	Ликвидность	Капитализация, млрд руб.
Аэрофлот	AFLT	Транспорт	Средняя	60
ВТБ	VTBR	Банки	Высокая	580
Газпром	GAZP	Газ	Высокая	3420
Дикси	DIXY	Ритейл	Низкая	55
ИНТЕР РАО	IRAO	Энергетика	Средняя	218
Лукойл	LKOH	Нефть	Высокая	1700
МТС	MTSS	Связь	Средняя	580
НЛМК	NLMK	Металлы	Средняя	330
НОВАТЭК	NVTK	Газ	Средняя	960
Норникель	GMKN	Металлы	Высокая	1005
Распадская	RASP	Уголь	Средняя	48
Роснефть	ROSN	Нефть	Высокая	2570
Сбербанк	SBER	Банки	Высокая	2250
Уралкалий	URKA	Удобрения	Средняя	680

* Данные портала <http://stocks.investfunds.ru> на 19 февраля 2013 г.

Для обеспечения возможности оценивать многомерные модели данные были синхронизированы: доходности рассчитывались с использованием цен только в те дни, когда торговались все 14 выбранных акций. Поэтому из каждого временного ряда для цен закрытия были исключены некоторые наблюдения. Таким образом, доходности акций не всегда рассчитывались для периода длиной в один день. В табл. 2.2 приведены длины периодов, за которые рассчитывались доходности, и их доли в общем числе наблюдений.

Таблица 2.2. Временные интервалы доходностей акций

	0	1	2	3	4	10	11
Число наблюдений	898	10	202	22	2	4	1
Доля, %	78,8	0,9	17,7	1,9	0,2	0,4	0,1
Накопленное число наблюдений	898	908	1110	1132	1134	1138	1139
Накопленная доля, %	78,8	79,7	97,5	99,4	99,6	99,9	100

Двухдневные пропуски, большую часть которых составляют суббота и воскресенье, естественны при построении рядов дневных доходностей. Проблемы может вызвать наличие пропусков длиной три дня и более. Однако число таких периодов в построенной выборке мало: из табл. 2.2 следует, что они составляют лишь 2,5% всех наблюдений, и ими можно пренебречь. Поэтому в дальнейшем при построении моделей и анализе оптимальных портфелей специфика доходностей, соответствующих периодам длиной три дня и более, не учитывается, и все доходности рассматриваются как дневные.

Построенный массив данных состоит из 1139 наблюдений для каждого из 14 рядов доходностей. Данные были разделены на две части: первые 760 наблюдений используются для построения моделей, а последние 379 наблюдений – для оценки качества моделей на основе динамики стоимости оптимальных портфелей. Соотношение числа наблюдений в первой и второй частях данных составляет 2:1. Это обеспечивает достаточно большой размер выборки для построения моделей, но при этом также остается и много наблюдений для оценки прогнозной силы моделей вне выборки.

Отметим, что осенью 2008 г. вследствие мирового финансового кризиса на российском фондовом рынке наблюдалась ультравысокая волатильность. Период кризисной волатильности полностью входит в первую часть рассматриваемых в работе данных, что затрудняет сходимость про-

цедур оптимизации при оценке моделей. Однако эта проблема решается аккуратным подбором стартовых значений параметров.

В табл. 2.3 представлены описательные статистики для полных рядов доходностей из 1139 наблюдений. Заметим, что маргинальные распределения всех рассматриваемых акций имеют тяжелые хвосты: коэффициент эксцесса для каждой акции существенно превышает 0, что является одним из известных эмпирических фактов о распределениях финансовых доходностей. Отметим также, что коэффициенты асимметрии и эксцесса распределений доходностей существенно разнятся от акции к акции. При этом преобладает положительная асимметрия, что, как правило, не характерно для рядов финансовых доходностей.

Таблица 2.3. Описательные статистики рядов логарифмических доходностей

	AFLT	DIXY	GAZP	GMKN	IRAO	LKOH	MTSS
Среднее	-0,02	0,03	-0,07	0,00	0,02	-0,01	-0,01
Медиана	-0,03	0,00	-0,07	0,00	0,00	0,01	0,03
Максимум	21,59	28,12	31,09	20,78	45,90	26,78	29,26
Минимум	-24,43	-35,67	-23,49	-39,34	-47,51	-23,00	-25,51
Стд. откл.	2,49	4,03	3,13	3,40	5,25	2,95	2,87
Асимметрия	0,14	-2,15	0,36	-1,28	0,20	0,20	-0,62
Эксцесс	17,90	30,09	18,62	20,54	23,60	17,01	21,63
	NLMK	NVTK	RASP	ROSN	SBER	URKA	VTBR
Среднее	-0,06	0,04	-0,10	0,00	0,03	-0,03	-0,04
Медиана	-0,12	0,12	-0,03	-0,03	0,10	0,07	0,00
Максимум	34,93	35,84	20,36	45,99	44,80	45,22	46,99
Минимум	-24,14	-16,63	-25,98	-27,24	-26,41	-46,16	-37,26
Стд. откл.	4,28	3,29	3,84	3,45	3,87	4,51	3,70
Асимметрия	0,31	0,67	-0,57	1,69	0,94	-0,25	0,50
Эксцесс	10,82	17,53	8,07	36,84	23,44	25,11	36,68

Некоторые из рассматриваемых рядов доходностей акций имеют значимую автокорреляцию. В табл. 2.4 показано, что гипотеза о нулевой автокорреляции в модели AR(1) с константой отвергается на 5%-м уровне значимости тестом Вальда для 6 из 14 рядов доходностей. Таким образом, при построении многомерных моделей необходимо учитывать наличие автокорреляции доходностей, например, в уравнении для вектора условных средних.

В табл. 2.5 приведены корреляции доходностей каждой акции с доходностями других акций в текущий и предыдущий момент времени. Положительная корреляция доходностей различных акций за один и тот

Таблица 2.4. Тест Вальда на нулевую автокорреляцию в моделях AR(1) с константой

	AFLT	DIXY	GAZP	GSKN	IRAO	LKOH	MTSS	NLMK	NVTK	RASP	ROSN	SBER	URKA	VTBR
Статистика Вальда	3,17	2,97	1,80	52,45	57,67	1,79	1,01	8,92	0,30	22,50	1,34	0,02	20,12	7,62
P-значение	0,08	0,09	0,18	0,00	0,00	0,18	0,31	0,00	0,58	0,00	0,25	0,88	0,00	0,01

же период в некоторой степени объясняется общими трендами на фондовом рынке. Так, позитивная динамика макроэкономических показателей и общий оптимизм инвесторов увеличивают спрос в той или иной мере на все акции и в результате между их доходностями возникает положительная корреляция. Однако имеются и другие, более специфические причины наличия корреляций. Например, доходности акций компаний из одной и той же отрасли имеют значимую положительную корреляцию вследствие наличия общих отраслевых факторов, определяющих финансовые показатели этих компаний. Для рассматриваемых акций корреляция доходностей составляет 0,6 для металлургической отрасли, 0,7 для газовой отрасли и 0,8 для нефтяной и банковской отраслей. Значимая положительная корреляция наблюдается и между доходностями акций компаний из разных отраслей: для менее ликвидных акций (например, Аэрофлот, Дикси, ИНТЕР РАО) она составляет от 0,2 до 0,5, для более ликвидных (например, Роснефть, Газпром, Сбербанк) – от 0,5 до 0,9. Крупные инвесторы, как правило, покупают наборы из высоколиквидных акций, так называемых «голубых фишек», с целью диверсификации портфеля, что объясняет более высокую корреляцию доходностей этих акций.

Из табл. 2.5 также следует, что для рассматриваемых рядов корреляция между лагированной доходностью одной акции и текущей доходностью другой акции близка к нулю: лишь в отдельных случаях она составляет $-0,1$ или $0,1$. Однако, несмотря на близкую к нулю корреляцию, динамические связи между доходностями различных акций все же существуют, как показывает анализ оценок параметров модели VAR(1) с нормальным распределением, приведенных в табл. 2.6. Лагированные доходности всех рассматриваемых акций, за исключением акций компании Роснефть, имеют статистически значимое влияние на текущие доходности других акций: почти в каждой строке табл. 2.6 имеется хотя бы один коэффициент, значимый на 5%-м уровне значимости.

Таблица 2.5. Одновременные и лагированные корреляции логарифмических доходностей акций

	AFLT	AFLT(-1)	DIXY	DIXY(-1)	GAZP	GAZP(-1)	GMKN	GMKN(-1)	IRAO	IRAO(-1)	LKOH	LKOH(-1)
AFLT	1											
AFLT(-1)	0,1	1										
DIXY	0,2	0,1	1									
DIXY(-1)	0,0	0,2	-0,1	1								
GAZP	0,5	0,0	0,3	0,0	1							
GAZP(-1)	0,0	0,5	-0,1	0,3	0,0	1						
GMKN	0,4	0,1	0,3	0,0	0,7	0,1	1					
GMKN(-1)	0,0	0,4	0,0	0,3	0,0	0,7	0,2	1				
IRAO	0,3	0,1	0,2	0,0	0,5	0,0	0,3	0,0	1			
IRAO(-1)	0,0	0,3	0,0	0,2	-0,1	0,5	-0,1	0,3	0,2	1		
LKOH	0,4	0,0	0,3	-0,1	0,9	0,0	0,7	0,0	0,4	-0,1	1	
LKOH(-1)	0,0	0,4	-0,1	0,3	0,0	0,9	0,1	0,7	0,0	0,4	0,0	1
MTSS	0,4	0,1	0,2	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	0,4	0,0	0,7	0,0
MTSS(-1)	0,0	0,4	-0,1	0,2	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	0,4	0,0	0,7
NLMK	0,3	0,1	0,2	0,0	0,7	0,1	0,6	0,1	0,4	0,0	0,6	0,1
NLMK(-1)	0,0	0,3	-0,1	0,2	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	0,4	0,0	0,6
NVTK	0,4	0,1	0,2	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	0,4	-0,1	0,7	0,0
NVTK(-1)	0,0	0,4	-0,1	0,2	-0,1	0,7	0,1	0,6	0,0	0,4	-0,1	0,7
RASP	0,3	0,1	0,2	0,0	0,6	0,2	0,5	0,1	0,3	0,0	0,6	0,1
RASP(-1)	0,0	0,3	0,0	0,2	0,0	0,6	0,1	0,5	0,0	0,3	0,0	0,6
ROSN	0,4	0,1	0,2	-0,1	0,9	0,1	0,7	0,1	0,5	-0,1	0,8	0,0
ROSN(-1)	0,0	0,4	-0,1	0,2	0,0	0,9	0,1	0,7	0,0	0,5	-0,1	0,8
SBER	0,5	0,1	0,3	0,0	0,8	0,0	0,7	0,0	0,5	-0,1	0,8	0,0
SBER(-1)	0,0	0,5	0,0	0,3	-0,1	0,8	0,1	0,7	0,1	0,5	-0,1	0,8
URKA	0,4	0,1	0,2	0,0	0,6	0,0	0,5	0,0	0,3	-0,1	0,6	0,0
URKA(-1)	0,0	0,4	-0,1	0,2	0,0	0,6	0,1	0,5	0,0	0,3	0,0	0,6
VTBR	0,5	0,1	0,3	0,0	0,8	0,1	0,6	0,1	0,5	0,0	0,7	0,0
VTBR(-1)	0,0	0,5	0,0	0,3	0,0	0,8	0,1	0,6	0,1	0,5	-0,1	0,7

(-1) означает лагированную доходность.

