ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д.А. Шварц

О МЕРЕ СБАЛАНСИРОВАННОСТИ ПОЛНЫХ ЗНАКОВЫХ ГРАФОВ

Препринт WP7/2013/09
Серия WP7
Математические методы
анализа решений в экономике,
бизнесе и политике

Москва
2013

УДК 328:519.8
ББК 67.400.6в6
Ш33

Ш33 **Шварц, Д. А.** О мере сбалансированности полных знаковых графов [Текст] : препринт WP7/2013/09 / Д. А. Шварц ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом. Высшей школы экономики, 2013. – 24 с. – (Серия WP7 «Математические методы анализа решений в экономике, бизнесе и политике»). – 20 экз.

Рассматривается мера сбалансированности полного знакового графа. По определению эта мера может принимать значения от 0 до 1. Но оказывается, что ее нижняя граница строго больше 0. В работе приведены оценки для минимальной меры сбалансированности и алгоритмы для ее вычисления. Результаты вычислений сравниваются с данными о сбалансированности Государственной Думы Российской Федерации 3-го созыва. Предложена гипотеза о том, какой граф будет «минимально сбалансированным» и его мере сбалансированности.

УДК 328:519.8
ББК 67.400.6в6

Шварц Д.А. – Лаборатория анализа и выбора решений; Департамент высшей математики на факультете экономики НИУ ВШЭ, Москва, Россия.

Препринты Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» размещаются по адресу: http://www.hse.ru/org/hse/wp

1. Введение

Толчком к написанию работы стали исследования сбалансированности Государственной Думы РФ III созыва [1] (далее ГД РФ или Дума), рассматриваемой как мера сбалансированности соответствующего знакового графа. По определению мера сбалансированности может меняться от 0 до 1. Но для ГД РФ результат в большинстве случаев или попадал в интервал от 0.48 до 0.56, или был равен 1. Меньше 0.48 мера сбалансированности не была никогда.

При этом предполагалось, что любые из 10 фракций Думы связаны либо симпатией, либо антипатией, то есть рассматриваемый знаковый граф полный.

Почти очевидно, что мера сбалансированности полного графа с не менее чем четырьмя вершинами не равна 0. Встает вопрос о близости 0.48 к теоретическому минимуму — насколько несбалансированны были отношения фракций в Думе?

Оказалось, что очень близко. Более того, теоретический минимум оказался чуть больше "практического". Это объясняется тем, что при подсчете меры сбалансированности ГД РФ не учитывались циклы, состоящие из партий, суммарное число голосов которых недостаточно для принятия решения.

В работе приведен алгоритм для вычисления минимального значения меры сбалансированности полного графа с n вершинами. Результат получен для $n \leq 10$. К сожалению, с ростом n время работы программы катастрофически растет — если для $n = 9$ это 20 минут, то для $n = 10$ — более суток.

Также произведена попытка подойти к проблеме теоретически. К сожалению, достаточно общих результатов не вышло, но полученные данные позволили высказать несколько гипотез о минимальной мере сбалансированности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории анализа и выбора решений НИУ ВШЭ.

2. Знаковые графы и мера сбалансированности

Традиционно неориентированным графом называется пара (V, E), где V — множество вершин графа (далее предполагается, что конечно —

$V = n$), а E — множество неупорядоченных пар вершин, называемое множеством дуг графа. Далее предполагается, что V конечно и вершины пронумерованы: $V = \{1, \ldots, n\}$.

Если $(i, j) \in E$, говорят, что вершины i и j соединены (дугой). Далее вершины графа будут обозначаться строчными латинскими буквами, дуги — греческими буквами.

Матрица смежности графа — это квадратная $N \times N$ матрица A, в которой $a_{ij} = 1$, если вершины i и j соединены и 0 — в противном случае. Матрица смежности неориентированного графа симметрична.

Граф называется графом без петель, если ни одна вершина не соединена сама с собой, т.е. $\forall i \ (i, i) \notin E$.

Далее под словом "граф" понимается именно неориентированный граф без петель.

Группой симметрий графа $\mathcal{G}$ (обозначение $S(\mathcal{G})$) называется множество перестановок вершин графа, не меняющих матрицу смежности.

Граф на n вершинах называется полным, если каждая вершина соединена с каждой. Обозначение: K_n. Группа симметрий полного графа содержит все перестановки его вершин: $S(K_n) = S_n$.

Знаковым графом называется простой неориентированный граф, каждая дуга которого отмечена знаком "$+$" (положительная дуга) или "$-$" (отрицательная дуга). Обозначим знак дуги α через $sign(\alpha)$. Матрица смежности знакового графа симметрична: в клетке с координатами i и j стоит 0, если вершины i и j не соединены и $+$ (соответственно -1), если они соединены и ребру приписан знак "$+$" (соответственно "$-$"). Знаковый граф называется полным, если полон исходный граф.

