ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.А. Андреев, М.З. Курбангалеев

РЕПЛИЦИРУЕМОСТЬ И РАВЕНСТВО ПРЕМИЙ ЗА КРЕДИТНЫЙ РИСК НА РЫНКАХ КРЕДИТНЫХ ДЕФОЛТНЫХ СВОПОВ И ОБЛИГАЦИЙ С ПЛАВАЮЩИМ КУПОНОМ

Препринт WP16/2013/03

Серия WP16
Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука

Москва
2013

Андреев, Н. А., Курбангалеев, М. З. Реплицируемость и равенство премий за кредитный риск на рынках кредитных дефолтных свопов и облигаций с плавающим купоном [Электронный ресурс] : препринт WP16/2013/03 / Н. А. Андреев, М. З. Курбангалеев ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – Электрон. текст. дан. (1,3 МБ). – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2013. – 30 с. – (Серия WP16 «Финансовая инженерия, риск-менеджмент и актуарная наука»).

В работе рассмотрен вопрос эквивалентности гипотезы о реплицируемости безрисковой облигации с плавающим купоном позицией из коротко проданной рисковой облигации и CDS-свопа на нее и гипотезы равенства CDS-премии и премии за кредитный риск. Показано, что при непрерывном начислении купонов данные гипотезы эквивалентны на безарбитражном рынке. Для дискретного начисления показано, что эквивалентность нарушается, более того, одновременное выполнение обеих гипотез невозможно на безарбитражном рынке. Показано также, что при дискретном начислении реплицируемость ведет к появлению арбитражных возможностей в рассмотренном более широком смысле.

Ключевые слова: арбитражные возможности, премия за кредитный риск, кредитный дефолтный своп, интенсивность дефолта

Андреев Николай Анатольевич – младший научный сотрудник, лаборатория по финансовой инженерии и риск-менеджменту, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; аспирант 3-го года обучения, кафедра системного анализа, факультет ВМК, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

Курбангалеев Марат Зуфарович – младший научный сотрудник, лаборатория по финансовой инженерии и риск-менеджменту, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; аспирант 3-го года обучения, департамент финансов, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».

Исследование осуществлено в рамках
Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2013 г.

**Препринты Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики» размещаются по адресу: http://www.hse.ru/org/hse/wp**

Введение

В последние годы в мировой литературе по риск-менеджменту и финансовой инженерии значительное внимание уделяется проблеме моделирования кредитного риска и ценообразования кредитных инструментов, в частности, на рынке дефолтных облигаций и соответствующих кредитных дефолтных свопов (CDS). В этом контексте принято считать, что позиция, состоящая из дефолтной облигации и соответствующего CDS, эквивалентна безрисковой облигации, а указанное соотношение принято обосновывать принципом отсутствия арбитражных возможностей. Несмотря на то, что эквивалентность была доказана только для специального случая [Duffie, 1999], а анализ реальных данных противоречит следствиям из указанных предположений [Longstaff, Mithal, Neis, 2005b], многие авторы (часто неявно) предполагают реплицируемость безрисковой облигации с помощью дефолтной облигации и CDS и постулируют равенство стоимости указанных позиций, равенство CDS-премии и спрэда облигаций [Calice, Chen, Williams, 2011], а также корректность риск-нейтрального оценивания стоимости дефолтных облигаций по информации о ценах CDS, и наоборот (например, [Hull, White, 2000] и [Houweling, Vorst, 2005]).

В данной работе рассматриваются две стандартные модели безарбитражного финансового рынка в непрерывном времени: с непрерывным и дискретным начислением купонов по облигациям с плавающим купоном. Целью исследования является исследование взаимосвязи между гипотезами о реплицируемости безрисковой облигации и о равенстве CDS-премии и спрэда, и наоборот, а также эквивалентности этих гипотез.

Доказано, что на безарбитражном абсолютно ликвидном рынке с непрерывным начислением реплицируемость эквивалента равенству премии и спрэда. В случае дискретных выплат показано, что данные гипотезы не только не эквивалентны, но и несовместны.

1. Модель рынка

В рамках классического подхода к моделированию финансовых рынков рассмотрим две модели рынка в непрерывном времени: для облигаций с непрерывными и дискретными выплатами купонов. В обоих случаях предполагается однородность представлений участников разных рынков о кредитном качестве эмитентов и одинаковом отражении информации в ценах инструментов, стоимость которых зависит от кредитного качества некоторого лица (корпорации, муниципалитета, государства и т.д.). Также предполагается, что все инструменты абсолютно ликвидны.

Хотя предположение об однородности является стандартным в моделях рынка, оно не является очевидным и может быть оспорено с нескольких точек зрения. С одной стороны, на различных рынках существуют принципиально различные факторы (ликвидность, доступ к рынкам разных инструментов, качество информации и т.д.), которые влияют на представление игроков о кредитном качестве эмитентов и на отражение этой информации в ценах. С другой стороны, существенными являются особенности структуры и соотношение параметров (ставок купона, сроков до погашения, наличие встроенных опционов, конвенция начисления и т.д.) инструментов, торгуемых на этих рынках.

Предположение об абсолютной ликвидности является упрощающим, поскольку исследование влияния ликвидности не является целью настоящей работы. Если придерживаться подхода [Longstaff, Mithal, Neis, 2005b] к моделированию ликвидности, то выводы работы остаются неизменными, если считать, что премии за ликвидность дефолтной облигации и соответствующего CDS совпадают.

Рассмотрим модель эффективного абсолютно ликвидного рынка в непрерывном времени, который состоит из трех различных инструментов:

1. Безрисковые облигации с плавающим купоном с датой погашения T, накопленным купоном C_t[2] и номиналом 1. P_t^z – цена облигации в момент t.
2. Облигации с плавающим купоном, подверженные дефолту, с датой погашения T, накопленным купоном $\tilde{C}_t$ и номиналом 1. Доля возмещения (recovery rate) равна R, компенсация выплачивается в момент дефолта. В дальнейшем будет предполагаться, что $\tilde{C}_t = C_t + L_t$, где $L_t > 0$ – накопленная премия за кредитный риск облигации. P_t^r – цена облигации в момент t.
3. Кредитные дефолтные свопы (CDS), кредитным событием по которым является дефолт купонной облигации. Покупатель контракта обязуется выплачивать продавцу премию вплоть до момента наступления дефолта или даты погашения, при этом накопленная премия равна S_t. В случае дефолта продавец обязуется выплатить покупателю компенсацию в размере $1-R$ в момент дефолта. P_t^{CDS} – цена свопа в момент t.

Величина банковского счета обозначается B_t. За начальный момент принимается $t=0$.

[2] Накопленным купоном на момент t называется сумма всех купонных выплат, произведенных до t.

В данной работе ценообразование инструментов, подверженных дефолту, производится в рамках подхода, основанного на интенсивности дефолта (default intensity) и рассматриваемого, например, в работах Ландо [Lando, 1998], Даффи и Синглтона [Duffie, Singleton, 1999], Альфонси и Бриго [Brigo, Alfonsi, 2005].

Описанные выше инструменты можно рассматривать как один класс инструментов со случайной конечной выплатой K [3], накопленным купоном F_t, долей возмещения Z и случайным временем дефолта τ и сроком истечения T. Данный класс инструментов обозначим аналогично [Brigo, Alfonsi, 2005] – $DCT(K, F_t, Z, \tau)$.

Предполагается, что состояние рынка определяется только случайным процессом мгновенной ставки r_t, порождающим фильтрацию

$$\mathbb{F} = \left\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\right\}, \quad \mathcal{F}_t = \sigma\{r_s : 0 \le s \le t\}; \tag{1}$$

времени дефолта τ однозначно соответствует процесс – индикатор дефолта $H_t = \mathbb{I}\left\{\tau \le t\right\}$, порождающий фильтрацию

$$\mathbb{H} = \left\{\mathcal{H}_t, t \in \mathbb{R}_+\right\}, \quad \mathcal{H}_t = \sigma\{H_s : 0 \le s \le t\}. \tag{2}$$

Здесь и далее $\mathbb{I}\{A\}$ – индикаторная функция множества A. Полная информация о рынке на момент t состоит из информации о состоянии переменных рынка на момент t и информации о том, произошел ли дефолт к этому моменту:

$$\mathbb{G} = \left\{\mathcal{G}_t, t \in \mathbb{R}_+\right\}, \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t. \tag{3}$$

Процесс накопленных дивидендов для инструмента $DCT(K, F_t, Z, \tau)$ имеет вид

$$D_t = K\mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t (1 - H_u) dF_u + \int_0^t Z dH_u. \tag{4}$$

[3] Конечная выплата является случайной в том смысле, что зависит от того, произошел ли дефолт до срока истечения (в этом случае выплата номинала не производится).