MTSS	MTSS(-1)	NLMK	NLMK(-1)	NVTK	NVTK(-1)	RASP	RASP(-1)	ROSN	ROSN(-1)	SBER	SBER(-1)	URKA	URKA(-1)	VTBR	VTBR(-1)
1															
0,0	1														
0,7	0,1	1													
0,0	0,7	0,1	1												
0,6	0,0	0,6	0,0	1											
0,0	0,6	0,0	0,6	0,0	1										
0,6	0,1	0,6	0,1	0,6	0,1	1									
0,0	0,6	0,0	0,6	0,0	0,6	0,1	1								
0,7	0,0	0,7	0,0	0,7	0,0	0,6	0,0	1							
0,0	0,7	0,1	0,7	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	1						
0,8	0,0	0,7	0,0	0,7	0,0	0,6	0,0	0,8	0,0	1					
0,0	0,8	0,0	0,7	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	0,8	0,0	1				
0,6	0,0	0,6	0,0	0,6	0,0	0,5	0,0	0,6	0,0	0,6	0,0	1			
0,1	0,6	0,1	0,6	0,0	0,6	0,2	0,5	0,0	0,6	0,0	0,6	0,1	1		
0,7	0,0	0,6	0,0	0,7	0,0	0,6	0,0	0,8	0,1	0,8	0,0	0,6	0,1	1	
0,0	0,7	0,0	0,6	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	0,8	0,0	0,8	0,0	0,6	0,1	1

Таблица 2.6. Оценки параметров модели VAR(1) для 14-мерного вектора доходностей

	AFLT	DIXY	GAZP	GMKN	IRAO	LKOH	MTSS	NLMK	NVTK	RASP	ROSN	SBER	URKA	VTBR
AFLT(-1)	0,09 (0,03)	0,17 (0,06)	0,05 (0,04)	0,01 (0,05)	0,18 (0,07)	0,09 (0,04)	0,17 (0,04)	0,11 (0,06)	0,10 (0,05)	0,16 (0,05)	0,13 (0,05)	0,18 (0,05)	0,24 (0,06)	0,22 (0,05)
DIXY(-1)	-0,02 (0,02)	-0,04 (0,03)	-0,02 (0,02)	-0,06 (0,03)	-0,06 (0,04)	-0,04 (0,02)	-0,03 (0,02)	-0,06 (0,03)	0,02 (0,03)	-0,01 (0,03)	-0,08 (0,03)	-0,02 (0,03)	-0,03 (0,03)	-0,01 (0,03)
GAZP(-1)	0,17 (0,06)	0,00 (0,09)	0,34 (0,07)	0,13 (0,08)	0,05 (0,12)	0,14 (0,07)	0,16 (0,07)	0,40 (0,10)	0,34 (0,08)	0,18 (0,09)	0,29 (0,08)	0,24 (0,09)	0,29 (0,10)	0,20 (0,08)
GMKN(-1)	0,00 (0,03)	0,04 (0,05)	0,08 (0,04)	0,23 (0,04)	0,13 (0,07)	0,09 (0,04)	0,03 (0,04)	0,04 (0,06)	-0,04 (0,04)	0,08 (0,05)	0,06 (0,04)	0,05 (0,05)	-0,07 (0,06)	0,03 (0,05)
IRAO(-1)	-0,01 (0,02)	-0,02 (0,03)	-0,05 (0,02)	-0,08 (0,02)	0,27 (0,03)	-0,06 (0,02)	-0,01 (0,02)	-0,02 (0,03)	-0,07 (0,02)	-0,07 (0,03)	-0,05 (0,02)	-0,05 (0,03)	-0,10 (0,03)	-0,06 (0,02)
LKOH(-1)	-0,03 (0,05)	-0,02 (0,08)	-0,04 (0,07)	-0,06 (0,07)	-0,26 (0,11)	0,00 (0,06)	-0,03 (0,06)	-0,07 (0,09)	-0,19 (0,07)	-0,02 (0,08)	-0,11 (0,07)	-0,06 (0,08)	-0,12 (0,09)	-0,09 (0,08)
MTSS(-1)	-0,04 (0,04)	-0,18 (0,07)	0,02 (0,05)	0,07 (0,06)	-0,09 (0,09)	0,02 (0,05)	0,01 (0,05)	0,00 (0,08)	-0,06 (0,06)	0,00 (0,07)	-0,06 (0,06)	-0,01 (0,07)	-0,02 (0,08)	-0,09 (0,06)
NLMK(-1)	0,05 (0,03)	-0,18 (0,04)	-0,02 (0,03)	-0,02 (0,04)	-0,01 (0,05)	0,04 (0,03)	-0,01 (0,03)	0,11 (0,05)	0,09 (0,03)	0,07 (0,04)	0,03 (0,04)	-0,04 (0,04)	0,03 (0,05)	-0,03 (0,04)
NVTK(-1)	-0,02 (0,04)	-0,14 (0,06)	-0,10 (0,05)	-0,05 (0,05)	-0,11 (0,08)	-0,10 (0,04)	-0,06 (0,04)	-0,16 (0,06)	0,03 (0,05)	0,01 (0,06)	-0,12 (0,05)	-0,11 (0,06)	-0,19 (0,06)	-0,10 (0,05)

	AFIT	DIXY	GAZP	GSKN	IRAO	LKOH	MTSS	NLMK	NYTK	RASP	ROSN	SBER	URKA	VTBR
RASP(-1)	-0,03 (0,03)	0,19 (0,04)	-0,03 (0,03)	0,01 (0,04)	-0,07 (0,06)	-0,02 (0,03)	-0,02 (0,03)	-0,06 (0,05)	-0,08 (0,04)	0,04 (0,04)	-0,04 (0,04)	-0,06 (0,04)	-0,06 (0,05)	-0,06 (0,04)
ROSN(-1)	-0,02 (0,05)	0,02 (0,08)	-0,07 (0,06)	-0,06 (0,07)	0,09 (0,10)	-0,04 (0,06)	0,02 (0,06)	-0,06 (0,08)	-0,06 (0,06)	-0,12 (0,08)	0,05 (0,07)	-0,12 (0,08)	0,08 (0,09)	0,04 (0,07)
SBER(-1)	-0,03 (0,04)	0,20 (0,06)	-0,14 (0,05)	-0,04 (0,05)	0,06 (0,08)	-0,10 (0,05)	-0,04 (0,05)	-0,11 (0,07)	-0,13 (0,05)	-0,11 (0,06)	-0,14 (0,06)	0,01 (0,06)	-0,27 (0,07)	-0,16 (0,06)
URKA(-1)	0,02 (0,02)	-0,13 (0,04)	0,03 (0,03)	0,05 (0,03)	-0,05 (0,05)	0,00 (0,03)	0,03 (0,03)	0,03 (0,04)	0,03 (0,03)	0,07 (0,03)	0,05 (0,03)	0,04 (0,04)	0,22 (0,04)	0,07 (0,03)
VTBR(-1)	-0,12 (0,04)	0,03 (0,06)	-0,02 (0,05)	0,02 (0,05)	-0,03 (0,08)	-0,03 (0,05)	-0,11 (0,05)	-0,05 (0,07)	0,07 (0,05)	-0,01 (0,06)	0,02 (0,06)	0,02 (0,06)	0,10 (0,07)	0,18 (0,06)
C	-0,01 (0,07)	0,04 (0,12)	-0,04 (0,09)	0,02 (0,10)	0,01 (0,15)	0,01 (0,09)	0,01 (0,08)	-0,01 (0,13)	0,07 (0,10)	-0,07 (0,11)	0,04 (0,10)	0,05 (0,11)	0,03 (0,13)	-0,01 (0,11)

Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия. В скобках указаны стандартные ошибки.
Жирным шрифтом выделены коэффициенты, значимые на 5%-м уровне значимости.

Знаки и величина коэффициентов в полученной векторной авторегрессии отражают сложившиеся на рынке приоритеты и типичную реакцию инвесторов на рост стоимости тех или иных акций. Например, рост стоимости акции 1 повышает спрос инвесторов на нее, но для диверсификации портфеля они могут покупать также и акцию 2. В этом случае влияние лагированной доходности акции 1 на текущую доходность акции 2, вероятно, будет положительным. В то же время при росте стоимости акции 1 инвесторы могут приобретать дополнительное ее количество за счет частичного вывода средств из акции 3. Тогда динамическая связь между доходностями акций 1 и 3 может быть отрицательной.

Вопрос существования автокорреляции и динамических связей между доходностями важен, поскольку для их учета в многомерных моделях требуется много параметров, что значительно усложняет оценивание этих моделей. В разделе 3 наличие автокорреляции и динамических связей между доходностями различных акций учитывается также с помощью векторной авторегрессии.

На графиках динамики логарифмических доходностей, изображенных на рис. 2.1, видна классическая кластеризация волатильности, которая, как правило, наблюдается в рядах финансовых доходностей. Особенно заметны большие кластеры волатильности, приходящиеся на период финансового кризиса. Наличие кластеризации волатильности также подтверждается значимостью и высокими значениями оценок параметров β_2 в GARCH(1,1) моделях с t -распределением, приведенных в табл. 2.7². На рис. 2.1 также заметно, что для различных акций характерны примерно одни и те же периоды высокой волатильности. Это может означать наличие динамических связей между волатильностями доходностей различных акций. Для описания динамики условной ковариационной матрицы доходностей в разделе 3 используется одна из известных многомерных GARCH моделей, которая позволяет учесть не только индивидуальную кластеризацию волатильности, но и динамические связи между волатильностями доходностей различных акций.

² Модель вида $\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-1}^2$, где σ_t^2 – условная дисперсия доходности в момент времени t . Для доходности r_t использовано t -распределение с ν степенями свободы.

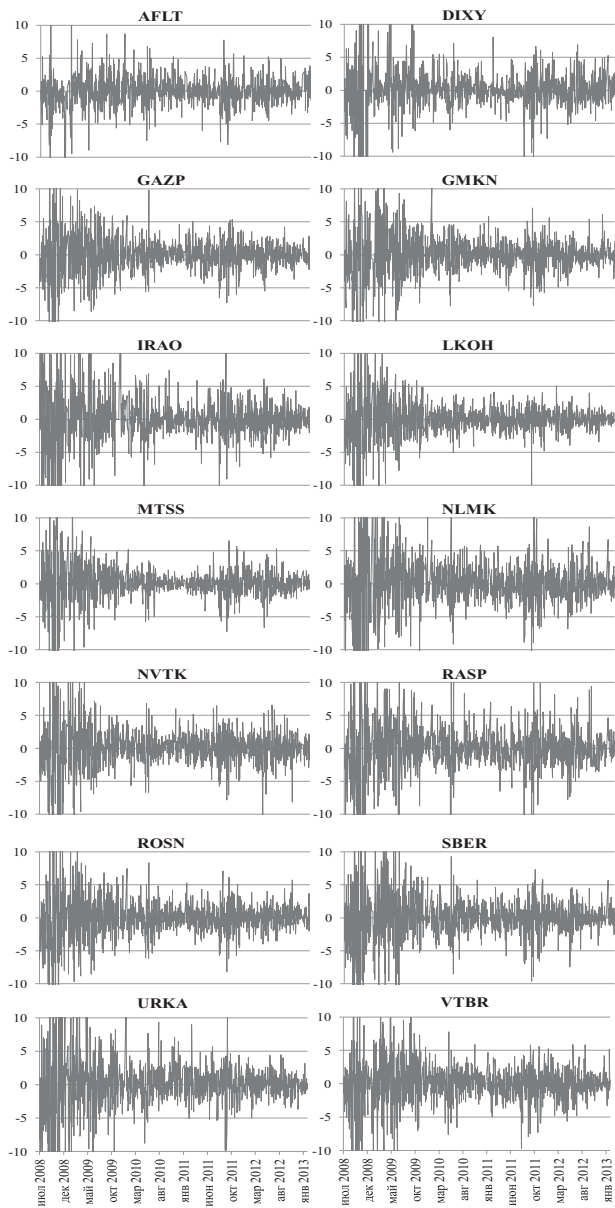


Рис. 2.1. Динамика логарифмических доходностей акций

Таблица 2.7. Оценки параметров моделей GARCH(1,1) с t-распределением

	AFLT	DIXY	GAZP	GМКN	IRAO	LKOH	MTSS	NLMK	NVTK	RASP	ROSN	SBER	URKA	VTBR
β_0	0,80 (0,05)	0,49 (0,04)	0,05 (0,04)	0,05 (0,02)	0,18 (0,10)	0,01 (0,04)	0,02 (0,05)	0,12 (0,01)	0,08 (0,01)	0,28 (0,07)	0,06 (0,02)	0,08 (0,02)	0,08 (0,14)	0,12 (0,22)
β_1	0,26 (0,02)	0,27 (0,02)	0,09 (0,02)	0,10 (0,01)	0,13 (0,04)	0,08 (0,02)	0,09 (0,02)	0,09 (0,02)	0,08 (0,02)	0,16 (0,03)	0,07 (0,02)	0,11 (0,02)	0,08 (0,06)	0,11 (0,06)
β_2	0,64 (0,02)	0,74 (0,01)	0,91 (0,02)	0,90 (0,01)	0,87 (0,03)	0,92 (0,02)	0,91 (0,02)	0,90 (0,01)	0,91 (0,01)	0,84 (0,02)	0,92 (0,02)	0,89 (0,02)	0,92 (0,03)	0,89 (0,06)
ν	3,89 (0,77)	3,34 (0,52)	6,73 (0,93)	5,93 (1,04)	3,28 (0,48)	6,91 (0,84)	4,31 (1,29)	6,49 (0,63)	5,11 (1,19)	3,60 (0,38)	5,83 (0,93)	5,28 (1,41)	3,94 (0,40)	4,88 (0,54)

Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия. В скобках указаны стандартные ошибки.

Жирным шрифтом выделены коэффициенты, значимые на 5%-м уровне значимости.