Каждый простой неориентированный граф можно сделать знаковым многими способами, расставив знаки на ребрах. Для того, чтобы отличать обычные и знаковые графы, далее обычные графы будут обозначаться рукописными буквами, а множество всех знаковых графов, которые можно получить из графа $\mathcal{G}$, будет обозначаться через $\mathcal{G}_+$.

Первоначально знаковые графы использовались для изучения сбалансированности малых групп. Людям соответствуют вершины графа, а к ребру приписан знак "$+$", если люди находятся в хороших отношениях, и "$-$", если в плохих.

Для 3 человек возможны 4 различных ситуации (рис. 1).

Согласно психологу Ф. Хайдеру [7], первая и третья группы на рис. 1а сбалансированы, а вторая и четвертая — нет.

Объяснение таково: в первой группе все участники симпатизируют друг другу, поэтому все охотно работают вместе.

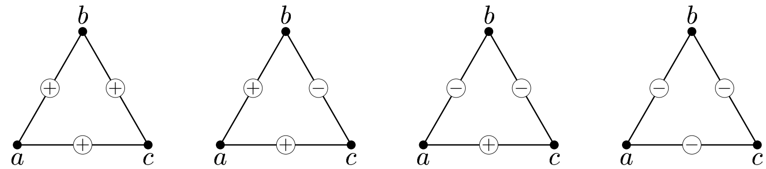


Рис. 1.

В третьей группе участники a и c готовы работать друг с другом, а с участником b никто работать не хочет. Поэтому в этой группе a и c могут работать вместе, а b — в одиночку.

Во второй группе ситуация иная: a готов работать с обоими участниками — b и c, однако b и c работать вместе не хотят. Поэтому в группе возникает напряжение.

Наконец, четвертая группа полностью несбалансирована, никто друг с другом работать не хочет.

Понятие сбалансированности обобщается на произвольные знаковые графы.

Определение 1. *Знаковый граф называется сбалансированным, если его множество вершин можно разбить на два подмножества таким образом, что любая дуга, соединяющая вершины из одного множества, имеет знак "+", а дуги, соединяющие вершины из разных подмножеств, — знак "−".*

Другой подход к понятию сбалансированности знакового графа предполагает рассмотрение отдельных циклов.

Цепью в графе $\mathcal{G}$ называется последовательность дуг, соседние элементы которой имеют общую вершину: (a_0, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, a_n). Если $a_1 = a_n$, то такая цепь называется циклом. Длиной цепи (цикла) называется число входящих в него дуг.

Также цепью называют последовательность вершин $a_0, \ldots, a_n$, соседние в которой смежны. Поэтому говорят, что цепь содержит не только ребра, но и соответствующие вершины.

Цепь называется путем, если все ребра в ней различны. Путь (цикл) называется простым, если все входящие в него вершины (кроме, возможно, первой и последней), различны.

В этих определениях есть один часто замалчивающийся нюанс. Хочется считать, что в графе, представляющем из себя цикл длины 3 (рис. 2), только один цикл длины 3, а не 6 ((α,β,γ), (α,γ,β), (β,α,γ), (β,γ,α), (γ,α,β), (γ,β,α)).

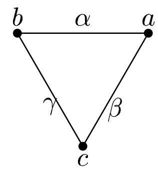


Рис. 2.

Поэтому определение цикла придется немного усложнить.

Определение 2. *Неупорядоченным путем (циклом) называется множество дуг $\{\alpha_1,\ldots\alpha_n\}$, таких, что их можно упорядочить так, что они образуют путь (цикл).*

Длина цикла c — число элементов в соответствующем множестве, поэтому обозначается $|c|$.

Для неупорядоченного простого цикла длины n существует $2n$ соответствующих ему упорядоченных циклов (n способов выбрать начальную вершину и 2 — направление). Для неупорядоченного простого пути положительной длины существует только два соответствующих ему упорядоченных пути (достаточно выбрать направление).

Далее под циклом будет пониматься именно неупорядоченный цикл.

Поскольку теперь циклом считается просто множество ребер, с циклами можно делать теоретико-множественные операции. В работе используются несвязное объединение ($\cup$) и симметрическая разность (Δ).

Лемма 1 ([4]). *Любой цикл или их симметрическую разность можно представить, как несвязное объединение нескольких простых циклов.*

Пример 1. *В графе K_4 (рис. 3) существует 7 простых циклов — 4 цикла длины 3 ($(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$, $(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_6)$, $(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)$ и $(\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)$) и 3 цикла длины 4 ($(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5,\alpha_6)$, $(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_4)$ и $(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_6,\alpha_4)$).*

Симметрической разностью любых двух циклов длины 3 будет цикл длины 4.