Первое слагаемое соответствует выплате в срок истечения контракта, второе – купонным выплатам вплоть до момента дефолта или срока истечения, третье – выплате при дефолте. Таким образом, для рассматриваемых инструментов процесс дивидендов записывается как

$$
\begin{aligned}
D_t^z &= \mathbb{I}\{t \geq T\} + \int_0^t dC_u, \\
D_t^r &= (1 - H_T)\mathbb{I}\{t \geq T\} + \int_0^t (1 - H_u) d\tilde{C}_u + R\int_0^t dH_u, \\
D_t^{CDS} &= -\int_0^t (1 - H_u) dS_t + (1 - R)\int_0^t dH_u.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Согласно теории риск-нейтрального оценивания, для риск-нейтральной меры Q^* цена $DCT(K, F_t, Z, \tau)$ равна

$$
P_t = B_t \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1}(1 - H_u) dF_u + \int_t^T B_u^{-1} Z dH_u + B_T^{-1} K \,\middle|\, \mathcal{G}_t \right), \tag{6}
$$

где первое слагаемое суммы соответствует будущим купонным выплатам, второе – выплате в случае дефолта, третье – конечной выплате. Для рассматриваемых инструментов цены равны

$$
\begin{aligned}
P_t^z &= B_t \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} dC_u + B_T^{-1} \,\middle|\, \mathcal{G}_t \right), \\
P_t^r &= B_t \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1}(1 - H_u) d\tilde{C}_u + R\int_t^T B_u^{-1} dH_u + B_T^{-1}(1 - H_T) \,\middle|\, \mathcal{G}_t \right), \\
P_t^{CDS} &= B_t \mathbb{E}_{Q^*}\left(-\int_t^T B_u^{-1}(1 - H_u) dS_u + (1 - R)\int_t^T B_u^{-1} dH_u \,\middle|\, \mathcal{G}_t \right).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Интегралы в формулах (4) – (7) понимаются в смысле Лебега – Стилтьеса. В целях удобства обозначим $\tilde{H}_t = 1 - H_t = \mathbb{I}\{\tau > t\}$ [4].

Замечание: отказ от предположения об однородности представлений о кредитном качестве приводит к тому, что в формуле (7) приведенные цены P_t^{CDS} и P_t^r равнялись бы матожиданиям относительно разных мер Q^{CDS*} и Q^{r*}, поскольку потокам информации о кредитном качестве соответствовали бы разные фильтрации $\mathbb{H}^{CDS}$ и $\mathbb{H}^r$.

1.1. Задание интенсивности дефолта в модели рынка

Всюду далее в целях удобства делается ряд стандартных предположений о времени дефолта:

а) $Q^*\left\{\tau = t\right\} = 0 \quad \forall t > 0$;

б) $Q^*\left\{\tau > t\right\} > 0 \quad \forall t > 0$;

в) $Q^*\left\{\tau < +\infty\right\} = 1$

Предположение а) является стандартным для моделей сокращенной формы и говорит о непрерывности распределения момента дефолта. Во многих прикладных случаях это оправданно, особенно если нет априорной информации о том, что дефолт может наступить в конкретный момент времени. Примером предсказуемого дефолта может служить банкротство американского автопроизводителя General Motors в 2009 г.[5] Поэтому сразу подчеркнем, что в данной модели подобные случаи исключены, хотя похожее исследование можно провести и для распределений общего вида.

В работе рассматривается динамика на конечном отрезке времени $[0;T]$, поэтому предположение б) эквивалентно тому, что дефолт может наступить в любой момент до погашения облигации. Предположение в) является техническим и не ограничивает общности.

---

[4] Несложно проверить, что оба процесса адаптированы относительно $\mathbb{H}$ и, соответственно, $\mathbb{G}$, их траектории имеют конечную вариацию и непрерывны справа с конечными пределами слева (càdlàg). Значит, $H_t, \tilde{H}_t$ являются семимартингалами [Protter, 2004, p. 55] и интегралы определены корректно.

[5] В марте 2009 г. администрация США обязала GM под угрозой принудительного банкротства до 1 июня того же года подготовить план преодоления финансовых проблем, в которых оказалась компания в результате мирового финансового кризиса. По мере приближения назначенного срока банкротство становилось более вероятным. В результате 1 июня 2009 г. для GM была запущена процедура банкротства. Этот пример говорит о том, что на практике может возникнуть необходимость ввести скачки в распределении времени дефолта.

Обозначим условную вероятность дожития в момент t как $G_t = Q^*\{\tau > t \mid \mathcal{F}_t\}$. Процессом дефолта (hazard process) называется адаптированный относительно $\mathcal{F}_t$ процесс Γ_t такой, что $G_t = e^{-\Gamma_t}$. Предполагается, что Γ_t допускает следующее интегральное представление

$$\Gamma_t = \int_0^t \gamma_u du, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \tag{8}$$

где γ_t – процесс интенсивности дефолта (default intensity), неотрицательный, прогрессивно измеримый относительно $\mathbb{F}$ и имеющий интегрируемые траектории. Кроме того, из предположения в) о времени дефолта следует условие $\int_0^{+\infty} \gamma_u du = +\infty$.

Замечание: если рассматривать диффузионные модели динамики r_t и γ_t, то можно утверждать, что $\mathcal{F}_t$ является естественной фильтрацией, порождаемой двумерным винеровским процессом (w_t^r, w_t^γ). Моделирование процентного и кредитного риска с помощью диффузионных моделей можно найти, например, в [Brigo, Alfonsi, 2005; Longstaff, Mithal, Neis, 2005a; Bühler, Trapp, 2009].

Используя введенные обозначения, можно записать выражение для цены инструмента (6) в следующем виде:

Лемма 1. [Bielecki, Rutkowski, 2002, p. 230]: *если процессы* G_t *и, соответственно,* Γ_t *являются непрерывными, то цена инструмента* $DCT(K, F_t, Z, \tau)$ *может быть записана как*

$$P_t = \mathbb{I}\{\tau > t\} B_t e^{\Gamma_t} \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} e^{-\Gamma_u} dF_u + \int_t^T B_u^{-1} Z e^{-\Gamma_u} \gamma_u du + B_T^{-1} K e^{-\Gamma_T} \middle| \mathcal{F}_t \right). \tag{9}$$

Замечание: из леммы видно, что цена актива равна нулю после наступления дефолта. Это объясняется тем, что возмещенная стоимость включена в дивиденды. Однако в нашем случае удобнее будет пользоваться следующей интерпретацией: будем считать, что для инструмента $DCT(K, F_t, Z, \tau)$ компенсация не включается в дивиденды, тогда после дефолта цена инструмента равна Z. В таком случае процессы цены и накопленных дивидендов равны:

$$D_t = K\mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t (1 - H_u) dF_u, \tag{10}$$

$$P_t = \mathbb{I}\{\tau > t\} B_t e^{\Gamma_t} \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} e^{-\Gamma_u} dF_u + \int_t^T B_u^{-1} Z e^{-\Gamma_u} \gamma_u du + B_T^{-1} K e^{-\Gamma_T} \middle| \mathcal{F}_t \right) + \mathbb{I}\{\tau \le t\} Z. \tag{11}$$

Для дальнейших исследований условий отсутствия арбитражных возможностей необходимо получить уравнения динамики рассматриваемых инструментов. Динамика цены P_t актива $DCT(F, f_t, Z, \tau)$ в случае отсутствия купонов и нулевой доли возвращения получена в [Bielecki, Rutkowski, 2002, p. 248]. Аналогичным образом получается динамика в общем случае (см. Приложение 1):