Маргинальное распределение финансовых доходностей может иметь тяжелые хвосты, во-первых, в силу переменной волатильности, которую можно наблюдать на рис. 2.1, и, во-вторых, за счет наличия тяжелых хвостов у соответствующего условного распределения. В оцененных GARCH(1,1) моделях с t-распределением оценки параметров степеней свободы достаточно малы, и, соответственно, условные распределения доходностей рассматриваемых акций имеют тяжелые хвосты. При этом число степеней свободы существенно разнится от акции к акции, то есть условные распределения доходностей имеют различную толщину хвостов.

Различные характеристики условных распределений доходностей, в том числе и толщину их хвостов, можно определить на основе непараметрических оценок одномерных условных функций плотности. В предположении строгой стационарности процесса доходностей акции r_t совместная функция плотности $f_{r_t, r_{t-1}}(x, y)$, маргинальная функция плотности $f_{r_t}(x)$ и условная функция плотности $f_{r_t|r_{t-1}}(x|y)$ не зависят от времени и могут быть оценены по имеющимся наблюдениям, в частности, непараметрическими методами. Для простоты в доступную к моменту времени $t-1$ информацию I_{t-1} включено только значение r_{t-1} .

Используется одношаговая непараметрическая оценка условной функции плотности³, основанная на стандартных ядерных оценках. Пусть h_t

³ Данная оценка рассмотрена, например, в [12].

и h_2 это ширина окон для r_t и r_{t-1} соответственно и $K_{h_i}(x) = h_i^{-1}K(x/h_i)$, $i = 1, 2$ для некоторой функции ядра $K(x)$. Ядерные оценки Надарайа – Уотсона функций плотности⁴ $f_{r_t, r_{t-1}}(x, y)$ и $f_{r_{t-1}}(y)$ определяются как $\hat{f}_{r_t, r_{t-1}}(x, y) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T K_{h_1}(x-r_t)K_{h_2}(y-r_{t-1})$ и $\hat{f}_{r_{t-1}}(y) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T K_{h_2}(y-r_{t-1})$ соответственно. Одношаговая оценка условной функции плотности $f_{r_t|r_{t-1}}(x|y)$ строится на основе $\hat{f}_{r_t, r_{t-1}}(x, y)$ и $\hat{f}_{r_{t-1}}(y)$ по формуле $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}}(x|y) = \frac{\hat{f}_{r_t, r_{t-1}}(x, y)}{\hat{f}_{r_{t-1}}(y)}$.

В качестве условия задано $r_{t-1} = 0$, используется гауссово ядро $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, а ширина окна вычисляется по правилу Сильвермана⁵ $h_1 = h_2 = 1,06\hat{\sigma}_r T^{-1/5}$, где $\hat{\sigma}_r$ – выборочное стандартное отклонение доходности и $T = 1139$ – размер выборки⁶. Построенные функции $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$ были центрированы и нормированы с помощью рассчитанных по ним же условному среднему и стандартному отклонению. На рис. 2.2 представлено сравнение полученных оценок с функцией плотности стандартного нормального распределения.

В табл. 2.8 приведены оценки среднего, стандартного отклонения, асимметрии и эксцесса, вычисленные по функциям $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$ для каждой акции. Судя по таблице, для условных распределений доходностей характерна положительная или нулевая асимметрия. Оценка эксцесса отрицательна для некоторых акций, что означает меньшую толщину хвостов условного распределения доходностей, чем нормального распределения.

В табл. 2.8 приведены оценки среднего, стандартного отклонения, асимметрии и эксцесса, вычисленные по функциям $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$ для каждой акции. Судя по таблице, для условных распределений доходностей характерна положительная или нулевая асимметрия. Оценка эксцесса отрицательна для некоторых акций, что означает меньшую толщину хвостов условного распределения доходностей, чем нормального распределения.

⁴ Предложена в работах [18] и [24].

⁵ Предложено книге [23].

⁶ Для оценки используется пакет “np” в R.

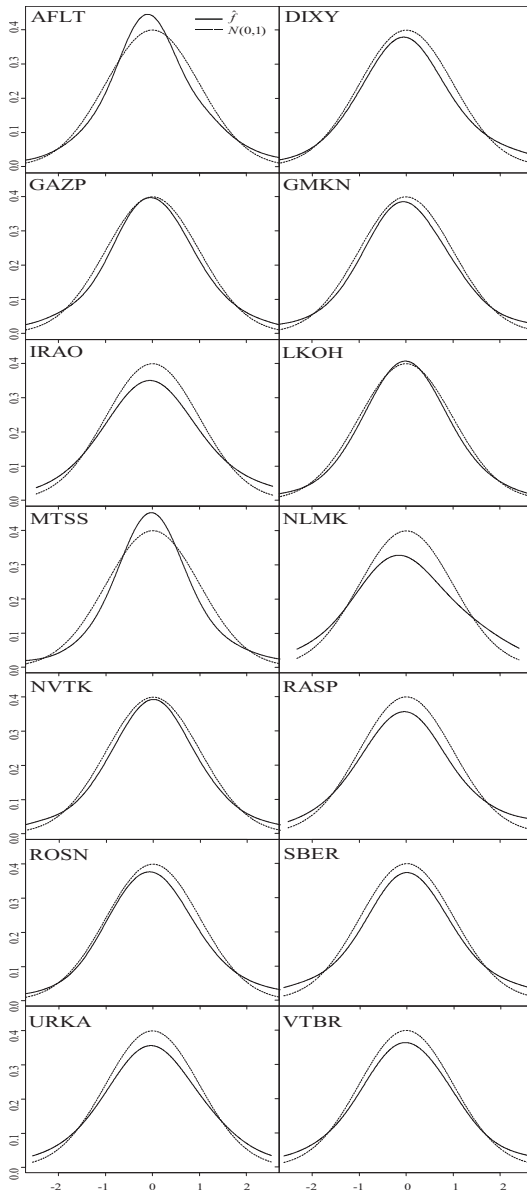


Рис. 2.2. Непараметрические оценки условных функций плотности

Таблица 2.8. Оценки параметров условного распределения доходностей при $r_{t-1} = 0$

	AFLT	DIXY	GAZP	GМКN	IRAO	LKOH	MTSS	NLMK	NVTK	RASP	ROSN	SBER	URKA	VTBR
Среднее	-0,01	0,08	0,04	0,06	-0,08	0,01	0,11	-0,08	-0,02	-0,11	0,02	0,07	0,03	-0,01
Стд. откл.	1,71	1,85	1,82	1,81	1,98	1,63	1,55	2,11	1,81	1,94	1,81	1,93	1,96	1,92
Асимметрия	0,12	0,09	-0,01	0,01	0,07	0,00	0,03	0,09	0,00	0,09	0,11	-0,03	0,01	0,00
Экссесс	0,26	0,03	0,07	0,10	-0,16	0,24	0,82	-0,32	0,10	-0,04	0,08	-0,04	-0,18	-0,10

На рис. 2.2 величина условного эксцесса проявляется в степени «пиковости» функций $\hat{f}_{r|r_{t-1}=0}(x|0)$ по сравнению с функциями плотности стандартного нормального распределения. Эта «пиковость» и соответствующие оценки эксцесса в табл. 2.8 существенно разнятся от акции к акции, что также указывает на различия в толщине хвостов условных распределений доходностей.

Наличие тяжелых хвостов у одномерных условных распределений доходностей, а также различия в «весе» этих хвостов для различных акций должны учитываться при построении многомерных моделей. В моделях, рассматриваемых в разделе 3, особое внимание уделяется параметрам, контролирующим вероятностную массу в центре многомерного распределения. Эти параметры позволяют задавать величину и форму так называемых «многомерных тяжелых хвостов».

3. Модели и результаты оценивания

Из рассматриваемых в работе 14 акций российских компаний были сформированы наборы, состоящие из 10 акций. Наборы различаются составом в части наиболее ликвидных акций (оценки ликвидности портала <http://stocks.investfunds.ru>, см. табл. 2.1). Имеются четыре отрасли с наибольшей ликвидностью: нефтяная, газовая, металлургическая и банковская, для каждой из которых рассматриваются два варианта наиболее ликвидных акций, а для остальных шести отраслей – один вариант, что дает 16 различных наборов.

Полученные наборы сначала были упорядочены по убыванию количества входящих в них высоколиквидных акций, а затем наборы, в кото-

рых количество ликвидных акций оказалось одинаковым, были дополнительно упорядочены по убыванию суммарной капитализации компаний-эмитентов. Таким образом, в целом построенные наборы были упорядочены по убыванию степени соответствия входящих в них акций понятию «голубые фишки», то есть по убыванию размера эмитентов и их «популярности» на фондовом рынке. Такое упорядочивание удобно, поскольку позволяет сравнивать эффективность использования той или иной модели при составлении портфелей из более ликвидных и менее ликвидных акций. Упорядоченные наборы акций представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Наборы акций для составления портфелей

Набор №	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Нефть	ROSN	LKOH	ROSN	LKOH	ROSN	LKOH	ROSN	ROSN
2. Банки	SBER	SBER	VTBR	VTBR	SBER	SBER	VTBR	SBER
3. Газ	GAZP	GAZP	GAZP	GAZP	GAZP	GAZP	GAZP	NVTK
4. Металлы	GMKN	GMKN	GMKN	GMKN	NLMK	NLMK	NLMK	GMKN
Набор №	9	10	11	12	13	14	15	16
1. Нефть	LKOH	LKOH	ROSN	LKOH	ROSN	LKOH	ROSN	LKOH
2. Банки	VTBR	SBER	VTBR	VTBR	SBER	SBER	VTBR	VTBR
3. Газ	GAZP	NVTK	NVTK	NVTK	NVTK	NVTK	NVTK	NVTK
4. Металлы	NLMK	GMKN	GMKN	GMKN	NLMK	NLMK	NLMK	NLMK

Фиксированные составляющие портфелей: 5. Удобрения URKA, 6. Связь MTSS, 7. Энергетика IRAO, 8. Транспорт AFLT, 9. Уголь RASP, 10. Ритейл DIXY.

Жирным шрифтом выделены высоколиквидные акции, согласно <http://stocks.investfunds.ru>.

В нижеприведенных моделях порядок акций в векторе доходностей для каждого набора соответствует порядку в табл. 3.1, где отрасли расположены по убыванию ликвидности относящихся к ним акций. Это позволяет выявить возможные зависимости оценок параметров, относящихся к той или иной акции, от уровня ее ликвидности.

Для каждого из наборов акций, представленных в табл. 3.1, рассмотрены две модели вектора доходностей: модель на основе t -распределения с вектором степеней свободы, включающая как частный случай модель со скаляром степеней свободы, и модель на основе нормального распределения.

Вектор условных ожиданий доходностей акций $E_{t-1}(r_t) = \mu_t$, определяется одинаково вне зависимости от типа распределения и его уравнение соответствует модели VAR(1):

$$\mu_t = c + Qr_{t-1}, \quad (1)$$

где μ и Q – произвольные $d \times 1$ вектор и $d \times d$ матрица соответственно (для оцениваемых моделей $d = 10$). Выше было отмечено, что лагированное значение доходности одной акции может иметь статистически значимое влияние на доходность другой акции из-за сложившихся на рынке приоритетов и типичного поведения инвесторов в той или иной ситуации. Именно по этой причине в модель вводится матрица Q , обеспечивающая зависимость $E_{t-1}(r_t)$ от r_{t-1} .

Вектор шоков доходностей акций определяется как $\varepsilon_t = r_t - E_{t-1}(r_t) = r_t - c - Qr_{t-1}$, и уравнение динамики его условной ковариационной матрицы $H_t = V_{t-1}(\varepsilon_t)$ также задано одинаковым вне зависимости от типа распределения. Используется достаточно популярная в эконометрической литературе DCC-GARCH(1,1)⁷ модель, в которой динамика условных дисперсий и корреляций моделируется отдельно. Условная ковариационная матрица H_t разложена в произведение диагональных матриц условных стандартных отклонений $D_t = \text{diag}\{\sigma_{t,1}, \dots, \sigma_{t,d}\}$ и условной корреляционной матрицы R_t следующим образом:

$$H_t = D_t R_t D_t. \quad (2)$$

Для каждой условной дисперсии задана стандартная GARCH(1,1) динамика, то есть

$$\sigma_{t,i}^2 = \omega_i + \alpha_i \varepsilon_{t-1,i} + \beta_i \sigma_{t-1,i}^2 \quad i = 1, \dots, d. \quad (3)$$

Предполагается, что некоторая положительно определенная матрица Q_t изменяется в соответствии с уравнением

$$Q_t = (1 - a - b)S + a\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + bQ_{t-1}, \quad (4)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $a + b < 1$, S – матрица безусловных корреляций вектора шоков ε_t и стартовая матрица Q_0 положительно определена. Матрица Q_t положительно определена в каждый момент времени, но не является корреляционной матрицей. Условная корреляционная матрица R_t получается нормированием матрицы Q_t по формуле

$$R_t = \text{diag}\{Q_{t,11}^{-1/2}, \dots, Q_{t,dd}^{-1/2}\} Q_t \text{diag}\{Q_{t,11}^{-1/2}, \dots, Q_{t,dd}^{-1/2}\}. \quad (5)$$

⁷ Dynamic conditional correlation, модель, предложенная в работе [7].