Лемма 2 ([5]). *Число простых циклов длины k в графе K_n равно*

$$\frac{n!}{(n-k)!\cdot 2k}.$$

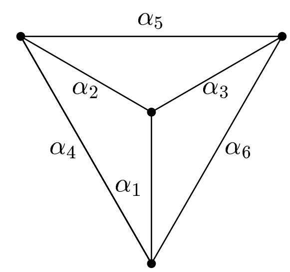


Рис. 3.

Всего же в K_n

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{n!}{(n-k)! \cdot 2k}$$

циклов.

Определение 3. *Знаком цикла (пути) (обозначение — $sign(\cdot)$) знакового графа называется произведение знаков всех его дуг. Если знак цикла равен $+1$, цикл (путь) называется положительным, а если -1 — отрицательным.*

Лемма 3. *1) Знак цикла равен произведению знаков простых циклов, объединением которых он является.*

2) Если симметрическая разность циклов c_1 и c_2 тоже будет циклом c_3, то $sign(c_1) \cdot sign(c_2) = sign(c_3)$.

Доказательство. Для того, чтобы доказать оба утверждения, надо записать знак каждого цикла как произведение знаков входящих в него дуг. В первом случае в обеих частях равенства окажутся знаки одних и тех же дуг, во втором знаки дуг, входящих и в c_1 и в c_2, сократятся и останутся только знаки дуг, входящих ровно в один из двух циклов, т.е. в точности $sign(c_3)$. ■

Обозначим через C^+ (C^-) множество положительных (отрицательных) простых циклов в графе G, а через C — множество всех простых циклов.

Аналогично обозначим через W (соответственно, W^+, W^-) множество всех (положительных, отрицательных) простых путей в G.

Оба подхода к знаковым графам связаны следующей известной теоремой.

Теорема 1 (Картрайт—Харари, [6]). *Знаковый граф сбалансирован, если и только если любой цикл этого графа положителен.*

Отметим, что благодаря леммам 1 и 3 в теореме 1 слово "цикл" можно заменить на "простой цикл".

Сбалансированные графы — явление довольно редкое, что иллюстрирует следующая лемма.

Лемма 4. *Существует $2^{|E(\mathcal{G})|}$ способов расставить знаки на дугах графа $\mathcal{G}$. Среди них не более, чем $2^{|V(\mathcal{G})|-1}$ сбалансированных знаковых графов.*

Доказательство. Первое утверждение справедливо, поскольку знак каждой дуги можно выбрать одним из двух способов. Докажем второе.

Разбиение вершин на два подмножества, упомянутых в определении 1, однозначно задает знаковый граф. А число таких разбиений равно $2^{|V(\mathcal{G})|-1}$, поскольку каждая вершина может попасть либо в первое, либо во второе подмножество, и это число надо поделить пополам, поскольку подмножества не упорядочены. ■

Замечание 1. *Для полного графа получаем $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ элементов в K_{n+}, из которых сбалансированы ровно $2^{(n-1)}$ — в случае полного графа каждое разбиение однозначно задает знаковый граф, т.е. вероятность того, что случайно выбранный полный знаковый граф сбалансирован, крайне мала.*

Поэтому интересен вопрос, насколько сбалансирован несбалансированный граф. Один из способов ответа на него — мера сбалансированности [6].

Определение 4. *Мера сбалансированности знакового графа G ($b(G)$) есть доля простых положительных циклов среди всех циклов G, т.е.*

$$b(G) = \frac{|C^+|}{|C|}.$$

Очевидно, что $0 \leq b(G) \leq 1$, причем $b(G) = 1$, если и только если все циклы графа положительны, т.е. граф сбалансирован.

Определение меры сбалансированности некорректно, если граф не содержит ни одного цикла. Но по теореме 1 такой граф сбалансирован и в этом случае естественно считать, что $b(G) = 1$.

Для подсчетов удобно рассматривать не меру сбалансированности, а сумму знаков всех простых циклов графа G, которую обозначим как $I(G)$ и назовем индексом сбалансированности. Также обозначим через $I_k(G)$ $(3 \leq k \leq n)$ сумму знаков всех простых циклов длины k.

$$\begin{aligned} I_k(G) &= \sum_{c \in \mathcal{C}(G), |c|=k} sign(c), \\ I(G) &= \sum_{c \in \mathcal{C}(G)} sign(c) = \sum_{3 \leq k \leq n} I_k(G). \end{aligned}$$

Положительные циклы входят в сумму с коэффициентом 1, отрицательные — с коэффициентом -1, поэтому, просуммировав отдельно положительные и отрицательные слагаемые, получим $I(G) = |C^+| - |C^-|$.

Мера и индекс сбалансированности графа G связаны очевидным соотношением

$$b(G) = \frac{1 + I(G)/C(G)}{2}. \tag{1}$$

2.1. Группа симметрий

Опишем преобразования, не меняющие число положительных и отрицательных циклов в знаковом графе. Очевидно, к ним относятся симметрии исходного "не знакового" графа. Кроме того, верна следующая лемма.