Лемма 2: *пусть цена* P_t *задается выражением* (9). *Тогда динамика* P_t *описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:*

$$dP_t = (r_t dt - d\hat{M}_t) P_{t-} - L_{t-} \gamma_t Z dt - L_{t-} dF_t + B_t L_{t-} d\tilde{m}_t, \tag{12}$$

$$\text{где } \tilde{m}_t = \mathbb{E}\left(\int_0^T B_u^{-1} e^{-\Gamma_u} (Z\gamma_u du + dF_u) + B_T^{-1} K e^{-\Gamma_T} \mid \mathcal{F}_t \right) \in \mathcal{M}(\mathbb{F}), \tag{13}$$

$$L_t = \tilde{H}_t e^{\Gamma_t} \in \mathcal{M}(\mathbb{G}), \;\; \hat{M}_t = H_t - \Gamma_{t \wedge \tau} \in \mathcal{M}(\mathbb{G})$$

Результат леммы 2 верен для безрисковой облигации, если в (12), (13) положить $\gamma_t \equiv 0, \; H_t \equiv 0$:

$$dP_t^z = r_t P_t^z dt - dF_t + B_t d\tilde{m}_t^z, \quad \tilde{m}_t^z \in \mathcal{M}(\mathbb{F}). \tag{14}$$

Замечание: для интерпретации, при которой компенсация Z не включена в дивиденды (см. замечание к лемме 1), уравнение динамики элементарно получается на основе добавлением «скачка» цены на величину Z в момент дефолта:

$$dP_t = (r_t dt - d\hat{M}_t) P_{t-} - L_{t-} \gamma_t Z dt - dF_t + B_t L_{t-} d\tilde{m}_t + Z dH_t. \tag{15}$$

2. Арбитражные возможности на рынке кредитных свопов и облигаций

Определение 1: допустимой торговой стратегией *называется непрерывная слева случайная функция* $\pi_t = (\pi_t^B, \pi_t^r, \pi_t^{CDS}, \pi_t^z)$ *ограниченной вариации, удовлетворяющая следующим условиям интегрируемости почти наверное:*

$$\begin{aligned} &\int_0^T \pi_u^{0^2} B_u^2 du < \infty, \qquad \int_0^T \pi_u^{CDS^2} P_u^{CDS^2} du < \infty, \\ &\int_0^T \pi_u^{r^2} P_u^{r^2} du < \infty, \qquad \int_0^T \pi_u^{z^2} P_u^{z^2} du < \infty. \end{aligned} \tag{16}$$

$\mathcal{A}$ *– множество допустимых стратегий.*

Данное определение эквивалентно предсказуемости стратегии, т.е. измеримости относительно $G_{<t}$. Предсказуемость означает использование информации только из прошлого. Чтобы проиллюстрировать значение предсказуемости, рассмотрим ситуацию, когда в момент τ наступает дефолт облигации и агент должен отреагировать на данное событие, перестроив портфель. Если перестройка происходит в момент τ, то $\pi_{\tau-} \neq \pi_\tau$, поэтому стратегия не является непрерывной слева (предсказуемой). В связи с этим перестройка портфеля должна произойти в момент $\tau + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Стоимостью портфеля, соответствующего стратегии π_t, равна

$$X_t^\pi = \pi_t^0 B_t + \pi_t^{CDS} P_t^{CDS} + \pi_t^r P_t^r + \pi_t^z P_t^z + \int_0^t \pi_u^{CDS} dD_u^{CDS} + \int_0^t \pi_u^r dD_u^r + \int_0^t \pi_u^z dD_u^z. \tag{17}$$

Определение 2: *допустимая стратегия* π_t *называется самофинансируемой, если*

$$\begin{aligned} dX_t^\pi = \pi_t^0 dB_t + \pi_t^{CDS} dP_t^{CDS} + \pi_t^r dP_t^r + \pi_t^z dP_t^z + \pi_t^{CDS} dD_t^{CDS} + \pi_t^r dD_t^r + \pi_t^z dD_t^z \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B_{t-} d\pi_t^0 + P_{t-}^{CDS} d\pi_t^{CDS} + P_{t-}^r d\pi_t^r + P_{t-}^z d\pi_t^z = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Определение 3: *Допустимая самофинансируемая стратегия называется арбитражной на отрезке* $[0,T]$, *если соответствующий ей портфель с нулевой начальной стоимостью в конце периода почти наверное имеет неотрицательную стоимость и с положительной вероятностью его стоимость положительна:*

$$\pi_t \in SF_{arb} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \pi_t \in SF, \\ X_0^{\pi} = 0, \\ \mathbb{P}\{X_T^{\pi} \ge 0\} = 1, \\ \mathbb{P}\{X_T^{\pi} > 0\} > 0. \end{cases} \tag{19}$$

Множество арбитражных стратегий обозначается Ψ^{NA}.

Определение 4: на рынке отсутствуют арбитражные возможности (A-арбитраж), если на рынке не существует арбитражных стратегий. Рынок, обладающий данным свойством, называется NA*-рынком.*

Определение 5: рынок допускает арбитраж в широком смысле ($\overline{A}$*-арбитраж), если*

$$\exists\{\pi_n\}_{n=0}^{\infty} : \begin{cases} \pi_n \in SF, \\ \exists X_T^* > 0, \varepsilon_n \to 0 : \mathbb{P}\left\{X_T^{\pi_n} \to X_T^*\right\} \ge 1 - \varepsilon_n. \end{cases} \tag{20}$$

Множество таких последовательностей $\{\pi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *обозначим* $\Psi^{\overline{A}}$. *Рынок, не допускающий* $\overline{A}$*-арбитраж, называется* $\overline{NA}$*-рынком.*

Арбитраж в широком смысле означает, что существует последовательность допустимых стратегий, позволяющая получить гарантированную прибыль с вероятностью, стремящейся к единице. Данное понятие арбитража важно в тех случаях, когда сама предельная стратегия не является допустимой. Очевидно, что $A \subseteq \overline{A}$.

Рассмотрим подмножество допустимых стратегий, ориентированных на использование не отдельных инструментов рынка, а синтетического инструмента, состоящего из дефолтной облигации, CDS и коротко проданной безрисковой облигации. Цена данного инструмента равна $A_t = P_t^{CDS} + P_t^r - P_t^z$, процесс дивидендов равен $A_t^D = D_t^{CDS} + D_t^r - D_t^z$. Пусть τ – момент дефолта.

Определение 6:

$$\Psi^{\varepsilon} = \left\{\pi_t \in SF : \pi_t^{CDS} = \pi_t^r = -\pi_t^z = \overline{\pi}_t,\ t \le \tau + \varepsilon\right\}. \tag{21}$$

В дальнейшем будем также говорить, что $(\pi_t^0, \overline{\pi}_t) \in \Psi^\varepsilon$, если $(\pi_t^0, \overline{\pi}_t, \overline{\pi}_t, -\overline{\pi}_t) \in \Psi^\varepsilon$. Динамика стоимости портфеля тогда равна

$$dX^\pi = \pi^0 dB + \overline{\pi} dA + \overline{\pi} dA^D, \ t \le \tau. \tag{22}$$

Определение 7: рынком с непрерывным начислением (рынком M1) называется рынок, на котором

1) $dC_t = c_t dt$, $\mathrm{d}\tilde{C}_t = \tilde{c}_t dt$, $dL_t = Ldt$, $dS_t = sdt$, $\tilde{c}_t = c_t + L$,

где L *– премия за кредитное качество,* s *– CDS-премия.*

2) динамика банковского счета описывается уравнением

$$dB_t = r_t B_t dt, \tag{23}$$

где r_t *– диффузионный процесс процентной ставки.*

Определение 8: рынком с дискретным начислением (рынком M2) называется рынок, на котором

1) $C_t, \tilde{C}_t, L_t, S_t$ *являются ступенчатыми функциями со скачками в моменты* $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ *выплат по инструменту, при этом величина скачка у* L_t *равна* L*, у* S_t *равна* s*. Величины* k*-го скачка у* $C_t, \tilde{C}_t$ *равны* $\tilde{r}_{k-1}(t_k - t_{k-1})$ *и* $\tilde{r}_{k-1}(t_k - t_{k-1}) + L$ *соответственно,* $t_k - t_{k-1} = \Delta t$ *для всех* $i = \overline{0, n}$.