Отметим, что в классической DCC-GARCH модели в уравнении (4) используются не исходные шоки $\varepsilon_{i,t}$, а их нормированные версии $\eta_{i,t} = \varepsilon_{i,t} / \sigma_{i,t}$. Однако деление шоков на стандартные отклонения существенно увеличивает нелинейность модели по параметрам, что значительно затрудняет оценку многомерных моделей, рассматриваемых в разделе 3. По этой причине в используемой в настоящей работе DCC-GARCH модели в уравнении (4) задействованы именно ненормированные шоки $\varepsilon_{i,t}$. Это упрощение несущественно влияет на характер модели, поскольку матрица Q_t в любом случае нормируется по формуле (5). При переходе к ненормированным шокам меняется лишь порядок оценки параметра a .

Использование модели DCC-GARCH выгодно по двум причинам. Во-первых, в данной модели матрица H_t в любой момент времени t положительно определена по построению, что существенно облегчает техническую процедуру вычисления оценок параметров модели. И во-вторых, DCC-GARCH модель учитывает возможность изменения условных корреляций доходностей во времени, но при этом имеет относительно немного параметров по сравнению с другими многомерными GARCH моделями, в которых H_t всегда положительно определена⁸.

В разделе 2 было показано, что для рассматриваемых в данной работе временных рядов доходностей акций характерна классическая кластеризация волатильности, а изменение волатильности для различных акций происходит в определенной мере синхронно. Модель DCC-GARCH позволяет учесть как классическую кластеризацию волатильности для отдельных акций, так и возможные связи между волатильностями различных акций. Учет этих связей достигается за счет наличия параметров a и b .

В предположении, что вектор условных средних следует динамике VAR(1), а условная ковариационная матрица – динамике DCC-GARCH(1,1), рассматриваются модели, основанные на многомерном нормальном распределении и многомерном t-распределении с вектором степеней свободы, включающем как частный случай классическое t-распределение со скаляром степеней свободы.

Для модели с многомерным нормальным распределением условная функция плотности распределения вектора доходностей имеет стандартный вид:

⁸ Работа [22] содержит обзор многомерных GARCH моделей.

$$f_{t-1}(r_t) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} |H_t|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(r_t - \mu_t)' H_t^{-1} (r_t - \mu_t)\right), \quad (6)$$

где μ_t и H_t определяются формулами (1) и (2) – (5) соответственно.

Данная модель учитывает автокорреляцию, динамические связи между доходностями, кластеризацию волатильностей, а также связи между волатильностями для различных акций. Однако использование нормального распределения не позволяет учесть наличие тяжелых хвостов у одномерных маргинальных распределений доходностей, что является существенным ограничением. В данной работе модель на основе нормального распределения рассматривается в качестве базовой простой спецификации, с которой удобно сравнивать модели на основе t-распределения со скаляром и вектором степеней свободы, учитывающие наличие тяжелых хвостов.

В работе [2] предложено обобщение классического многомерного t-распределения со скалярным параметром степеней свободы на случай вектора степеней свободы (см. также [3], [4], [5]). Данное распределение дает больше гибкости для учета различий в распределениях доходностей акций, чем распределение со скаляром степеней свободы, поскольку появляется возможность моделировать эксцесс распределения отдельно для каждой доходности. Для модели на основе многомерного t-распределения с вектором степеней свободы условная функция плотности распределения вектора доходностей запишется следующим образом

$$f_{t-1}(r_t) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(\kappa)}{\Gamma_d^*(\nu)} |A_t|^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2}(r_t - \mu_t)^{(d-j)'} (A_t^{(d-j)})^{-1} (r_t - \mu_t)^{(d-j)}\right)^{\kappa_j - \kappa_{j+1}}, \quad (7)$$

где для вектора степеней свободы $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)'$ и вектора $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_d)'$ выполнено

$$\nu_j > \frac{j-1}{2}, \quad \kappa_j = \nu_j + \frac{1}{2}, \quad j = 1, \dots, d,$$

$$\nu_0 = \kappa_0 = 0, \quad \nu_{d+1} = \kappa_{d+1} = \frac{d+1}{2}.$$

A_t – некоторая положительно определенная $d \times d$ матрица, многомерная гамма-функция $\Gamma_d^*(\cdot)$ определяется через одномерную $\Gamma(\cdot)$ как

$$\Gamma_d^*(\nu) = \pi^{\frac{d(d-1)}{4}} \prod_{j=1}^d \Gamma\left(\nu_j - \frac{j-1}{2}\right)$$

и $(r_t - \mu_t)^{[d-j]}$ обозначает вектор из первых $[d-j]$ компонент вектора $r_t - \mu_t$, а $A_t^{[d-j]}$ – матрицу из первых $[d-j]$ строк и столбцов матрицы A_t .

Для вычисления функции правдоподобия на основе формул (1) – (5) и функции плотности (7) требуется перейти от матрицы H_t к матрице A_t . В работе [5] показано, что вектор r_t , имеющий функцию плотности (7), может быть представлен в виде $r_t = \mu_t + P_t \eta$, где P_t – нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами такая, что $P_t P_t' = A_t$, а вектор η имеет функцию плотности (7) с параметрами $\mu_t = 0$, $A_t = I_d$ и тем же вектором η , что и для r_t . Распределение η не зависит от времени, и поэтому индекс t для него опущен. В работе [1] показано, что ковариационная матрица $V(\eta)$ существует при $v_j > \frac{j+1}{2}$, $j=1, \dots, d$ и

$$V(\eta) = \text{diag} \left\{ \frac{2}{2a_{d-j+1} - d + j - 2} \prod_{i=d-j+2}^d \frac{2a_i - i}{2a_i - i - 1}, j=1, \dots, d \right\}.$$

Предположим, что упомянутые ограничения на η выполнены. Тогда условная ковариационная матрица H_t запишется в виде

$$V_{t-1}(r_t) = H_t = P_t V(\eta) P_t'.$$

Представив ковариационную матрицу в виде $H_t = U_t U_t'$, где U_t – нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами (U_t может быть вычислена для произвольной размерности d с помощью алгоритма разложения Холецкого), получим

$$P_t = U_t \text{diag} \left\{ \sqrt{\frac{2a_{d-j+1} - d + j - 2}{2}} \prod_{i=d-j+2}^d \sqrt{\frac{2a_i - i - 1}{2a_i - i}}, j=1, \dots, d \right\},$$

что позволяет вычислить матрицу $A_t = P_t P_t'$.

Следует отметить, что можно было бы изначально задать динамику положительно определенной матрицы A_t , например, по формулам, аналогичным (2) – (5). Однако в этом случае $V_{t-1}(r_t)$ не следовала бы DCC-GARCH(1,1) динамике и было бы нарушено равноправие в сравнении с моделью на основе нормального распределения.

Модель на основе t -распределения со скалярным параметром степеней свободы получается из модели с вектором степеней свободы введением ограничения $v_1 = v_2 = \dots = v_d$. При этом лишь упрощаются вышеприведенные формулы. Скалярный параметр степеней свободы дает возможность учитывать наличие тяжелых хвостов у маргинальных распределе-

ний доходностей, однако в отличие от векторного параметра не позволяет моделировать различия в толщине хвостов распределений для различных акций.

Для каждого из 16 наборов акций, представленных в табл. 3.1, были оценены 10-мерные модели VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) для вектора r_t с нормальным распределением, t-распределением со скаляром степеней свободы и t-распределением с вектором степеней свободы. Оценивание производилось методом максимального квазиправдоподобия на основе функций плотности (6) и (7) с использованием первых 760 наблюдений в выборке.

Многомерное нормальное распределение удобно для применения метода максимального квазиправдоподобия, и при его использовании вычислительные проблемы, как правило, не возникают. Однако этого нельзя сказать о многомерном t-распределении. В настоящее время известно, что включение числа степеней свободы многомерного t-распределения в состав аргументов, по которым максимизируется функция правдоподобия (как, например, в [15]), является не вполне корректным с вычислительной точки зрения. Возникающие в случае такого включения проблемы рассмотрены в работах [8], [9] и [16]. В силу наличия этих проблем, при оценке моделей с многомерным t-распределением параметры степеней свободы желательно фиксировать перед максимизацией функции правдоподобия. Однако в настоящей работе применение такого подхода к модели с векторным параметром степеней свободы наталкивается на проблему предварительного выбора индивидуального числа степеней свободы для каждой акции. На данный момент в литературе не предложен принцип предварительного подбора вектора степеней свободы для применения метода максимального квазиправдоподобия. Поэтому, чтобы избежать произвола при оценке моделей, в настоящей работе векторный параметр степеней свободы все же включается в состав аргументов максимизации функции правдоподобия. Кроме того, для обеспечения равноправия при сравнении оцененных моделей скалярный параметр степеней свободы также приходится включать в состав аргументов оптимизации.

Учет наличия динамических связей, автокорреляций, а также перекрестных корреляций между доходностями 10 акций приводит к большому числу параметров в рассматриваемых VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) моделях. В модели с нормальным распределением, основанной на функ-

ции плотности (6), имеется 187 параметров, а в моделях с t -распределением со скаляром и вектором степеней свободы, основанных на функции плотности (7), – 188 и 197 параметров соответственно. Такое количество параметров осложняет процедуру оценки моделей и требует аккуратного подбора стартовых значений параметров для адекватной сходимости оптимизационных процедур. Стартовые значения для вектора c и матрицы Q подбирались на основе результатов оценки 10-мерных моделей VAR(1) для каждого из 16 наборов акций, для векторов ω , α , β и параметров степеней свободы ν – на основе оценок параметров одномерных GARCH(1,1) моделей с t -распределением для каждой акции, для матрицы S – на основе оценки безусловной корреляционной матрицы доходностей. Для параметров a и b в уравнении динамики корреляционной матрицы (4) стартовые значения выбирались вручную.

Отметим, что для условной ковариационной матрицы автором были опробованы и более сложные известные многомерные GARCH модели, содержащие до 300–400 параметров в зависимости от сложности модели. Однако в силу ограниченного объема выборки в 760 наблюдений, такие модели демонстрировали плохую сходимость, и было принято решение остановиться на спецификации DCC-GARCH(1,1).

В табл. 3.2–3.4 представлены оценки параметров VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) моделей с нормальным распределением, t -распределением со скаляром степеней свободы и t -распределением с вектором степеней свободы для набора акций № 1. Результаты оценивания моделей для остальных наборов качественно схожи с результатами для набора № 1. Полученные оценки свидетельствуют о том, что рассматриваемые модели адекватно учитывают эмпирические свойства данных, отмеченные в разделе 2.

Статистически значимых положительных или отрицательных трендов в ценах акций набора 1 не прослеживается: большинство компонент вектора c незначимы. Значимые динамические связи между доходностями, наблюдавшиеся в 14-мерной модели VAR(1) в разделе 2, присутствуют и в полученных более сложных моделях: в матрице Q имеются как положительные, так и отрицательные значимые элементы, которые отражают сложившуюся на рынке типичную реакцию инвесторов на рост цен тех или иных акций.