Лемма 5. *При изменении знака всех дуг, проходящих через одну из вершин графа, знаки его циклов не изменятся.*

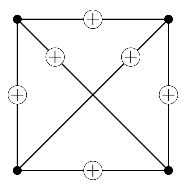
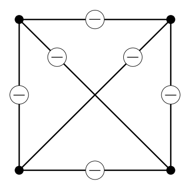
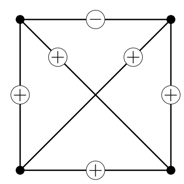
Доказательство. Пусть a — та самая вершина. Если цикл не проходит через a, знаки его дуг и, значит, и его знак не меняются. Если цикл проходит через a, меняются знаки ровно двух дуг, поэтому знак самого цикла меняется два раза, т.е. не меняется. ■

Очевидно, что мера сбалансированности не меняется как при перестановках вершин, так (согласно лемме 5) и при изменении знаков всех дуг, выходящих из одной вершины.

Более формально, на множестве $\mathcal{G}_+$ действует группа $S(\mathcal{G}) \cdot (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, причем $b(G)$ будет инвариантом относительно этого действия. Обозначим эту группу $S^+(\mathcal{G})$. Отметим, что действие некоторых элементов этой группы тривиально. Как минимум, если последовательно поменять знак у дуг, исходящих из каждой вершины, то знак каждой дуги изменится 2 раза, т.е. не изменится. Мера сбалансированности не единственный инвариант относительно действия $S^{+}(\mathcal{G})$. Также не будут меняться при действии группы сумма знаков циклов длины k ($I_k(G)$).

Пример 2. *Пусть $\mathcal{G} = K_4$. Группа симметрий имеет 3 орбиты, в таблице показано по одному представителю каждой из них, $I_3(G)$, $I_4(G)$ и $b(G)$.*

$I_3(G)$ и $I_4(G)$ разделяют орбиты группы $S_{+}(\mathcal{G})$, верен ли аналогичный результат в общем случае, автору неизвестно.

G			
$I_3(G)$	*4*	*-4*	*0*
$I_4(G)$	*3*	*3*	*-1*
$b(G)$	*1*	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$

Определение 5. *Будем называть знаковые графы, полученные из одного и того же графа $\mathcal{G}$ эквивалентными, если они переводятся друг в друга преобразованием из $S_{+}(\mathcal{G})$.*

3. Вычисление меры сбалансированности

Для вычисления меры сбалансированности достаточно вычислить $I(G)$ и $C(G)$, причем второе число не зависит от знаков, а для полного графа результат известен заранее (см. лемму 2).

Лемма 6. *Для каждого знакового графа G и вершины a существует эквивалентный ему знаковый граф G', такой, что все ребра, выходящие из a, в G' положительны.*

Доказательство. Рассмотрим вершину b, соединенную с a отрицательным ребром. Если ее не существует, то все доказано. Иначе изменим знак всех ребер, выходящих из b. По лемме 5 полученный граф эквивалентен G. Но отрицательных ребер, выходящих из a, стало на одно меньше. Будем повторять эту операцию, пока не исчезнут все отрицательные ребра, выходящие из a. Полученный граф G' будет эквивалентен G, и все его ребра, выходящие из a, будут положительны. ■

Теорема 2. *Пусть все ребра, выходящие из вершины a, положительны. Тогда*

$$I(G) = I(G \setminus a) + \frac{1}{2} \sum_{p \in W(G \setminus a)} sign(p),$$
$$|C(G)| = |C(G \setminus a)| + \frac{1}{2} |W(G \setminus a)|,$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный простой цикл c в графе G. Либо этот цикл не проходит через a (тогда $c \in C(G \setminus a)$), либо проходит через a ровно один раз. В последнем случае ему можно поставить в соответствие путь в графе $G \setminus A$, полученный удалением из цикла вершины a и двух ребер инцидентных ей. Точнее говоря, два пути, отличающихся друг от друга направлением, причем знаки этих путей равны знаку c, поскольку обе удаленные дуги положительны.

Это соответствие взаимно-однозначно в том смысле, что любому циклу графа G сопоставляется либо цикл, либо пара разнонаправленных путей в графе $G \setminus a$, и наоборот — каждому циклу или паре одинаковых, но разнонаправленных путей в графе $G \setminus a$, сопоставляется цикл в G. Поэтому в определении $I(G)$ можно поменять порядок суммирования:

$$I(G) = \sum_{c \in \mathcal{C}(G)} sign(c) = \sum_{c \in \mathcal{C}(G), a \notin C} sign(c) + \sum_{c \in \mathcal{C}(G), a \in C} sign(c) =$$
$$= I(G \setminus a) + \frac{1}{2} \sum_{p \in W(G \setminus a)} sign(p),$$

что и требовалось.