2) динамика банковского счета описывается уравнением

$$B_t = \left(1 + \tilde{r}_{k-1}(t - t_{k-1})\right) B_{k-1}, \ t \in [t_{k-1}, t_k). \tag{24}$$

2.1. Арбитражные возможности на рынке с непрерывным начислением

Заметим следующее тривиальное свойство безрисковой облигации с плавающим купоном:

Лемма 3: пусть на NA*-рынке M1* r_t *– безрисковая ставка. Тогда* $c_t \equiv r_t$ *и безрисковая облигация с плавающим купоном в каждый момент времени имеет стоимость, равную номинальной:*

$$P_t^z = P_T^z \quad \forall t \in [0,T] \tag{25}$$

Доказательство: из предположения об отсутствии арбитражных возможностей следует, что скорость начисления купона у данной облигации $c_t = r_t$; (25) несложно получить, вычислив P_t^z по формуле (7).

Стандартным предположением при совместном моделировании кредитного и рыночного риска является равенство премии за кредитное качество L и CDS-премии s. Основным результатом данного раздела является необходимое и достаточное условие этого равенства.

Теорема 1: пусть процесс r_t является непрерывным. Тогда на NA-рынке M1

а) равенство премий $L = s$ верно, если до момента дефолта цена безрисковой облигации равна стоимости портфеля, состоящего из кредитного дефолтного свопа и облигации, подверженной дефолту:

$$P_t^r + P_t^{CDS} = P_t^z \quad \forall t < \tau; \tag{26}$$

б) если выполнено $L = s$ и процесс $A_t = P_t^r + P_t^{CDS} - P_t^z$ является непрерывным до момента дефолта, то верно (26).

Доказательство: приведем конструктивное доказательство данного утверждения. Будем придерживаться соглашения, когда компенсация в момент дефолта Z не включается в выплаченные дивиденды. Вместо этого полагается, что после наступления дефолта стоимость актива равна Z. Так как выплата по дефолтной облигации полагается равной R, а выплата по CDS – равной $1 - R$, то, используя результат леммы 3, получаем, что после дефолта стоимость A_t портфеля, состоящего из дефолтной облигации, CDS и коротко проданной безрисковой облигации, равна нулю:

$$A_t = P_t^r + P_t^{CDS} - P_t^z = R + (1 - R) - 1 = 0 \quad \forall t \geq \tau. \tag{27}$$

В пункте а) полагаем $A_t = P_t^r + P_t^{CDS} - P_t^z = 0, \quad \forall t < \tau$, т.е. $A_t \equiv 0$ на рассматриваемом отрезке. Докажем, что $L = s$ от противного: пусть $L > s$. Становится интуитивно понятно, что в таком случае на рынке существуют арбитражные возможности.

Арбитражной стратегией будет приобретение портфеля A_t в начальный момент времени, сохранение позиции до дефолта и ликвидация через некоторое время после. Так как портфель имеет нулевую стоимость, стратегия является самофинансируемой. Из-за разницы премий дивиденды портфеля будут положительными, что приводит к получению безрисковой прибыли до момента дефолта. После этого дефолтная облигация и CDS не дают дивидендов, а короткая позиция по безрисковой бумаге приводит к уменьшению стоимости портфеля. Однако если скорость начисления дивидендов c_t непрерывна как функция времени, то можно произвести ликвидацию достаточно быстро, и потери от короткой позиции будут не больше накопленной прибыли, что приведет к положительной стоимости портфеля[6].

Формальное доказательство пункта а) сводится к проверке того, что стратегия $\tilde{\pi}_t^{\varepsilon} = (0, \tilde{J}_t^{\varepsilon}, \tilde{J}_t^{\varepsilon}, -\tilde{J}_t^{\varepsilon})$, где $\tilde{J}_t^{\varepsilon} = \mathbb{I}\{t \le \tau + \varepsilon\}$, является арбитражной для достаточно малого ε. В предположении $L < s$ противоречие получается для симметричной стратегии $-\tilde{\pi}_t^{\varepsilon} = (0, -\tilde{J}_t^{\varepsilon}, -\tilde{J}_t^{\varepsilon}, \tilde{J}_t^{\varepsilon})$. В обоих случаях стоимость позиции равна нулю, поэтому все стратегии такого вида являются самофинансируемыми.

Рассмотрим процесс дивидендов портфеля:

$$
\begin{aligned}
A_t^D &= D_t^r + D_t^{CDS} - D_t^z = \\
&= \left[\tilde{H}_t \mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t \tilde{H}_u \tilde{c}_u du \right] + \left[-\int_0^t \tilde{H}_u s du \right] - \left[\mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t \tilde{H}_u c_u du \right] = \\
&= -H_t \mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t \left[\tilde{H}_u (\tilde{c}_u - s) - c_u \right] du = \\
&= -H_t \mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t \tilde{H}_u (\tilde{c}_u - s - c_u) du - \int_0^t H_u c_u du. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Первое слагаемое суммы характеризует потери из-за короткой позиции, равные номиналу, если дефолт был; в противном случае убыток будет компенсирован выплатой номинала по длинной позиции в конце периода. Второе слагаемое – дивиденды портфеля до дефолта, третье – потери после дефолта в случае удержания короткой позиции.

[6] Описанная стратегия выглядит излишне усложненной, кажется, что необходимо ликвидировать позицию сразу в момент дефолта и не терпеть убытков вовсе. К сожалению, такая стратегия не является допустимой, так как не является непрерывной слева.

Пусть $\tau < T$, выберем ε так, что $\tau + \varepsilon \le T$. Тогда стоимость портфеля $X_t^{\tilde{\pi}}$ на отрезке $[0,T]$ равна

$$X_t^{\tilde{\pi}} = \int_0^t \tilde{J}_u^{\varepsilon} dA_u^D = A_{t\wedge(\tau+\varepsilon)}^D - A_0^D = A_{t\wedge(\tau+\varepsilon)}^D = \{\tau' = t \wedge (\tau+\varepsilon)\} =$$

$$= \underbrace{-H_{\tau'}\mathbb{I}\{\tau' \ge T\}}_{=0\ \forall t\in[0,T]} + \int_0^{\tau'} \tilde{H}_u(\tilde{c}_u - s - c_u)du - \int_0^{\tau'} H_u c_u du =$$

$$= (L-s)\cdot(t\wedge\tau) - \int_{\tau}^{\tau'} c_u du. \tag{29}$$

При $\tau \ge T$ очевидно, что $X_t^{\tilde{\pi}} = (L-s)\ T > 0$. Поэтому рассматриваем только $\tau < T$. При $t \le \tau$ $X_t^{\tilde{\pi}} = (L-s)\ t > 0$; при $t > \tau$

$$X_t^{\tilde{\pi}} = (L-s)\tau - \int_{\tau}^{\tau'} c_u du \ge (L-s)\tau - \int_{\tau}^{\tau''=\tau'+\varepsilon} c_u du. \tag{30}$$

Выберем $\tau'' > \tau$, а значит и ε, так, чтобы убыток $F(\tau'') = \int_{\tau}^{\tau''} c_u du$ составлял не более половины прибыли: $\tau'' = T \wedge \inf\left\{\theta > \tau : F(\theta-) = \frac{1}{2}(L-s)\tau\right\}$. Выбранный момент является предсказуемым, при этом условно считаем, что $\inf\{\varnothing\} = +\infty$.

Тогда

$$X_t^{\tilde{\pi}} = (L-s)\tau - F(\tau'') \ge \frac{1}{2}(L-s)\tau > 0. \tag{31}$$

Таким образом, при $L > s$ для каждого момента дефолта существует предсказуемая стратегия, при которой стоимость портфеля положительна на всем отрезке $[0,T]$, т.е. существуют арбитражные возможности.