Таблица 3.2. Оценки параметров модели VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) с нормальным распределением для набора акций № 1

	ϵ		ϕ									
	ROSN	SBER	GAZP	GMKN	URKA	MTSS	IRAO	AFLT	RASP	DIXY		
ROSN	0,07 (0,08)	0,04 (0,08)	0,03 (0,09)	-0,03 (0,06)	0,04 (0,05)	-0,02 (0,13)	-0,08 (0,04)	-0,07 (0,07)	0,01 (0,04)	0,00 (0,04)		
SBER	0,10 (0,09)	-0,05 (0,09)	-0,06 (0,09)	0,02 (0,07)	0,03 (0,06)	-0,12 (0,13)	-0,05 (0,04)	-0,02 (0,08)	-0,05 (0,05)	0,05 (0,04)		
GAZP	0,07 (0,08)	-0,03 (0,07)	0,18 (0,08)	0,00 (0,06)	0,01 (0,05)	-0,07 (0,11)	-0,07 (0,04)	-0,07 (0,06)	-0,02 (0,04)	0,03 (0,04)		
GMKN	0,16 (0,08)	-0,06 (0,08)	0,01 (0,09)	0,05 (0,07)	0,06 (0,05)	0,03 (0,10)	-0,06 (0,04)	-0,04 (0,08)	0,00 (0,04)	0,00 (0,04)		
URKA	0,20 (0,11)	0,08 (0,10)	0,12 (0,11)	-0,08 (0,08)	0,10 (0,06)	-0,02 (0,15)	-0,14 (0,05)	-0,07 (0,08)	-0,03 (0,05)	0,04 (0,05)		
MTSS	0,05 (0,05)	-0,01 (0,05)	-0,07 (0,05)	-0,04 (0,04)	0,02 (0,03)	-0,02 (0,09)	-0,04 (0,03)	-0,02 (0,05)	0,01 (0,03)	0,02 (0,03)		
IRAO	0,04 (0,10)	-0,04 (0,11)	-0,14 (0,09)	0,07 (0,07)	0,01 (0,07)	-0,14 (0,12)	0,10 (0,06)	-0,17 (0,08)	0,08 (0,05)	-0,01 (0,07)		
AFLT	0,03 (0,08)	-0,08 (0,06)	0,01 (0,06)	-0,02 (0,04)	0,04 (0,03)	-0,02 (0,06)	0,00 (0,02)	0,05 (0,06)	0,02 (0,03)	0,01 (0,03)		
RASP	0,15 (0,10)	-0,11 (0,09)	-0,02 (0,09)	-0,02 (0,08)	0,05 (0,05)	0,05 (0,11)	-0,09 (0,04)	0,03 (0,08)	0,14 (0,05)	0,03 (0,06)		
DIXY	0,06 (0,08)	0,07 (0,07)	-0,05 (0,06)	-0,13 (0,05)	-0,02 (0,03)	-0,11 (0,08)	-0,05 (0,03)	-0,01 (0,05)	0,13 (0,04)	0,11 (0,05)		

	S								V		
	ω	α	β	1	1	1	1	1	1	1	
ROSN	0,24 (0,08)	0,08 (0,02)	0,89 (0,03)	1							
SBER	0,33 (0,13)	0,10 (0,03)	0,87 (0,04)	0,75 (0,02)	1						
GAZP	0,23 (0,06)	0,08 (0,02)	0,88 (0,02)	0,81 (0,02)	0,75 (0,02)	1					
GMKN	0,21 (0,13)	0,09 (0,04)	0,89 (0,05)	0,69 (0,03)	0,64 (0,03)	0,68 (0,03)	1				
URKA	0,17 (0,10)	0,06 (0,02)	0,93 (0,03)	0,57 (0,04)	0,54 (0,03)	0,56 (0,04)	0,55 (0,04)	1			
MTSS	0,04 (0,02)	0,06 (0,01)	0,93 (0,02)	0,61 (0,03)	0,67 (0,03)	0,64 (0,03)	0,53 (0,03)	0,50 (0,04)	1		
IRAO	0,14 (0,08)	0,07 (0,02)	0,92 (0,02)	0,42 (0,05)	0,48 (0,05)	0,42 (0,06)	0,35 (0,05)	0,29 (0,04)	0,41 (0,05)	1	
AFLT	2,52 (1,06)	0,38 (0,15)	0,25 (0,25)	0,46 (0,04)	0,51 (0,04)	0,50 (0,04)	0,41 (0,04)	0,42 (0,04)	0,45 (0,04)	0,32 (0,05)	1
RASP	0,59 (0,23)	0,16 (0,06)	0,80 (0,06)	0,54 (0,04)	0,53 (0,04)	0,57 (0,04)	0,52 (0,04)	0,47 (0,04)	0,49 (0,04)	0,37 (0,05)	1
DIXY	0,24 (0,11)	0,20 (0,06)	0,81 (0,04)	0,39 (0,05)	0,36 (0,05)	0,39 (0,05)	0,37 (0,04)	0,31 (0,04)	0,34 (0,05)	0,26 (0,06)	0,32 (0,05)
<i>a</i>											
	0,0007 (0,0002)		0,90 (0,04)								

Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия. В скобках указаны стандартные ошибки.

Жирным шрифтом выделены коэффициенты, значимые на 5%-м уровне значимости.

Таблица 3.3. Оценки параметров модели VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) с t-распределением со скаляром степеней свободы для набора акций № 1

	ϵ		ϱ									
	ROSN	SBER	GAZP	GMKN	URKA	MTSS	IRAO	AFLT	RASP	DIXY		
ROSN	-0,06 (0,09)	-0,06 (0,07)	0,05 (0,07)	-0,02 (0,05)	0,05 (0,04)	-0,03 (0,08)	-0,05 (0,03)	-0,05 (0,06)	0,00 (0,04)	-0,01 (0,04)		
SBER	0,02 (0,10)	0,08 (0,08)	-0,05 (0,07)	0,03 (0,06)	0,07 (0,04)	-0,13 (0,09)	-0,03 (0,03)	0,00 (0,07)	-0,06 (0,04)	0,03 (0,03)		
GAZP	0,00 (0,09)	-0,07 (0,06)	0,18 (0,06)	-0,01 (0,05)	0,03 (0,03)	-0,07 (0,07)	-0,05 (0,03)	-0,04 (0,06)	-0,03 (0,03)	0,03 (0,03)		
GMKN	0,06 (0,08)	0,00 (0,08)	0,08 (0,08)	0,04 (0,06)	0,08 (0,04)	-0,02 (0,09)	-0,04 (0,04)	-0,01 (0,06)	-0,02 (0,04)	0,00 (0,03)		
URKA	0,10 (0,10)	0,03 (0,08)	0,05 (0,09)	-0,03 (0,07)	0,10 (0,05)	-0,05 (0,10)	-0,11 (0,04)	-0,04 (0,07)	-0,04 (0,05)	0,04 (0,04)		
MTSS	0,01 (0,05)	-0,01 (0,06)	-0,04 (0,05)	-0,03 (0,04)	0,02 (0,03)	-0,07 (0,05)	-0,02 (0,03)	-0,01 (0,05)	0,00 (0,02)	0,01 (0,02)		
IRAO	-0,01 (0,12)	-0,09 (0,09)	-0,06 (0,07)	0,06 (0,07)	0,01 (0,05)	-0,17 (0,08)	0,11 (0,05)	-0,06 (0,08)	0,03 (0,05)	-0,04 (0,03)		
AFLT	0,00 (0,08)	0,01 (0,05)	0,05 (0,06)	0,00 (0,04)	0,07 (0,03)	-0,03 (0,05)	0,00 (0,02)	0,05 (0,05)	0,00 (0,03)	-0,01 (0,03)		
RASP	0,03 (0,10)	-0,03 (0,07)	0,14 (0,07)	-0,01 (0,07)	0,06 (0,04)	-0,05 (0,09)	-0,06 (0,03)	0,04 (0,06)	0,10 (0,04)	0,01 (0,05)		
DIXY	0,05 (0,08)	0,04 (0,06)	-0,06 (0,06)	-0,05 (0,04)	-0,02 (0,03)	-0,11 (0,07)	-0,04 (0,03)	0,01 (0,05)	0,11 (0,04)	0,04 (0,05)		

	S										V		
	ω	α	β	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ROSN	0,28 (0,11)	0,06 (0,03)	0,90 (0,03)	1									
SBER	0,54 (0,18)	0,10 (0,04)	0,85 (0,04)	0,73 (0,02)	1								
GAZP	0,35 (0,10)	0,07 (0,02)	0,88 (0,03)	0,79 (0,02)	0,62 (0,03)	1							
GMKN	0,32 (0,14)	0,09 (0,03)	0,87 (0,04)	0,68 (0,03)	0,62 (0,03)	0,68 (0,03)	1						
URKA	0,30 (0,14)	0,06 (0,02)	0,91 (0,03)	0,52 (0,03)	0,49 (0,03)	0,50 (0,03)	0,50 (0,04)	1					
MTSS	0,05 (0,02)	0,05 (0,01)	0,93 (0,02)	0,60 (0,03)	0,63 (0,03)	0,62 (0,03)	0,51 (0,03)	0,46 (0,04)	1				
IRAO	1,35 (0,74)	0,27 (0,14)	0,65 (0,15)	0,46 (0,04)	0,51 (0,04)	0,46 (0,04)	0,37 (0,04)	0,37 (0,04)	0,43 (0,04)	1			
AFLT	2,77 (2,76)	0,31 (0,25)	0,28 (0,60)	0,44 (0,04)	0,49 (0,04)	0,49 (0,03)	0,39 (0,04)	0,39 (0,04)	0,43 (0,04)	0,36 (0,04)	1		
RASP	0,59 (0,21)	0,13 (0,04)	0,82 (0,04)	0,52 (0,03)	0,51 (0,03)	0,53 (0,03)	0,49 (0,03)	0,40 (0,04)	0,44 (0,04)	0,37 (0,04)	0,36 (0,04)	1	
DIXY	0,50 (0,29)	0,25 (0,09)	0,73 (0,10)	0,37 (0,04)	0,33 (0,04)	0,34 (0,04)	0,34 (0,04)	0,28 (0,04)	0,30 (0,04)	0,23 (0,04)	0,24 (0,04)	0,27 (0,04)	1
<i>a</i>													
	0,0006 (0,0003)		0,93 (0,04)										
													7,46 (0,25)

Оценки получены методом максимального квазиравнодолия. В скобках указаны стандартные ошибки.
Жирным шрифтом выделены коэффициенты, значимые на 5%-м уровне значимости.

Таблица 3.4. Оценки параметров модели VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) с t -распределением с вектором степеней свободы для набора акций № 1

	c										ρ									
	ROSN	SBER	GAZP	GMKN	URKA	MTSS	IRAO	AFLT	RASP	DIXY	ROSN	SBER	GAZP	GMKN	URKA	MTSS	IRAO	AFLT	RASP	DIXY
ROSN	-0,06 (0,08)	0,04 (0,06)	0,05 (0,07)	-0,03 (0,05)	0,04 (0,03)	-0,01 (0,07)	-0,07 (0,03)	-0,05 (0,04)	0,00 (0,04)	-0,01 (0,04)	0,04 (0,06)	0,09 (0,08)	-0,04 (0,07)	0,06 (0,03)	-0,01 (0,07)	-0,05 (0,04)	-0,01 (0,05)	-0,02 (0,04)	0,00 (0,04)	-0,01 (0,04)
SBER	0,03 (0,09)	0,08 (0,07)	-0,05 (0,08)	0,02 (0,06)	0,06 (0,03)	-0,10 (0,07)	-0,04 (0,04)	0,00 (0,05)	0,03 (0,04)	0,06 (0,08)	0,07 (0,10)	-0,05 (0,05)	0,02 (0,02)	0,02 (0,03)	-0,05 (0,09)	-0,03 (0,04)	0,00 (0,06)	-0,06 (0,05)	0,03 (0,04)	0,03 (0,04)
GAZP	-0,02 (0,08)	-0,06 (0,06)	0,20 (0,07)	-0,01 (0,05)	0,02 (0,03)	-0,05 (0,06)	-0,06 (0,03)	0,02 (0,04)	0,05 (0,04)	0,02 (0,03)	0,07 (0,10)	-0,06 (0,06)	0,05 (0,05)	0,01 (0,03)	0,09 (0,07)	0,09 (0,05)	-0,05 (0,06)	-0,03 (0,03)	0,02 (0,03)	0,02 (0,03)
GMKN	0,06 (0,08)	-0,08 (0,06)	0,09 (0,08)	0,04 (0,06)	0,06 (0,03)	-0,01 (0,07)	-0,05 (0,04)	0,00 (0,05)	0,03 (0,04)	0,06 (0,08)	0,07 (0,10)	-0,04 (0,07)	0,02 (0,02)	0,02 (0,03)	-0,05 (0,09)	-0,03 (0,04)	0,00 (0,06)	-0,02 (0,05)	0,00 (0,04)	0,00 (0,04)
URKA	0,09 (0,10)	0,04 (0,08)	0,07 (0,10)	-0,04 (0,07)	0,09 (0,04)	-0,03 (0,09)	-0,12 (0,04)	-0,04 (0,06)	0,03 (0,04)	0,07 (0,10)	-0,05 (0,05)	0,02 (0,02)	0,02 (0,03)	0,02 (0,03)	-0,03 (0,09)	-0,04 (0,04)	0,00 (0,06)	-0,04 (0,05)	0,03 (0,04)	0,03 (0,04)
MTSS	0,00 (0,05)	0,00 (0,04)	-0,05 (0,05)	-0,03 (0,04)	0,02 (0,02)	-0,05 (0,05)	-0,03 (0,03)	0,00 (0,03)	0,00 (0,02)	0,03 (0,04)	-0,05 (0,05)	0,05 (0,06)	0,05 (0,05)	0,01 (0,03)	0,09 (0,07)	0,09 (0,05)	-0,05 (0,06)	0,01 (0,05)	0,00 (0,04)	0,00 (0,04)
IRAO	-0,07 (0,08)	-0,07 (0,07)	-0,06 (0,07)	0,05 (0,06)	0,05 (0,06)	-0,15 (0,07)	0,09 (0,05)	0,09 (0,05)	0,05 (0,04)	0,06 (0,08)	0,06 (0,06)	-0,06 (0,06)	0,05 (0,05)	0,01 (0,03)	0,09 (0,07)	0,09 (0,05)	-0,05 (0,06)	0,01 (0,05)	0,01 (0,04)	-0,04 (0,03)
AFLT	-0,07 (0,07)	-0,12 (0,05)	0,01 (0,05)	0,01 (0,04)	0,06 (0,02)	-0,03 (0,05)	-0,01 (0,02)	0,05 (0,04)	0,05 (0,06)	0,01 (0,04)	0,05 (0,05)	0,12 (0,08)	-0,02 (0,07)	0,05 (0,04)	-0,05 (0,08)	-0,07 (0,03)	0,04 (0,06)	0,00 (0,03)	0,00 (0,04)	0,00 (0,04)
RASP	-0,07 (0,09)	-0,09 (0,07)	0,00 (0,07)	-0,02 (0,07)	0,05 (0,04)	-0,05 (0,08)	-0,07 (0,03)	0,00 (0,06)	0,03 (0,04)	0,06 (0,08)	0,07 (0,10)	0,12 (0,08)	-0,02 (0,07)	0,05 (0,04)	-0,05 (0,08)	-0,07 (0,03)	0,02 (0,06)	0,09 (0,05)	0,01 (0,04)	0,01 (0,05)
DIXY	0,02 (0,07)	0,06 (0,05)	0,04 (0,04)	-0,05 (0,04)	-0,03 (0,03)	-0,03 (0,07)	-0,06 (0,03)	0,04 (0,05)	0,05 (0,04)	0,06 (0,08)	0,06 (0,06)	-0,06 (0,06)	-0,05 (0,05)	-0,03 (0,03)	-0,03 (0,07)	-0,06 (0,03)	0,02 (0,05)	0,09 (0,04)	0,02 (0,04)	0,02 (0,05)