Рассуждения для $|C(G)|$ совершенно аналогичны. Разница только в том, что суммируются не знаки циклов и путей, а единицы. ■

Остается вопрос, как перебирать простые пути. Сократить перебор помогает следующее рекуррентное соотношение:

Теорема 3. *Пусть $S \subset N$, $a \in S$, и $f(a, S)$ — сумма знаков простых путей, заканчивающихся в a и проходящих через все вершины S. Для удобства будем считать, что $S(a, \{a\}) = 1$. Тогда*

$$f(a,S) = \sum_{i \in S \setminus a} f(i, S \setminus a) \cdot sign((a,i)).$$

Доказательство. Любой путь, p, заканчивающийся в a и проходящий через все вершины S, можно представлять себе, как путь p', проходящий через все вершины $S \setminus a$, заканчивающийся в какой-то вершине i, к которому добавлена дуга (a,i), причем $sign\, p = sign\, p' \cdot sign((a,i))$. ■

Поэтому для вычисления суммы знаков простых путей для графа на n вершинах можно последовательно вычислить функции $f(a,S)$ и затем сложить полученные результаты для всех S, состоящих из не менее чем двух элементов.

Эти вычисления требуют порядка $n \cdot 2^n$ байт памяти (необходимо хранить $f(a,S)$ почти для всех a и S) и порядка $n^2 \cdot 2^n$ операций.

При вычислении меры сбалансированности приходится последовательно вычислять сумму знаков простых путей в графах на $n-1, n-2, \ldots, 5$ вершинах (если вершин 4, проще воспользоваться явной формулой). Поэтому требуется столько же памяти, что при вычислении суммы знаков простых путей (т.е. $n \cdot 2^n$) и порядка

$$\sum_{k=5}^{n-1} k^2 \cdot 2^k \le \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \cdot 2^k = n^2 \cdot 2^n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (k/n)^2 \cdot 2^{k-n} \le$$
$$\le n^2 \cdot 2^n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-n} = n^2 \cdot 2^n$$

операций.

Вычисление меры сбалансированности требует столько же (по порядку) как памяти, так и операций, поскольку число циклов можно вычислять параллельно.

4. Минимум меры и индекса сбалансированности

Обозначим $b_{min}(\mathcal{G})$ $(I_{min}(\mathcal{G}))$ минимальное значение меры и индекса сбалансированности среди всех способов расставить знаки на дугах графа $\mathcal{G}$:

$$
\begin{aligned}
b_{min}(\mathcal{G}) &= \min_{G \in \mathcal{G}_+} b(G), \\
I_{min}(\mathcal{G}) &= \min_{G \in \mathcal{G}_+} I(G),
\end{aligned}
$$

Отметим, что минимум индекса и меры сбалансированности достигаются на одном и том же знаковом графе.

В любом графе $\mathcal{G}$ можно расставить знаки так, чтобы мера сбалансированности была равна 1 (например, поставив на всех дугах знак "+"). Поэтому понятие максимума меры сбалансированности не содержательно.

Но добиться того, чтобы мера сбалансированности стала равна 0, т.е. расставить знаки так, чтобы все простые циклы графа стали отрицательными, можно далеко не всегда. Например, представим себе, что в графе $\mathcal{G}$ есть два простых цикла (α и β), пересекающихся по одной дуге и не имеющих кроме этого общих вершин (на рис. 4 это — два треугольника).

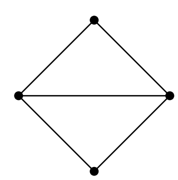


Рис. 4.

Обозначим $\gamma = \alpha \Delta \beta$. Цикл γ тоже будет простым, причем по лемме 3 $sign(\gamma) = sign(\alpha) \cdot sign(\beta)$. Поэтому циклы α, β и γ не могут быть одновременно отрицательными, т.е. $b_{min}(\mathcal{G}) > 0$.

Можно сформулировать и необходимое и достаточное условие, при котором минимальная мера сбалансированности равна 0.

Теорема 4. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(i) $b_{min}(\mathcal{G}) = 0$.

(ii) любые два простых цикла в $\mathcal{G}$ не пересекаются по ребрам.

Доказательство. $(ii) \to (i)$. Если все простые циклы в $\mathcal{G}$ не пересекаются по ребрам, то поставим знак "$-$" ровно на одно ребро в каждом из них, а на остальные ребра поставим "+" (рис. 5)[1]. Все простые циклы этого знакового графа отрицательны, поэтому его мера сбалансированности равна 0 и $b_{min}(\mathcal{G}) = 0$.