Пункт б) доказывается также от противного. По предположению, $L = s$ и процесс A_t непрерывен $\forall t < \tau$. Пусть существует момент $t^* \in (0,T),\ t^* < \tau$ такой, что $P_{t^*}^r + P_{t^*}^{CDS} < P_{t^*}^z \quad \Leftrightarrow \quad A_{t^*} = A^* < 0$. В этом случае на рынке существует арбитражная стратегия, заключающаяся в занятии в момент t^* длинной позиции по дефолтной облигации и CDS, а также короткой – по безрисковой облигации. Так как разница стоимостей позиций равна $-P^r_{t^*} - P^{CDS}_{t^*} + P^z_{t^*} = -A^*$ и положительна, вырученная прибыль размещается на банковском счете. Как и в пункте а), данный портфель ликвидируется немногим после момента дефолта. В конечный момент T портфель имеет стоимость, равную стоимости банковского счета за вычетом небольших потерь после дефолта, и дает безрисковую прибыль с положительной вероятностью.

Формальное доказательство рассмотрим для наиболее интересного случая $0 < t^* < \tau < T$, во всех остальных ситуациях несложно убедиться, что портфель будет иметь положительную или нулевую стоимость. Наша гипотеза заключается в том, что стратегия

$$\tilde{\pi}^{\varepsilon}_t = \begin{cases} (0,0,0,0), & t \le t^*, \\ (-B^{-1}_{t^*} A^*, 1, 1, -1), & t^* < t \le \tau + \varepsilon, \\ (-B^{-1}_{t^*} A^*, 0, 0, 0), & t > \tau + \varepsilon \end{cases} \tag{32}$$

является арбитражной. Стратегия является непрерывной слева, имеет ограниченную вариацию и удовлетворяет условиям (16), поэтому является допустимой. При условии непрерывности B_t и A_t стратегия является самофинансируемой:

при $t \ne \tau + \varepsilon, t \ne t^*$

$B_{t-} d\pi^0_t + P^{CDS}_{t-} d\pi^{CDS}_t + P^r_{t-} d\pi^r_t + P^z_{t-} d\pi^z_t = 0$; при $t = t^*$

$$B_{t-} d\pi^0_t + P^{CDS}_{t-} d\pi^{CDS}_t + P^r_{t-} d\pi^r_t + P^z_{t-} d\pi^z_t = -B_{t^*} \cdot B^{-1}_{t^*} A^* + A^* \cdot 1 = 0; \tag{33}$$

при $t = \tau + \varepsilon$

$$B_{t-} d\pi^0_t + P^{CDS}_{t-} d\pi^{CDS}_t + P^r_{t-} d\pi^r_t + P^z_{t-} d\pi^z_t = B_{\tau+\varepsilon} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0. \tag{34}$$

Стоимость портфеля оценивается аналогично (29) – (31) и равна

$$X_t^{\tilde{\pi}} = \int_0^t \tilde{\pi}_u^{\varepsilon} dP_u + \int_0^t \tilde{\pi}_u^{\varepsilon} dD_u =$$

$$= \left|A^*\right| \frac{B_T}{B_{t^*}} + \int_0^{\tau+\varepsilon} \tilde{H}_u \underbrace{(\tilde{c}_u - s - c_u)}_{=L-s=0 \text{ по условию}} du - \int_0^{\tau+\varepsilon} H_u c_u du =$$

$$= \left|A^*\right| \frac{B_T}{B_{t^*}} - \int_\tau^{\tau+\varepsilon} c_u du \geq \frac{1}{2} \left|A^*\right| \frac{B_T}{B_{t^*}} > 0 \qquad (35)$$

при $\tau + \varepsilon = \tau'' = T \wedge \inf\left\{\theta > \tau : \int_\tau^\theta c_u du = \frac{1}{2}\left|A^*\right| \frac{B_T}{B_{t^*}}\right\}$. Таким образом, при сделанном предположении на рынке существует арбитражная стратегия, что приводит к противоречию и доказывает пункт б).

Непрерывность процесса A_t играет важную роль с точки зрения практики, поскольку на рынке существует задержка между моментом принятия решения о совершении операции и самим моментом операции. Если не требовать непрерывности стоимости A_t, то может сложиться ситуация, когда игрок принимает решение об открытии позиции в момент t^* с целью выручить прибыль $A^* > 0$; реально же сделка произойдет в момент $t^{**} > t^*$ по цене A^{**}. Непрерывность позволяет игроку не предсказать цену на коротком интервале, но быть уверенным, что заключенная сделка принесет прибыль ($A^{**} > 0$), так как для каждого момента времени непрерывная функция сохраняет знак в окрестности этого момента. Без требования непрерывности использование подобной стратегии было бы невозможно.

Стоит также отметить, что существование задержки между моментом принятия решения и сделкой может оказывать влияние на финансовый результат от операций уже на стадии формирования портфеля, поскольку дефолт может произойти в интервале между решением о сделке и самой сделкой. Предположим, что для извлечения прибыли инвестору необходимо занять короткую позицию по безрисковой облигации и длинную – по дефолтной облигации и CDS. В этом случае в момент t^{**} дефолтная облигация стоит R, CDS стоит $1-R$, т.е. средств от короткой продажи безрисковой облигации, которая торгуется по номиналу, хватит для занятия соответствующей длинной позиции. После этого должно пройти некоторое время, прежде чем будет произведена сделка ликвидации позиций. В течение этого времени агент будет терпеть убыток по короткой позиции, что необходимо учитывать в стратегии. Задержка между принятием решения и исполнением является одной из характеристик рынка, носящей название *немедленности* (immediacy). В данной работе рынок считается абсолютно ликвидным, поэтому разница между t^* и t^{**} считается пренебрежимо малой и потери от короткой позиции, возникающие вследствие низкой ликвидности, могут не учитываться.

2.2. Арбитражные возможности на рынке с дискретным начислением

На рынке с дискретным начислением выплаты осуществляются лишь в известные моменты времени, причем для плавающих процентных ставок величина купона устанавливается в начале периода, а сама выплата производится в конце. Рассмотрим случай дискретного начисления купонов по облигациям и посмотрим, при каких условиях должно быть выполнено равенство премий у CDS и облигаций. Считаем, что купонные выплаты и выплата CDS-премии производятся в одни и те же моменты времени $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$.

Первой трудностью является определение процентной ставки $\tilde{r}_t$, по которой начисляется купон. Использовать введенную ранее мгновенную ставку r_t некорректно, так как на практике ставка зависит от величины периода. Рассмотрим, например, облигации, номинированные в долларах. Для выплат через каждые три месяца ставка определяется на основе ставки LIBOR 3M, но для облигаций с выплатами один раз в полгода – на основе LIBOR 6M. Данный подход оправдан, если купонные периоды не слишком велики и волатильность ставки достаточно мала (подход встречается, например, в работе Лонгстафа и Шварца [Longstaff, Schwartz, 2012]). В данной работе предполагается, что выплата происходит по ставке $\tilde{r}_t$, которая является $\mathcal{F}_t$-адаптированным диффузионным процессом. Этого условия достаточно для получения необходимых результатов[7].

Из предыдущих рассуждений (см. теорему 1) видно, каким образом устанавливались необходимые и достаточные условия равенства премий. Во-первых, использовался результат, что безрисковая облигация всегда стоит номинал. Это позволяло приобрести портфель в тот момент, когда он приносил прибыль, и ликвидировать позицию, как только были зафиксированы убытки, причем стоимость портфеля в тот момент гарантированно была равна нулю. Поэтому было возможно закрыть позицию без потерь прежде, чем убытки от короткой позиции станут достаточно велики. В случае

[7] Если рассматривать классический рынок, на котором торгуются безрисковые бескупонные облигации со всевозможными сроками до погашения и ценами $P(t,T)$, то из принципа безарбитражности следует, что $1+\tilde{r}_t\Delta t = P^{-1}(t,t+\Delta t)$, что является частным случаем рассматриваемого процесса ставки.

дискретных выплат купона утверждение леммы 3 уже не будет верно из-за появления накопленного купонного дохода. Тем не менее можно утверждать, что сразу после выплаты очередного купона стоимость безрисковой облигации будет равна номинальной:

Лемма 4: пусть на NA-рынке M2 $\tilde{r}_t$ – $\mathcal{F}_t$-адаптированный диффузионный процесс. Обозначим $m^-(t) = \sup\{k : t_k \le t\}$.