	S										V					
	ω	α	β	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ROSN	0,26 (0,10)	0,05 (0,02)	0,91 (0,03)	1												
SBER	0,48 (0,17)	0,09 (0,04)	0,85 (0,04)	0,75 (0,02)	1											
GAZP	0,31 (0,08)	0,07 (0,02)	0,88 (0,02)	0,80 (0,02)	0,75 (0,02)	1										
GMKN	0,23 (0,10)	0,07 (0,03)	0,90 (0,03)	0,70 (0,02)	0,64 (0,03)	0,70 (0,02)	1									
URKA	0,28 (0,13)	0,05 (0,02)	0,92 (0,03)	0,55 (0,03)	0,52 (0,03)	0,53 (0,03)	0,51 (0,03)	1								
MTSS	0,05 (0,02)	0,05 (0,01)	0,93 (0,02)	0,60 (0,03)	0,64 (0,03)	0,63 (0,03)	0,51 (0,03)	0,47 (0,03)	1							
IRAO	1,35 (0,55)	0,30 (0,11)	0,63 (0,10)	0,44 (0,04)	0,49 (0,04)	0,45 (0,04)	0,37 (0,04)	0,29 (0,04)	0,42 (0,04)	1						
AFLT	2,25 (0,99)	0,28 (0,11)	0,41 (0,21)	0,42 (0,04)	0,45 (0,04)	0,46 (0,03)	0,38 (0,04)	0,37 (0,03)	0,40 (0,04)	0,34 (0,04)	1					
RASP	0,71 (0,29)	0,15 (0,04)	0,82 (0,05)	0,47 (0,04)	0,47 (0,04)	0,48 (0,04)	0,43 (0,04)	0,36 (0,04)	0,40 (0,04)	0,32 (0,04)	0,31 (0,04)	1				
DIXY	1,89 (1,64)	0,59 (0,32)	0,55 (0,24)	0,26 (0,04)	0,22 (0,04)	0,23 (0,04)	0,23 (0,04)	0,19 (0,04)	0,19 (0,04)	0,16 (0,04)	0,17 (0,04)	0,18 (0,04)	1			
<i>a</i>																
		<i>b</i>														
0,0005 (0,0002)		0,91 (0,03)		1,52 (0,20)	2,53 (0,29)	3,80 (0,46)	4,11 (0,34)	5,83 (0,61)	7,05 (0,90)	9,65 (1,49)	9,45 (1,49)	9,85 (1,17)	7,43 (0,33)			

Оценки получены методом максимального квазиравнодоверия. В скобках указаны стандартные ошибки.
Жирным выделены коэффициенты, значимые на 5%-м уровне значимости.

Кластеризация волатильностей в модели учтена за счет значимых и близких к 1 компонентов вектора β , а оценка матрицы S близка к безусловной корреляционной матрице доходностей, приведенной в разделе 2. Наконец, достаточно низкие значения оценок параметров степеней свободы ν указывают на наличие тяжелых хвостов у маргинальных распределений доходностей акций. При этом они существенно различаются в случае вектора степеней свободы, а следовательно, толщина хвостов разнится от акции к акции.

Отдельно отметим, что высокое значение оценки параметра b говорит о том, что если корреляции доходностей большинства акций в наборе выросли в какой-то момент, то их высокие значения сохраняются еще достаточно продолжительное время. Данное свойство построенных моделей в целом согласуется с интуитивным представлением о влиянии новостей на фондовые рынки. Одновременное повышение корреляций доходностей многих акций часто происходит при выходе новостей долгосрочного характера, например, макроэкономических данных, и поэтому влияние таких новостей на корреляции доходностей сохраняется в течение некоторого продолжительного периода после их выхода. Оценка параметра a значима, но имеет значительно меньший порядок, чем оценка b вследствие того, что в данной работе в уравнении (4) используются ненормированные шоки $\varepsilon_{t,i}$.

4. Оптимизация портфелей

Основы современной портфельной теории заложены в фундаментальных работах [17] и [21]. Обозначим через $w_t = (w_{1t}, w_{2t}, \dots, w_{N_t})'$ вектор долей акций в момент времени t в финансовом портфеле, который необходимо оптимизировать тем или иным образом в момент времени $t-1$. По определению, для данного вектора всегда выполнено $1'w_t = 1$, где $1 = (1, 1, \dots, 1)'$. Положительные компоненты вектора w_t соответствуют длинным позициям по тем или иным акциям, а отрицательные компоненты – коротким позициям.

Отметим, что для рассматриваемых в данной работе российских акций существуют определенные ограничения на короткие продажи, которые затрудняют составление тех или иных финансовых портфелей. Эта проблема в работе не рассматривается и возможные ограничения на короткие продажи при составлении портфелей игнорируются. Рассматри-

ваемые 14 акций являются одними из наиболее ликвидных на российском фондовом рынке, и ограничения на их короткие продажи не являются жесткими. Тем не менее полученные в работе выводы из сравнительного анализа показателей портфелей, оптимизированных в рамках различных моделей, верны в той степени, в которой ограничения на короткие продажи не препятствуют составлению этих портфелей.

Для вектора условных ожиданий доходностей и их условной ковариационной матрицы по-прежнему используются обозначения μ_t и H_t соответственно. В моделях, рассматриваемых в данной работе, μ_t и H_t определяются формулами (1) – (5). Информации о μ_t и H_t достаточно для составления портфелей двух типов: портфеля с минимальной дисперсией доходности при наличии ограничений на ожидаемую доходность, в частности, портфеля с минимальной дисперсией без ограничений, и портфеля с максимальным ожиданием доходности при наличии ограничений на дисперсию доходности. Эти портфели удобны тем, что при оптимизации вектор весов акций в них может быть найден аналитически.

При оптимизации финансового портфеля инвестор может исходить из своих предпочтений относительно желательного уровня доходности портфеля. Пусть \bar{r} – минимальный приемлемый уровень ожидаемой доходности портфеля, установленный инвестором. Наиболее естественной задачей для такого инвестора является нахождение портфеля с минимальной дисперсией доходности среди портфелей с ожидаемой доходностью не ниже \bar{r} . Таким образом, требуется минимизировать дисперсию портфеля:

$$w_t' H_t w_t \Rightarrow \min_{w_t}$$

при ограничениях

$$1' w_t = 1,$$

$$\mu_t' w_t \geq \bar{r}.$$

Применяя теорему Куна – Таккера, нетрудно убедиться что решение данной задачи условной оптимизации выглядит следующим образом:

$$w_t^{CMV} = \frac{H_t^{-1} \left((\mu_t' H_t^{-1} \mu_t - \bar{r} \mu_t' H_t^{-1} 1) 1 + (\bar{r} 1' H_t^{-1} 1 - \mu_t' H_t^{-1} \mu_t) \mu_t \right)}{1' H_t^{-1} \left((\mu_t' H_t^{-1} \mu_t - \bar{r} \mu_t' H_t^{-1} 1) 1 + (\bar{r} 1' H_t^{-1} 1 - \mu_t' H_t^{-1} \mu_t) \mu_t \right)}, \quad (8)$$

где аббревиатура CMV, которая в данной работе используется для обозначения портфелей этого типа, означает “conditional minimum variance”.

Важным частным случаем этой задачи является минимизация дисперсии доходности портфеля без ограничения на уровень ожидаемой доходности. Устранение ограничения $\mu'_t w_t \geq \bar{r}$ приводит к решению следующего вида:

$$w_t^{AMV} = \frac{H_t^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' H_t^{-1} \mathbf{1}}, \quad (9)$$

где AMV означает “absolute minimum variance”.

У инвестора могут быть также некоторые предпочтения относительно допустимой волатильности доходности формируемого портфеля. Обозначим через \bar{v} установленный инвестором максимальный допустимый уровень дисперсии доходности портфеля. Искомым портфелем в этом случае естественно считать портфель с максимальной ожидаемой доходностью среди портфелей с дисперсией доходности не выше \bar{v} . Это означает, что оптимизация портфеля проводится путем решения следующей задачи максимизации:

$$\mu'_t w_t \Rightarrow \max_{w_t}$$

при ограничениях

$$\mathbf{1}' w_t = 1,$$

$$w_t' H_t w_t \leq \bar{v}.$$

Данная задача также может быть решена с помощью теоремы Куна – Таккера, но ее решение имеет несколько более громоздкий вид, чем решение задачи условной минимизации дисперсии, в силу наличия нелинейного ограничения. Вектор весов акций в оптимизированном портфеле данного типа имеет следующий вид:

$$w_t^{CME} = \frac{H_t^{-1} \left((\mathbf{1}' H_t^{-1} \mathbf{1})^{-1} \left(\left(\frac{\mu'_t H_t^{-1} \mu_t - (\mu'_t H_t^{-1} \mathbf{1})^2 (\mathbf{1}' H_t^{-1} \mathbf{1})^{-1}}{\bar{v} - (\mathbf{1}' H_t^{-1} \mathbf{1})^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} - \mu'_t H_t^{-1} \mathbf{1} \right) \mathbf{1} + \mu_t \right)}{\mathbf{1}' H_t^{-1} \left((\mathbf{1}' H_t^{-1} \mathbf{1})^{-1} \left(\left(\frac{\mu'_t H_t^{-1} \mu_t - (\mu'_t H_t^{-1} \mathbf{1})^2 (\mathbf{1}' H_t^{-1} \mathbf{1})^{-1}}{\bar{v} - (\mathbf{1}' H_t^{-1} \mathbf{1})^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} - \mu'_t H_t^{-1} \mathbf{1} \right) \mathbf{1} + \mu_t \right)} \quad (10)$$

где CME – аббревиатура для “conditional maximum expectation”.

Перед тем как проводить оптимизацию портфелей для моделей из раздела 2, рассмотрим пример построения эффективного фронта портфелей на основе выборочных средних и ковариаций доходностей. В табл. 4.1 и 4.2 представлены средние значения, стандартные отклонения и корреляции доходностей акций набора № 1, вычисленные по первым 760 наблю-

дениям, на которых производилась оценка моделей из раздела 2. Используя эти величины в формулах (8) и (10), получим оптимизированные портфели на основе «безусловных» средних и ковариаций. Далее варьируя параметры \bar{r} и \bar{v} , построим множество эффективных портфелей на плоскости $(Var(R), E(R))$, где R – доходность портфеля. Полученная граница эффективных портфелей изображена на рис. 4.1.

Граница эффективных портфелей на рис. 4.1 полностью описывается как CMV, так и CME портфелями. При этом нижняя ветвь границы эффективных портфелей, которая на рис. 4.1 опущена, целиком лежит в области с отрицательной ожидаемой доходностью и поэтому является нерелевантной на практике, поскольку для любого портфеля нижней ветви можно найти портфель на верхней ветви, имеющий ту же дисперсию, но большее ожидание доходности. Таким образом, в данном случае эффективные портфели совпадают с CME портфелями, поскольку в них максимизируется ожидаемая доходность.

