

# Пучки и гомологическая алгебра

С.М. Натанзон

Хорошо известно, что непостоянная функция, голоморфная на комплексной плоскости, неограничена. Другими словами, в некоторых случаях по локальным свойствам функций (например, голоморфность) можно судить о ее глобальных свойствах. Взаимосвязь локальных и глобальных свойств математических объектов позволяет эффективно использовать математику при исследовании физических явлений. Она позволяет исследовать явление в целом, стартуя с его локальных, обычно проще контролируемых, свойств.

Необходимый для этого математический аппарат был создан в середине прошлого века. Он основан на *теории пучков*. Свойства пучков автоматизируют свойства тензорных полей на многообразиях. Пучкам отвечают коммутативные группы, называемые *группами когомологий со значениями в пучке*. Группы когомологий определяют важнейшие фундаментальные свойства многообразия. Они являются основным языком всех разделов современной геометрии. Настоящий курс является введением в теорию пучков и связанных с ней структур.

Будут определены несколько по виду совершенно не похожих друг на друга конструкций когомологий: с помощью ациклических резольвент, через семейства покрытий (когомологии Чеха) и, для гладких многообразий, с помощью дифференциальных форм (когомологии де Рама) и сингулярных коцепей (сингулярные когомологии). Мы докажем, что все эти конструкции приводят к одинаковым группам когомологий (теоремы Лере и де Рама). Более того, мы докажем, что когомологии реализуют единственный естественный функтор из категории пучков абелевых групп в категорию абелевых групп, переводящий короткую точную последовательность пучков в длинную точную последовательность групп.

Специальное внимание мы уделим самому "массовому" типу пучков: локально свободным пучкам, то есть пучкам сечений локально тривиальных векторных расслоений. Мы дадим, в частности, их представление через универсальное расслоение.

Алгебраическим аппаратом теории пучков является *гомологическая алгебра*. Эта красивая наука используется во многих разделах математики и поэтому имеет самостоятельное значение. Свои теоремы гомологическая алгебра формулирует на языке коммутативных диаграмм, графически отражающих алгебраические утверждения.

Формальная часть курса лекций доступна студентам второго курса. Однако, для понимания содержательных примеров надо знать простейшие свойства вещественных и комплексных многообразий.