Тогда

$$P_t^z = 1 + \tilde{r}_{m^-(t)}(t - t_{m^-(t)}). \tag{36}$$

В частности, $P_{t_k}^z = 1 \quad \forall k = \overline{0,n}$.

Доказательство: из формул (11), (24) получаем

$$P_t^z = B_t \mathbb{E}\left[\sum_{i=m^-(t)+1}^{n} \tilde{r}_{i-1}\left(t_i - t_{i-1}\right) B_i^{-1} + B_T^{-1} \middle| \mathcal{F}_t \right] =$$

$$= B_t \mathbb{E}\left[\sum_{i=m^-(t)+1}^{n} \frac{B_i - B_{i-1}}{B_{i-1}} B_i^{-1} + B_T^{-1} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{B_t}{B_{m^-(t)}} = 1 + \tilde{r}_{m^-(t)}\left(t - t_{m^-(t)}\right). \tag{37}$$

Из леммы ясно, что арбитражные стратегии теоремы 1 не являются безрисковыми при дискретном начислении, поскольку ликвидация позиции по инструменту A_t сразу после дефолта приводит к убыткам. Основным результатом данного раздела является аналог теоремы 1 для $\overline{NA}$-рынка:

Теорема 2: пусть на рынке M2 $P_t^r + P_t^{CDS} = P_t^z \quad \forall t < \tau$. Тогда

1) при $L \ne s$ рынок допускает $\overline{A}$-арбитраж;

2) $\Psi^A \subset \Psi^*$ – множеству допустимых стратегий, удовлетворяющих условиям (23) – (25):

$$\begin{gathered} \pi_u^{CDS} dD_u^{CDS} + \int_0^t \pi_u^r dD_u^r + \int_0^t \pi_u^z dD_u^z + \\ + \pi_t^0 B_t + \pi_t^{CDS}(1-R) + \pi_t^r R + \pi_t^z\left(1 + \tilde{r}_{m^-(t)}(t - t_{m^-(t)})\right) \overset{п.н.}{\ge} 0, \quad 0 < t \le \tau, \end{gathered} \tag{38}$$

$$\int_0^t B_u d\pi_u^0 + \int_0^t P_{u-}^{CDS} d\pi_u^{CDS} + \int_0^t P_{u-}^r d\pi_u^r + \int_0^t (P_{u-}^{CDS} + P_{u-}^r) d\pi_u^z \overset{п.н.}{=} 0, \quad 0 < t \le \tau, \tag{39}$$

$$\pi_0 = 0. \tag{40}$$

В частности,

а) при $L \le s$ $\Psi^A \ne \varnothing$ *и рынок допускает* A*-арбитраж;*

б) при $L > s$ *не существует арбитражных стратегий в классах* Ψ^ε *:*

$$\bigcup_{\varepsilon>0} \Psi^\varepsilon \bigcap \Psi^A = \varnothing \tag{41}$$

Доказательство: 1) Первая часть утверждения доказывается конструктивно. Пусть $L > s$. Рассмотрим следующую последовательность допустимых стратегий:

$$\begin{gathered} \pi^n_t = (0, I^{n.\delta}_t, I^{n,\delta}_t, -I^{n,\delta}_t), \\ I^{\varepsilon_n}_t = \mathbb{I}\{(t_0 - \delta_n) \wedge \tau < t \le t_0 \wedge \tau\}, \quad \delta_n \to 0. \end{gathered} \tag{42}$$

Стратегия заключается в том, чтобы открыть позицию по нулевой цене перед первой выплатой дивидендов в размере $L - s$ и продать позицию сразу после выплаты. При этом есть вероятность дефолта и убытков по позиции в течение периода времени ε_n, который можно сделать сколь угодно малым:

$$\mathbb{P}\{X^{\pi^n}_T \to X^* > (L-s) > 0\} = 1 - \mathbb{P}\{\tau > t_0\} = p > 0. \tag{43}$$

$$\mathbb{P}\{X^{\pi^n}{}_T \ge 0\} = 1 - \mathbb{P}\{\tau \in [t_0 - \delta_n, t_0)\} = 1 - \int\limits_{t_0-\delta_n}^{t_0} Q^*(d\tau) = 1 - \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 1. \tag{44}$$

Легко проверить, что стратегия является самофинансируемой и допустимой. Поэтому $\{\pi^n\}_{n=0}^\infty \in \Psi^{\bar{A}}$. Аналогично, при $L < s$ арбитражной является последовательность $\{-\pi^n_t\}_{n=0}^\infty$.

2) Докажем вторую часть теоремы; (38) представляет собой условие неотрицательности капитала при дефолте в момент t. Поскольку неизвестно заранее, в какой момент произойдет дефолт, (38) должно быть выполнено почти наверное для каждого момента времени до дефолта; (39) представляет собой условие самофинансируемости, выписанное для $t \le \tau$ в предположении, что $P^r_t + P^{CDS}_t = P^z_t$. Тогда очевидно, что (38) – (40) являются необходимыми условиями безрисковости

стратегии. Если при этом $X_T^\pi > 0$ с положительной вероятностью, то стратегия является арбитражной.

Для доказательства пункта а) достаточно показать, что стратегия $\pi_t = \mathbb{I}\{t>0\}\cdot(0,-1,-1,1)\in\Psi^A$. Действительно, стратегия является допустимой и самофинансируемой, поскольку $-P_0^r - P_0^{CDS} + P_0^z = 0$. Процесс накопленных дивидендов равен $C_t - \tilde{C}_t - S_t = S_t - L_t$, поэтому при $L \le s$ является неотрицательным почти наверное и положительным с ненулевой вероятностью. Стоимость позиции после дефолта равна

$$-P_t^r - P_t^{CDS} + P_t^z = -R - (1-R) + 1 + \tilde{r}_{m^-(t)}(t - t_{m^-(t)}) = \tilde{r}_{m^-(t)}(t - t_{m^-(t)}) \ge 0. \tag{45}$$

Поэтому X_t^π неотрицательна почти наверное и положительна с ненулевой вероятностью, π_t является арбитражной.

Для доказательства пункта б) зафиксируем произвольное ε и посмотрим, какие стратегии из Ψ^ϵ являются арбитражными. Стоимость рискового актива до дефолта равна нулю, поэтому доходность выше безрисковой может быть получена только за счет дивидендов. Минимизировать риск можно, если открыть позицию по активу A_t незадолго до выплаты первых дивидендов в момент t_0, после выплаты позиция ликвидируется, обе операции производятся по нулевой цене. Поэтому

$$\Psi^\varepsilon \cap \Psi^A \subseteq \left\{\tilde{\pi}_t^\varepsilon = (0,\bar{\pi}_t,\bar{\pi}_t,-\bar{\pi}_t)\in\Psi^\varepsilon : \bar{\pi}_{t_0} \ne 0,\ t \le \tau+\varepsilon\right\} \tag{46}$$

Пусть $\bar{\pi}_{t_0} > 0$.Поскольку стратегия является непрерывной слева, то существует $\delta > 0$: $\bar{\pi}_t > 0$ при $t \in (t_0-\delta, t_0]$. С положительной вероятностью $\tau \in (t_0-\delta, t_0]$. При этом событии $X_\tau^{\tilde{\pi}} \le -\tilde{r}_{t_0}\Delta t < 0$ и стратегия не может быть арбитражной. При $\bar{\pi}_{\tau-} > 0$ с положительной вероятностью $\tau > T$, а процесс дивидендов $D_t^{\tilde{\pi}} \le 0$, поэтому $X_T^{\tilde{\pi}} \le 0$ и стратегия не является арбитражной. Значит, $\Psi^\varepsilon \cap \Psi^A = \varnothing$. В силу произвольного выбора $\varepsilon > 0$ получаем утверждение пункта б).