Таблица 4.1. Средние и стандартные отклонения доходностей для набора акций № 1

	AFLT	GMKN	DIXY	GAZP	IRAO	MTSS	RASP	ROSN	SBER	URKA
Среднее	-0,04	0,00	-0,08	0,02	-0,03	-0,04	0,07	-0,05	-0,07	-0,02
Стд. откл.	4,02	4,50	3,64	3,94	5,33	3,30	6,23	2,74	4,28	4,64

Таблица 4.2. Корреляции доходностей для набора акций № 1

	AFLT	GMKN	DIXY	GAZP	IRAO	MTSS	RASP	ROSN	SBER	URKA
AFLT	1									
GMKN	0,81	1								
DIXY	0,87	0,81	1							
GAZP	0,71	0,66	0,72	1						
IRAO	0,65	0,58	0,64	0,51	1					
MTSS	0,75	0,78	0,77	0,61	0,60	1				
RASP	0,47	0,47	0,44	0,29	0,32	0,45	1			
ROSN	0,44	0,46	0,46	0,36	0,37	0,38	0,28	1		
SBER	0,61	0,59	0,65	0,56	0,52	0,61	0,35	0,32	1	
URKA	0,23	0,25	0,25	0,24	0,23	0,23	0,19	0,19	0,18	1

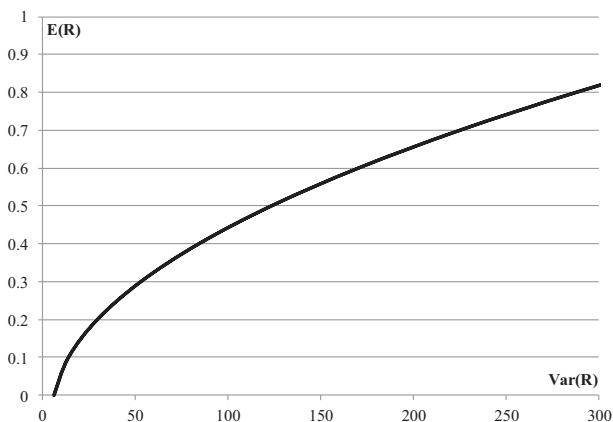


Рис. 4.1. Множество эффективных портфелей для набора акций № 1 на основе выборочных средних и ковариаций доходностей

Построенное множество эффективных портфелей позволяет оценить риски стратегии, направленной на обеспечение того или иного уровня доходности портфеля. В данном случае они достаточно высоки даже для небольшой требуемой доходности. Так, если инвестор задал в качестве ориентира ожидаемую доходность 0,1% в день, портфель с минимальной волатильностью будет иметь стандартное отклонение дневной доходности 3,7%. При ориентире на ожидаемую доходность 0,2% в день, минимальная волатильность составит уже 5,4%, а при ориентире 0,5% она достигнет 11,1%.

Как было сказано в разделе 2, для каждого из 16 рассматриваемых в работе наборов акций были оценены VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) модели с нормальным распределением, t-распределением со скаляром степеней свободы и t-распределением с вектором степеней свободы. На основе каждой из полученных 48 моделей были построены прогнозы динамики вектора условных средних μ_t и условной ковариационной матрицы H_t на период с августа 2011 г. по февраль 2013 г. (последние 379 наблюдений в выборке). Далее с помощью полученных рядов μ_t и H_t по формулам (8) – (10) определялись веса акций в портфелях, оптимизированных по схемам AMV, CMV и CME. В качестве параметров для ограничений использовались $\bar{r} = 0,5$ и $\bar{v} = 50$. На основе вычисленных весов рассчитывались фактические доходности оптимизированных портфелей. По полученным рядам фактических доходностей для всех портфелей были

рассчитаны средние значения и стандартные отклонения, которые приведены в табл. 4.3.

Согласно табл. 4.3, для AMV портфелей модели на основе нормального распределения и t-распределений со скаляром и вектором степеней свободы показывают примерно одинаковые результаты. Средние доходности AMV портфелей для этих моделей различаются в большинстве случаев не более чем на 0,02 процентных пункта (далее – п.п.), а стандартные отклонения – не более чем на 0,03 п.п. Таким образом, ни одна из моделей не имеет явных преимуществ по сравнению с другими в задаче абсолютной минимизации дисперсии доходности портфеля.

Для CMV портфелей минимальная фактическая дисперсия достигается в модели с нормальным распределением. Стандартное отклонение в этой модели оказывается ниже, чем в модели на основе t-распределения со скаляром степеней свободы, на 0,1–0,3 п.п., и ниже, чем в модели с вектором степеней свободы, на 0,3–0,4 п.п. Примечательно, что для всех CMV портфелей учет наличия тяжелых хвостов увеличивает фактическую дисперсию доходности оптимизированного портфеля, а учет различий в тяжести хвостов для различных акций увеличивает ее дополнительно. Однако t-распределение с вектором степеней свободы дает хорошие результаты с точки зрения фактической средней доходности CMV портфелей. Для большинства CMV портфелей, составленных для наборов акций с высокой ликвидностью (наборы 1–9) средняя доходность для модели на основе t-распределения с вектором степеней свободы выше, чем в модели со скаляром степеней свободы, на 0,03–0,08 п.п. и выше, чем в модели с нормальным распределением, на 0,06–0,11 п.п. Для наборов из менее ликвидных акций лидера среди моделей не наблюдается: средние значения доходностей для моделей с нормальным распределением и t-распределениями различаются не более чем на 0,02 п.п.

Для CME портфелей по фактической средней доходности лидирует модель на основе нормального распределения. Средняя доходность большинства CME портфелей для нее превосходит средние доходности для моделей на основе t-распределений со скаляром и вектором степеней свободы на 0,1–0,3 п.п. При этом для большинства портфелей с наименее ликвидными наборами акций (наборы 10–16) t-распределение с вектором степеней свободы уступает по средней доходности t-распределению со скаляром степеней свободы. Таким образом, учет различий в толщине хвостов для различных акций в данном случае снижает среднюю результативность торговли. Однако для CME портфелей модель на основе t-распределения с вектором степеней свободы дает, как правило, наи-

меньшее фактическое стандартное отклонение: в большинстве портфелей оно оказывается меньшим, чем в модели со скаляром степеней свободы, на 0,1–0,3 п.п., и ниже, чем в модели с нормальным распределением, на 0,2–0,7 п.п. Для данных портфелей волатильность снижается как за счет учета наличия тяжелых хвостов, так и за счет учета различия в их толщине для различных акций.

На рис. 4.2–4.4 изображена динамика стоимости AMV, CMV и CME портфелей для наборов акций № 1, 8 и 16, которые имеют соответственно высокий, средний и относительно низкий уровень ликвидности. Траектории стоимости AMV портфелей в моделях с нормальным распределением и t-распределениями достаточно близки в силу близости средних и стандартных отклонений доходностей этих портфелей, причем это наблюдается вне зависимости от уровня ликвидности набора акций. На рис. 4.3 для ликвидного набора акций № 1 видно, что стоимость CMV портфеля, построенного по модели на основе t-распределения с вектором степеней свободы, превышает стоимость портфелей, построенных на основе других моделей начиная с осени 2012 г. К февралю 2013 г. разница в стоимости портфеля с моделью со скаляром степеней свободы составляет 10%. Для других ликвидных наборов акций эта разница в стоимости CMV портфелей достигает к февралю 2013 г. 20–30%. На рис. 4.4 стоимость CME портфеля № 1 для модели с нормальным распределением выше на большей части периода, что наблюдается и для большинства остальных CME портфелей. Нормальное распределение может превосходить t-распределение для рассматриваемых данных, поскольку условное распределение доходностей многих акций близко к нормальному, как показывает рис. 2.2. В частности, толщина хвостов условного распределения доходностей невелика.

Таблица 4.3. Средние значения и стандартные отклонения доходностей портфелей, оптимизированных по схемам AMV, CMV и CME при $\bar{r} = 0,5$, $\bar{v} = 50$

	VDF	SDF	N	VDF	SDF	N	VDF	SDF	N	VDF	SDF	N
№ набора акций	1			2			3			4		
AMV \bar{R}	0,02	0,03	0,02	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,05	0,08	0,08	0,08
$\hat{\sigma}_R$	1,34	1,34	1,32	1,28	1,28	1,26	1,37	1,37	1,35	1,32	1,32	1,30
CMV \bar{R}	0,18	0,15	0,10	0,23	0,19	0,15	0,28	0,24	0,19	0,28	0,24	0,22
$\hat{\sigma}_R$	2,03	1,93	1,73	1,91	1,80	1,66	2,02	1,98	1,68	1,87	1,84	1,60

	VDF	SDF	N	VDF	SDF	N	VDF	SDF	N	VDF	SDF	N
№ набора акций	1			2			3			4		
CME \bar{R}	0,98	0,95	0,96	0,89	0,87	0,94	1,29	1,29	1,34	1,06	1,08	1,24
$\hat{\sigma}_R$	6,00	5,93	6,41	5,98	5,97	6,42	5,69	5,89	6,23	5,72	5,88	6,29
№ набора акций	5			6			7			8		
AMV \bar{R}	0,04	0,05	0,04	0,06	0,07	0,07	0,06	0,07	0,07	0,00	0,01	0,00
$\hat{\sigma}_R$	1,36	1,36	1,33	1,28	1,29	1,28	1,37	1,38	1,35	1,34	1,34	1,32
CMV \bar{R}	0,23	0,20	0,17	0,27	0,22	0,19	0,34	0,26	0,23	0,09	0,08	0,08
$\hat{\sigma}_R$	2,00	1,94	1,73	1,87	1,73	1,62	1,98	1,89	1,67	2,02	1,86	1,64
CME \bar{R}	1,12	1,07	1,10	1,02	0,97	1,05	1,42	1,30	1,42	0,57	0,59	0,70
$\hat{\sigma}_R$	5,92	6,09	6,50	5,75	5,84	6,18	5,49	5,81	6,15	6,30	6,12	6,28
№ набора акций	9			10			11			12		
AMV \bar{R}	0,09	0,09	0,09	0,02	0,03	0,02	0,03	0,04	0,03	0,05	0,06	0,06
$\hat{\sigma}_R$	1,30	1,32	1,29	1,27	1,27	1,26	1,37	1,37	1,35	1,31	1,31	1,30
CMV \bar{R}	0,30	0,25	0,24	0,06	0,07	0,07	0,18	0,18	0,18	0,14	0,15	0,16
$\hat{\sigma}_R$	1,89	1,79	1,59	1,94	1,77	1,65	2,00	1,94	1,64	1,85	1,84	1,59
CME \bar{R}	1,17	1,11	1,28	0,26	0,38	0,50	0,93	1,02	1,20	0,55	0,71	0,88
$\hat{\sigma}_R$	5,49	5,76	6,13	6,04	5,94	6,28	5,91	6,02	6,11	5,76	5,84	6,07
№ набора акций	13			14			15			16		
AMV \bar{R}	0,02	0,04	0,02	0,04	0,05	0,04	0,05	0,06	0,06	0,07	0,08	0,07
$\hat{\sigma}_R$	1,36	1,36	1,34	1,27	1,27	1,26	1,37	1,38	1,35	1,29	1,30	1,28
CMV \bar{R}	0,14	0,13	0,14	0,12	0,13	0,11	0,22	0,20	0,23	0,16	0,17	0,17
$\hat{\sigma}_R$	1,99	1,88	1,65	1,90	1,79	1,61	1,94	1,85	1,65	1,85	1,79	1,56
CME \bar{R}	0,60	0,67	0,76	0,43	0,53	0,56	0,92	0,95	1,20	0,65	0,77	0,88
$\hat{\sigma}_R$	6,18	6,17	6,29	5,92	5,93	6,18	5,62	5,88	6,10	5,64	5,81	6,08

Обозначения моделей: VDF – t-распределение с вектором степеней свободы, SDF – t-распределение со скаляром степеней свободы, N – нормальное распределение.

Обозначения портфелей: AMV – минимум дисперсии, CMV – минимум дисперсии при ожидании не ниже r , CME – максимум ожидания при дисперсии не выше v .

Серым выделены: наибольшая среди N, SDF и VDF фактическая средняя доходность \bar{R} и наименьшее фактическое стандартное отклонение $\hat{\sigma}_R$.