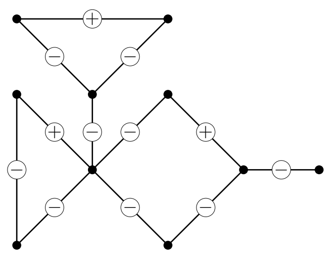


Рис. 5.

$(i) \to (ii)$. Пусть на ребрах графа $\mathcal{G}$ расставлены знаки так, что все его простые циклы отрицательны. Предположим, что в $\mathcal{G}$ существуют пересекающиеся простые циклы. Выберем среди всех таких пар циклов пару с минимальным суммарным числом ребер и обозначим эти циклы c_1 и c_2. Будем считать, что $|c_1| \leq |c_2|$.

Рассмотрим множество ребер $c_1 \Delta c_2$. По предположению 1 его можно представить в виде несвязного объединения простых циклов. Возможны два случая.

- $c = c_1 \Delta c_2$ — простой цикл. Но тогда по лемме 3 $sign\, c = sign\, c_1 \cdot sign\, c_2 = (-1) \cdot (-1) = 1$, т.е. c — положительный цикл. Противоречие.
- $c_1 \Delta c_2$ — объединение нескольких простых циклов. Обозначим c самый короткий среди них. c не может быть подмножеством ни c_1 ни c_2, поскольку оба цикла простые. Значит, c пересекается и с c_1 и с c_2.

Поскольку $c_1 \Delta c_2$ пересекаются хотя бы по одному ребру, то

$$|c| \leq \frac{|c_1 \Delta c_2|}{2} \leq \frac{|c_1| + |c_2| - 2}{2} < |c_2|.$$

Но тогда в паре пересекающихся циклов (c_1, c) меньше ребер, чем в паре (c_1, c_2), что противоречит выбору пары (c_1, c_2). ■

В полном графе два простых цикла, пересекающихся только по одной дуге, встречаются, если вершин не меньше четырех. Поэтому $b_{min}(K_n) = 0$ при $n = 3$ и больше 0 при $n > 3$.

[1]Этот рисунок также показывает, как устроен такой граф — дерево, вершинами которого могут быть и циклы.

Оценить $b_{min}(\mathcal{G})$ сверху поможет следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть в $\mathcal{G}$ есть хотя бы один цикл. Тогда среднее значение меры сбалансированности по всем возможным способам расставить знаки на дугах G равно 1/2:*

$$2^{-|E(G)|} \sum_{G \in \mathcal{G}_+} b(G) = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим аналогичное выражение для $I(G)$ и сменим порядок суммирования:

$$\sum_{G \in \mathcal{G}_+} I(G) = \sum_{G \in \mathcal{G}_+} \sum_{c \in C(\mathcal{G})} sign(c, G) = \sum_{c \in C(\mathcal{G})} \sum_{G \in \mathcal{G}_+} sign(c, G), \tag{3}$$

пользуясь тем, что во всех графах из $\mathcal{G}_+$ циклы одни и те же, только знаки у них разные. Рассмотрим отдельно

$$\sum_{G \in \mathcal{G}} sign(c, G).$$

Половина из этих слагаемых равна 1, а половина — -1. Поэтому вся сумма равна 0. Следовательно, и сумма в формуле (3) нулевая. Воспользуемся формулой (1):

$$2^{-|E(G)|} \sum_{G \in \mathcal{G}_+} b(G) = 2^{-|E(G)|} \sum_{G \in \mathcal{G}_+} \frac{1 + I(G)/|C(G)|}{2} =$$
$$= 2^{-|E(G)|} \left(\sum_{G \in \mathcal{G}_+} \frac{1}{2} + \frac{\sum_{G \in \mathcal{G}_+} I(G)}{2|C(G)|} \right) = \frac{1}{2}.$$

Последнее равенство верно, поскольку второе слагаемое равно 0, а в сумме в первом ровно столько слагаемых, сколько существует способов расставить 2 знака на каждой из дуг графа, т.е. $2^{|E(G)|}$. ■

Следствие 1. *Поскольку среди знаковых графов, полученных из любого графа $\mathcal{G}$, есть сбалансированные, то в сумме из формулы (2) есть слагаемые, большие 1/2. Значит, есть и меньшие, т.е. в не ациклическом графе $b_{min}(\mathcal{G}) < 1/2$, а $I_{min}(\mathcal{G})$, соответственно, отрицательно.*

Если $\mathcal{G} = K_n$, оценку можно немного уточнить. $|E(K_n)| = n(n-1)/2$, *поэтому знаки можно расставить* $2^{n(n-1)/2}$ *способами. Среди этих знаковых графов* 2^{n-1} *сбалансированных (т.е. с мерой сбалансированности 1), поскольку именно таким числом способов можно разбить множество из* n *вершин на два подмножества (см. теорему Картрайта—Харари). Получим*

$$\frac{1}{2} = 2^{-n(n-1)/2} \sum_{G \in K_{n+}} b(g) = 2^{-n(n-1)/2} \left(2^{n-1} + \sum_{b(G) \neq 1} b(g) \right).$$