Следствие: пусть на рынке М2 $P_t^r + P_t^{CDS} = P_t^z \quad \forall t < \tau$ *и* $L = s$*, тогда на рынке существует* A*-арбитраж. Если* $L \ne s$*, то на рынке существует* $\bar{A}$*-арбитраж.*

Теорема 3: пусть на рынке М2 $L = s$. Тогда

а) рынок допускает A-арбитраж в классе Ψ^{ε} для любого $\varepsilon > 0$, если существует решение следующей системы неравенств при $t < \tau$:

$$\begin{aligned}
&\pi_t^0 B_t - \pi_t^1 K_t \overset{п.н.}{>} 0,\\
&B_t d\pi_t^0 + A_{t-} d\pi_t^1 = 0,\\
&\pi_0^0 = \pi_0^1 = 0,\\
&(\pi_t^0, \pi_t^1, \pi_t^1, -\pi_t^1) \in \mathcal{A}
\end{aligned} \tag{47}$$

б) пусть $K_t = P_t^z - 1 = \tilde{r}_{m^-(t)}(t - m^-(t))$. Тогда

$$\bigcup_{\varepsilon>0} \Psi^{\varepsilon} \bigcap \Psi^{A} = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \inf\limits_{t^* \in [0, T\wedge\tau)} (A_{t^*-} + \sup\limits_{t \in [t^*, T\wedge\tau]} K_t) \overset{п.н.}{\geq} 0, \\ \sup\limits_{t\in[0,T\wedge\tau]} A_t \overset{п.н.}{<} 0, \end{cases} \tag{48}$$

Доказательство: учитывая условия теоремы, достаточно рассмотреть рынок, представленный безрисковым активом с ценой B_t и рисковым активом с ценой $A_t \tilde{H}_t$, по которому в момент τ выплачивается дивиденд в размере $-K_\tau = -\tilde{r}_{m^-(\tau)}(\tau - m^-(\tau))$. Несложно видеть, что позиция по такому рисковому активу равносильна позиции по активу A_t с точки зрения арбитражных возможностей. Пусть $X_0 = 0$. Стратегией на таком рынке будем называть (π_t^0, π_t^1), которой однозначно ставится в соответствие стратегия $(\pi^0, \pi^{CDS}, \pi^r, \pi^z) = (\pi^0, \pi^1, \pi^1, -\pi^1)$.

Поскольку рассматривается гарантированный арбитраж, то в любой момент времени стоимость портфеля должна быть почти наверное неотрицательной. Поскольку в ценах не содержится информации о конкретном времени наступления дефолта, его необходимо считать экзогенной величиной. Тогда A-арбитражность равносильна выполнению следующих соотношений при $t < \tau$:

$$\pi_t^0 B_t - \pi_t^1 K_t \overset{п.н.}{>} 0, \tag{49}$$

$$B_t d\pi_t^0 + A_{t-} d\pi_t^1 = 0 \tag{50}$$

Условие (49) означает, что если в момент t происходит дефолт, то стоимость портфеля будет положительной (цена рискового актива в момент дефолта равна нулю); (50) означает самофинансируемость стратегии. Решение данной системы в классе $\mathcal{A}$ при нулевом начальном капитале дает A-арбитражную стратегию. Значит, существование решения (47) является достаточным условием A-арбитражности рынка, что и доказывает пункт а).

Пункт б) является следствием а). Обозначим $\hat{A}_t = A_t B_t^{-1}$. Пусть с положительной вероятностью существует момент $t^* < T$ такой, что $A_{t^*-} \geq 0$. Тогда непосредственно можно проверить, что стратегия $(\hat{A}_{t^*-}, -1) \cdot \mathbb{I}\{t > t^*\}$ является решением (47). С экономической точки зрения эта стратегия заключается в занятии короткой позиции по рисковому активу в момент, когда его цена положительна. В случае дефолта стоимость позиции равна нулю, прибыль извлекается за счет дивиденда. Если дефолта не произошло, то позиция сохраняется до конца периода, при этом $X_T^\pi = \pi_T^0 B_T + \pi_T^1 A_T = \pi_T^0 B_T + 0 \geq 0$, поскольку дефолтная и безрисковая облигации стоят номинал в момент погашения. Таким образом, необходимым условием отсутствия A-арбитража является $\mathbb{P}\left\{\exists t^* \in [0,T] : A_{t^*} \geq 0\right\} = 0$, что эквивалентно второму условию (48).

Пусть, начиная с некоторого $t^* \in [0,T)$, верно следующее соотношение: $A_{t^*-} \overset{п.н.}{<} -K_t$. Тогда стратегия $(-\hat{A}_{t^*-}, 1) \cdot \mathbb{I}\{t > t^*\}$ является арбитражной. Действительно, $-A_{t^*-} B_t^{-1} B_t + K_t \overset{п.н.}{>} 0$, условие (50) очевидно выполнено. Необходимым условием безарбитражности является $\mathbb{P}\left\{\exists t^* \in [0, T \wedge \tau) : A_{t^*} \overset{п.н.}{<} \sup\limits_{t^* \leq t < T \wedge \tau} K_t\right\} = 0$, что эквивалентно первому условию (48).

Следствие: пусть на рынке М2 $L = s$. *Тогда если* $P^{CDS} + P^r \overset{п.н.}{\geq} P^z$ *при* $t < \tau$, *то на рынке существует* A*-арбитраж.*

Доказательство сразу следует из второго условия теоремы 3, б)[8].

---

[8] По следствию рынок М2, на котором одновременно выполнено $P^{CDS} + P^r \overset{п.н.}{=} P^z$ при $t < \tau$ и $L = s$, допускает A-арбитраж, что уже было установлено в следствии теоремы 2.

Замечание: полученные в пункте б) условия являются необходимыми для отсутствия арбитража, вопрос достаточных условий сводится к существованию решения системы (47) и остается открытым. Теорема 3 говорит о том, что если сумма $P^{CDS} + P^r - P^z$ и не обязана равняться нулю, то в определенном смысле не может быть всегда больше нуля или гораздо меньше $K_t = P_t^z - 1$, которая, в свою очередь, близка к нулю при уменьшении периода купонных выплат. В случае $\Delta t = 0$ $K_t = 0$ и (48) сводится к условию $P^{CDS} + P^r \overset{п.н.}{=} P^z$. Таким образом, теорема 3 является в некотором роде обобщением пункта б) теоремы 1[9].

Заключение

В работе рассмотрен вопрос эквивалентности гипотезы о равенстве премии за кредитный риск и CDS-премии и гипотезы реплицируемости – равенства стоимостей позиций $P_t^{CDS} + P_t^r$ и P_t^z до дефолта – в непрерывном времени. Показано, что в случае непрерывного начисления купона равенство премий эквивалентно равенству стоимостей. В случае дискретных выплат результат во многом отличается от непрерывного случая. Реплицируемость приводит к появлению арбитража в широком смысле, который естественно считать арбитражной возможностью с точки зрения практики (на практике вероятностью дефолта за достаточно малый период можно пренебречь, поэтому арбитраж в широком смысле будет приводить к реальному арбитражу). Рассматривая лишь классический арбитраж, можно показать, что неравенство $L \le s$ является достаточным для арбитражных возможностей, в то время как для обратного соотношения доказано отсутствие арбитража в классе стратегий, ориентированных на использование не отдельных инструментов рынка, а синтетического инструмента $P^{CDS} + P^r - P^z$ в качестве рискового актива. Показано, что при $P^{CDS} + P^r \overset{п.н.}{=} P^z$ до момента дефолта и $L > s$ в классе подобных стратегий нет арбитражных. Вопрос наличия арбитража во всем классе $\mathcal{A}$ остается открытым.

Для дискретного начисления также получено, что из равенства премий необходимо следуют условия (48) на динамику цен активов и безрисковой ставки. В частности, из следствия теоремы 3 видно, что при равенстве премий $L = s$ на безарбитражном рынке не может быть выполнено $P^{CDS} + P^r \overset{п.н.}{\ge} P^z$ при $t < \tau$.

[9] Данное рассуждение приведено для пояснения экономического смысла результатов и не является строгим доказательством, поскольку на рынках M1 и M2 разная динамика безрискового актива. Сводимость результатов при $\Delta t \to 0$ является отдельной задачей.

Основным результатом данной работы является доказательство того, что в случае дискретного начисления купонов невозможно одновременное равенство премий ($L = s$) и реплицируемость ($P^{CDS} + P^{r} \overset{п.н.}{=} P^{z}$ до момента дефолта). Предположение об эквивалентности этих гипотез тем самым является неверным даже на абсолютно ликвидном рынке при дискретном начислении.