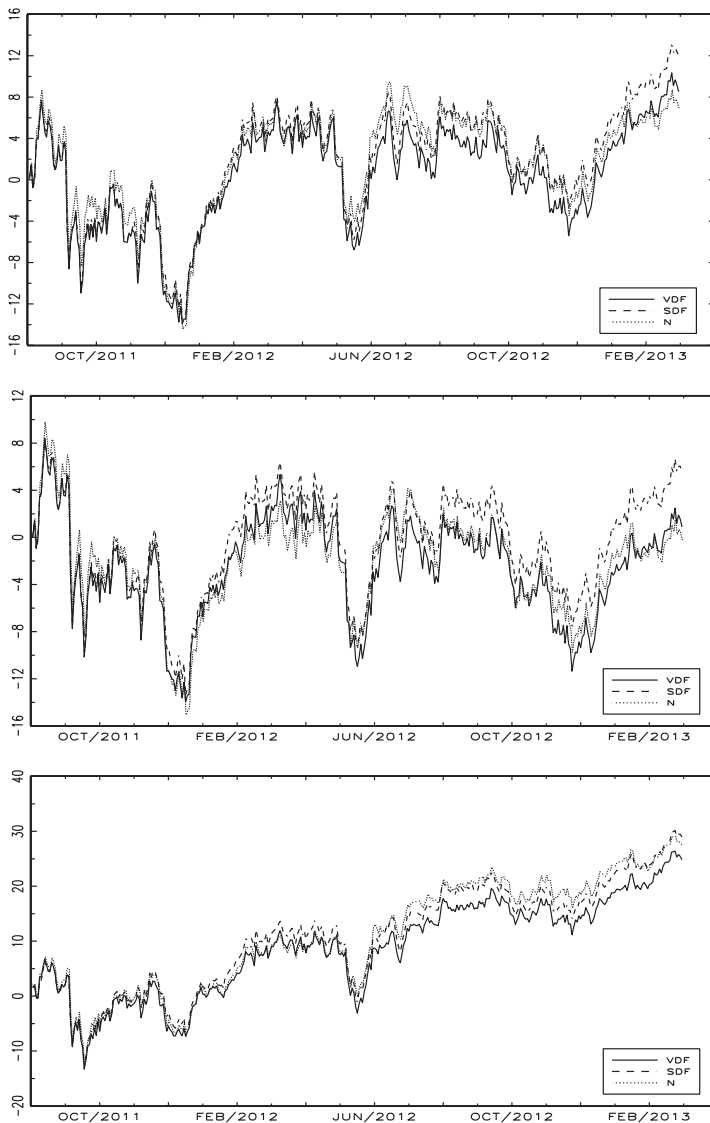


Рис 4.2. Накопленная доходность AMV портфелей для наборов акций № 1, 8, 16, %

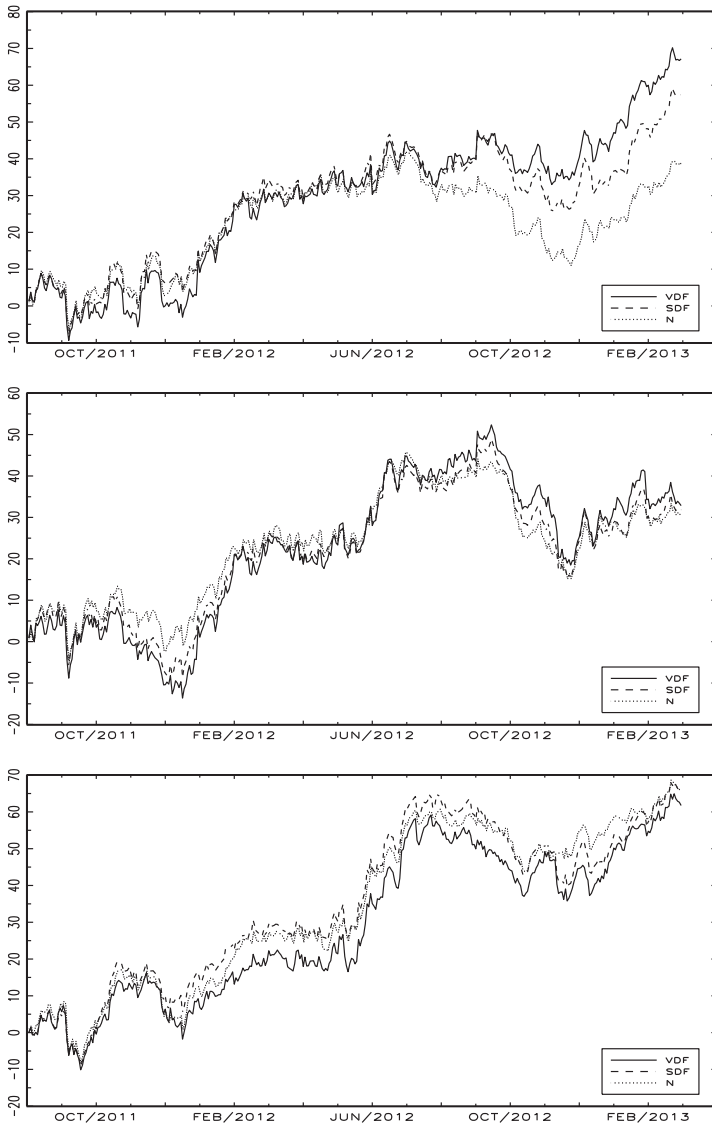


Рис 4.3. Накопленная доходность CMV портфелей для наборов акций № 1, 8, 16, %

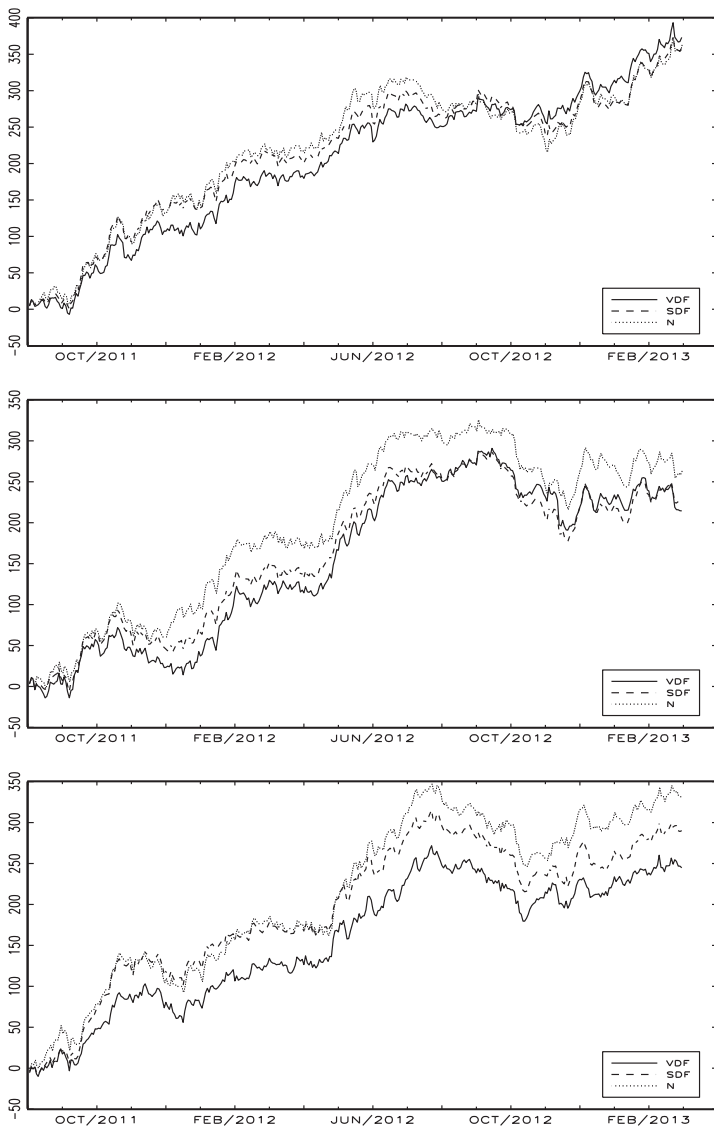


Рис 4.4. Накопленная доходность СМЕ портфелей для наборов акций № 1, 8, 16, %

Библиографический список

- [1] Балаев А.И. Моменты многомерного t-распределения с вектором степеней свободы, одномерные маргинальные функции плотности и характеристические функции: препринт WP2/2012/03. М.: Изд. дом НИУ ВШЭ, 2012.
- [2] Шведов А.С. Бета-распределение случайной матрицы и его применение в модели состояние-наблюдение: препринт WP2/2009/01. М.: Изд. дом НИУ ВШЭ, 2009.
- [3] Шведов А.С. К байесовскому анализу матричной линейной модели состояние-наблюдение: препринт WP2/2012/01. М.: Изд. дом НИУ ВШЭ, 2012.
- [4] Шведов А.С. Робастная регрессия с применением t-распределения и EM-алгоритма // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2011. 1. С. 68–87.
- [5] Шведов А.С. t-распределение случайной матрицы и его применение в регрессионной модели: препринт WP2/2010/01. М.: Изд. дом НИУ ВШЭ, 2010.
- [6] Aguilar O., West M. Bayesian Dynamic Factor Models and Portfolio Allocation // *Journal of Business & Economic Statistics*. 2000. 18 (3). P. 338–357.
- [7] Engle R.F. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2002. No. 20. P. 339–350.
- [8] Fernandez C., Steel M. Multivariate Student-t Regression Models: Pitfalls and Inference // *Biometrika*. 1999. 86 (1). P. 153–167.
- Fiorentini G., Sentana E., Calzolari G. Maximum likelihood estimation and inference in multivariate conditionally heteroscedastic dynamic regression models with Student t innovations // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2003. No. 21. P. 532–546.
- [9] Gohout W., Specht K. Mean-variance portfolios using Bayesian vector-autoregressive forecasts // *Statistical Papers*. 2007. 48 (3). P. 403–418.
- [10] Greyserman A., Jones D., Strawderman W. Portfolio selection using hierarchical Bayesian analysis and MCMC methods // *Journal of Banking & Finance*. 2006. 30. P. 669–678.
- [11] Hansen B. Nonparametric Conditional Density Estimation. Working paper, 2004.

- [12] Kotz S., Nadarajah S. Estimation Methods for the Multivariate t Distribution // *Acta Applicandae Mathematicae*. 2008. 102 (1). P. 99–118.
- [13] Ku Y-H.H. Student-t distribution based VAR-MGARCH: an application of the DCC model on international portfolio risk management // *Applied Economics*. 2008. 40(13). P. 1685–1697.
- [14] Liu C., Rubin D. ML Estimation of the t-distribution Using EM and its Extensions, ECM and ECME // *Statistica Sinica*. 1995. 5. P. 19–39.
- [15] Lucas A. Robustness of the Student-t Based M-estimator // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 1997. 26 (5). P. 1165–1182.
- [16] Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. N.Y.: Wiley, 1959.
- [17] Nadaraya E. On nonparametric estimates of density functions and regression curves // *Theory of Applied Probability*. 1965. No. 10. P. 186–190.
- [18] Polson N.G., Tew B.V. Bayesian Portfolio Selection: An Empirical Analysis of the S&P 500 Index 1970–1996 // *Journal of Business & Economic Statistics*. 2000. 18 (2). P. 164–173.
- [19] Scherer B. Portfolio Construction and Risk Budgeting. L.: Risk Books, 2002.
- [20] Sharpe W.F. Portfolio theory and capital markets. N.Y.: McGraw-Hill, 1970.
- [21] Silvennoinen A., Terasvirta T. Multivariate GARCH models. SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance 669, 2008.
- [22] Silverman B. Density Estimation for Statistics and Data Analysis, London: Chapman & Hall, 1986.
- [23] Watson G. Smooth regression analysis // *Sankhya*. 1964. No. 26. P. 359–372.
- [24] Winkler R.L. Bayesian Models for Forecasting Future Security Prices // *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 1973. 8 (3). P. 387–405.
- [25] Young M.R., Lenk P.J. Hierarchical Bayes Methods for Multifactor Model Estimation and Portfolio Selection // *Management Science*. 1998. 44 (11). P. S111–S124.

Balaev, A. I. Modeling of financial returns and portfolio construction for the Russian stock market [Text] : Working paper WP2/2013/03 / A. I. Balaev ; National Research University "Higher School of Economics". – Moscow : Publishing House of the Higher School of Economics, 2013. – 48 p. – 70 copies. – (Series WP2 "Quantitative Analysis of Russian Economy") (in Russian).

In this paper we consider multivariate models of returns on Russian equities based on normal distribution, t-distribution with scalar of degrees of freedom and t-distribution with vector of degrees of freedom. Using these models we construct financial portfolios of different types and compare them according to the risk and benefit of investment.

JEL Classification: C14, C32

Key words: financial portfolio construction, multivariate t-distribution, vector of degrees of freedom

Препринт WP2/2013/03
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Балаев Алексей Иванович

**Моделирование доходностей и составление портфелей
из акций российских компаний**

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии
Национального исследовательского университета
“Высшая школа экономики” с представленного оригинал-макета
Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Тираж 70 экз. Уч.-изд. л. 2,95
Усл. печ. л. 2,79 Заказ № . Изд. № 1558

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Национального исследовательского университета
“Высшая школа экономики”