Таким образом,

$$\sum_{b(G) \neq 1} b(g) = 2^{n(n-1)/2-1} - 2^{n-1}.$$

В этой сумме $2^{n(n-1)/2} - 2^{n-1}$ *слагаемых, поэтому минимальное (т.е.* $b_{min}(K_n)$*) можно оценить как*

$$b_{min}(K_n) \leq \frac{2^{n(n-1)/2-1} - 2^{n-1}}{2^{n(n-1)/2} - 2^{n-1}} = \\ = \frac{1/2 - 2^{-(n-1)(n-2)/2}}{1 - 2^{-(n-1)(n-2)/2}} \approx \frac{1}{2} - 2^{-(n-1)(n-2)-1}.$$

Первоначальная цель работы как раз и состояла в изучении величины $b_{min}(K_n)$. К сожалению, на данный момент удалось посчитать ее значение для $n \leq 10$ и сделать несколько предположений.

5. Минимальная мера сбалансированности полных графов: вычисления и гипотеза

Для вычисления $b_{min}(K_n)$ по определению, нужно вычислить меру сбалансированности каждого знакового графа из K_n^+ и найти среди них минимальную. Но поскольку графы, лежащие в одной орбите действия группы S_n^+ имеют одинаковые меры сбалансированности, достаточно рассмотреть по одному графу из каждой орбиты.

Можно аккуратно перебрать все орбиты, но хороший результат дает и программа, основанная на двух простых соображениях.

Таблица 1. $K^-_{4,4,2}$

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Благодаря лемме 6 можно считать, что все дуги, исходящие из последней вершины, положительны. Если требовать, чтобы это условие сохранялось, менять знак у всех дуг, выходящих из какой-либо вершины нельзя, но можно менять местами все вершины, кроме последней.

Поэтому можно упорядочить вершины, например, по неубыванию числа исходящих из нее отрицательных дуг.

Итак, достаточно перебрать только графы, из первой вершины которого исходят только положительные дуги, и число положительных дуг не убывает при увеличении номера вершины.

Используя алгоритмы из предыдущего раздела, удалось вычислить $b_{min}(K_n)$ для $n \leq 10$, причем для случая ГД РФ 3-го созыва ($n = 10$) вычисления заняли чуть меньше суток. Перед тем, как прокомментировать результаты, добавим еще немного обозначений.

Назовем K_n^- полный знаковый граф на n вершинах, в котором на всех дугах стоят "$-$", а $K^-_{k,m,n}$ — полный знаковый граф на $k+m+n$ вершинах, в котором на всех дугах стоит знак "$+$", кроме дуг, соединяющих первые k и следующие m вершин. Таблица 1 содержит матрицу графа $K^-_{4,4,2}$.

Результаты вычислений приведены в таблице 2. В предпоследней графе приводится обозначение знакового графа, на котором достигается минимум $b(G)$, а в последней — число таких графов (с точностью до действия группы S_n^+).

Можно сформулировать следующую гипотезу.

Таблица 2.

n	$C(K_n)$	$I_{min}(K_n)$	$b_{min}(K_n)$	граф	число орбит
3	1	-1	0	K_3^-	1
4	7	-1	0.427	K_4^-	2
5	37	-7	0.405	K_5^-	1
6	197	-27	0.431	$K_{2,2,2}^-$	1
7	1172	-122	0.448	K_7^-	1
8	8018	-550	0.466	$K_{3,3,2}^-$	1
9	62814	-6618	0.447	K_9^-	1
10	556014	-20114	0.482	$K_{4,4,2}^-$	1

Гипотеза. *При* $n \geq 5$

1) Если n нечетно, то $b_{min}(K_n) = b(K_n^-)$;

2) Если n четно, то $b_{min}(K_n) = b(K^-_{(n-1)/2,(n-1)/2,2})$.

В обоих случаях такой знаковый граф единственен с точностью до действия группы S_n^+.

6. Возвращаясь к Государственной Думе

При исследовании сбалансированности ГД РФ ([1, 2]) предполагалось, что вершинами соответствующего знакового графа будут фракции Думы. Альтернативный вариант — рассматривать в качестве вершин графа отдельных депутатов — невозможен из-за объема вычислений (в ГД РФ — 450 депутатов). Также предполагалось, что соответствующий знаковый граф полный, т.е. все фракции находятся между собой в некоторых отношениях, хороших или плохих.

Знаки дуг, т.е. взаимные отношения между фракциями и группами, определены в [2] путем анализа результатов многих голосований.

При вычислении меры сбалансированности в [2] учитывались только циклы, фракции (вершины) которых образовывали большинство. Для нас это практически не важно, поскольку большая часть циклов приходится на циклы большой длины.