Для дальнейшего исследования остаются открытыми вопросы арбитражных возможностей во всем классе стратегий $\mathcal{A}$, достаточных условий арбитража при дискретном начислении, учет облигаций с разными периодами и сроками выплат и обобщение результатов с учетом премии за ликвидность.

Литература

1. Bielecki T., Rutkowski M. Credit risk: modeling, valuation and hedging. Berlin: Springer, 2002.

2. Brigo D., Alfonsi A. Credit default swap calibration and derivatives pricing with the SSRD stochastic intensity model // Finance and Stochastics. 2005. № 9. P. 29–42.

3. Bühler W., Trapp M. Time-varying credit risk and liquidity premia in bond and CDS markets. 2009.

4. Calice G., Chen J., Williams J. Liquidity spillovers in sovereign bond and CDS markets: An analysis of the Eurozone sovereign debt crisis // Journal of Economic Behavior & Organization. 2011.

5. Duffie D. Credit swap valuation // Financial Analysts Journal. 1999. № 55. P. 73–87.

6. Duffie D., Singleton K.J. Modeling Term Structures of Defaultable Bonds // The Review of Financial Studies. 1999. № 12. P. 687–720.

7. Houweling P., Vorst T. Pricing default swaps: Empirical evidence // Journal of International Money and Finance. 2005. № 24. P. 1200–1225.

8. Hull J., White A. Valuing Credit Default Swaps I: No Counterparty Default Risk // 2000. № 8615. P. 1–35.

9. Lando D. On Cox processes and credit risky securities // Review of Derivatives research. 1998. P. 99–120.

10. Longstaff F., Mithal S., Neis E. Corporate yield spreads: Default risk or liquidity? New evidence from the credit default swap market // The Journal of Finance. 2005a. № LX. P. 2213–2253.

11. Longstaff F., Schwartz E. A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt // The Journal of Finance. 2012. № 50. P. 789–819.

12. Longstaff F.A., Mithal S., Neis E. Corporate Yield Spreads : Default Risk or Liquidity ? New Evidence from the Credit Default Swap Market // The Journal of Finance. 2005b. № 60. P. 2213–2253.

13. Protter P. Stochastic Integration and Differential Equations. Berlin: Springer, 2004. Вып. 2.

14. Ширяев А. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998.

Приложение 1

Лемма 2: пусть цена P_t *задается выражением* (9). *Тогда динамика* P_t *описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:*

$$dP_t = (r_t dt - d\hat{M}_t)P_{t-} - L_{t-}\gamma_t Z dt - L_{t-} f_t dt + B_t L_{t-} d\tilde{m}_t, \tag{51}$$

$$\text{где } \tilde{m}_t = \mathbb{E}\left(\int_0^T B_u^{-1} e^{-\Gamma_u} (Z\gamma_u + f_u) du + B_T^{-1} F e^{-\Gamma_T} \mid \mathcal{F}_t \right) \in \mathcal{M}(\mathbb{F}) \tag{52}$$

Доказательство: согласно определению (9)

$$P_t = B_t \underbrace{\tilde{H}_t e^{\Gamma_t}}_{L_t} \underbrace{\mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} f_u e^{-\Gamma_u} du + \int_t^T B_u^{-1} Z e^{-\Gamma_u} \gamma_u du + B_T^{-1} F e^{-\Gamma_T} \middle| \mathcal{F}_t \right)}_{m_t} = B_t L_t m_t. \tag{53}$$

Получим мартингальное представление для m_t:

$$m_t = \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} f_u e^{-\Gamma_u} du + \int_t^T B_u^{-1} Z e^{-\Gamma_u} \gamma_u du + B_T^{-1} F e^{-\Gamma_T} \middle| \mathcal{F}_t \right) =$$

$$= \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_0^T B_u^{-1} e^{-\Gamma_u} (Z\gamma_u + f_u) du + B_T^{-1} F e^{-\Gamma_T} \middle| \mathcal{F}_t \right) - \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_0^t B_u^{-1} e^{-\Gamma_u} (Z\gamma_u + f_u) du \mid \mathcal{F}_t \right) =$$

$$= \tilde{m}_t - \int_0^t B_u^{-1} e^{-\Gamma_u} (Z\gamma_u + f_u) du, \tag{54}$$

где $\tilde{m}_t$ является мартингалом Дуба (мартингалом Леви).

Доказательство мартингальности процессов $L_t, \hat{M}_t$ см. в [Bielecki, Rutkowski, 2002, p. 152–153]. Там же приводится следующее соотношение:

$$dL_t = -L_{t-} d\hat{M}_t. \tag{55}$$

Несложно видеть, исходя из представления (8), что

$$\Gamma_{t\wedge\tau} = \int_0^{t\wedge\tau} \gamma_u du = \int_0^t \bar{\gamma}_u du, \quad \text{где} \quad \bar{\gamma}_t = \gamma_t \mathbb{I}\{\tau \le t\} \quad \Rightarrow \tag{56}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\gamma}_t dt = dH_t - d\hat{M}_t .$$

Применим формулу Ито для семимартингалов к процессу $\tilde{P}_t = L_t m_t$. Так как m_t непрерывен, а L_t имеет ограниченную вариацию, то $[L,m]_t = 0$ (см. [Ширяев, 1998, с. 369]). Тогда

$$\begin{aligned} d\tilde{P}_t &= L_{t-} dm_t + m_{t-} dL_t = \\ &= L_{t-} d\tilde{m}_t - L_{t-} B_t^{-1}(Z\gamma_t + f_t)dt - m_{t-} L_{t-} d\hat{M}_t = \\ &= L_{t-} d\tilde{m}_t - \tilde{P}_{t-} d\hat{M}_t - L_{t-} B_t^{-1}(Z\gamma_t + f_t)dt. \end{aligned} \tag{57}$$

Применим формулу Ито к $P_t = B_t \tilde{P}_t$, учитывая непрерывность B_t, и получим утверждение теоремы:

$$\begin{aligned} dP_t &= B_t d\tilde{P}_t + \tilde{P}_{t-} r_t B_t dt = \\ &= B_t L_{t-} d\tilde{m}_t - B_t \tilde{P}_{t-} d\hat{M}_t - L_{t-}(Z\gamma_t + f_t)dt + r_t B_t \tilde{P}_{t-} dt = \\ &= (r_t dt - d\hat{M}_t)P_{t-} - L_{t-}\gamma_t Z dt - L_{t-} f_t dt + B_t L_{t-} d\tilde{m}_t. \end{aligned} \tag{58}$$

Andreev, N, Kurbangaleev, M. Replicability and Credit Risk Premia in Credit Default Swap and Floating Rate Bond Markets [Electronic resource] : Working paper WP16/2013/03 / N. Andreev, M. Kurbangaleev ; National Research University "Higher School of Economics". – Electronic text data (1,3 MB). – Moscow : Publishing House of the Higher School of Economics, 2013. – 30 p. – (Series WP16 "Financial Engineering, Risk-Management and Actuarial Science") (in Russian).

The study was implemented in the framework of the Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE) in 2013. We study the equivalency of two hypotheses: replicability of default-free bond with a CDS and a reference defaultable bond and equality between bond credit risk premium and CDS spread. For continuous coupon arbitrage-free market we show that the hypotheses are equivalent, however for discrete coupon market we derive presence of arbitrage when both hypotheses are true. We also demonstrate that in discrete coupon market hypothesis of replicability leads to arbitrage opportunities in a more common sense than classic arbitrage definition.

Keywords: arbitrage opportunities, credit risk premium, credit default swaps, default intensity

Nikolay Andreev – junior researcher, Financial Engineering and Risk-Management Laboratory, National Research University Higher School of Economics.

Marat Kurbangaleev – junior researcher, Financial Engineering and Risk-Management Laboratory, National Research University Higher School of Economics.

Препринт WP16/2013/03
Серия WP16
Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука

Андреев Николай Анатольевич, Курбангалеев Марат Зуфарович

Реплицируемость и равенство премий за кредитный риск на рынках кредитных дефолтных свопов и облигаций с плавающим купоном