Итак, в ГД РФ III созыва входило 10 фракций и депутатских групп (в скобках приведено число входящих в нее депутатов, независимые депутаты выделены в отдельную группу): Независимые депутаты (15), КПРФ(91),"Единство"(82), ОВР (46), СПС (32), ЛДПР (17), "Яблоко"(21), АПГ(39), "Народный депутат" (57), "Регионы России" (41).

В таблице 3 (заимствованной из [3], данные, в свою очередь, взяты из [2]) показаны максимумы и минимумы индекса сбалансированности ГД РФ 3-го созыва и соответствующие им политические события).

Таблица 3. Максимумы и минимумы меры сбалансированности

Дата	b	*Политическое событие*
Январь 2000	1,000	Парламентский кризис, «пакетное соглашение» по Председателю Госдумы РФ и распределению комитетов
Апрель 2000	0,626	Определенность после проведения президентских выборов
Июнь 2000	0,550	Реформа Совета Федерации, Налоговый кодекс, подоходный налог 13%
Июнь 2001	0,547	Земельный кодекс в первом чтении, Уголовно-процессуальный кодекс во втором чтении, судебная реформа в первом чтении
Июль 2001	0,520	Земельный кодекс во втором чтении, Трудовой кодекс, закон «О лицензировании...»
Ноябрь 2001	1,000	Пенсионная реформа, Уголовно-процессуальный кодекс, бюджет в третьем чтении
Март 2002	0,782	Начало парламентского кризиса, перераспределение комитетов
Июнь 2002	0,653	Завершение парламентского кризиса, перераспределение комитетов
Сентябрь 2002	1,000	Принятие конституционного закона о проведении референдумов
Февраль 2003	0,533	Принятие во втором чтении законов о РАО ЕЭС

Можно сказать, что в большинстве случаев мера сбалансированности ГД РФ 3-го созыва была либо равна 1 (т.е. имело место четкое разделение на два противоборствующих лагеря), либо близка к теоретическому минимуму, т.е. Дума была практически несбалансированна.

Та же закономерность проявляется и на больших объемах данных [1, 2].

Отметим, уклоняясь от политологических выводов из этого наблюдения, что с точки зрения математики наблюдаемая ситуация тоже логична. В среднем мера сбалансированности равна 0.5 (см. лемму 6), минимальная мера сбалансированности близка к 0.5, а максимальная равна 1. Поэтому знаковые графы с большой мерой сбалансированности должны компенсироваться многими графами с мерой сбалансированности, меньшей 0.5.

Список литературы

1. *Алескеров Ф.Т., Благовещенский Н.Ю., Сатаров Г.А., Соколова А.В., Якуба В.И.* Влияние и структурная устойчивость в российском парламенте (1905-1917 и 1993-2005 гг.), М.: Физматлит, 2007.

2. *Алескеров Ф.Т., Благовещенский Н.Ю., Сатаров Г.А., Соколова А.В., Якуба В.И.* О сбалансированности Государственной Думы Российской Федерации (1994—2003 гг.): препринт WP7/2003/02. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2003.

3. *Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006.

4. *Кузнецов О.П.* Дискретная математика для инженера. СПб.: Лань, 2004.

5. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.

6. *Harary F., Norman R.Z., Cartwright D.* Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs. N. Y.: John Wiley and Sons, 1965.

7. *Heider F.* Attitude and Cognitive Organization // Journal of Psychology. 1946. Vol. 21. № 1.

Shvarts, D. A. On the minimal measure of the balancedness of the complete signed graph [Text]: Working paper WP7/2013/09 / D. A. Shvatrs ; National Research University "Higher School of Economics". – Moscow : Publishing House of the Higher School of Economics, 2013. – 24 p. – (Series WP7 "Mathematical methods for decision making in economics, business and politics"). – 20 copies (in Russian).

We consider measure of the balancedness of the complete signed graph. By definition of this measure it can take values from 0 to 1. But it turns out that its lower bound is strictly greater than 0. This paper presents some evaluations for the minimum measures of balancedness and an algorithm to compute it. The calculation results are compared with data on the balancedness of the Russian Parliament. And at last we formulate a hypothesis about the "minimally balanced" graph and it's measure of the balancedness.

Shvarts D.A. – International Laboratory of Decision Choice and Analysis; Department of Higher Mathematics NRU HSE, Moscow, Russia.

Препринт WP7/2013/09
Серия WP7
Математические методы анализа решений
в экономике, бизнесе и политике

Шварц Дмитрий Александрович

О мере сбалансированности полных знаковых графов

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики» с представленного оригинал-макета
Формат 60×84 1/16. Тираж 20 экз. Уч.-изд. л. 1,6.
Усл. печ. л. 1,4. Заказ № . Изд. № 1571

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»